2019

Guida Geometria e Algebra Lineare

DOMANDE E METODI SOLUTIVI

MATRICI

- Tipi di matrice
  - Identica: diagonale composta da tutti 1 mentre gli altri elementi sono 0
  - Triangolare: sopra o sotto la diagonale ha tutti 0
  - Diagonale: solo gli elementi sulla diagonale sono diversi da 0
  - Simmetrica: simmetrica rispetto alla diagonale
  - Singolare: ha determinante nullo
- Matrice aggiunta A*:
  - Si trova la matrice formata dai complementi algebrici di A
    - Ogni elemento si sostituisce con il numero ottenuto così: si elimina la sua riga e la sua colonna dalla matrice, si calcola il determinante poi e si moltiplica per $(-1)^{n+k}$ con n e k rispettivamente il numero di riga e colonna
  - Si scrive la trasposta di quella appena trovata
- Matrice inversa A^{-1}:
  - Esiste solo se la matrice non è singolare
  - $A^{-1}=A^*/\det A$
  - $\det(A^{-1})=1/\det(A)$

SISTEMI

- Rouche-Capelli
  - Trovare matrice dei coefficienti A e dei termini noti B
  - Trovare il rank di A
  - Trovare il rank di (A|B)
  - Se rank(A)!=rank(A|B) il sistema non ha soluzioni
  - Se rank(A)=rank(A|B) il sistema ha infinito^(n-r) soluzioni, dove n è il numero delle incognite e r è il rank di A
- Interpretazione geometrica:
  - Piani:
    - **Infinito^0 soluzioni**: i piani si intersecano in un punto
    - **Infinito^1 soluzioni**: i piani si intersecano tutti in una retta
    - **Infinito^2 soluzioni**: i piani si intersecano in un piano
    - **No soluzioni**: piani paralleli
  - Rette:
    - **Infinito^0 soluzioni:** rette secanti
    - **Infinito^1 soluzioni:** rette coincidenti
    - **No soluzioni:** le rette non si intersecano mai
      Per scoprire se sono sghembe o parallele si studia il sistema omogeneo Ax=0.
      Quindi si studia la posizione delle rette traslate in modo che passino per l'origine:
      - Infinito^0 soluzioni: sono secanti nell'origine quindi altrove sghembe
      - Infinito^1 soluzioni: sono coincidenti nell'origine quindi altrove parallele

SPAZI VETTORIALI

- Verificare che un insieme sia un sottospazio
  - Scrivere due vettori generici appartenenti al sottospazio
  - Scrivere una loro combinazione lineare
  - Calcolarne il risultato e verificare che rispetti la definizione del sottospazio considerato
- Trovare equazioni conoscendo i generatori
  - ridurre l'insieme dei generatori ad una base:
    scrivere la matrice formata dai vettori generatori e calcolarne il rank; i vettori appartenenti al minore di ordine massimo utilizzato per calcolare il rank sono appartenenti alla base

    - scrivere la matrice formata dai vettori appartenenti alla base e dal generico vettore $[x,y,\ldots]^t$; imporre il rank di questa matrice uguale al rank della matrice formata dai vettori base, quindi imporre determinante=0. Calcolando il determinante si ottiene l'equazione dello spazio vettoriale.
- Trovare una base conoscendo le equazioni:
    - Scrivere la matrice del sistema e calcolarne il rank (se si ha più di una equazione, altrimenti il rank=1)
    - Spostare al secondo membro le n-r incognite che saranno ora considerate parametri
    - Risolvere il sistema equivalente ottenuto
    - Scrivere il generico vettore dello spazio utilizzando le soluzioni del sistema
    - Raccogliere i parametri
    - I vettori che moltiplicano i parametri sono i vettori appartenenti alla base

