

# L'algoritmo di Edmonds-Karp

Luca Foschiani

Università degli studi di Udine

- 1 Il problema del massimo flusso
- 2 L'algoritmo di Ford-Fulkerson
- 3 L'algoritmo di Edmonds-Karp

# Definizioni: rete di flusso

Una **rete di flusso**  $G = (V, E)$  è un grafo orientato nel quale ad ogni arco  $(u, v) \in E$  è assegnata una capacità non negativa  $c(u, v) \geq 0$ .

Inoltre, assumiamo che se esiste un arco  $(u, v) \in E$ , allora  $(v, u) \notin E$ .

Individuiamo due nodi  $s$  (**sorgente**) e  $t$  (**pozzo**). Per questi due nodi, abbiamo che per ogni nodo in  $V$  esiste almeno un cammino che lo contiene e che va da  $s$  a  $t$  (ogni nodo è raggiungibile da  $s$  e raggiunge  $t$ ).

# Definizioni: flusso

Un **flusso** in  $G$  è una funzione  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- Per ogni  $u, v \in V$  richiediamo  $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$  (vincolo di capacità)
- Per ogni  $u \in V \setminus \{s, t\}$  richiediamo  $\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$   
(conservazione del flusso)

La quantità  $f(u, v)$  viene chiamata flusso dal nodo  $u$  al nodo  $v$ .

Il **valore**  $|f|$  di un flusso  $f$  è definito nel seguente modo:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Obiettivo del **problema del massimo flusso** è, data una rete di flusso, trovare il flusso di valore massimo.

- più sorgenti/più pozzi?
- ammettere archi  $(u, v)$  con  $(v, u) \in E$ ?
- applicazioni? (es. matching bipartito di cardinalità massima)

# L'algoritmo di Ford-Fulkerson

Concetti:

- Rete residua
- Cammino aumentante
- Taglio

Per poi arrivare al **Teorema del flusso massimo e taglio minimo** (permette di dimostrare che l'algoritmo trova sempre il flusso massimo).

# L'algoritmo di Ford-Fulkerson

## Rete residua

Dati una rete  $G$  e un flusso  $f$ , la rete residua  $G_f$  rappresenta in che modo è possibile cambiare il flusso in  $G$ .

Ponendo  $G = (V, E)$ ,  $s$  sorgente e  $t$  pozzo, Possiamo definire la **capacità residua**  $c_f$  nel seguente modo:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{se } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{se } (v, u) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il primo caso della definizione corrisponde alla “capacità residua” degli archi presenti in  $G$ .

Il secondo caso permette all'algoritmo di “vedere” le quantità di flusso già assegnate agli archi, dando la possibilità di diminuire il flusso su un arco (assegnando al corrispondente arco in  $G_f$  un flusso non nullo).

In  $G_f$  avrò gli stessi nodi presenti in  $G$ , mentre gli archi saranno tutti gli  $(u, v)$  tali che  $c_f(u, v) > 0$ .

# L'algoritmo di Ford-Fulkerson

## Rete residua

Idea: un flusso individuato nella rete residua mi permette di aumentare il flusso nella rete originale.

Dati  $f$  flusso in  $G$  e  $f'$  flusso in  $G_f$ , definisco la funzione  $(f \uparrow f') : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nel seguente modo:

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{se } (u, v) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### Lemma

La funzione  $f \uparrow f'$  è un flusso in  $G$  avente valore  $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$ .



# L'algoritmo di Ford-Fulkerson

## Cammino aumentante

Data una rete di flusso  $G$  e un flusso  $f$ , un **cammino aumentante** è un cammino semplice che va da  $s$  a  $t$  nella rete residua  $G_f$ .

Dato un cammino aumentante  $p$ , chiamiamo **capacità residua** di  $p$  la massima quantità di flusso che è possibile mandare su questo cammino:

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ sta in } p\}$$

Definiamo inoltre una funzione  $f_p : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nel seguente modo:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \text{ sta in } p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### Lemma

$f_p$  è un flusso in  $G_f$  di valore  $|f_p| = c_f(p) > 0$ .

### Corollario

$f \uparrow f_p$  è un flusso in  $G$  di valore  $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$ .

# L'algoritmo di Ford-Fulkerson

## Taglio

Un **taglio**  $(S, T)$  di una rete di flusso  $G = (V, E)$  è una partizione di  $V$  in  $S$  e  $T$  tale che  $s \in S$  e  $t \in T$ .

Dato  $f$  flusso, esprimiamo con  $f(S, T)$  il **flusso che attraversa il taglio**:

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

La **capacità di un taglio**  $(S, T)$  è:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

Il **taglio minimo** è il taglio di capacità minima fra i tagli della rete.

# L'algoritmo di Ford-Fulkerson

## Taglio

### Lemma

Dati  $f$  flusso in  $G$  con  $s$  sorgente e  $t$  pozzo, e  $(S, T)$  un qualsiasi taglio di  $G$ , il flusso attraverso  $(S, T)$  è  $f(S, T) = |f|$ .

### Corollario

Il valore di qualsiasi flusso  $f$  su una rete  $G$  è limitato superiormente dalla capacità di un qualsiasi taglio di  $G$ .

### Teorema del flusso massimo e taglio minimo

Dati  $f$  flusso in una rete  $G = (V, E)$  con  $s$  sorgente e  $t$  pozzo, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $f$  è un flusso massimo in  $G$
- La rete residua  $G_f$  non ammette cammini aumentanti
- $|f| = c(S, T)$  per qualche taglio  $(S, T)$  di  $G$



# Paragraphs of Text

Sed iaculis dapibus gravida. Morbi sed tortor erat, nec interdum arcu. Sed id lorem lectus. Quisque viverra augue id sem ornare non aliquam nibh tristique. Aenean in ligula nisl. Nulla sed tellus ipsum. Donec vestibulum ligula non lorem vulputate fermentum accumsan neque mollis.

Sed diam enim, sagittis nec condimentum sit amet, ullamcorper sit amet libero. Aliquam vel dui orci, a porta odio. Nullam id suscipit ipsum. Aenean lobortis commodo sem, ut commodo leo gravida vitae. Pellentesque vehicula ante iaculis arcu pretium rutrum eget sit amet purus. Integer ornare nulla quis neque ultrices lobortis. Vestibulum ultrices tincidunt libero, quis commodo erat ullamcorper id.

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
- Aliquam blandit faucibus nisi, sit amet dapibus enim tempus eu
- Nulla commodo, erat quis gravida posuere, elit lacus lobortis est, quis porttitor odio mauris at libero
- Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
- Vestibulum faucibus velit a augue condimentum quis convallis nulla gravida

# Blocks of Highlighted Text

## Block 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

## Block 2

Pellentesque sed tellus purus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Vestibulum quis magna at risus dictum tempor eu vitae velit.

## Block 3

Suspendisse tincidunt sagittis gravida. Curabitur condimentum, enim sed venenatis rutrum, ipsum neque consectetur orci, sed blandit justo nisi ac lacus.

## Heading

- 1 Statement
- 2 Explanation
- 3 Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.



<b>Treatments</b>	<b>Response 1</b>	<b>Response 2</b>
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table: Table caption

# Theorem

Theorem (Mass–energy equivalence)

$$E = mc^2$$

## Example (Theorem Slide Code)

```
\begin{frame}  
\frametitle{Theorem}  
\begin{theorem}[Mass--energy equivalence]  
$E = mc^2$  
\end{theorem}  
\end{frame}
```

# Figure

Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.

An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Smith, 2012].



John Smith (2012)

Title of the publication

*Journal Name* 12(3), 45 – 678.

# The End