
TP IMINV - Egalisation des gains de détecteurs CCD en imagerie satellitaire

Rédigé par
Luca MIMOUNI

Enseignant
J.Idier

Table des matières

0	Introduction	2
1	Moyenne empirique (<i>Méthode 1</i>)	2
1.1	Préliminaire Mathématiques	2
1.2	Interprétation des résultats	3
2	Mediane (<i>Méthode 2</i>)	5
2.1	Préliminaires Mathématiques	5
2.1.1	Structure probabiliste du champ de Markov	5
2.1.2	Probabilité conditionnelle $p(V f)$	5
2.1.3	Maximum de Vraisemblance (MLE)	5
2.2	Interprétation des résultats	6
3	Maximum a posteriori (MAP) (<i>Méthode 3</i>)	7
3.1	Préliminaires mathématiques	7
3.2	Interprétation des résultats	9
4	MAP avec distribution Laplacienne (<i>Méthode 4</i>)	9
4.1	Interprétations des résultats	10
5	Conclusion	10
6	Annexe (Code Matlab)	11

0 Introduction

On étudie des images satellites brouillées, on souhaite améliorer leur qualité, pour cela, on va mettre en place dans ce TP des **méthodes d'égalisation statistique**. L'objectif est de corriger les biais ou les variations systématiques en se basant sur des propriétés statistiques des données observées. On va chercher à ajuster les gains g_n (plus précisément le log de ces gains noté f_n) pour éliminer les effets de colonnage ou effet "pyjama", en supposant que l'image $Z_{n,m}$ obéit à un champ de Markov.

Considérons l'équation suivante :

$$W_{m,n} = g_n \cdot Z_{m,n} \quad (1)$$

où $W_{m,n}$ est le pixel mesuré, $Z_{m,n}$ le pixel idéal ; respectivement à la ligne m et colonne n , et, g_n est le gain associé à la colonne n .

Afin de faciliter la mise en oeuvre, on remplace l'équation (1) par sa version logarithmique :

$$\ln(W_{m,n}) = \ln(Z_{m,n}) + \ln(g_n) \quad (2)$$

Où de manière plus concise :

$$V_{m,n} = Y_{m,n} + f_n \quad (3)$$

1 Moyenne empirique (*Méthode 1*)

1.1 Préliminaire Mathématiques

L'approche peut être la plus naïve est celle de prendre la moyenne empirique de chaque colonne pour estimer les gains. En effet, d'après la *loi forte des grands nombres*, il est possible de prendre comme premier estimateur \hat{f}_n^1 : la moyenne sur chacune des colonnes n de $V_{m,n}$; ceci à une constante prêt. Formellement, on a :

$$\hat{f}_n^1 = |\bar{V}_n - \bar{V}| \quad (4)$$

où \bar{V}_n la moyenne sur la colonne n , et \bar{V} la moyenne de l'image. Enfin, on prend les variations autour de l'image moyenne (hypothèse d'homogénéité) : $\tilde{\hat{f}}_n^1 = \hat{f}_n^1 - \bar{\hat{f}}_n^1$

1.2 Interprétation des résultats

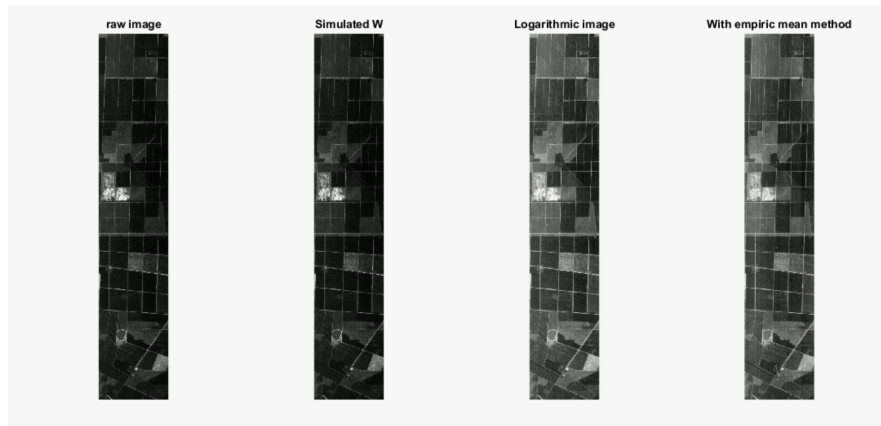


FIGURE 1 – Respectivement : Original - Simulé avec les gains théoriques g_{th} - Passé au logarithme - En utilisant la moyenne empirique sur les colonnes