- Trovare una base dell'intersezione:
    - Conoscendo le equazioni degli spazi:
        - Mettere a sistema tutte le equazioni
        - Trovare una base a partire da questo sistema
    - Conoscendo le basi degli spazi:
        - Porre il generico vettore di uno spazio uguale al generico vettore di un altro, scrivendoli come combinazione lineare delle basi dei due spazi: $aV_1+bV_2+\ldots=cW_1+dW_2+\ldots$
        - Scrivere il sistema che deriva da questa uguaglianza tra combinazioni lineari e la matrice dei coefficienti (dopo aver portato tutte le incognite al primo membro)
        - Calcolare il rank della matrice per scoprire quali sono le equazioni indipendenti
        - Risolvere il sistema formato dalle equazioni indipendenti (spostando ora la secondo membro le n-r incognite ora parametri)
        - La soluzione del sistema è il vettore contenente i coefficienti che vanno assegnati ai vettori nella combinazione lineare per formare una nuova base dell'intersezione.
- Trovare una base dello spazio somma
    - A partire dalle basi: Si cercano le colonne indipendenti della matrice formata dai vettori della base del primo spazio e dai vettori della base del secondo spazio
- Trovare la equazione di uno spazio somma a partire dalla base
    - si crea la matrice formata da i vettori della base dello spazio somma
    - si aggiunge alla matrice il generico vettore dello spazio somma $[x,y,\ldots]^t$
    - si impone det=0 e nel calcolarlo si trova l'equazione
- Trovare la dimensione di uno spazio:
    a) Contare il numero di vettori appartenenti ad una base dello spazio
    b) Utlizzare la *formula di Grassman*: $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U\cap V) + \dim(U+V)$
- Determinare se una somma U + V è somma diretta:
    - Verificare se $U\cap V = \{0\}$: se la dimensione di $U\cap V$ è 0, U+V è somma diretta, altrimenti no

APPLICAZIONI LINEARI

- Verificare che una funzione sia una applicazione lineare:
    - Verificare se $f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v})$ con **u** e **v** generici vettori dello spazio di partenza
- Definizioni:
    - Omomorfismo: generica applicazione lineare
    - Isomorfismo: applicazione lineare biunivoca
    - Endomorfismo: applicazione lineare che opera nello stesso spazio, cioè il cui dominio coincide con il codominio
    - Automorfismo: endomorfismo biunivoco
    - Applicazione lineare singolare: applicazione lineare il cui nucleo è diverso da {0}, quindi non iniettiva
- Verificare l'iniettività
    - Una applicazione lineare è iniettiva se ker(f)={0}, quindi dim(Kerf)=0
- Verificare suriettività
    - Una applicazione lineare è suriettiva se Im(f)=V, quindi dim(Imf)=dim(spazio di arrivo)
- Verificare buinivocità

1. Verificare sia che è iniettiva sia che è suriettiva
2. Una applicazione è biunivoca se la matrice associata delle immagini è invertibile, quindi non è singolare:
    - Si trova la matrice associata formata dai coefficienti delle equazioni della funzione
    - Si controlla che il suo determinante sia diverso da 0
3. Se si sta lavorando con un endomorfismo una funzione può essere solo suriettiva e iniettiva allo stesso tempo o nessuna delle due, quindi è sufficiente verificare una delle due condizioni

- Teorema dimensionale:
    - n = dim(kerf) + dim(Imf) con n = dim(spazio di partenza)
- Matrice associata:
    a) Matrice che ha come colonne i coefficienti che consentono di esprimere le immagini dei vettori di una base di V (spazio di partenza) come combinazione lineare dei vettori di una base di W (spazio di arrivo)
    b) Se non vengono fornite basi diverse, la matrice associata come elementi i coefficienti delle variabili delle equazioni di uno spazio
- Trovare equazioni di ker(f)
    - Si deve porre Mx=0 e si scrivono le equazioni
- Trovare basi di Ker(f)
    - Trovare le basi a partire dalle equazioni di Ker(f)
- Trovare dimensione di Ker(f) o di Im(f)
    - E' il numero di vettori di una base di Ker(f)
    - Dim(Imf) è il rank di una matrice che rapresenta f
    - Utilizzare l'equazione dimensionale
- Equazioni di Im(f)
    - Trovare le equazioni a partire dalla matrice M|X con M matrice formata dalle basi di Im(f) e X vettore delle incognite, dunque porre il det=0
- Basi di Im(f)
    - Sono le colonne della matrice associata che permettono di trovare un minore non nullo
    - Calcolare il rank e prendere come vettori della base quelli utilizzati per il suo calcolo
- Stabilire se un vettore appartiene all'immagine
    - Verificare che soddisfi la sua equazione
- Trovare $f^{-1}(v)$
    - $f^{-1}(v)$ è l'insieme dei vettori dello spazio di partenza tali che la loro immagine sia v
    - Mx=v con M matrice associata
        - Trovare soluzioni di Mx=v a partire dall'insieme delle soluzioni di Mx=0
        - Soluzioni(Mx=v) = Soluzioni(Mx=0) + una soluzione particolare qualsiasi di Mx=v
        - Questa soluzione particolare ha la sola condizione di non far parte delle soluzioni di Mx=0
    - Se il nucleo è tale che Ker(f)={0}, allora Soluzioni(Mx=0) = Ker(f), quindi le soluzioni di Mx=v sono Ker(f) + soluzione particolare
    - Svolgere questa somma di vettori
- Isomorfismo canonico
    - Ogni vettore dello spazio di partenza e dello spazio di arrivo si può scrivere come combinazione lineare delle rispettive basi
    - I coefficienti di questa combinazione lineare si riportano in un vettore appartenente ad R^n
- Cambio base
    - $M^c_c(f)=[B]\ M^b_b(f)\ [B^{-1}]$
    - Si applica f a ogni vettore della base dello spazio partenza e si pone uno a uno il vettore ottenuto uguale alla combinazione lineare dei vettori della base dello spazio di arrivo. Si risolvono i sistemi ottenuti trovando come soluzioni i coefficienti da utilizzare nella combinazione lineare appena citata. Ogni vettore di coefficienti ottenuto è una colonna della matrice del cambio base.
    - Scrivere l'immagine di un vettore di una base Bv rispetto ad una base diversa B
        - Si scrive con il prodotto Mv dove v è il vettore e M è la matrice del cambio base da Bv a B
    - $M_{b1}^{b2}=[B2]^{-1}\ M^C_C(f)\ [B1]$

