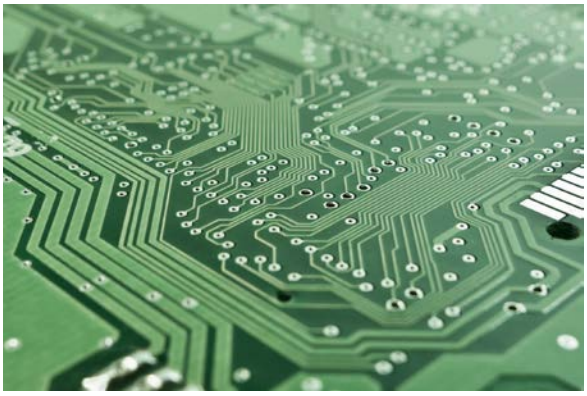


ELETTROTECNICA

Riassunto

Formule base per il corso di Elettrotecnica

Luca Gerin
PoliMi

Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)

In una maglia:

$$\sum V = 0$$

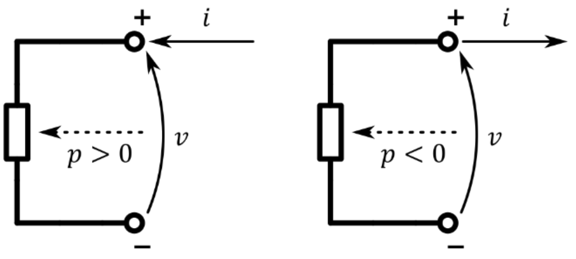
Maglia: generico percorso che parte da un nodo e trona in esso

Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)

Per un taglio:

$$\sum I_{IN} = \sum I_{OUT}$$

Convenzione degli utilizzatori e dei generatori



Utilizzatore *Generatore*

$$P = VI$$

Assorbita nel caso di utilizzatori, erogata nel caso di generatori

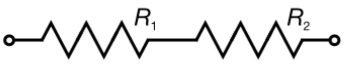
$$P_{Assorbita} = -P_{Erogata}$$

Teorema di Tellegen

$\sum P_{IN} = \sum P_{OUT}$ $\sum v_k i_k \text{ (utilizzatori)} = \sum v_h i_h \text{ (generatori)}$

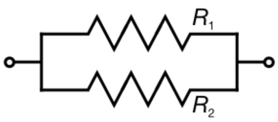
Collegamenti in serie e parallelo di resistori

Collegamento in serie: la corrente che attraversa i componenti in serie è la medesima



$$R_{eq,serie} = \sum_k R_k$$

Collegamento in parallelo: i componenti in parallelo sono tutti sottoposti alla stessa tensione



$$G_{eq,parallelo} = \sum_k G_k$$

Se si hanno due resistori in parallelo:

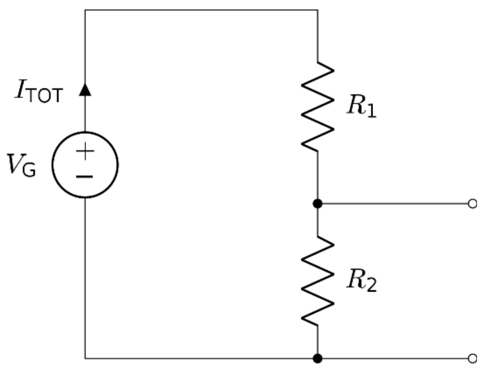
$$R_{eq,parallelo} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Partitore di tensione

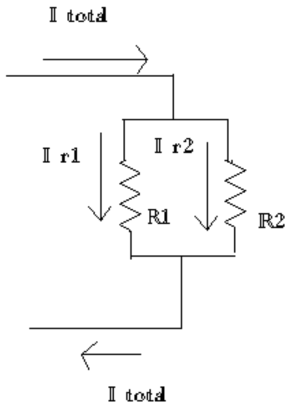
$$V_X = V_{tot} \frac{R_X}{\sum_1^n R_i}$$

Se si hanno solo due resistori:

$$V_1 = V_{tot} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



Partitore di corrente



$$I_X = I_{tot}\frac{G_X}{\sum_1^n G_i}$$

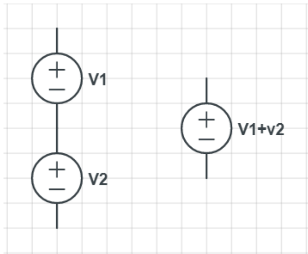
Se si hanno solo due resistori:

$$I_1 = I_{tot}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

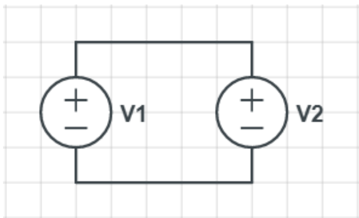
Composizione di generatori impressivi

Generatori di tensione in serie:
Sono equivalenti ad un unico generatore di tensione:

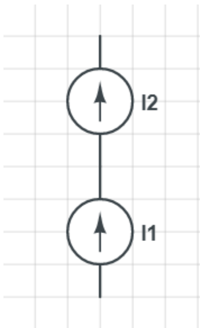
$$V_1 + V_2$$



Generatori di tensione in parallelo:
Deve essere:
$V_1 = V_2$

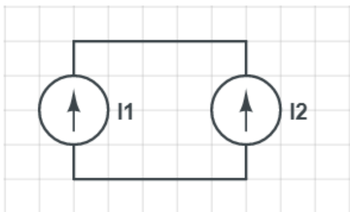


Generatori di corrente in serie:
Deve essere:
$I_1 = I_2$

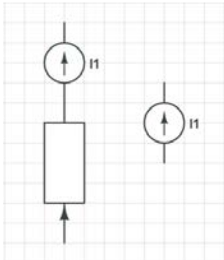


Generatori di corrente in parallelo:
Sono equivalenti ad un unico generatore di corrente pari a:

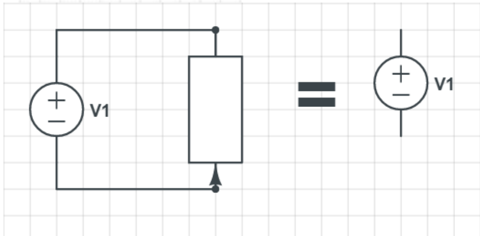
$$I_1 + I_2$$



Generatore di corrente in serie a un generico elemento:
La serie equivale al solo generatore di corrente



Generatore di tensione in parallelo a un generico elemento:
Il parallelo equivale al solo generatore di tensione

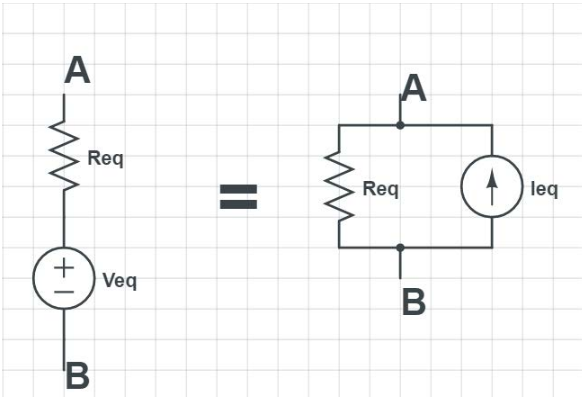


Trasformazione dei generatori

$$I_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}}$$

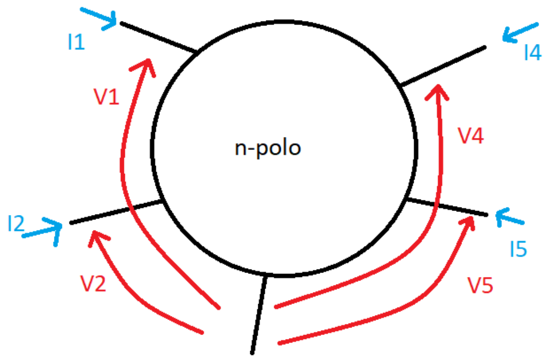
$$V_{eq} = I_{eq}R_{eq} = \frac{I_{eq}}{G_{eq}}$$

Questa trasformazione non è possibile se: $R_{eq} = 0$

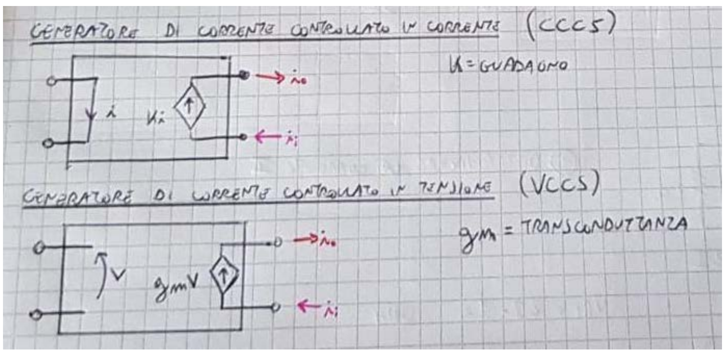


Potenza in un n-polo

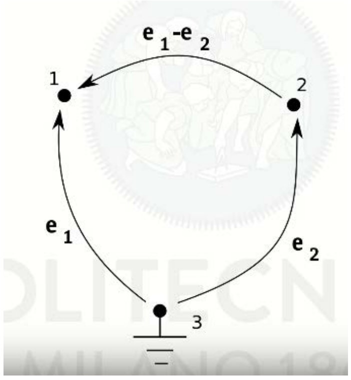
$$P = V_1I_1 + V_2I_2 + V_4I_4 + V_5I_5$$



