

L'algoritmo di Edmonds-Karp

Luca Foschiani

Università degli studi di Udine

Advanced Algorithms

- 1 Il problema del massimo flusso
- 2 Il metodo di Ford-Fulkerson
 - Rete residua
 - Cammino aumentante
 - Taglio
- 3 L'algoritmo di Edmonds-Karp
 - Algoritmo
 - Complessità asintotica
- 4 Algoritmi push-relabel
 - Un algoritmo push-relabel generico
 - Algoritmo relabel-to-front

Definizioni: rete di flusso

Una **rete di flusso** $G = (V, E)$ è un grafo orientato nel quale ad ogni arco $(u, v) \in E$ è assegnata una capacità non negativa $c(u, v) \geq 0$.

Inoltre, assumiamo che se esiste un arco $(u, v) \in E$, allora $(v, u) \notin E$.

Individuiamo due nodi s (**sorgente**) e t (**pozzo**). Per questi due nodi, abbiamo che per ogni nodo in V esiste almeno un cammino che lo contiene e che va da s a t (ogni nodo è raggiungibile da s e raggiunge t).

Definizioni: flusso

Un **flusso** in G è una funzione $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- Per ogni $u, v \in V$ richiediamo $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ (vincolo di capacità)
- Per ogni $u \in V \setminus \{s, t\}$ richiediamo $\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$
(conservazione del flusso)

La quantità $f(u, v)$ viene chiamata flusso dal nodo u al nodo v .

Il **valore** $|f|$ di un flusso f è definito nel seguente modo:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Obiettivo del **problema del massimo flusso** è, data una rete di flusso, trovare il flusso di valore massimo.

Concetti:

- Rete residua
- Cammino aumentante
- Taglio

Per poi arrivare al **Teorema del flusso massimo e taglio minimo**
(permette di dimostrare che l'algoritmo trova sempre il flusso massimo).

L'algoritmo di Ford-Fulkerson

Rete residua

Dati una rete G e un flusso f , la rete residua $G_f = (V_f, E_f)$ permette di identificare i cammini lungo i quali è possibile aumentare il flusso.

Ponendo $G = (V, E)$, s sorgente e t pozzo, Possiamo definire la **capacità residua** c_f nel seguente modo:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{se } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{se } (v, u) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il primo caso della definizione corrisponde alla “capacità residua” degli archi presenti in G .

Il secondo caso permette all'algoritmo di “vedere” le quantità di flusso già assegnate agli archi, dando la possibilità di diminuire il flusso su un arco (assegnando al corrispondente arco in G_f un flusso non nullo).

In G_f avrò gli stessi nodi presenti in G , mentre gli archi saranno tutti gli (u, v) tali che $c_f(u, v) > 0$.

Il metodo di Ford-Fulkerson

Rete residua

Idea: un flusso individuato nella rete residua permette di aumentare il flusso nella rete originale.

Dati f flusso in G e f' flusso in G_f , definisco la funzione $(f \uparrow f') : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{se } (u, v) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

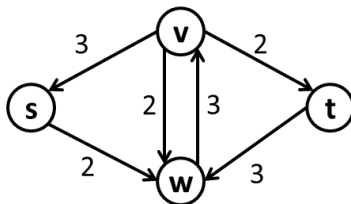
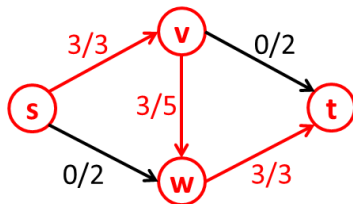
Lemma

La funzione $f \uparrow f'$ è un flusso in G avente valore $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Il metodo di Ford-Fulkerson

Esempio rete residua

Rete di flusso (flusso/capacità) e corrispondente rete residua:



Il metodo di Ford-Fulkerson

Cammino aumentante

Data una rete di flusso G e un flusso f , un **cammino aumentante** è un cammino semplice che va da s a t nella rete residua G_f .

Dato un cammino aumentante p , chiamiamo **capacità residua** di p la massima quantità di flusso che è possibile mandare su questo cammino:

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ sta in } p\}.$$

Definiamo inoltre una funzione $f_p : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \text{ sta in } p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Lemma

f_p è un flusso in G_f di valore $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Corollario

$f \uparrow f_p$ è un flusso in G di valore $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$.

Il metodo di Ford-Fulkerson

Taglio

Un **taglio** (S, T) di una rete di flusso $G = (V, E)$ è una partizione di V in S e T tale che $s \in S$ e $t \in T$.