SIMILITUDINE, DIAGONALIZZABILITA', AUTOVALORI

- Determinare polinomio caratteristico:
  a) Se si conosce la matrice associata A: det[A- λI] con I matrice identica
  b) Conoscendo due forme del tipo det(A-λI)=a o det(λI-A)=a
     - Si scrivono nella forma $\lambda^2+\lambda p+q=a$ e si mettono a sistema
     - Risolvendo il sistema si trovano p e q che sono coefficienti di λ nella forma del polinomio caratteristico $\lambda^2+\lambda p+q$
- Determinare Spettro (insieme degli autovalori):
  - sono le radici dell'equazione x(λ)=0
  - se matrice è triangolare, gli autovalori sono i termini principali
- In un endomorfismo: f(v)= λv con v autovettore (condizione sufficiente per dire che v è autovettore)
- Determinare autovettori: (in alternativa a questo metodo, sono vettori della base dell'autospazio)

  Per ogni autovalore:
  - Si sostituisce l'autovalore nella matrice [A- λI]
  - Si risolve l'equazione [A- λI]X=λX con X vettore contenente le incognite
  - Il vettore ottenuto è quello corrispondente all'autovalore utilizzato
- Determinare autospazio:

  Per ogni autovalore:
  - Si sostituisce l'autovalore nella matrice M=[A- λI]
  - Si risolve MX=0
  - Si scrive l'autospazio E_λ={[…], x,… in R}=<[…],…>
- Molteplicità algebrica Ma: numero di volte che un autovalore compare nello spettro
- Molteplicità geometrica Mg:
  - Mg(λ)=n-rank[A- λI] con n dimensione dello spazio
  - Dimensione di E_λ associato all'autovalore λ
- Stabilire se un endomorfismo è diagonalizzabile:
  a) Se tutti gli autovalori sono distinti (non ci sono autovalori doppi) è diagonalizzabile
  b) Verificare che per ogni autovalore Ma=Mg
  c) La matrice che lo descrive è reale simmetrica
- Stabilire se due matrici sono simili
  a) Due matrici sono simili se hanno stessi autovalori e sono entrambe diagonalizzabili (quindi simili ad una stessa matrice diagonale, con gli autovalori sulla diagonale).
  b) A è simile a B se esiste P invertibile tale che $P^{-1}AP=B$
     - Si costruisce la matrice di passaggio generica con elementi a,b,c,d,…
     - Si pone PA=BP e si trovano i valori di a,b,c,d,…
     - Si verifica che P sian invertibile, quindi che detP sia doverso da 0
  c) Matrici simili hanno uguali:
     - Determinante
     - Rango
     - Polinomio caratteristico (quindi autovalori)
     - Traccia
- Determinare una matrice B diagonale simile ad A diagonale e la relativa matrice di passaggio (se endomorfismo simmetrico la matrice di passaggio deve essere ortogonale)
  - Trovare gli autovettori di A (o autospazi se ci sono autovalori multipli)
  - La matrice di passaggio ha come colonne gli autovettori (o i vettori delle basi degli autospazi)
  - Se endomorfismo procedere all'ortonormalizzazione
  - $P^{-1}AP=B$
- Trovare una matrice dati i suoi autovalori e autovettori
  - Utilizzare per ogni coppia autovalore-autovettore la relazione MX=λX mettendo come vettore X l'autovettore stesso, e scrivendo M come una generica matrice
  - Risolvere il sistema formato e trovare i valori interni alla matrice
- Matrice ortogonale:

