

# Markowitz e CAPM: Analisi Empirica su Orizzonti Multipli

Valutazione empirica del modello di Markowitz su orizzonti temporali multipli con test dell'ipotesi del CAPM

Luca Falasca

`luca.falasca@students.uniroma2.eu`

Università degli Studi di Roma Tor Vergata

# Roadmap

## 1 Introduzione

- Obiettivi
- Dati e risorse tecniche
- Contesto

## 2 Markowitz Model

- Tassi di rendimento
- Stazionarietà
- Autocorrelazione
- Portafogli fattibili
- Frontiera efficiente
- Rendimento privo di rischio
- Portafoglio Tangente

## 3 CAPM

- Capital Market Line
- Test CAPM hypotheses

## 4 Conclusioni

# Obiettivi

- Valutazione su base empirica del modello di Markowitz
- Analisi su diversi orizzonti temporali
  - ▶ Giornaliero
  - ▶ Settimanale
  - ▶ Mensile
- Stazionarietà
- Portafoglio tangente
- Capital market line
- CAPM hypothesis test
  - ▶ Portafoglio di mercato
  - ▶ Portafoglio equamente pesato

# Dati e risorse tecniche

- Il progetto è stato realizzato in Python
- I dati sono stati prelevati da Yahoo Finance e da Federal Reserve Bank of St. Louis



# Contesto

- Titoli azionari utilizzati (Top 5 Dow Jones)
  - ▶ Apple (AAPL)
  - ▶ Amazon (AMZN)
  - ▶ Microsoft (MSFT)
  - ▶ JPMorgan Chase (JPM)
  - ▶ Walmart (WMT)
- Intervallo temporale
  - ▶ 2015 - 2025

# Roadmap

## 1 Introduzione

- Obiettivi
- Dati e risorse tecniche
- Contesto

## 2 Markowitz Model

- Tassi di rendimento
- Stazionarietà
- Autocorrelazione
- Portafogli fattibili
- Frontiera efficiente
- Rendimento privo di rischio
- Portafoglio Tangente

## 3 CAPM

- Capital Market Line
- Test CAPM hypotheses

## 4 Conclusioni

# Tassi di rendimento

Per stimare del tasso di rendimento  $r_T$  dello stock  $S$  e la sua volatilità  $\sigma$ , dobbiamo ricorrere ai dati storici sullo stock. Sfruttiamo i prezzi di chiusura dello stock per un ampio intervallo di tempo passato. Denotiamo con

$$S_1, S_2, \dots, S_N, S_{N+1},$$

le variabili aleatorie la cui realizzazione ha dato luogo al prezzo di chiusura dello stock nell' $n$ -simo giorno di contrattazione per  $n = 1, \dots, N + 1$ , dove  $N + 1$  è il numero di giorni di mercato del trascorso anno di riferimento. Formalmente, il tasso di rendimento dello stock a termine dell' $n + 1$ -simo giorno di contrattazione, inteso come variabile aleatoria, è definito come

$$r_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n}, \quad \forall n = 1, \dots, N,$$

# Tassi di rendimento

Nel caso giornaliero verrà utilizzato il tasso di rendimento logaritmico, perché approssima in maniera adeguata quello reale

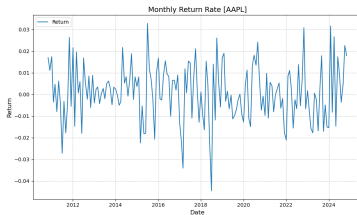
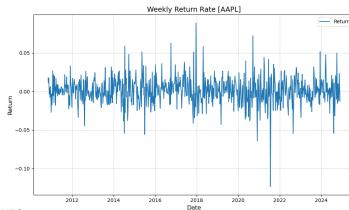
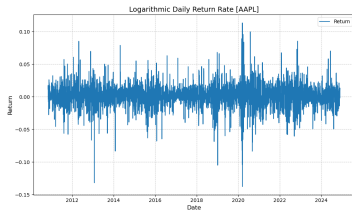
$$\rho_n \stackrel{\text{def}}{=} \log \left( \frac{S_{n+1}}{S_n} \right), \quad \forall n = 1, \dots, N.$$

Invece nei casi settimanali e mensili dovremmo usare il tasso di rendimento classico definito precedentemente