Dato f flusso, esprimiamo con $f(S, T)$ il **flusso che attraversa il taglio**:

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

La **capacità di un taglio** (S, T) è:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

Il **taglio minimo** è il taglio di capacità minima fra i tagli della rete.

Il metodo di Ford-Fulkerson

Taglio

Lemma

Dati f flusso in G con s sorgente e t pozzo, e (S, T) un qualsiasi taglio di G , il flusso attraverso (S, T) è $f(S, T) = |f|$.

Corollario

Il valore di qualsiasi flusso f su una rete G è limitato superiormente dalla capacità di un qualsiasi taglio di G .

Teorema del flusso massimo e taglio minimo

Dati f flusso in una rete $G = (V, E)$ con s sorgente e t pozzo, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- f è un flusso massimo in G
- La rete residua G_f non ammette cammini aumentanti
- $|f| = c(S, T)$ per qualche taglio (S, T) di G

Il metodo di Ford-Fulkerson

Pseudocodice

Algorithm 1 Ford-Fulkerson(G, s, t)

```
1: for each edge  $(u, v) \in E$ 
2:    $(u, v).f = 0$ 
3: while esiste un cammino aumentante  $p$  in  $G_f$ 
4:    $c_f(p) = \min \{c_f(u, v) : (u, v) \text{ sta in } p\}$ 
5:   for each edge  $(u, v)$  in  $p$ 
6:     if  $(u, v) \in E$ 
7:        $(u, v).f = (u, v).f + c_f(p)$ 
8:     else
9:        $(v, u).f = (v, u).f - c_f(p)$ 
```

Il metodo di Ford-Fulkerson

Complessità

Una possibile implementazione del metodo consiste nello scegliere il cammino aumentante alla linea 3 in maniera arbitraria: l'algoritmo che si ottiene termina sempre a patto che le capacità degli archi siano valori razionali.

Per il calcolo della complessità, possiamo ridurci al caso in cui le capacità prendono valori interi.

Il ciclo **for** alle linee 1-2 ha complessità $O(|E|)$.

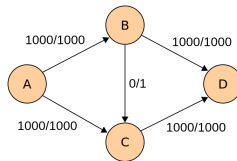
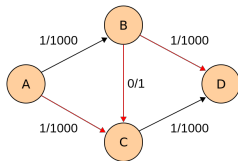
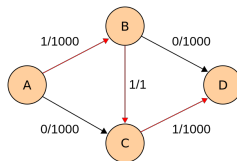
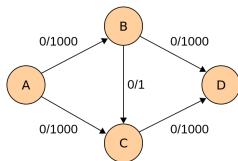
Se chiamiamo f^* il flusso massimo, abbiamo che il ciclo **while** alla linea 3 verrà eseguito al più $|f^*|$ volte (ad ogni iterazione il valore del flusso aumenterà almeno di una unità). Trovare un cammino nella rete residua costa $O(|V| + |E|) = O(|E|)$ con BFS o DFS.

La complessità dell'algoritmo è quindi $O(|E| \cdot |f^*|)$. L'algoritmo è pseudopolinomiale.

Il metodo di Ford-Fulkerson

Caso pessimo

Le prime tre immagini mostrano il primo passo dell'algoritmo e la successiva selezione del cammino aumentante. L'ultima immagine mostra lo stato al quale si arriva dopo 2000 iterazioni.



L'algoritmo di Edmonds-Karp

L'algoritmo di Edmonds-Karp è un'implementazione del metodo di Ford-Fulkerson che ci permette di risolvere il problema del massimo flusso in tempo $O(|V| \cdot |E|^2)$. L'algoritmo utilizza una ricerca in ampiezza per trovare, ad ogni iterazione, il **cammino minimo** da s a t nella rete residua.

Lemma

Dato $G = (V, E)$ con s sorgente e t pozzo, per tutti i $v \in V \setminus \{s, t\}$ abbiamo che la lunghezza del cammino minimo $\delta_f(s, v)$ fra s e v nella rete residua G_f aumenta monotonicamente durante l'esecuzione dell'algoritmo (in particolare, ad ogni aumento del flusso).

L'algoritmo di Edmonds-Karp

Dimostrazione

Supponiamo, per assurdo, che esista un vertice $v \in V \setminus \{s, t\}$ per il quale, in corrispondenza di un aumento del flusso, la distanza da s si riduca.

Chiamiamo f il flusso prima di questo aumento, e f' il flusso risultante.