- Matrice di passaggio le cui colonne sono ortogonali tra loro e hanno lunghezza unitaria
- Matrice tale che: $MM^t=I_n$ o $M^tM=I_n$
- L'inversa della matrice ortogonale corrisponde con la sua trasposta

- Matrice ortogonale (o base ortonormale) speciale che diagonalizza f
  - E' una matrice ortogonale il cui determinante è 1, esprime una rotazione antioraria rispetto all'origine
  - Scrivere una base di autovettori (trovare matrice di passaggio)
    - Calcolare le basi degli autospazi
    - Scrivere la matrice formata dai vettori di tutte le basi degli autospazi
  - Verificare che i vettori siano a due a due ortogonali (assicurarsi che sia ortogonale)
    - In caso affermativo normalizzare la base
    - In caso negativo procedere all'ortonormalizzazione
  - Disporre le colonne in modo che il determinante della matrice sia uguale a 1 (assicurarsi che sia speciale)
- Normalizzazione
  - Rende il vettore di norma unitaria
  - $w=v/\|v\|$
- Ortonormalizzazione
  - Rende i vettori di norma unitaria e ortogonali tra loro
  - $W_1=v_1/\|v_1\|$
  - $W_2=(v_2-<v_2,w_1>w_1)/(\| v_2-<v_2,w_1>w_1\|)$
  - $W_3=[v_3-(<v_3,w_1>w_1+< v_3,w_2>w_2)]/(\|v_3-(<v_3,w_1>w_1+< v_3,w_2>w_2)\|)$
  - $W_n=[v_n-(<v_n,w_1>w_1+< v_n,w_2>w_2+\ldots+< v_n,w_{n-1}>w_{n-1})]/(\| v_n-(<v_n,w_1>w_1+< v_n,w_2>w_2+\ldots+< v_n,w_{n-1}>w_{n-1})\|)$
- Stabilire se un endomorfismo f (matrice associata M) è rappresentato anche da un'altra matrice A rispetto ad una base cercata
  - Si verifica che M sia simile ad A, altrimenti non esisterebbe la base cercata
  - Si calcolano le matrici di passaggio P e Q per le quali $P^{-1}AP=D$ e $Q^{-1}AQ=D$
  - La base si trova facendo PQ^{-1}
- Una matrice diagonalizzabile si può esprimere come somma di sottospazi

RETTE E PIANI

- Un vettore $v=[a, b, c]^t$ esprime una retta passante per l'origine e per il punto P=(a, b, c)
- Un sottospazio generato da due vettori è un piano passante per l'origine
- Proiettare su un sottospazio un vettore v
  - Trovare la matrice A che ha come colonne i vettori che generano il sottospazio
  - Trovare la matrice pseudo inversa di Moore-Penrose: $R=(A^tA)^{-1}A^t$
  - Trovare la matrice di proiezione P=AR
  - Moltiplicare P per il vettore che si vuole proiettare: $v_1=Pv$
  - Se si vuole trovare la proiezione sul sottospazio ortogonale a quello dato utilizzare la matrice di proiezione data da Q=(I-P) e quindi calcolare $v_2=Qv$
- Prodotto scalare
  - $<v,w>= \|v\| \|w\| \cos(a)$ con a angolo tra i due vettori
  - $<v,w>= x_vx_w + y_vy_w + z_vz_w + \ldots$
  - Il prodotto scalare tra due vettori ortogonali è nullo
- Angolo tra due vettori
  - $\cos(\alpha)=<x,y,>/(\|x\| \|y\|)$
- Prodotto vettoriale
  - $v \wedge w$ ha direzione ortogonale al piano formato dai due vettori e verso dato osservando la sovrapposizione di v a w in senso antiorario secondo l'angolo inferiore tra loro
  - $\|v \wedge w\| = \|v\| \|w\| \mathrm{sen}(a)$
  - $v \wedge w = -w \wedge v$

- il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è nullo
- $v \wedge w$ = det [i j k/ x_v y_v z_v/ x_w y_w z_w]; ciò che risulta moltiplicato per i è coordinata riferita al primo asse, per J sul secondo e per K sul terzo
- $\|v \wedge w\|$ è il modulo dell'area del parallelogramma descritto da v e w