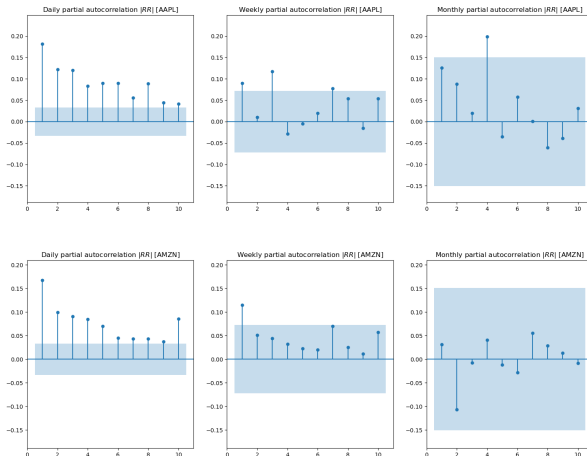
# Stazionarietà

Possiamo osservare la stazionarietà del processo dei tassi di rendimento che cambia a seconda del periodo temporale considerato.



# Autocorrelazione

Questo fenomeno è osservabile anche tramite l'autocorrelazione parziale



# Portafogli fattibili

Vado ora a costruire empiricamente l'insieme dei portafogli fattibili andandoli a rappresentare come la coppia rendimento-rischio

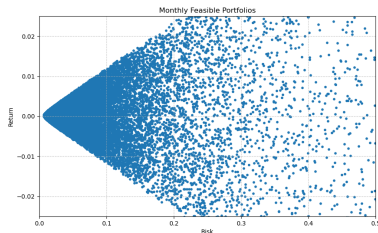
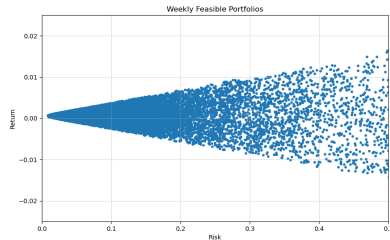
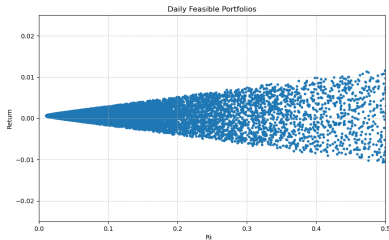
$$\left( r(w_1, \dots, w_M), \sigma^2(w_1, \dots, w_M) \right) = \left( \sum_{m=1}^M w_m r_m, \sum_{l,m=1}^M w_l w_m \sigma_{l,m} \right)$$

dove  $\sigma$  è la matrice varianza covarianza tra i tassi di rendimenti dei vari titoli. I pesi  $w_m$  sono stati generati da una distribuzione normale di media nulla per poi normalizzarli adeguatamente

$$w_m = \frac{z_m}{\sum_{m=1}^M z_m}, \quad \forall m = 1, \dots, M,$$

# Portafogli fattibili

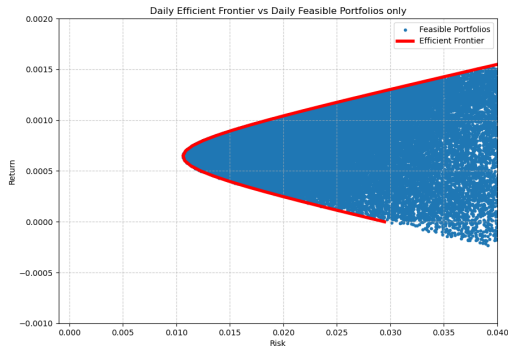
Generando casualmente 1000000 di portafogli, è interessante osservare come si distribuiscono secondo quanto previsto dalla teoria di Markowitz



# Frontiera efficiente

A questo punto risolvendo il problema di ottimizzazione vincolata in cui per ogni rendimento cerco la combinazione di pesi che minimizza il rischio, ottengo la frontiera efficiente

$$\begin{aligned} \text{Minimize:} & \quad \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}} \\ \text{Subject to:} & \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & \quad \mathbf{w}^T \mathbf{r} = r_t \end{aligned}$$



# Rendimento privo di rischio

L'inclusione di un rendimento privo di rischio consente di ottimizzare il rapporto rendimento-rischio, rivelando una relazione lineare tra volatilità e rendimento ottimali.

Come rendimento privo di rischio è stato considerato Real Interest Rate ad un mese messo a disposizione dalla **Federal Reserve Bank of St. Louis**.