Sia v il nodo tale che $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$ e per il quale $\delta_{f'}(s, v)$ è minima.

Sia inoltre $p = s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ un cammino minimo da s a v in $G_{f'}$.

Abbiamo $\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) - 1$.

Per come abbiamo scelto v , sappiamo inoltre che $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$.

Se $(u, v) \in E_f$ avremmo:

$$\begin{aligned}\delta_f(s, v) &\leq \delta_f(s, u) + 1 \quad (\text{disuguaglianza triangolare}) \\ &\leq \delta_{f'}(s, u) + 1 \\ &= \delta_{f'}(s, v)\end{aligned}$$

è una contraddizione, quindi $(u, v) \notin E_f$.

Dimostrazione

Abbiamo mostrato che $(u, v) \notin E_f$, sappiamo inoltre che $(u, v) \in E_{f'}$. Questo significa che l'aumento di flusso deve aver aumentato il flusso da v a u .

L'algoritmo che stiamo analizzando aumenta sempre il flusso sul cammino minimo, quindi il cammino minimo da s a u in G_f ha (v, u) come ultimo arco. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\delta_f(s, v) &= \delta_f(s, u) - 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s, u) - 1 \\ &= \delta_{f'}(s, v) - 2\end{aligned}$$

Questo contraddice la nostra assunzione iniziale, cioè $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$. Non esiste quindi un nodo v con queste caratteristiche.

L'algoritmo di Edmonds-Karp

Teorema

Data una rete di flusso $G = (V, E)$, l'algoritmo di Edmonds-Karp aumenta il valore del flusso $O(|V| \cdot |E|)$ volte.

Dimostrazione

Un arco (u, v) appartenente ad un cammino aumentante è **critico** se $c_f(p) = c_f(u, v)$. Quando aumentiamo il flusso, tutti gli archi critici appartenenti al cammino aumentante scompaiono dalla rete residua (inoltre, ogni cammino aumentante ha almeno un arco critico). Quello che mostriamo è che ogni arco può diventare critico al più $|V|/2$ volte.

L'algoritmo di Edmonds-Karp

Dimostrazione

Siano u, v nodi in V tali che $(u, v) \in E$. Quando (u, v) diventa critico per la prima volta, avremo $\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$.

Dopo aver aumentato il flusso, l'arco (u, v) scomparirà dalla rete residua. Per far sì che (u, v) ricompaia su un altro cammino aumentante, il flusso da u a v deve diminuire, cosa che succede solamente quando (v, u) compare su un cammino aumentante.

Sia f' un flusso tale che (v, u) compare su un cammino aumentante.

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\delta_{f'}(s, u) &= \delta_{f'}(s, v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s, v) + 1 \quad (\text{Lemma}) \\ &= \delta_f(s, u) + 2\end{aligned}$$

Questo dimostra che da quando (u, v) diventa critico al successivo momento in cui sarà critico, la distanza da s ad u aumenterà almeno di 2.

L'algoritmo di Edmonds-Karp

Dimostrazione

I nodi intermedi di un cammino minimo da s a u non possono mai contenere s , u o t . Quindi, la sua distanza (dopo ogni iterazione) sarà al massimo $|V| - 2$.

Dopo che (u, v) è diventato critico per la prima volta, può ridiventarlo al più altre $(|V| - 2)/2 = |V|/2 - 1$ volte, per un totale di $|V|/2$ volte.

Visto che il numero di archi che possono comparire in una rete residua è $O(|E|)$, il numero totale di archi critici durante l'esecuzione dell'algoritmo sarà $O(|V| \cdot |E|)$

Come visto precedentemente, possiamo individuare un cammino aumentante utilizzando BFS in tempo $O(|E|)$. La complessità dell'algoritmo è quindi $O(|V| \cdot |E|^2)$.

Algoritmi push-relabel

Un algoritmo push-relabel generico

L'approccio **push-relabel** consente di risolvere il problema del massimo flusso più velocemente rispetto all'approccio di Edmonds-Karp: arriveremo ad un algoritmo di complessità $O(|V|^3)$, uno degli algoritmi più veloci per questo tipo di problema.

Gli algoritmi push-relabel mantengono durante l'esecuzione il vincolo di capacità ma rilassano il vincolo di conservazione del flusso: richiediamo solamente che la quantità di flusso uscente da un nodo (fatta eccezione per sorgente e pozzo) non superi la quantità di flusso entrante:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) - \sum_{v \in V} f(u, v) \geq 0$$

Chiamiamo inoltre **eccesso di flusso** la seguente quantità:

$$e(u) = \sum_{v \in V} f(v, u) - \sum_{v \in V} f(u, v)$$

L'idea alla base di questi algoritmi consiste nell'assegnare ad ogni nodo un'altezza, e fare in modo che un nodo u possa aumentare il flusso su un arco (u, v) solamente se v sta "più in basso".