➢ Prodotto misto
- $\langle a, b \wedge c\rangle$ = det della matrice che come righe orizzontali ha i vettori delle componenti dei vettori
- Il valore assoluto del prodotto misto è il volume del parallelepipedo obliquo da essi descritto

➢ Trovare vettore parallelo a segmento AB conoscendo le coordinate dei punti A e B
- $v=[x_b-x_a, y_b-y_a, \ldots]$

➢ Lunghezza della proiezione di un vettore a su una retta contenente un altro vettore b
- $Proj_b(a)= \|a\| \, |\cos(\alpha)|$ con α angolo tra i due vettori

➢ Rette
- Si esprimono con
  - Equazioni parametriche $x=x_P+\lambda a \quad y=y_P+\lambda b \quad z=z_P+\lambda c$
  - Equazioni normali $(x-x_P)/a=(y-y_P)/b=(z-z_P)/c$
  - Intersezione tra due piani
- a,b,c sono i parametri direttori e sono i componenti di un vettore avente stessa direzione della retta

➢ Posizione reciproca di due rette
- Parallele: hanno parametri direttori proporzionali
- Secanti: il sistema formato dalle equazioni parametriche di entrambe le rette (con incognite λ_1 e λ_2 delle due rette) ammette soluzioni
- Sghembe: né parallele né secanti

➢ Piano
- $ax+by+cz+d=0$
- a,b,c sono i parametri direttori del piano: sono le coordinate del punto di intersezione tra il piano e la retta passante per O e ortogonale al piano
- due piani sono paralleli se perpendicolari alla stessa retta, quindi se hanno paramentri direttori proporzionali
- piano per tre punti A,B,C non allineati: imporre uguale a 0 il determinante della matrice avente come colonne $[x\ x_a\ x_b\ x_c]$ $[y\ y_a\ y_b\ y_c]$ $[z\ z_a \ldots]$ [1 1 1 1] cosi che il sistema abbia soluzioni non banali

➢ retta perpendicolare ad un piano
- ha parametri direttori proporzionali ai parametri direttori del piano

➢ rette perpendicolari
- l'angolo tra loro è retto, quindi il suo coseno è 0
- dalla precedente osservazione e dalla formula per l'angolo tra due rette si ricava che due rette r e s sono perpendicolari se $x_R x_S+y_R y_S+z_R z_S=0$

➢ parallelismo tra due piani
- $aa^1+bb^1+cc^1=0$

➢ parallelismo tra retta e piano
- $ax_R+by_R+cz_R=0$

➢ distanza punto piano
- $d(P,\pi)=|ax_p+by_p+cz_p+d|/(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$

➢ distanza punto retta
- $d(P,r)= PR\,sen(\alpha)= \|PR\wedge v\|/\|v\|$ con R punto scelto arbitrariamente sulla retta, **v** vettore geometrico associato alla retta

➢ retta per due punti: $(x-x_A)/(x_B-x_A)= (y-y_A)/(y_B-y_A)= (z-z_A)/(z_B-z_A)$

➢ Fascio di piani di sostegno s
- Scrivere la retta s come intersezione di due piani p_1 e p_2
- F: $p_1+ \lambda p_2$

<u>CONICHE</u>

➢ Ellisse: luogo dei punti per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi
- $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