- Media sul periodo di riferimento
- Conversione in tasso giornaliero e settimanale

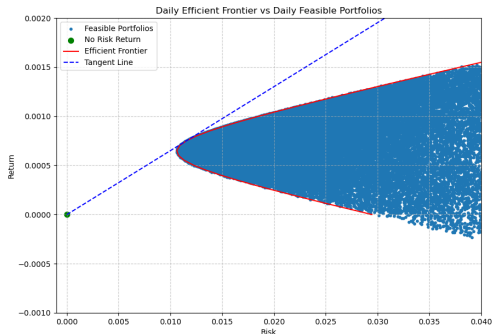
▶  $r_{Weekly} = (1 + r_{Monthly})^{\frac{1}{4}} - 1$

▶  $r_{Daily} = (1 + r_{Monthly})^{\frac{1}{30}} - 1$

# Rendimento privo di rischio

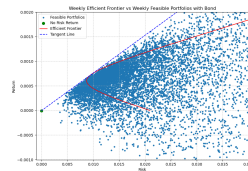
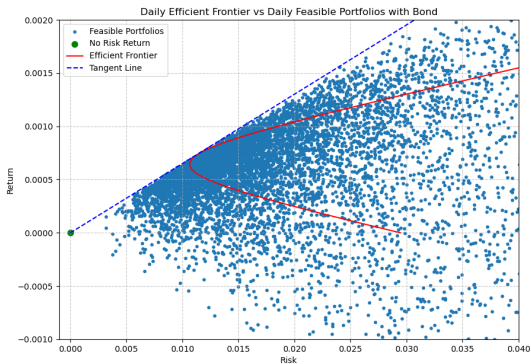
è possibile tracciare una retta tangente con il portafoglio tangente, ovvero il portafoglio che massimizza il rapporto di Sharpe.

$$\max_{(w_1, \dots, w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_+} \tan(\theta) = \max_{(w_1, \dots, w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_+} \frac{\sum_{m=1}^M w_m (\bar{r}_m - r_0)}{\left( \sum_{\ell, m=1}^M \sigma_{\ell, m} w_\ell w_m \right)^{1/2}},$$



# Portafoglio Tangente

A questo punto è interessante verificare empiricamente che i possibili portafogli composti da titoli azionari e un titolo privo di rischio si posizionino effettivamente al di sotto della retta tangente.





# Roadmap

## 1 Introduzione

- Obiettivi
- Dati e risorse tecniche
- Contesto

## 2 Markowitz Model

- Tassi di rendimento
- Stazionarietà
- Autocorrelazione
- Portafogli fattibili
- Frontiera efficiente
- Rendimento privo di rischio
- Portafoglio Tangente

## 3 CAPM

- Capital Market Line
- Test CAPM hypotesys

## 4 Conclusioni

# Capital Market Line

La capital market line è una retta che collega il rendimento privo di rischio con il portafoglio tangente. I portafogli sulla capital market line sono una combinazione lineare tra il portafoglio tangente e il titolo privo di rischio. Dove il rendimento atteso del portafoglio è dato da

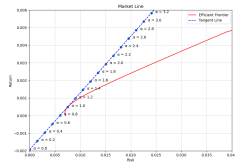
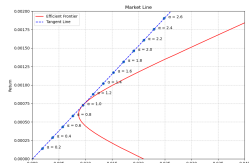
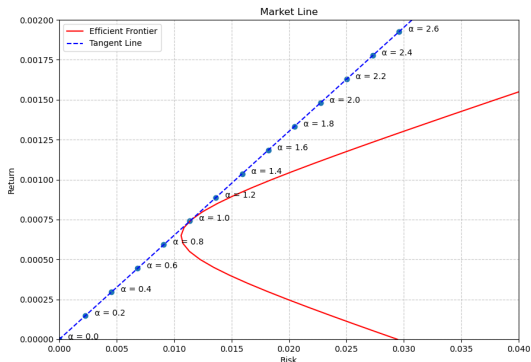
$$r_a = \alpha \bar{r}_T + (1 - \alpha)r_0$$

e il rischio assegnato del portafoglio è data da

$$\sigma_a^2 = \alpha^2 \sigma_T^2$$

# Capital Market Line

Andando a variare  $\alpha$  in è possibile notare come si dispongono i portafogli sulla retta.



Quando  $\alpha > 1$ , significa che bisogna vendere allo scoperto dei bond (prendere in prestito dei soldi) per investirli nel portafoglio tangente.