Generatori pilotati



Potenziale di nodo

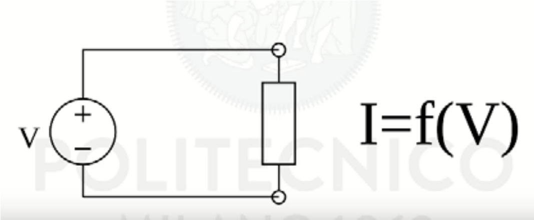


Una volta scelto un nodo di riferimento, il potenziale di nodo di un nodo è la sua tensione rispetto al nodo di riferimento.

$$V_{12} = e_1 - e_2$$

Controllabilità in tensione

Un bipolo è controllabile in tensione se gli si può imporre una tensione ai morsetti senza comprometterne il funzionamento



Metodo di analisi nodale semplice e modificata

1. Scegliere un nodo di riferimento
2. Enumerare gli altri nodi
3. Scrivere le correnti di lato in funzione dei potenziali di nodo
   Se non tutti i lati sono controllabili in tensione: analisi nodale modificata
   a. +1 variabile ausiliaria per ogni lato non controllabile in tensione
   b. +1 equazioni aggiuntive (branch equation) per ogni lato non controllabile in tensione
4. Scrivere le LKC a tutti i tagli nodali tranne quello al nodo di riferimento
5. Le LKC sono un sistema con i potenziali di nodo (e le variabili ausiliarie se ce ne sono) come incognite: risolvere il sistema
6. Sostituire i valori trovati nelle relazioni del punto 3 per avere tutte le correnti e le tensioni della rete

N.B. è possibile utilizzare un super-nodo comprendente più nodi: questo avrà la sua LKC e una sua branch equation

Metodo di analisi nodale semplice per ispezione

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}$$

Scrivo la matrice dei coefficienti:

- Diagonale principale in posizione x, x: somma delle conduttanze che arrivano al nodo x
- Fuori dalla diagonale, in posizione i, j: conduttanza tra i nodi i e j cambiata di segno

Scrivo il vettore dei termini noti:

- Riga i: valore del generatore di corrente entrante nel nodo i

Principio di sovrapposizione degli effetti

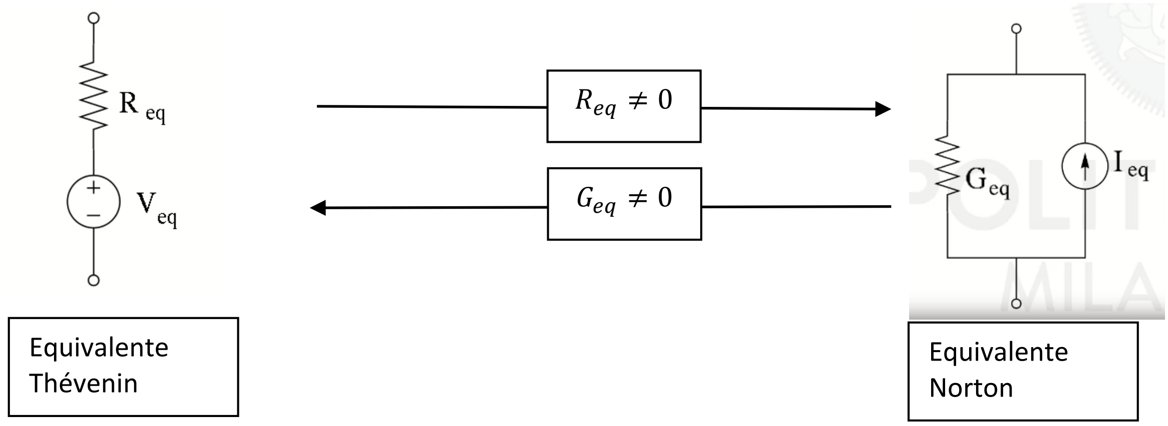
Se il sistema è lineare: effetto di più cause = somma degli effetti di ogni causa presa singolarmente

In elettrotecnica: cause = generatori impressivi; effetti = tensioni e correnti della rete

Generatore di tensione spento -> Generatore di tensione 0 -> corto circuito

Generatore di corrente spento -> Generatore di corrente 0 -> circuito aperto

Equivalenti Thévenin e Norton



Equivalente Thévenin: $V_{eq} = V_{c.a.(circuito\ aperto\ ai\ capi)}$

Equivalente Norton: $I_{eq} = I_{c.c.(corto\ circuito\ ai\ capi)}$

N.B. non può essere contemporaneamente $V_{eq} \neq 0$ e $I_{eq} \neq 0$ altrimenti non esiste nessun equivalente

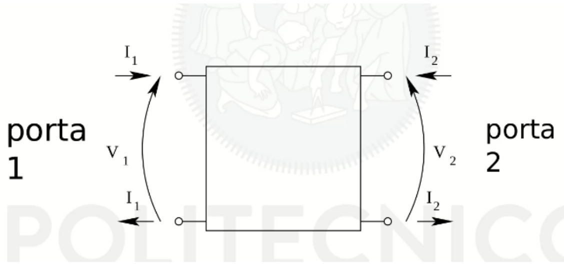
Calcolo di R_{eq}: 3 metodi

1. $R_{eq} = \frac{V_{eq}}{I_{eq}}$
2. Spegnere i generatori impressivi e se possibile ridurre l'intero circuito ad una resistenza equivalente R_{eq}
   Un generatore di tensione spento equivale a un corto circuito ($v = 0$), un generatore di corrente spento a un circuito aperto ($i = 0$).
3. Metodo dei generatori di sonda: spengo i generatori impressivi e attacco un generatore di sonda con corrente I_S e tensione V_s secondo la convenzione degli utilizzatori, poi calcolare:
   $R_{eq} = \frac{V_s}{I_s}$ oppure $G_{eq} = \frac{I_s}{V_s}$
   Generalmente conviene, ma non è obbligatorio:
   - Se si cerca equivalente Thévenin utilizzare un generatore di corrente di sonda I_s e cercare $R_{eq} = \frac{V_s}{I_s}$
   - Se si cerca equivalente Norton utilizzare un generatore di tensione di sonda V_s e cercare $G_{eq} = \frac{I_s}{V_s}$

Se è più facile trovare un equivalente rispetto all'altro, si può trovare quello e poi passare all'altro

Doppi Bipoli

Le relazioni tensione-corrente legano tra loro tutte e 4 le grandezze I_1, I_2, V_1, V_2



FORMULAZIONE IMPLICITA

$$\begin{cases} aV_1 + bI_1 + cV_2 + dI_2 + e = 0 \\ fV_1 + gI_1 + hV_2 + kI_2 + m = 0 \end{cases}$$

FORMULAZIONE CONTROLLATA IN CORRENTE (R)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{V_1} \\ \widehat{V_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_1 = r_{1,1}I_1 + r_{1,2}I_2 + \widehat{V_1} \\ V_2 = r_{2,1}I_1 + r_{2,2}I_2 + \widehat{V_2} \end{cases}$$

FORMULAZIONE CONTROLLATA IN TENSIONE (G)

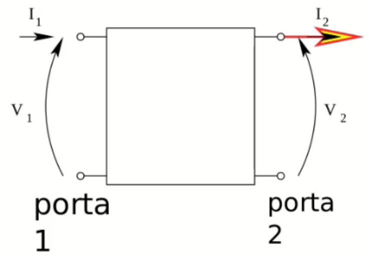
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{I_1} \\ \widehat{I_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} I_1 = g_{1,1}V_1 + g_{1,2}V_2 + \widehat{I_1} \\ I_2 = g_{2,1}V_1 + g_{2,2}V_2 + \widehat{I_2} \end{cases}$$

FORMULAZIONE IBRIDA 1 (H / H' / H1)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{V_1} \\ \widehat{I_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_1 = h_{1,1}I_1 + h_{1,2}V_2 + \widehat{V_1} \\ I_2 = h_{2,1}I_1 + h_{2,2}V_2 + \widehat{I_2} \end{cases}$$

FORMULAZIONE IBRIDA 2 (H' / H'' / H2)

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{1,1} & h'_{1,2} \\ h'_{2,1} & h'_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{I_1} \\ \widehat{V_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} I_1 = h'_{1,1}V_1 + h'_{1,2}I_2 + \widehat{I_1} \\ V_2 = h'_{2,1}V_1 + h'_{2,2}I_2 + \widehat{V_2} \end{cases}$$



FORMULAZIONE DI TRASMISSIONE DIRETTA

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{V_1} \\ \widehat{I_1} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_1 = t_{1,1}V_2 + t_{1,2}I_2 + \widehat{V_1} \\ I_1 = t_{2,1}V_2 + t_{2,2}I_2 + \widehat{I_1} \end{cases}$$

Oppure, per non cambiare convenzione di segno, usando la classica del bipolo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_{2,p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{V_1} \\ \widehat{I_1} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_1 = t_{1,1}V_2 + t_{1,2}I_2 + \widehat{V_1} \\ I_1 = t_{2,1}V_2 + t_{2,2}I_2 + \widehat{I_1} \end{cases}$$

Per il calcolo delle formulazioni di trasmissione diretta e inversa, si prende come convenzione di segno il verso di I_2 come in figura.
Oppure, per restare fedeli alla convenzione del doppio bipolo, si usa $I_{2,p} = -I_2$ in figura.