- $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$
  - Fuochi sull'asse maggiore con coordinate $F(\pm c,0)$ o $F(0,\pm c)$ con $c=(a^2-b^2)^{1/2}$
  - Se a=b circonferenza
    - $x^2+y^2=a^2$ R=a
    - $x^2+y^2+ax+by+c=0$ $R=[(a/2)^2+(b/2)^2-c]^{1/2}$
  - Se $x^2/a^2+y^2/b^2= -1$ ellisse immaginario
- Iperbole
  - $x^2/a^2+y^2/b^2=1$
  - $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$ o $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ se x è asse principale
  - $-b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ o $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$ se y è asse principale
  - Asintoti: rette di equazione $y=\pm(b/a)x$
  - Se a=b iperbole equilatera
  - $F(c,0)$ o $F(0,c)$ con $c=(a^2+b^2)^{1/2}$
  - Vertici: intersezione della conica con asse principale
- Parabola
  - $y^2=2px$ con p distanza tra fuoco e direttrice
  - $F(P/2,0)$
- Direttrice
  - Ellisse o iperbole: $x=\pm a^2/c$
  - Parabola: $x=-p/2$
- Equazione di una generica conica
  - $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$
- Matrice simmetrica associata alla conica
  - $A = [a_{11}\ a_{21}\ a_{31}]^t \mid [a_{12}\ a_{22}\ a_{32}]^t \mid [a_{13}\ a_{23}\ a_{33}]^t$
- Invarianti
  - I_3= detA
  - I_2= detQ con Q matrice associata alla parte quadratica $Q=[a_{11}\ a_{21}]^t \mid [a_{12}\ a_{22}]^t$
  - I_1= TrQ = $a_{11}+a_{22}$
- Classificazione metrica
  - $I_3=0$ conica degenere
    - Il polinomio che rappresenta la conica si può scomporre in due fattori di primo grado
      - $I_2<0$ fattori reali e distinti (rette distinte)
      - $I_2=0$ fattori reali e coincidenti (rette parallele)
  - I_3 diverso da 0: conica non degenere
    - $I_2>0$ Ellisse
      - $I_1I_3<0$ Ellisse reale
      - $I_1I_3>0$ Ellisse immaginario
    - $I_2=0$ Parabola
    - $I_2<0$ Iperbole
      - Se $I_1=0$ iperbole equilatera
- Riduzione a forma canonica
  - Parabola
    - La forma canonica è data da $y^2=2px$ con $p=\pm(-I_3/(I_1)^3)^{1/2}$
  - Iperbole o ellisse
    - Calcolare invarianti e gli autovalori associati alla parte quadratica
    - Riportarli nell'equazione
      - $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3=0$ se ellisse o iperbole con $\lambda_3=I_3/I_2$
      - $\lambda_1y^2+\lambda_3x=0$ o $\lambda_1x^2+\lambda_3y=0$ se parabola con λ_1 l'autovalore tra λ_1 e λ_2 non nullo e $\lambda_3=\pm2\lambda_2(-I_3/(I_1)^3)^{1/2}$
    - Riscrivere questa equazione nella forma canonica
- Fasci di coniche
  - $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$

        - punti base: punti in cui le coniche generatrici di un fascio si intersecano
- Studio di un fascio di coniche
    - Scrivere il fascio come combinazione lineare di due coniche
        - Raccogliere il parametro per dividere ciò che lo moltiplica da ciò che non lo fa riconducendosi all'equazione generale di un fascio
    - Studiare gli invarianti al variare del parametro
- Trovare il centro C di una ellisse o iperbole
    - Sistema delle derivate parziali uguale a 0
    - Risolvere il sistema $Q[x\ y]^t=-[a_{13}\ a_{23}]^t$ con Q matrice associata alla parte quadratica
- Trovare il vertice V di una parabola
    a) Intersezione tra asse di simmetria e parabola
        - Trovare l'autospazio associato all'autovalore nullo
        - Scrivere la generica retta ad esso perpendicolare
        - Intersecare questa retta con la parabola per trovare due suoi generici punti con stessa quota
        - Trovare il punto medio tra i due
        - Scrivere la retta passante per il punto medio e parallela all'autospazio E_0
        - Intersezione tra questa retta e la parabola
    b) Intersezione tra la parabola e la generica retta ortogonale all'asse di simmetria
        - Imporre il determinante 0 perché siano tangenti
- Determinare gli assi di simmetria
    - Trovare autovalori di parte quadratica
    - Le direzioni sono fornite dagli autospazi associati (assi sono rette parallele agli autovettori)
    - Se parabola: l'asse principale di una parabola ha direzione fornita dall'autospazio corrispondente all'autovalore nullo
    - Per ogni m=y/x dell'autovettore ottenuto utilizzare la formula $y-y_P=m(x-x_P)$ prendendo come punto P il centro di simmetria (vertice per una parabola)
- Determinare gli asintoti di un'iperbole
    - L'equazione della conica è data da una parte quadrica Q(x,y) e da una lineare L(x,y): Q(x,y)+L(x,y)=0
    - Si elimina la parte lineare
    - Si risolve l'equazione Q(x,y)=0 ottenuta rispetto a y
    - Si ottengono rette nella forma y=mx che rappresentano l'andamento della conica all'infinito
    - Si utilizza la formula $y-y_P=m(x-x_P)$ prendendo come punto P il centro di simmetria e come m i valori appena ottenuti per trovare gli asintoti
- Rappresentare graficamente coniche
    - Ellisse
        - Centro
        - Assi di simmetria
        - Intersezione con assi cartesiani
    - Iperbole
        - Vertice
        - Asse principale
        - Intersezione con assi cartesiani
    - Iperbole
        - Centro
        - Intersezione con assi cartesiani
        - Assi di simmetria
        - Asintoti
- Determinare il cambio di riferimento che porta in forma canonica una conica
    - Trovare matrice M che ha come colonne gli autovettori normalizzati di Q (Q è matrice della parte quadratica).
        - Trovare autovalori
        - Trovare autovettori associati
        - normalizzare