# Test CAPM hypotheses

Secondo il CAPM il portafoglio tangente coincide con il portafoglio di mercato, ossia con il portafoglio i cui pesi sono dati dalla capitalizzazione relativa dei titoli che compongono il mercato in rapporto alla capitalizzazione dell'intero mercato.

Ipotizzando un mercato composto solo dai 5 titoli considerati, possiamo verificare empiricamente che il portafoglio tangente coincida con il portafoglio di mercato scegliendo i pesi con

$$w_m = \frac{K_m}{K}$$

dove  $K_m$  è la capitalizzazione di mercato media del titolo  $m$  nel periodo considerato e  $K = \sum_{m=1}^M K_m$

# Test CAPM hypotesys

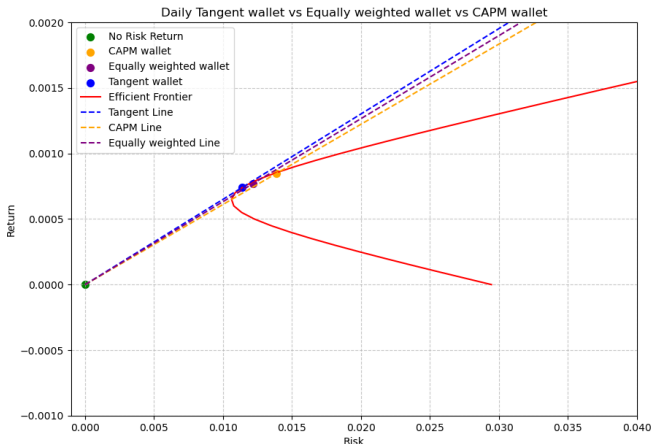
Ho inserito anche un ulteriore portafoglio, il portafoglio equamente pesato come benchmark aggiuntivo.

In questo caso i pesi sono dati da

$$w_m = \frac{1}{M}$$

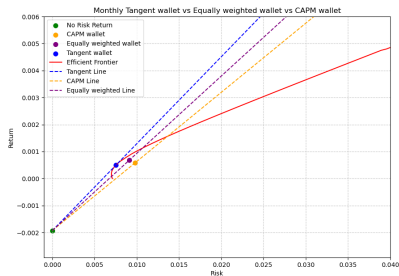
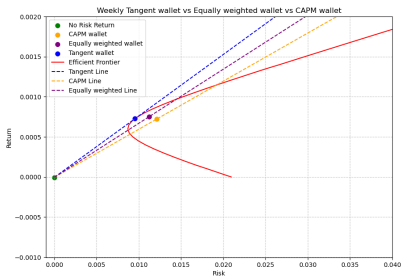
# Test CAPM hypotheses

Nel caso giornaliero il portafoglio tangente coincide quasi perfettamente sia con il portafoglio di mercato che con quello equamente pesato



# Test CAPM hypotesys

Nei casi settimanale e mensile invece c'è una leggera discrepanza tra il portafoglio tangente e il portafoglio di mercato.



Tuttavia il portafoglio equamente pesato si posiziona sempre un po' più vicino al portafoglio tangente

# Roadmap

## 1 Introduzione

- Obiettivi
- Dati e risorse tecniche
- Contesto

## 2 Markowitz Model

- Tassi di rendimento
- Stazionarietà
- Autocorrelazione
- Portafogli fattibili
- Frontiera efficiente
- Rendimento privo di rischio
- Portafoglio Tangente

## 3 CAPM

- Capital Market Line
- Test CAPM hypotheses

## 4 Conclusioni



# Conclusioni

- All'aumentare dell'orizzonte temporale, i tassi di rendimento sembrano diventare sempre più stazionari.
  - ▶ Servirebbero ulteriori test statistici per confermare questa ipotesi
- I risultati empirici sembrano confermare la validità del modello di Markowitz
- Uguaglianza tra portafoglio tangente e portafoglio di mercato
  - ▶ Sembra esserci una discrepanza possibilmente dovuta ai pochi titoli presi in considerazione
  - ▶ Il portafoglio equamente pesato come approssimazione del portafoglio tangente sembra una ipotesi plausibile, ma da validare con ulteriori test e considerazioni teoriche.

Grazie per l'attenzione!

# Domande?

Il codice è disponibile al seguente repository:

<https://github.com/LucaFalasca/FinancialMarketAnalysis>

Grazie a tutti!