Markowitz e CAPM: Analisi Empirica su Orizzonti Multipli

Valutazione empirica del modello di Markowitz su orizzonti temporali multipli con test dell'ipotesi del CAPM

Luca Falasca
luca.falasca@students.uniroma2.eu

Università degli Studi di Roma Tor Vergata

Roadmap

Obiettivi

- Valutazione su base empirica del modello di Markowitz
- Analisi su diversi orizzonti temporali
  - Giornaliero
  - Settimanale
  - Mensile
- Stazionarietà
- CAPM

Dati e risorse tecniche

Roadmap

Tassi di rendimento

Per stimare la volatilità σ del tasso di rendimento r_T dello stock S, dobbiamo ricorrere ai dati storici sullo stock. Sfruttiamo i prezzi di chiusura dello stock per un ampio intervallo di tempo passato. Denotiamo con

$$S_1, S_2, \dots, S_N, S_{N+1},$$

le variabili aleatorie la cui realizzazione ha dato luogo al prezzo di chiusura dello stock nell'n-simo giorno di contrattazione per $n = 1, \dots, N+1$, dove $N+1$ è il numero di giorni di mercato del trascorso anno di riferimento. Formalmente, il tasso di rendimento dello stock a termine dell'$n+1$-simo giorno di contrattazione, inteso come variabile aleatoria, è definito come

$$r_n \overset{\text{def}}{=} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n}, \quad \forall n = 1, \dots, N,$$

Tassi di rendimento

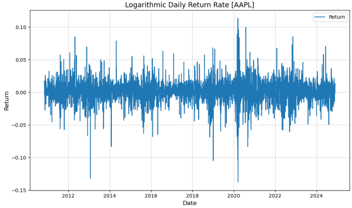
Nel caso giornaliero verrà utilizzato il tasso di rendimento logaritmico, perché approssima in maniera adeguata quello reale

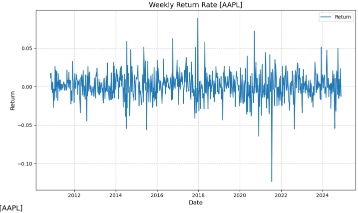
$$\rho_n \stackrel{\text{def}}{=} \log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right), \quad \forall n = 1, \dots, N.$$

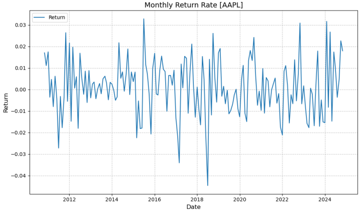
Invece nei casi settimanali e mensili dovremmo usare il tasso di rendimento classico definito precedentemente

Stazionarietà

Possiamo osservare la stazionarietà del processo dei tassi di rendimento che cambia a seconda del periodo temporale considerato.

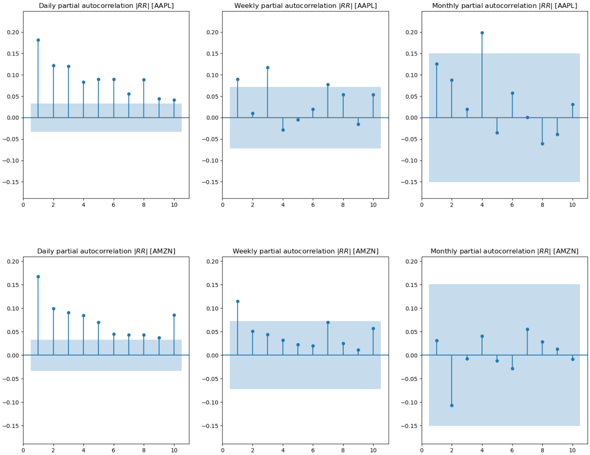






Autocorrelazione

Questo fenomeno è osservabile anche tramite l'autocorrelazione parziale



Portafogli fattibili

Vado ora a costruire empiricamente l'insieme dei portafogli fattibili andandoli a rappresentare come la coppia rendimento-rischio

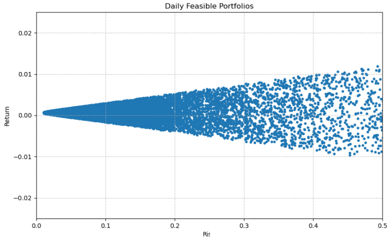
$$\left(r(w_1, ..., w_M), \sigma^2(w_1, ..., w_M)\right) = \left(\sum_{m=1}^{M} w_m r_m, \sum_{l,m=1}^{M} w_l w_m \sigma_{l,m}\right)$$