FORMULAZIONE DI TRASMISSIONE INVERSA

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{1,1} & t'_{1,2} \\ t'_{2,1} & t'_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{V_2} \\ \widehat{I_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_2 = t'_{1,1}V_1 + t'_{1,2}I_1 + \widehat{V_2} \\ I_2 = t'_{2,1}V_1 + t'_{2,2}I_1 + \widehat{I_2} \end{cases}$$

Oppure, per non cambiare convenzione di segno:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_{2,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{1,1} & t'_{1,2} \\ t'_{2,1} & t'_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{V_2} \\ \widehat{I_2} \end{bmatrix}$$

Metodo delle prove semplici

- Calcolo i termini noti imponendo le controllanti a 0
- Calcolo i coefficienti in un sistema omogeneo (generatori impressivi spenti) considerando nulli i termini noti

ESEMPIO:

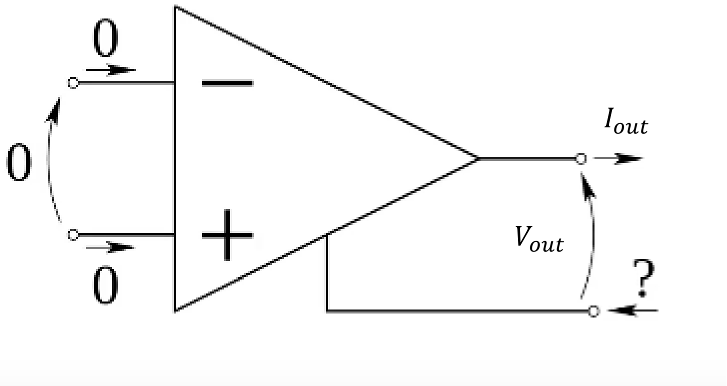
$$\begin{cases} V_1 = r_{1,1}I_1 + r_{1,2}I_2 + \widehat{V_1} \\ V_2 = r_{2,1}I_1 + r_{2,2}I_2 + \widehat{V_2} \end{cases}$$

$\widehat{V_1} = V_1(I_1 = 0, I_2 = 0)$; ... ; $r_{1,1} = \frac{V_1}{I_1}$ con $I_2 = 0$; $r_{1,2} = \frac{V_1}{I_2}$ con $I_1 = 0$; (uso come generatore di sonda la quantità al denominatore)

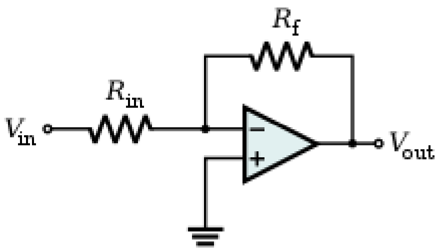
Passare da una formulazione ad un'altra

1) Scrivere la formulazione corrente in forma di sistema
2) Portare a sinistra dell'uguale le variabili controllate nella formulazione cercata e a destra tutto il resto
3) Controllare esistenza della formulazione cercata: scrivere la matrice A contenente i coefficienti delle variabili controllate nella nuova formulazione e verificare sia $\det(A) \neq 0$
4) Portare il sistema ottenuto al punto 2 in forma matriciale e moltiplico a destra e a sinistra per la matrice A^{-1}

Amplificatore operazionale ideale

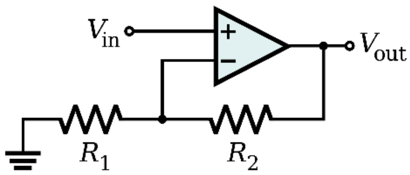


$$P_{out} = I_{out} V_{out}$$



STADIO INVERTENTE:

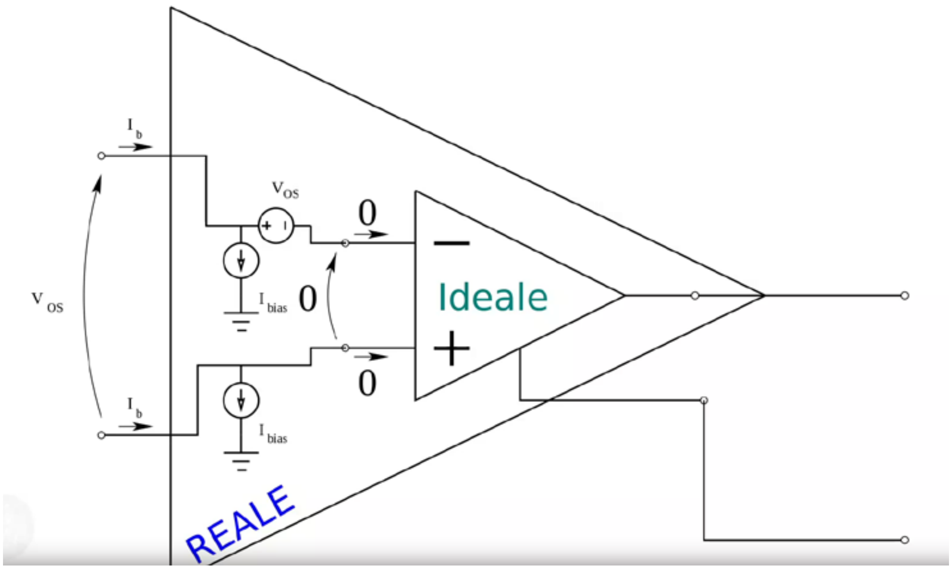
$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_{in}} V_{in}$$



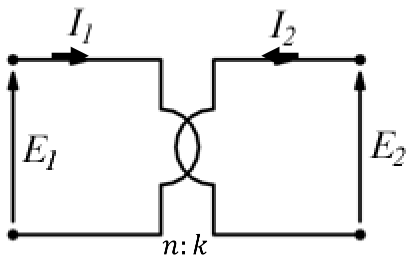
STADIO NON INVERTENTE:

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{in}$$

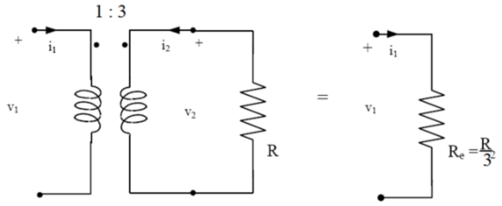
Amplificatore operazionale reale



Trasformatore ideale



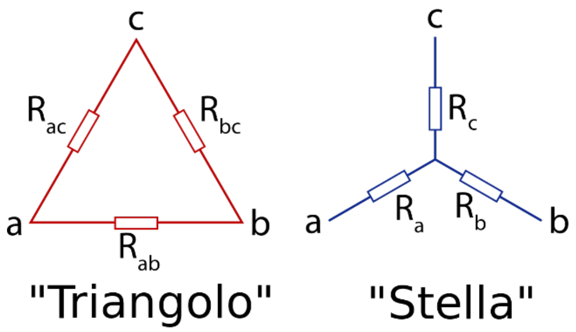
$$\begin{cases} V_1 = \frac{n}{k} V_2 \\ I_1 = -\frac{k}{n} I_2 \end{cases}$$



Un trasformatore ideale di rapporto $n: k$ con una resistenza R dalla parte della k è equivalente a una:

$$R_{eq} = \left(\frac{n}{k}\right)^2 R$$

Trasformazioni Stella-Triangolo



Trasformazione triangolo -> stella:

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

Trasformazione stella -> triangolo:

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}$$

Definizioni di bipoli

BIPOLO ADINAMICO: ha equazione del tipo $aV + bI + c = 0$

Se $c = 0$ è un resistore, se $c \neq 0, a = 0$ è un generatore di corrente, se $c \neq 0, b = 0$ è un generatore di tensione.

BIPOLO PASSIVO: la sua caratteristica sta solo nel primo e nel terzo quadrante

BIPOLO DINAMICO: ha equazione contenente una dipendenza da una derivata di tensione o corrente rispetto al tempo

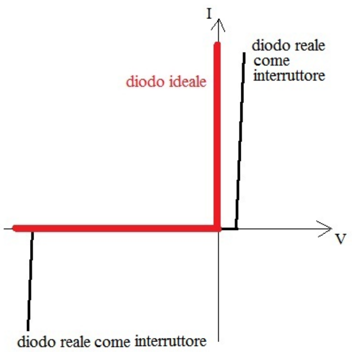
CONTROLLABILE IN TENSIONE: se impongo un valore di tensione, ottengo un solo valore della corrente

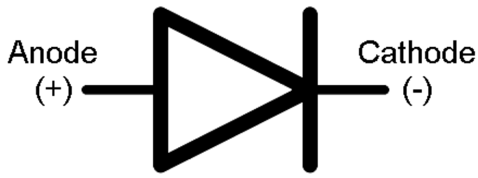
CONTROLLABILE IN CORRENTE: se impongo un valore di corrente, ottengo un solo valore della tensione

BIPOLO LINEARE O AFFINE: la sua caratteristica è una retta

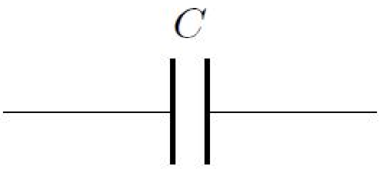
BIPOLO RESISTIVO: si può scrivere $f(V, I) = 0$

Diodo





Condensatore



$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$

Carica: $q = CV$ Energia: $\omega(t) = \frac{1}{2}Cv_C{}^2(t)$

Campo elettrico tra le armature $\vec{E} = \frac{V}{d}$ dove d è la distanza tra le armature.