- Deve essere detM=1, in caso non lo sia si modificano i segni dei vettori per ottenerlo
- Da M si può ottenere l'angolo di rotazione in quanto $M=[\cos\alpha \ -\sin\alpha]^t \mid [\sin\alpha \ \cos\alpha]^t$
- La componente rotatoria del cambio di riferimento è quindi data da $X=MX^1$
- Trovare il centro C (o il vertice V in caso di parabola)
- Il cambio di riferimento è dato da $[x\ y]^t=M[x^1\ y^1]^t+[x^c\ y^c]^t$

<u>QUADRICHE</u>

- $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2+Gx+Hy+Iz+L=0$
- $F(x,y,z)= a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$
- Matrice simmetrica associata $A=[a_{11}\ a_{21}\ a_{31}\ a_{41}]^t \mid [a_{12}\ a_{22}\ a_{32}\ a_{42}]^t \mid [a_{13}\ a_{23}\ a_{33}\ a_{43}]^t \mid [a_{14}\ a_{24}\ a_{34}\ a_{44}]^t$
- Invarianti
  - $I_4=\det A$
  - $I_3=\det Q$ con Q matrice 3x3 associata alla parte quadratica
  - $I_2=\det([a_{11}\ a_{21}]^t \mid [a_{12}\ a_{22}]^t)+\det([a_{11}\ a_{31}]^t \mid [a_{13}\ a_{33}]^t)+\det([a_{22}\ a_{32}]^t \mid [a_{23}\ a_{33}]^t)$
  - $I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$
- Classificazione

Quadriche non degeneri ($I_4 \neq 0$)

Invarianti	Denominazione	Forma canonica
$I_3 \neq 0$, $I_4 > 0$: $I_2 > 0, I_1 I_3 > 0$	*ellissoide immaginario*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$
$I_3 \neq 0$, $I_4 > 0$: altrimenti	*iperboloide ad una falda*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$
$I_3 \neq 0$, $I_4 < 0$: $I_2 > 0, I_1 I_3 > 0$	*ellissoide reale*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$
$I_3 \neq 0$, $I_4 < 0$: altrimenti	*iperboloide a due falde*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$
$I_3 = 0$: $I_4 > 0$	*paraboloide iperbolico*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$
$I_3 = 0$: $I_4 < 0$	*paraboloide ellittico*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$

Quadriche degeneri non spezzate (Rango A $=$ r $=$ 3)

r	Invarianti	Denominazione	Forma canonica
3	$I_3 \neq 0$: $I_2 > 0, I_1 I_3 > 0$	*cono immaginario*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
	$I_3 \neq 0$: altrimenti	*cono reale*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
3	$I_3 = 0$: $I_2 > 0$, no punti reali	*cilindro immaginario*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$
	$I_3 = 0$: $I_2 > 0$, sì punti reali	*cilindro ellittico*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
	$I_3 = 0$: $I_2 < 0$	*cilindro iperbolico*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
	$I_3 = 0$: $I_2 = 0$	*cilindro parabolico*	$\frac{x^2}{a^2}-2z=0$

Quadriche degeneri spezzate (Rango A $=$ r $<$ 3)

r	Invarianti	Denominazione	Forma canonica
2	rango $Q=2$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$	*coppia di piani complessi coniugati e secanti*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
	rango $Q=2$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$	*coppia di piani reali secanti*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
	rango $Q=1$, senza punti reali	*coppia di piani complessi coniugati e paralleli*	$\frac{x^2}{a^2}+1=0$
	rango $Q=1$, con punti reali	*coppia di piani reali paralleli*	$\frac{x^2}{a^2}-1=0$
1	$\Rightarrow$ rango $Q=1$	*piano doppio*	$x^2=0$

- Classificazione con la natura dei punti
  - Quadriche a punti ellittici (nessuna retta per P contenuta nella quadrica)
    - Iperbole a due falde
    - Elissoide reale
    - Paraboloide ellittico
  - Quadriche a punti parabolici (una retta per P contenuta nella quadrica)
    - Cono
    - Cilindro

