# Exercice optionnel TD 4

Une éprouvette métallique à section rectangulaire est soumise à une charge de traction selon sa longueur. En appelant $x$ la direction selon laquelle la charge est appliquée, $y$ et $z$ les coordonnées dans la section de l'éprouvette, le tenseur de petites déformations dans l'éprouvette est égal à

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{xx} \end{bmatrix} \qquad 0 < \nu < \frac{1}{2} \tag{1}$$

1. Déterminer l'expression du tenseur dans sections orientée à 30°, 45°, 60°, 90° par rapport à l'axe $x$. Utilisez la loi de rotation de tenseurs et aussi les cercles de Mohr.
2. On observe que la fracture de l'éprouvette se produit dans une section à 45°. Sur la base des résultats au point précédent, qu'est-ce qu'on peut conclure sur la mécanique de la fracture de l'éprouvette ?

**Correction**

1. — **Loi de rotation de tenseurs**

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,(\theta) & \mathrm{Sin}\,(\theta) & 0 \\ -\mathrm{Sin}\,(\theta) & \mathrm{Cos}\,(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{`} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{R}}^{T} \tag{4}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{`} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}^2\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} - \nu\mathrm{Sin}^2\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} & -\mathrm{Cos}\,(\theta)\,\mathrm{Sin}\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} - \nu\mathrm{Cos}\,(\theta)\,\mathrm{Sin}\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ -\mathrm{Cos}\,(\theta)\,\mathrm{Sin}\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} - \nu\mathrm{Cos}\,(\theta)\,\mathrm{Sin}\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} & -\nu\mathrm{Cos}^2\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} + \mathrm{Sin}^2\,(\theta)\,\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

30°

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{`} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & \frac{1}{4}(1-3\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

45°

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{`} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & -\frac{1}{2}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ -\frac{1}{2}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & \frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

60°

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{`} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-3\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & \frac{1}{4}(3-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

90°

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{`} = \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathrm{xx}} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

— **Cercles de Mohr**

$$\varepsilon_C = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} - \nu\varepsilon_{xx}\right) \tag{10}$$

$$R_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{`}_{xx} &= \varepsilon_C + R_\varepsilon \mathrm{Cos}\left(2\theta\right) \\ \varepsilon^{`}_{yy} &= \varepsilon_C - R_\varepsilon \mathrm{Cos}\left(2\theta\right) \\ \varepsilon^{`}_{xy} &= -R_\varepsilon \mathrm{Sin}\left(2\theta\right) \end{aligned} \tag{12}$$

30°

$$\begin{aligned} \varepsilon^{`}_{xx} &= \frac{1}{4}(3-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon^{`}_{yy} &= \frac{1}{4}(1-3\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon^{`}_{xy} &= -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{aligned} \tag{13}$$

45°

$$\begin{aligned} \varepsilon^{`}_{xx} &= \frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon^{`}_{yy} &= \frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \varepsilon^{`}_{xy} &= -\frac{1}{2}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \end{aligned} \tag{14}$$

60°

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{`}_{xx} &= \frac{1}{4}(1-3\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\
\varepsilon^{`}_{yy} &= \frac{1}{4}(3-\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\
\varepsilon^{`}_{xy} &= -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\nu)\varepsilon_{\mathrm{xx}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

90°

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{`}_{xx} &= -\nu\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\
\varepsilon^{`}_{yy} &= \varepsilon_{\mathrm{xx}} \\
\varepsilon^{`}_{xy} &= 0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

2. Vu que : $\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.433 < 0.5 = \frac{1}{2}$, dans la section à 45° on a la valuer maximale du glissement $\varepsilon_{xy}$. La fracture de l'éprouvette se produit par glissement du matériau à l'échelle microscopique.