$C = k\varepsilon_0\frac{A}{d}$ dove k è la costante dielettrica del materiale tra le armature.

Relazione inversa: $V(t) = V(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(x)dx$

N.B. Carica = aumento energia accumulata; Scarica = diminuzione energia accumulata; attenzione a usare i termini carica e scarica.

Se $V = cost.$ Allora il condensatore equivale ad un circuito aperto.

La tensione ai capi di un condensatore, che è la sua variabile di stato, è sempre una funzione continua.

Il condensatore non dissipa energia, la immagazzina e poi la rilascia. Il condensatore è un elemento lossless, cioè non ha perdite di energia: $P_{assorbita,tot} = P_{ceduta,tot}$

$$P_{istantanea} = v(t)i(t) = v(t)C\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}CV^2(t)\right]$$

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}CV^2(t)\right] = \frac{1}{2}C[V^2(t_1) - V^2(t_0)]$$

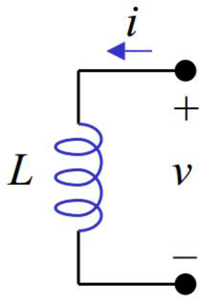
CONDENSATORI IN SERIE:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum\nolimits_k \frac{1}{C_k}$$

CONDENSATORI IN PARALLELO:

$$C_{eq} = \sum\nolimits_k C_k$$

Induttore



$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

Flusso magnetico nell'avvolgimento: $\Phi = Li$ Energia: $\omega(t) = \frac{1}{2}Li_L{}^2(t)$

$L = \mu\frac{N^2A}{l}$ dove μ è la permeabilità magnetica del nucleo

Relazione inversa: $i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(x)dx$

Se $I = cost.$ Allora l'induttore equivale ad un corto circuito.

La corrente in un induttore, che è la sua variabile di stato, è sempre una funzione continua.

L'induttore non dissipa energia, la assorbe e poi la rilascia.

$$P_{istantanea} = v(t)i(t) = I(t)L\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}LI^2(t)\right]$$

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}LI^2(t)\right] = \frac{1}{2}L[I^2(t_1) - I^2(t_0)]$$

INDUTTORI IN SERIE:

$$L_{eq} = \sum\nolimits_k L_k$$

INDUTTORI IN PARALLELO:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum\nolimits_k \frac{1}{L_k}$$

RIPASSO

Numero complesso:

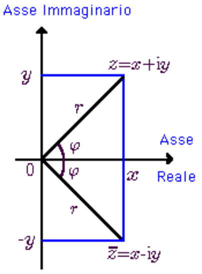
Forma algebrica: $z = x + jy$

$|z| = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$ $\angle z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi$

Forma trigonometrica: $z = |z|(\cos(\angle z) + j\sin(\angle z))$

Forma esponenziale: $z = |z|e^{j\angle z}$

Complesso coniugato: $z^* = \bar{z} = x + jy$



Regime alternato sinusoidale (R.A.S.)

Sinusoide: $A\cos(\omega t + \phi)$

A = ampiezza; ω = pulsazione $\left[{}^{rad}/_{s}\right]$; ϕ = fase; $\omega = 2\pi f$ dove f = frequenza

In regime alternato sinusoidale tutte le grandezze della rete hanno stessa pulsazione ω

Ad una sinusoide può corrispondere un fasore:

$$A\cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow Ae^{j\phi}$$

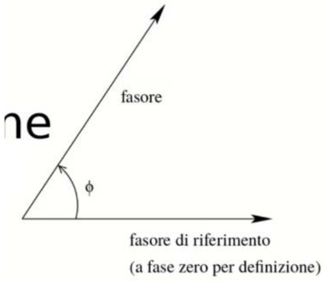
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$
$$-\cos(\alpha) = \cos(\alpha \pm \pi)$$

In una rete in regime alternato sinusoidale i fasori fanno tutti parte dello spazio dei fasori alla pulsazione ω della rete. Un fasore è composto da modulo e fase, e fa riferimento sempre ad un altro fasore, in genere detto fasore di riferimento con fase pari a 0.

Derivata di un fasore rispetto al tempo: $y(t) = \dot{x}(t) \leftrightarrow \bar{Y} = j\omega\bar{X}$

Per indicare il modulo si possono usare:

- Le ampiezze: A
- I valori efficaci: $A_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ N.B. $A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A^2(t)dt}$



Impedenza e ammettenza

$Z\ [\Omega]$ Impedenza

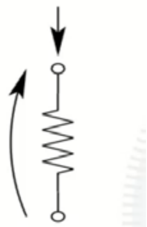
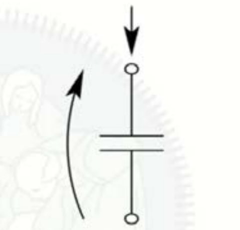
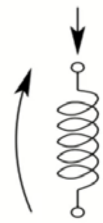
$Z = R + jX$ Impedenza complessa dove R è la resistenza e X la reattanza

$Y = {}^{1}/_{Z}\ [S]$ Ammettenza

$Y = G + jB$ Ammettenza complessa dove G è la conduttanza e B la suscettanza

N.B. $\angle Z = -\angle Y$

Se R eG sono le parti reali di impedenza e ammettenza, in genere $R \neq {}^{1}/_{G}$

	 Resistore	 Condensatore	 Induttore
Dominio del tempo	$V_R(t) = Ri_R(t)$	$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$	$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$
Dominio dei fasori $\bar{V} = Z\bar{I}$	$Z_R = R$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$	$Z_L = j\omega L$

IMPEDENZA RESISTIVA: $Im(Z) = 0$
IMPEDENZA INDUTTIVA: $Im(Z) > 0$
IMPEDENZA CAPACITIVA : $Im(Z) < 0$

Composizioni di:
R e L: $X \geq 0$
R e C: $X \leq 0$

Metodo simbolico dei fasori

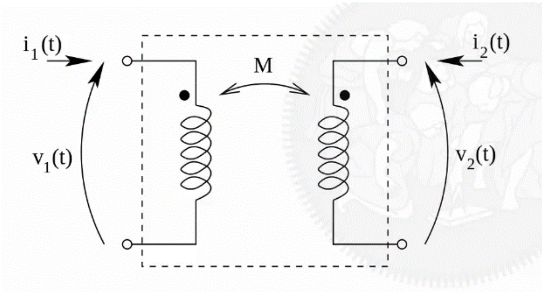
1. Sostituisco ogni generatore indipendente con un generatore costante pari al fasore
2. Sostituisco ogni tensione o corrente con il fasore corrispondente
3. Sostituisco a resistori, condensatori e induttori le rispettive impedenze
4. Ricavo i fasori di interesse
5. Dai fasori ricavati so modulo e argomento delle grandezze cercate

Sovrapposizione di regimi sinusoidali

1. Suddivido i generatori indipendenti in gruppi in base alla loro pulsazione ω o frequenza f
2. Accendo un gruppo di generatori alla volta, lasciando gli altri spenti, e ricavo le grandezze cercate con il metodo dei fasori
3. Sommo i risultati ottenuti

Induttori mutuamente accoppiati

Simbolo grafico: punta delle frecce di i e v sono rivolte verso il pallino



Dominio del tempo:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} + L_M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_M \dfrac{di_1(t)}{dt} + L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

Dominio dei fasori: (Regime alternato sinusoidale)

$$\begin{cases} \bar{V_1} = j\omega L_1 \bar{I_1} + j\omega L_M \bar{I_2} \\ \bar{V_2} = j\omega L_M \bar{I_1} + j\omega L_2 \bar{I_2} \end{cases}$$

Coefficiente di accoppiamento:

$$k = \frac{L_M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$k \to 0$ induttori non accoppiati; $k \to 1$ induttori in accoppiamento totale;

Induttori mutuamente accoppiati in serie: $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2L_M$

Induttori mutuamente accoppiati in parallelo: $L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - {L_M}^2}{L_1 + L_2 - 2L_M}$

Potenza in R.A.S.