- Quadriche a punti iperbolici o rigate(due rette per P contenute nella quadrica)
  - Iperbolide ad una falda
  - Paraboloide iperbolico
- Centro di una quadrica
  - Se $I_3=0$ (almeno un autovalore è nullo) non esiste centro di simmetria
  - Risolvere il sistema composto dalle equazioni
    - Df/dx=0
    - Df/dy=0
    - Df/dz=0
- Sfera
  - Equazione canonica del tipo $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$ che equivale a $x^2+y^2+z^2+a+by+cz+d=0$
  - Centro ha coordinate (-a/2, -b/2, -c/2)
  - Raggio ha lunghezza $r^2=(-a/2)+(-b/2)+(-c/2)-d$
- Vertice di un cono
  - Risolvere il sistema $Df/dx_1= Df/dx_2= Df/dx_3= Df/dx_4=0$
- Quadriche di rotazione
  - Una quadrica è di rotazione se e solo se la matrice Q associata alla sua parte quadratica ammette almeno due autovalori non nulli uguali
  - Si sostituisce, nell'equazione della conica sl piano xy che si fa girare intorno ad un asse y [o x], il valore di x con $\pm(x^2+z^2)^{1/2}$ [o il valore di y con $\pm(y^2+z^2)^{1/2}$].
- Trovare asse di rotazione
  - Il piano contenente l'asse di rotazione è perpendicolare al piano corrispondente all'autospazio associato all'autovalore doppio, quindi l'asse di rotazione è parallelo all'autovalore semplice, che dà la sua direzione
  - Inoltre l'asse di rotazione passa per il centro
  - Trovare il centro e scrivere la generica retta passante per esso e parallela all'autovalore semplice
- Piano tangente alla quadrica in P:
  - $(x-x_p)(a_{11}x_p+a_{12}y_p+a_{13}z_p)+(y-y_p)(a_{12}x_p+a_{22}y_p+a_{23}z_p)+(z-z_p)\ )(a_{13}x_p+a_{23}y_p+a_{33}z_p)=0$
  - Se la quadrica è rigata l'intersezione tra questo piano e la quadrica da come risultato due rette
- Trovare le rette appartenenti alla quadrica passanti per un punto P della quadrica
  - Trovare piano tangente in P alla quadrica
  - Intersecare il piano con la quadrica
- Riduzione a forma canonica
  - $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$ per elissoidi e iperboloidi (I_3 != 0) con $D=I_4/I_3$
  - $Ax^2+By^2+2Cz=0$ per paraboloidi ($I_3=0$) con $C=(-I_4/I_2)^{1/2}$
  - A, B, C nella prima e A, B nella seconda sono gli autovalori non nulli della matrice Q associata alla parte quadratica
- Asse di simmetria di un paraboloide
  - I piani di simmetria sono due aventi come parametri direttori le componenti degli autovettori associati agli autovalori non nulli
  - L'intersezione di tali piani costituisce l'asse di simmetria
  - L'autovettore associato all'autovalore nullo indica la direzione dell'asse di simmetria del paraboloide
- Vertice di un paraboliode
  a) Intersezione tra asse di simmetria e quadrica
  b) Considerare il generico piano perpendicolare all'autovettore associato all'autovalore nullo e imporre la sua intersezione con la quadrica ridotta ad un solo punto
- Costruzione di un cono o un cilindro date quadrica e piano che la interseca
  - Se cono con generatrici parallele ad un asse x, basta ricavare incognita x da equazione del piano e sostituire in quadrica
  - Scrivere il sistema
    - Retta in forma parametrica: del tipo $x=x_v+\lambda(x_0-x_v)$ in cono o $x=x_0+aq$ in cilindro con a,b,c parametri direttori
    - Quadrica in (x_0,y_0,z_0)

        - Piano in (x_0,y_0,z_0) che interseca la quadrica
    - Esplicitare x_0, y_0, z_0 da equazioni parametriche della retta
    - Sostituire nell'equazione del piano per trovare λ o q
    - Calcolare quindi i valori di (x_0,y_0,z_0) e sostituirli nell'equazione della quadrica
- Costruzione di una quadrica di rotazione data una conica nel piano xy che ruota intorno ad un asse
    - Sostituire nell'equazione della conica $x=(x^2+z^2)^{1/2}$ se si ruota intorno a y, $y=(y^2+z^2)^{1/2}$ se si ruota intorno a x