Algoritmi push-relabel

Un algoritmo push-relabel generico

- Inizialmente, alla sorgente assegnamo altezza $|V|$ mentre al pozzo e a tutti gli altri nodi assegnamo 0.
- Assegnamo più flusso possibile agli archi uscenti dalla sorgente e avremo uno o più nodi del grafo aventi eccesso di flusso positivo.
- Scelto uno di questi nodi (u), aumentiamo la sua altezza in modo che superi di 1 l'altezza del “più basso” dei suoi vicini (v) scelto in modo che sia possibile aumentare il flusso su (u, v) . A questo punto possiamo assegnare del flusso ad almeno un arco uscente dal nodo u .
- Iterando queste operazioni, arriveremo ad un punto nel quale il pozzo riceve la massima quantità di flusso possibile. Il flusso non è però legale visto che (in generale) può violare il vincolo di conservazione.
- Per renderlo legale permettiamo che l'altezza dei nodi possa superare $|V|$. In questo modo, il flusso in eccesso viene “spinto” di nuovo alla sorgente (cancellazione) e otteniamo un flusso vero e proprio (legale e massimo).

Algoritmi push-relabel

Un algoritmo push-relabel generico

Quando $u.e > 0$, $c_f(u, v) > 0$ e $u.h = v.h + 1$ possiamo eseguire un'operazione di PUSH:

Algorithm 2 PUSH(u, v)

```
1:  $\Delta_f(u, v) = \min(u.e, c_f(u, v))$ 
2: if  $(u, v) \in E$ 
3:    $(u, v).f = (u, v).f + \Delta_f(u, v)$ 
4: else
5:    $(v, u).f = (v, u).f - \Delta_f(u, v)$ 
6:  $u.e = u.e - \Delta_f(u, v)$ 
7:  $v.e = v.e + \Delta_f(u, v)$ 
```

La linea 5 corrisponde ad una diminuzione del flusso sull'arco (v, u) . Questo succede quando l'arco nella rete residua corrisponde all'inverso di un arco nella rete originale.

Algoritmi push-relabel

Un algoritmo push-relabel generico

Quando $u.e > 0$ e per ogni $(u, v) \in E_f$ si ha $u.h \leq v.h$, possiamo eseguire un'operazione di RELABEL:

Algorithm 3 RELABEL(u)

1: $u.h = 1 + \min\{v.h : (u, v) \in E_f\}$

La preconditione è sufficiente a garantire che esista almeno un arco uscente da u nella rete residua.

$u.e > 0$ implica l'esistenza di almeno un nodo v tale che $(v, u).f > 0$, quindi $c_f(u, v) > 0$ che a sua volta implica $(u, v) \in E_f$.

Algoritmi push-relabel

Un algoritmo push-relabel generico

Procedura che esegue l'inizializzazione:

Algorithm 4 Initialize(G, s)

```
1: for each vertex  $v \in V$ 
2:    $v.h = 0$ 
3:    $v.e = 0$ 
4:  $s.h = |V|$ 
5: for each  $(u, v) \in E$ 
6:    $(u, v).f = 0$ 
7: for each vertex  $v \in s.Adj$ 
8:    $(s, v).f = c(s, v)$ 
9:    $v.e = c(s, v)$ 
10:   $s.e = s.e - c(s, v)$ 
```

Algoritmi push-relabel

Un algoritmo push-relabel generico

Algorithm 5 Generic-push-relabel(G)

- 1: Initialize(G, s)
 - 2: **while** esiste un'operazione PUSH o RELABEL applicabile
 - 3: seleziona un'operazione ed eseguila
-

E' possibile mostrare che questo algoritmo ha complessità asintotica pari a $O(|V|^2 \cdot |E|)$.

Algoritmi push-relabel

Algoritmo relabel-to-front

L'algoritmo **relabel-to-front** è un algoritmo push-relabel nel quale viene specificato l'ordine con il quale applicare le operazioni di base (PUSH e RELABEL). Questo accorgimento permette di ottenere una complessità pari a $O(|V|^3)$ (l'algoritmo generico ha complessità $O(|V|^2 \cdot |E|)$).