Dominio del tempo: $p(t) = v(t)i(t)$ con potenza media: $P = \frac{1}{T}\int_o^T [v(t)i(t)]\, dt$

In regime alternato sinusoidale: potenza complessa S

$S = P + jQ$

Dove P è la **potenza attiva** e Q la **potenza reattiva**. Nelle applicazioni, il lavoro è compito dalla potenza attiva.

$$S = \begin{cases} \bar{V}_{eff} \bar{I}^*{}_{eff} & \text{con valori efficaci} \\ \dfrac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* & \text{con le ampiezze} \end{cases}$$

P assorbita dai resistori Q assorbita dai condensatori

$S = |S| \cos\varphi + j|S| \sin\varphi$ $\qquad$ $|S|$ è detta potenza apparente

Fattore di potenza: $\cos\varphi = \frac{P}{|S|}$ $\qquad$ ricordare: $\frac{Q}{P} = \tan\varphi$ $\quad \angle S = \varphi = \angle V - \angle I$

$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I} e^{(\angle V - \angle I)}$ (senza fattore $\frac{1}{2}$ se si usano valori efficaci)

Corrente continua (D.C.)	R.A.S.
$P = VI = (RI)I = RI^2$	$S = \bar{V}_{eff} \bar{I}^*{}_{eff} = (Z\bar{I}_{eff})\bar{I}^*{}_{eff} = Z\lvert\bar{I}_{eff}\rvert^2$
$P = VI = V\left({}^{V}\!/_{R}\right) = {}^{V^2}\!/_{R}$	$S = \bar{V}_{eff} \bar{I}^*{}_{eff} = \bar{V}_{eff} \left({}^{\bar{V}_{eff}}\!/_{Z}\right)^* = {}^{\lvert\bar{V}_{eff}\rvert^2}\!/_{Z^*}$

Aggiungendo il fattore 1/2 si ottengono le formule con le ampiezze al posto che i valori efficaci.

<u>TEOREMA DI BOUCHEROT</u>: La potenza reale (attiva) assorbita da un circuito complesso corrisponde sempre alla somma aritmetica delle singole potenze attive dissipate da ogni singolo resistore.

La potenza complessa assorbita da un bipolo è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dagli elementi che lo compongono. Lo stesso vale per la potenza attiva e per la potenza reattiva.

Potenza complessiva totale assorbita = somma delle singole potenze complesse assorbite

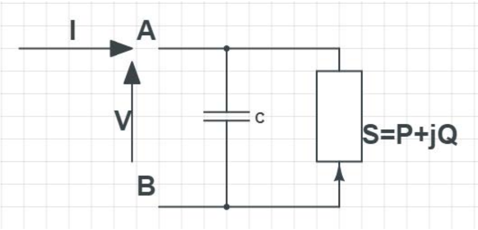
$$\sum_i S_i = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_i P_i = 0 \\ \sum_i Q_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum S_{utilizzatori} = \sum S_{generatori} \\ \sum P_{utilizzatori} = \sum P_{generatori} \\ \sum Q_{utilizzatori} = \sum Q_{generatori} \end{cases}$$

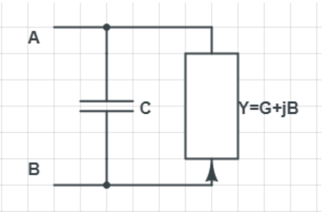
<u>CAPACITA' DI RIFASAMENTO</u>:

Si vuole aumentare il valore di $\cos\varphi$ aggiungendo un condensatore che assorba $Q < 0$

$$C = \frac{Q_{pre-rifasamento} - Q_{post-rifasamento}}{\omega {V_{eff}}^2} = \frac{P\tan(\varphi) - P\tan(\varphi_{Rifasato})}{\omega {V_{eff}}^2}$$



In generale per rifasamento serve una potenza reattiva $\Delta Q = Q_{non\,rifasato} - Q_{Rifasato} = Q - Q_R$ Dove $Q = P\tan(\varphi)$ e $Q_R = P\tan(\varphi_{Rifasato})$



Conoscendo la conduttanza $Y_L = \frac{1}{Z_L}$ da rifasare, si trovi e la suscettanza B_L e si imponga che:

$$B_L + B_C = 0$$

Dove $B_C = \omega C$ è la suscettanza del condensatore utilizzato per il rifasamento.

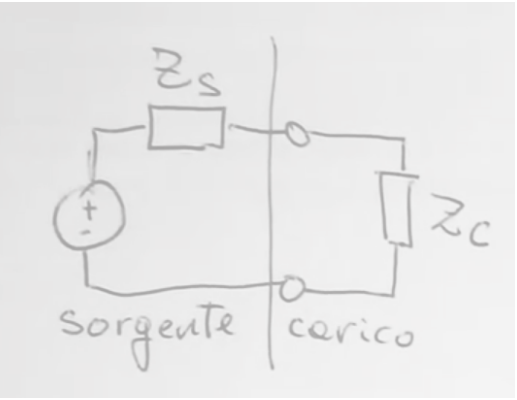
Massimo trasferimento di potenza

Condizione di massimo trasferimento di potenza:

$$Z_s = Z^*_c$$

Oppure:

$Z^*_s = Z_c$; $\qquad Y_s = Y^*_c$; $\qquad Y^*_s = Y_c$;



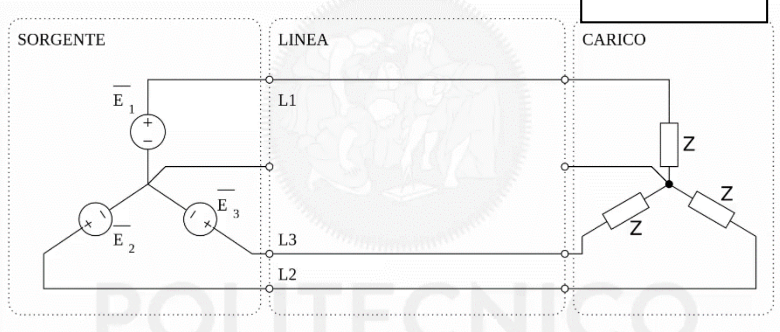
Attenzione: per utilizzare questa condizione, Z_s deve essere fissato a priori

Potenza disponibile: $\qquad P_{disp} = \frac{|V_S|^2}{8R_s}$

Bipoli passivi	$P \geq 0$
Bipoli resistivi	$Q = 0$
Bipoli reattivi	$P = 0$
Bipoli induttivi	$Q > 0$
Bipoli capacitivi	$Q < 0$

Trifase

Carico a stella

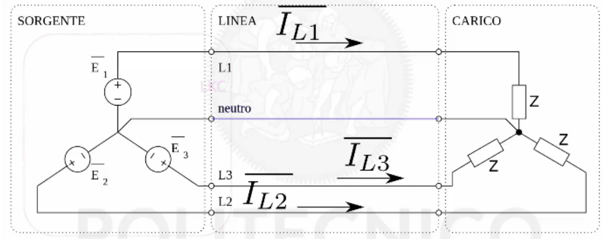


Tensioni e correnti godono di una certa simmetria:

$$\begin{cases} \overline{E_2} = \overline{E_1} e^{j\frac{2}{3}\pi} \\ \overline{E_3} = \overline{E_1} e^{j\frac{4}{3}\pi} \end{cases}$$

Tensioni della sorgente sono uguali in modulo e sfasate tra loro di 120°

La stessa cosa vale per le correnti di linea:



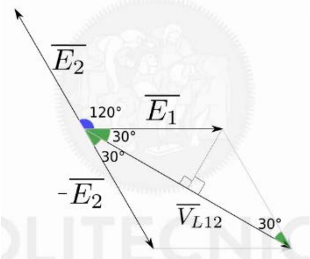
$$\begin{cases} \overline{I_{L2}} = \overline{I_{L1}} e^{j\frac{2}{3}\pi} \\ \overline{I_{L3}} = \overline{I_{L1}} e^{j\frac{4}{3}\pi} \end{cases}$$

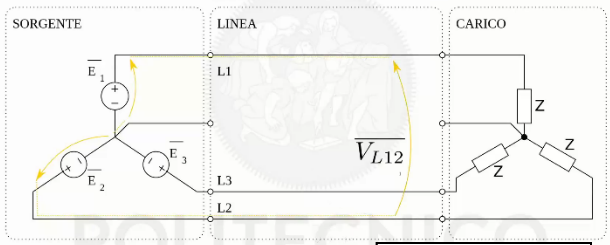
La corrente di neutro è nulla, infatti LKC: $\overline{I_{neutro}} = \sum_{i=1}^{3} \overline{I_{Li}} = 0$

Si ricava che: $V_{LINEA} = \sqrt{3} V_{FASE}$

Infatti:

$$V_{LINEA} = |\overline{V_{L12}}| = \overline{E_1} - \overline{E_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{E_1}| + \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{E_1}| = \sqrt{3}|\overline{E_1}| = \sqrt{3} V_{FASE}$$