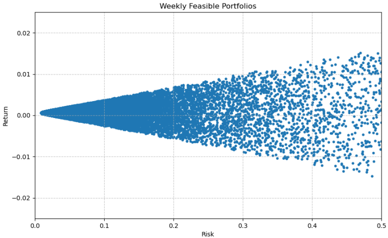
dove σ è la matrice varianza covarianza tra i tassi di rendimenti dei vari titoli. I pesi w_m sono stati generati da una distribuzione normale di media nulla per poi normalizzarli adeguatamente

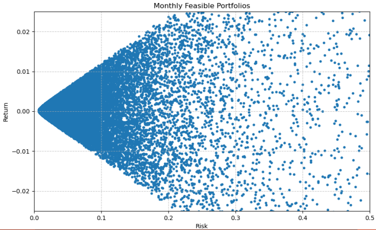
$$w_m = \frac{z_m}{\sum_{m=1}^{M} z_m}, \quad \forall m = 1, \ldots, M,$$

Portafogli fattibili

Generando casualmente 1000000 di portafogli, è interessante osservare come si distribuiscono secondo quanto previsto dalla teoria di Markowitz







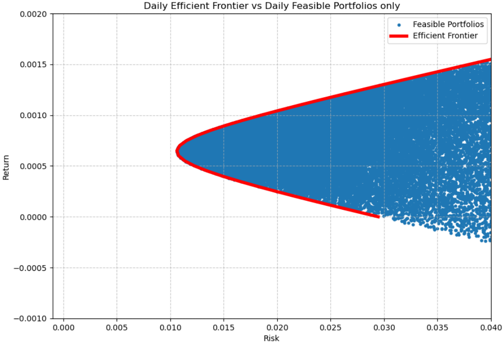
Frontiera efficiente

A questo punto risolvendo il problema di ottimizzazione vincolata in cui per ogni rendimento cerco la combinazione di pesi che minimizza il rischio, ottengo la frontiera efficiente

Minimize: $\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}}$

Subject to: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

$\mathbf{w}^T \mathbf{r} = r_t$



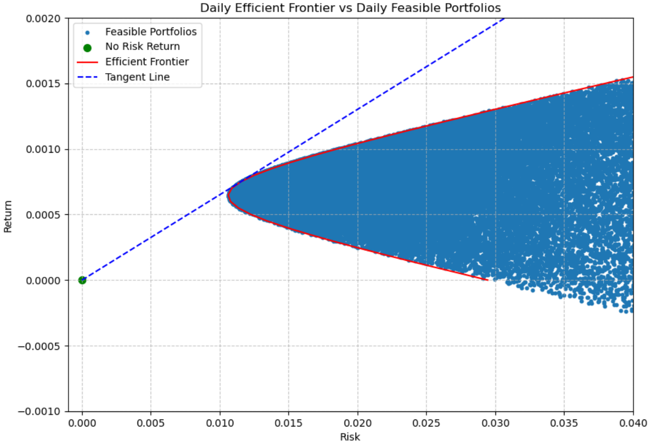
Rendimento privo di rischio

L'inclusione di un rendimento privo di rischio consente di ottimizzare il rapporto rendimento-rischio, rivelando una relazione lineare tra volatilità e rendimento ottimali.
Come rendimento privo di rischio è stato considerato Real Interest Rate ad un mese messo a disposizone dalla **Federal Reserve Bank of St. Louis**.

- Media sul periodo di riferimento
- Conversione in tasso giornaliero e settimanale
  - $r_{Weekly} = (1 + r_{Monthly})^{\frac{1}{4}} - 1$
  - $r_{Daily} = (1 + r_{Monthly})^{\frac{1}{30}} - 1$

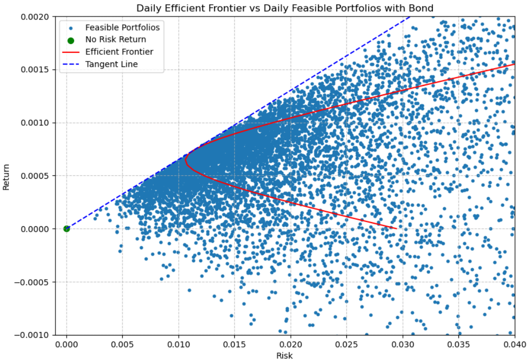
Rendimento privo di rischio

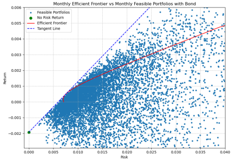
è possibile tracciare una retta tangente con il portafoglio tangente, ovvero il portafoglio che massimizza il rapporto rendimento-rischio.



Portafoglio Tangente

A questo punto è interessante verificare empiricamente che i possibili portafogli composti da titoli azionari e un titolo privo di rischio si posizonino effettivamente al di sotto della retta tangente.





Roadmap

Capital Market Line

Test CAPM hypotesys

Roadmap

Grazie per l'attenzione!