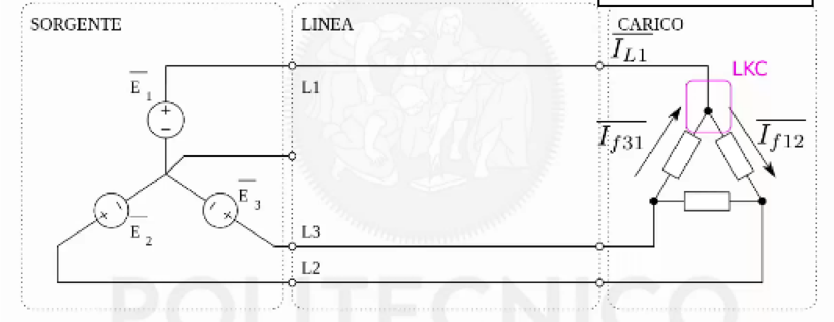




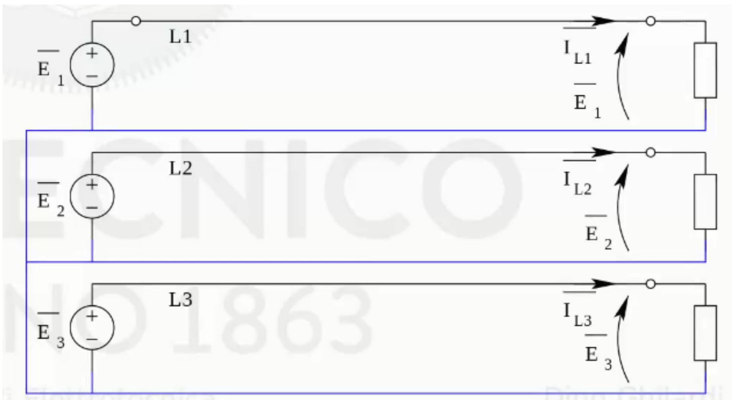
Il carico può essere sia a stella che a triangolo.
Le due forme sono equivalenti e si può passare da una all'altra.
Nell carico a triangolo si ricava che:

$I_{LINEA} = \sqrt{3} I_{FASE}$

Carico a triangolo



Grazie al neutro, una rete con carico a stella può essere ridisegnata come la composizione di tre reti monofase studiabili singolarmente.
Si possono fare i calcoli per una rete e poi ricavare i dati delle altre con maggiorazioni di multipli di $\frac{2}{3}\pi$



Vale:

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{P_{tot}}{3}$$

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = P_1 + P_2 + P_3 = 3\frac{P}{3} = P$$

In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante.

Carico a stella: $I_F = I_L$ $\quad V_L = \sqrt{3} V_F$

Carico a triangolo: $V_F = V_L$ $\quad I_L = \sqrt{3} I_F$

$P_{tot} = 3 V_F I_F \cos\varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi$

$Q_{tot} = 3 V_F I_F \sin\varphi = \sqrt{3} V_L I_L \sin\varphi$ $\quad Q_z = P_z \tan\varphi$

Rifasamento di un carico trifase:

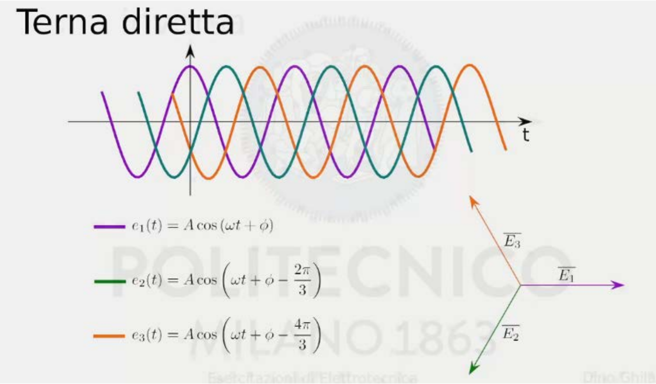
stella: $C_S = \frac{P\tan(\varphi) - P\tan(\varphi_{Rifasato})}{\omega V_\ell^2}$

triangolo: $C_T = \frac{P\tan(\varphi) - P\tan(\varphi_{Rifasato})}{3\omega V_\ell^2}$

<u>Terna diretta</u>

$$\begin{cases} e_1(t) = A\cos(\omega t + \phi) \\ e_2(t) = A\cos\left(\omega t + \phi - \dfrac{2}{3}\pi\right) \\ e_3(t) = A\cos\left(\omega t + \phi - \dfrac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$$

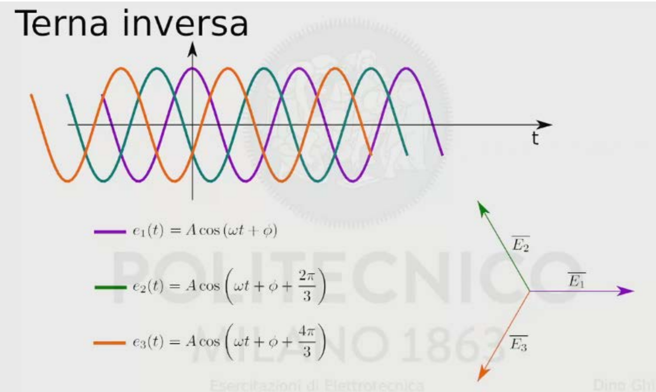
Fase $i + 1$ in ritardo di $\frac{2}{3}\pi$ rispetto a fase i.



<u>Terna inversa</u>

$$\begin{cases} e_1(t) = A\cos(\omega t + \phi) \\ e_2(t) = A\cos\left(\omega t + \phi + \dfrac{2}{3}\pi\right) \\ e_3(t) = A\cos\left(\omega t + \phi + \dfrac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$$

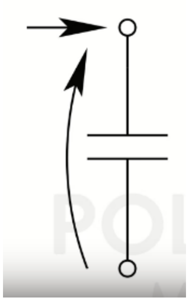
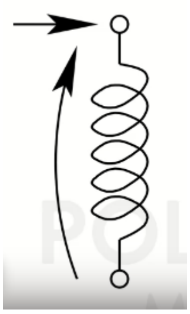
Fase $i + 1$ in anticipo di $\frac{2}{3}\pi$ rispetto a fase i.



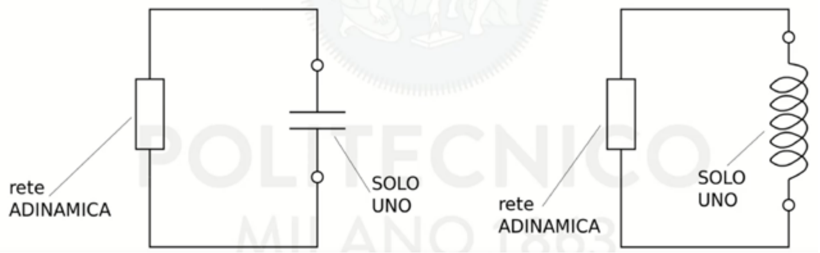
$$Q > 0 \Leftrightarrow \text{ carico induttivo } \Leftrightarrow \; i \text{ in ritardo rispetto a } v$$
$$Q < 0 \Leftrightarrow \text{ carico capacitivo } \Leftrightarrow \; i \text{ in anticipo rispetto a } v$$

Circuiti del primo ordine

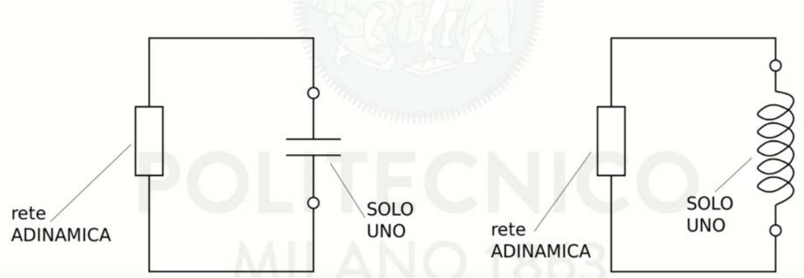
Ordine di una rete: numero di elementi dinamici presenti nella rete

CONDENSATORE	INDUTTORE
 $$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$ $v_C(t)$ è variabile di stato del condensatore Corrente e tensione sono sempre definite, quindi la tensione sul condensatore deve essere sempre continua: $v_C(t)$ continua	 $$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$ $i_L(t)$ è variabile di stato del condensatore Corrente e tensione sono sempre definite, quindi la corrente nell'induttore deve essere sempre continua: $i_L(t)$ continua

Rete del primo ordine: solo un elemento dinamico presente nella rete



Transitori nelle reti del primo ordine



A seconda della rete adinamica collegata all'elemento dinamico, ci si può trovare in tre casi differenti che corrispondono a diversi tipi di transitori.

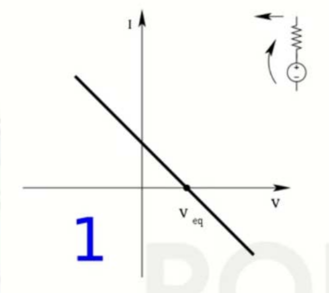
<u>SCRITTURA DELLE EQUAZIONI DI STATO</u>:

1. Scrivere le duali delle variabili di stato in funzione delle variabili di stato
2. Sostituire le duali delle variabili di stato con la loro espressione derivata dalla relazione costitutiva degli elementi dinamici
3. Ordinare i termini (derivate a sinistra dell'uguale)

Per le reti del primo ordine l'equazione di stato è solo una

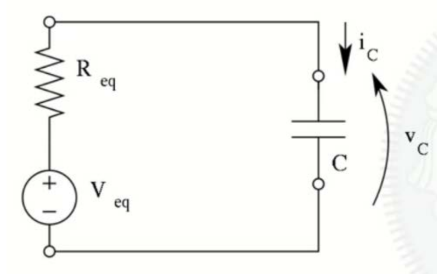
Formula: $\tau \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_c(\infty)$

CASO 1: LA RETE ADINAMICA HA SIA EQUIVALENTE NORTON CHE EQUIVALENTE THEVENIN



L'equazione di stato ha forma esponenziale:

$$v_C(t) = V_{C,\infty} + \left(V_{C,0} - V_{C,\infty}\right)e^{-t/\tau}$$



τ è la costante di tempo del sistema.

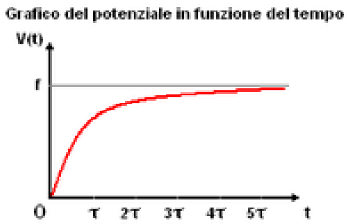
Tutte le tensioni e le correnti della rete hanno questo andamento, con la stessa costante di tempo.

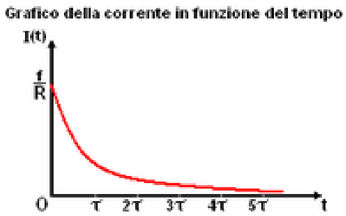
In caso di rete con un condensatore:

$\tau = R_{eq}C$

In caso di rete con un induttore:

$\tau = {}^{L}/_{R_{eq}}$



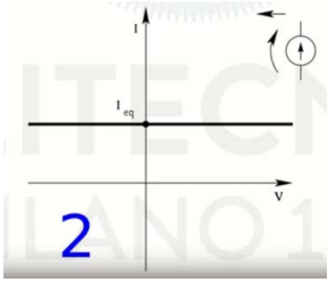


Dove R_{eq} è la resistenza equivalente del sistema vista dai morsetti dell'elemento dinamico.

Per disegnare:

- la tangente all'esponenziale quando $t = 0$ interseca il valore asintotico in $t = \tau$
- per $t = \tau$ la curva ha gia percorso il 64% della distanza tra il valore iniziale e quello asintotico, per $t = 5\tau$ il 99,3% e il transitorio è praticamente esaurito

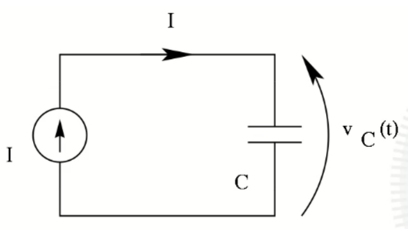
CASO 2: LA RETE ADINAMICA HA SOLO EQUIVALENTE NORTON, NON ESISTE EQUIVALENTE THEVENIN

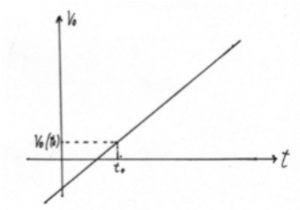


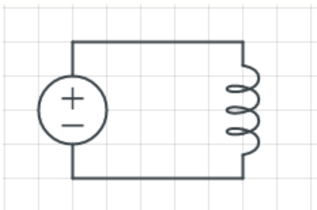
L'equazione di stato ha forma di una rampa:

$$v_C(t) = V_{C,0} + \frac{I_C}{C}(t - T_0)$$

$$i_L(t) = I_{L,0} + \frac{V_L}{L}(t - T_0)$$







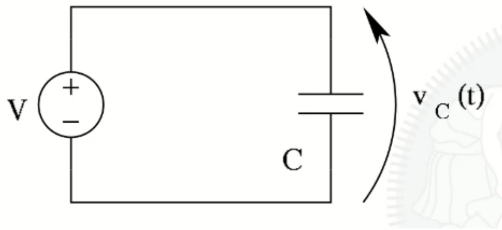
CASO 3: LA RETE ADINAMICA HA SOLO EQUIVALENTE THEVENIN, NON ESISTE EQUIVALENTE NORTON

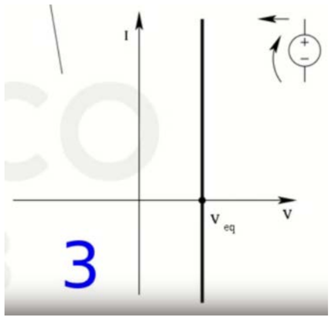
$$v_C(t) = V$$

Degenerazione: legame tra le variabili di stato

Con una degenerazione la rete di ordine n si comporta come una rete di ordine $n-1$.

In questo caso la rete, originariamente di ordine 1, si comporta come una rete di ordine 0: non ha più "dinamica".





Procedimento per le reti con generatori costanti

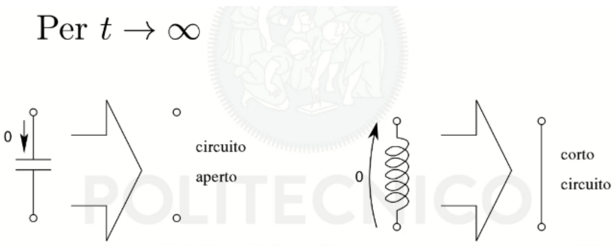
1. Supporre che il risultato sia esponenziale
2. Calcolare:
   - Valore iniziale
   - Valore asintotico
   - costante di tempo
3. Se il valore asintotico e la costante di tempo non esistono, la soluzione è una rampa
4. Se la costante di tempo è 0, ho una degenerazione e non c'è transitorio

CALCOLO DEI VALORI ASINTOTICI:

Supponiamo che la soluzione sia un esponenziale con $\tau > 0$

Per $t \to \infty$ tutte le tensioni e le correnti diventano costanti.

Posso sostituire i condensatori e gli induttori rispettivamente con dei circuiti aperti o dei corto circuiti.



CALCOLO DEI VALORI INIZIALI:

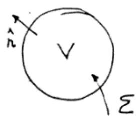
Calcolare il valore delle variabili di stato subito prima dell'inizio del transitorio. Le variabili di stato sono continue, quindi il valore iniziale delle variabili di stato (subito dopo l'inizio del transitorio) è uguale al valore prima dell'inizio del transitorio. Questo è sicuramente vero solo per le variabili di stato.

Quindi se il transitorio inizia in $t = 0$ e se v è una variabile di stato:

$$v(0^-) = v(0^+)$$

Circuiti Magnetici

Potenziale elettrico tra due punti: $v_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\hat{\ell}$

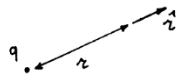


LEGGE DI GAUSS: $\int_\Sigma \vec{E}\hat{n}\, d\sigma = Q_{tot} = \int_V pdV$

Forza elettrica: $\vec{F} = q\vec{E}$

Campo Elettrico: $E\ [V/m] = [N/C]$

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r}$



$F = \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon} q_1 q_2$ dove r è la distanza tra le cariche q ; la forza è attrattiva se cariche hanno segno opposto.

$F = \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon} q$ è la forza esercitata da una carica q su un punto nello spazio a distanza r

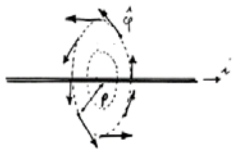
Legame tra carica e tensione: $Q = CV_{AB}$

Legame tra tensione e corrente: $v = Ri$ $\qquad i = Gv$

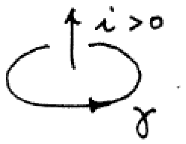
Campo Magnetico: $H\ [A/m]$

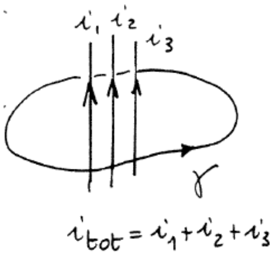
$\vec{H} = \frac{i}{2\pi p}\hat{\varphi}$

(Legge di Biot-Savart)

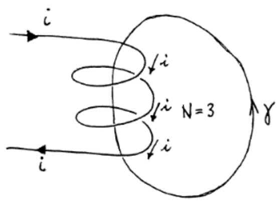


Legge di Ampere: $\oint_\gamma \vec{H}dl = i_{tot}$

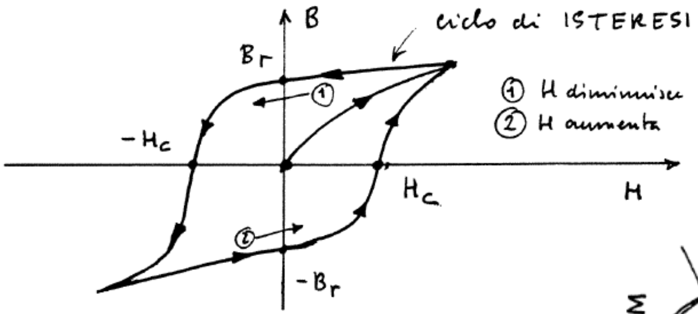




Allora se ci sono N spire concatenate: : $\oint_\gamma \vec{H}dl = Ni$

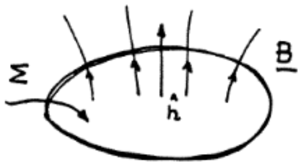


Induzione magnetica (o densità di flusso magnetico): $\vec{B} = \mu\vec{H}$ dove μ è la permeabilità magnetica



Materiali duri: il campo coercitivo H_C, a cui bisogna sottoporre il materiale per smagnetizzarlo o rimagnetizzarlo, è elevato

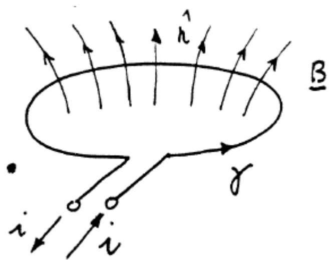
Materiali dolci: H_C basso

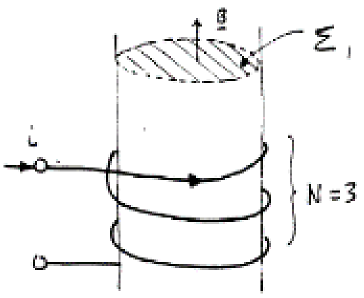


Flusso Magnetico: $\phi = \int_\Sigma \vec{B}\hat{n}d\sigma$

Se $\vec{B}$ è uniforme in Σ e parallelo alla normale, allora $\phi = \vec{B}S$ dove S è l'area della superficie Σ.

Legame tra flusso e corrente: $\phi = Li$





Se si hanno N spire e $\psi = \int_\Sigma \vec{B}\hat{n}d\sigma$ è il flusso attraverso una di esse, allora il flusso totale concatenato alle N spire è:

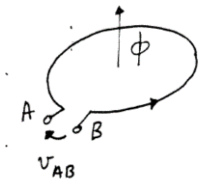
$$\phi = N\psi$$

Induttanza:

$$L = \frac{N^2\mu_0\mu_r S}{l}$$

LEGGE DI FARADAY-LENZ:

$$V_{AB} = -\frac{d\phi}{dt}$$



LEGGE DI HOPKINSON:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\psi$$

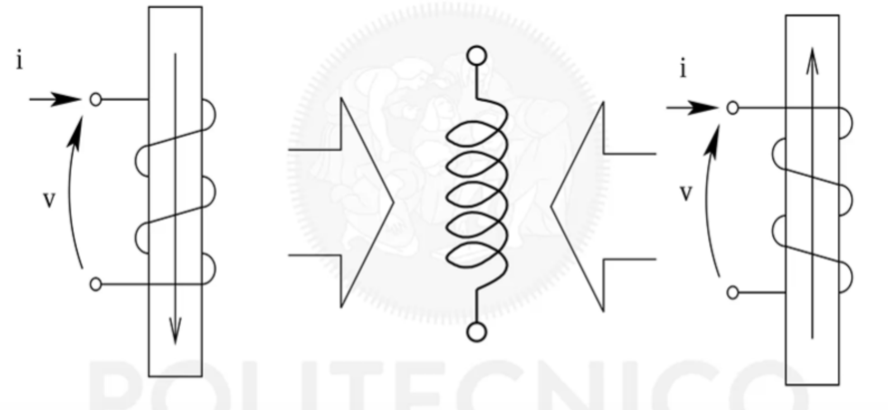
LEGGE DI GAUSS MAGNETICA:

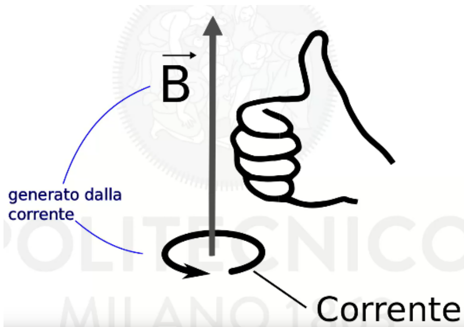
$$\oint_{\Sigma} \vec{B}\hat{n} = 0$$

LKC MAGNETICA:

$$\sum_k \psi_k = 0$$

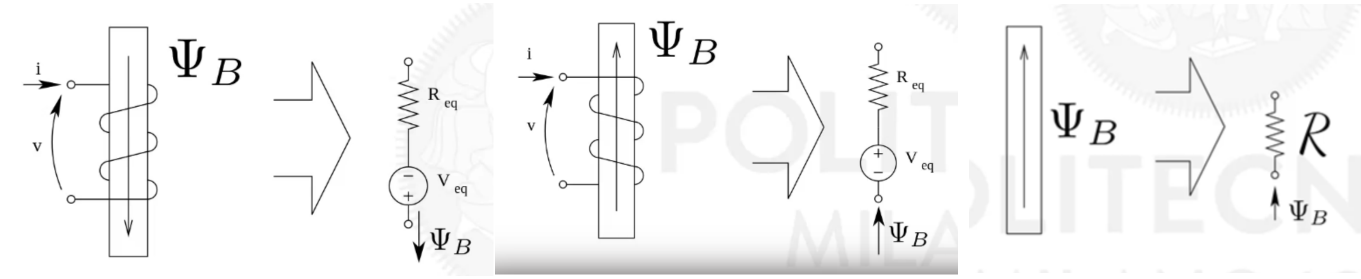
Modello elettrico per lo studio dei circuiti magnetici





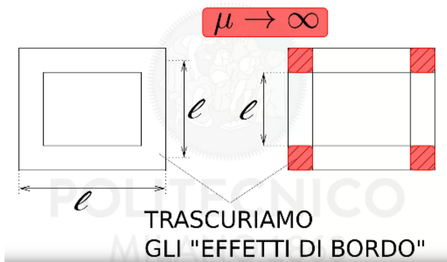
$v = L\frac{di}{dt}$ $\Phi = LI$ $v = \frac{d\Phi}{dt}$

È possibile utilizzare un modello "elettrico" per studiare circuiti magnetici



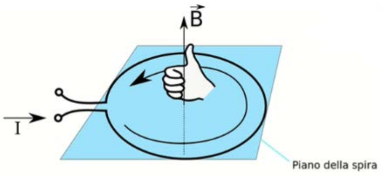
Seconda legge di ohm: $\mathcal{R} = \frac{\ell}{S\mu}$ con $\mu = \mu_r\mu_0$ $V_{eq} = n_{spire}i$

Calcolo il flusso $\psi = \frac{V_{eq}}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{ni}{\mathcal{R}_{eq}}$, poi $\phi = n\psi$ e so che $\begin{cases} v = \frac{d\phi}{dt} \\ v = L\frac{di}{dt} \end{cases}$ da cui: $L = \frac{n^2}{\mathcal{R}_{eq}}$



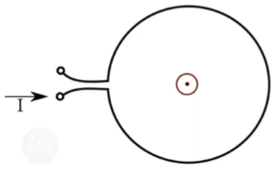
Se ho induttori mutuamente accoppiati mi ritrovo con più generatori di valore ciascuno $N_k i_k$, allora uso sovrapposizione degli effetti calcolando entrambi i flussi ψ_1 e ψ_2. Per ognuno calcolo $\phi = n\psi$ e poi $v = \frac{d\phi}{dt}$, infine dalla forma di $v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$ e $v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$ ricavo le induttanze cercate.

Induzione magnetica

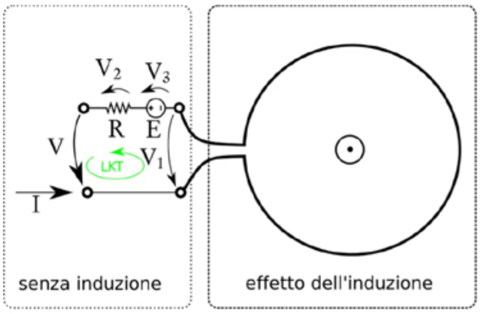


⊗ entrante

⊙ uscente



$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

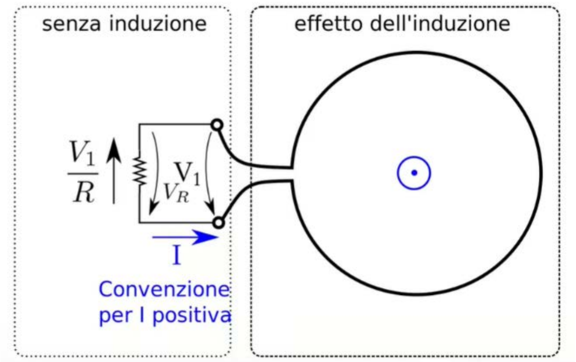


LKT:

$$V - V_1 + V_3 + V_2 = 0$$

$$V + V_2 + V_3 = V_1$$

$$\underbrace{V + V_2 + V_3 = 0}_{\text{LKT "senza induzione"}} + \underbrace{\frac{d\Phi_{\vec{B}}(t)}{dt}}_{\text{termine dovuto all'induzione}}$$



In una spira con solo il resistore:

$$V_R = \frac{d\phi_B}{dt}$$

Una corrente opposta si oppone alla variazione di $\vec{B}$:
Correnti indotte si si oppongono alla variazione del campo.

Se voglio il lavoro elettrico assorbito dal resistore: $P = {V_R}^2/R \qquad L = P\,\Delta t$

In generale: $\phi_B = A_{spira}B(t)$

Per risolvere i circuiti:

1. Scrivo la corrente I_X concorde alla convenzione di segno della regola della mano destra con il campo $\vec{B}$
2. Segno le tensioni sulla maglia con segno concorde a I_X
3. Scrivo la LKT a cui aggiungo il termine dovuto all'induzione $\sum V_k = 0 + \frac{d\phi_B(t)}{dt}$
4. Calcolo $\phi_B = A_{spira}B(t)$ e quindi $\frac{d\phi_B(t)}{dt}$
5. Ricavo le grandezze desiderate dalla LKT