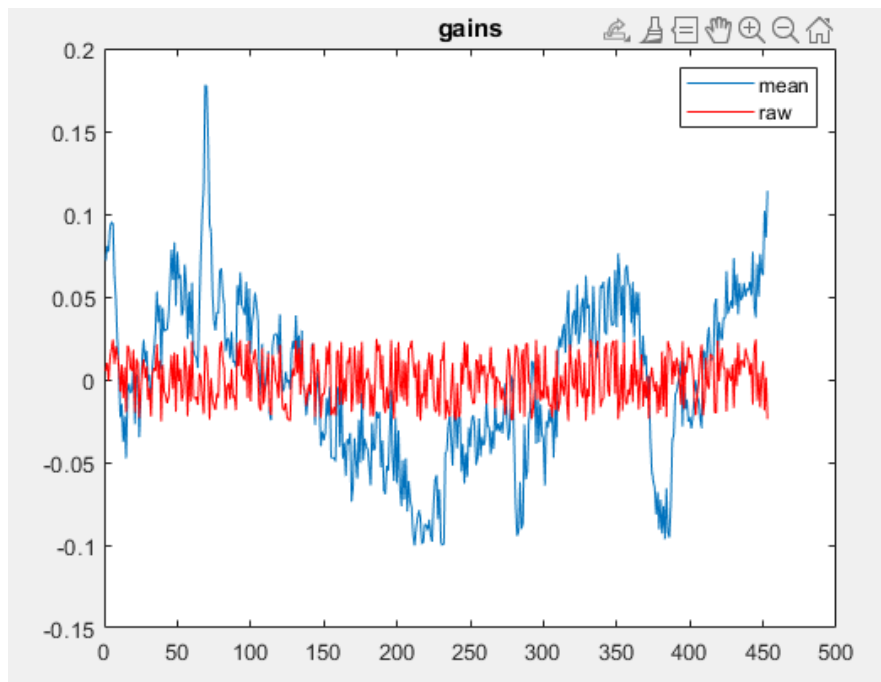


FIGURE 2 – Methode 1 : Estimation par moyenne empirique

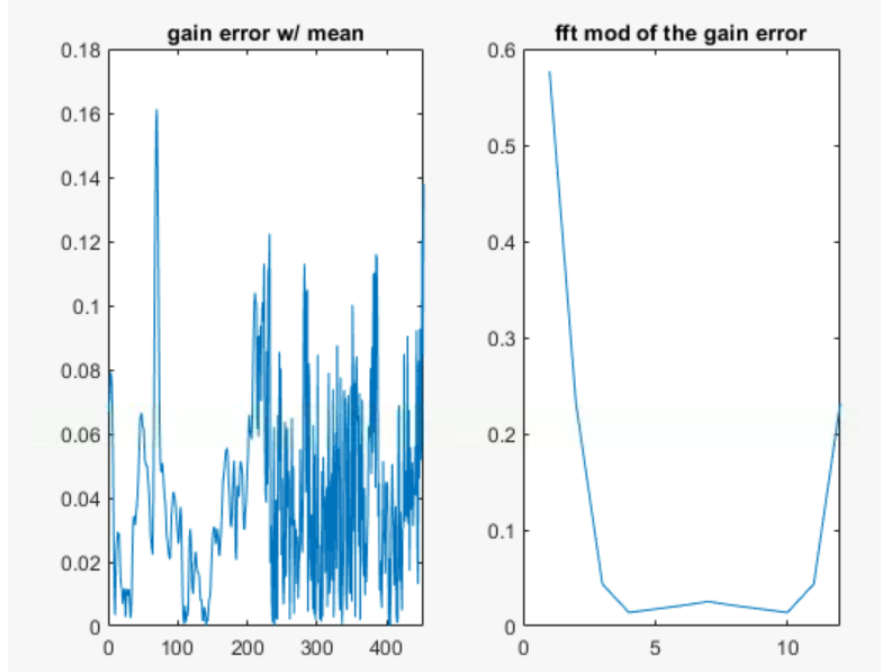


FIGURE 3 – A gauche : Erreur sur l’estimation des gains - A droite : Transformée de fourrier de l’erreur

La figure 3 permet de visualiser l’erreur sur l’estimation des gains, une erreur qui fluctue indique que les gains estimés ne correspondent pas aux gains réels.

Pour poursuivre l’analyse, on propose de tracer la Transformée de Fourier (TF) de l’erreur ; si l’erreur est proche d’un bruit blanc, sa TF devrait être relativement aplati (densité spectrale uniforme). Ici, on observe un pic principal dans les basses fréquences, puis un second pic dans les hautes fréquences. Cela suggère que l’erreur n’est pas complètement aléatoire, elle contient probablement des composantes systématiques, comme des biais fréquents, qui doivent être corrigés.

On pouvait s’attendre à de tel résultat pour cette première méthode. En effet, la moyenne empirique repose sur l’hypothèse simplifiée d’homogénéité de l’image $Z_{m,n}$ (dans le sens statistiquement bien réparti), c-à-d, qu’on suppose que ses contributions moyennes s’annulent. De plus, le bruit n’affecte pas significativement la moyenne, hors celui-ci est bien présent dans l’image.

Ainsi, pour améliorer notre modèle, il va nous falloir prendre en compte les variations systématiques dans l’image, c-à-d, les zones sombres/clair ou variations géométriques, notamment créées par les champs agricoles (par exemple), qui viennent fausser la moyenne empirique. Ces dernières introduisent des biais dans les estimations des gains, puisque la méthode ne distingue pas les variations dues aux gains et celles dues à $Z_{m,n}$.

2 Mediane (*Méthode 2*)

2.1 Préliminaires Mathématiques

2.1.1 Structure probabiliste du champ de Markov

On fait l'hypothèse que la distribution des intensités de pixels dans l'image suit un **champ de Markov**. Cela signifie que la probabilité des valeurs Y dépend uniquement des relations entre pixels voisins.

Cette hypothèse Markovienne se reflète sur la densité de probabilité de Y , on sait alors que :

$$p(Y) \propto \exp \left(- \sum_{m=1}^M \sum_{n=2}^N \phi(Y_{m,n} - Y_{m,n-1}) - \sum_{m=2}^M \sum_{n=1}^N \phi(Y_{m,n} - Y_{m-1,n}) \right) \quad (5)$$

où $\phi(x)$ est une fonction de coût qui mesure l'écart entre 2 pixels voisins.

2.1.2 Probabilité conditionnelle $p(V|f)$

Les 2 sommes représentent les contributions des différences entre pixels voisins dans les directions horizontales et verticales. La relation entre le modèle V et Y est donnée par l'équation (3) ; les différences horizontales dans V deviennent $\delta V_{m,n} = V_{m,n} - V_{m,n-1} = (Y_{m,n} - Y_{m,n-1}) + (f_n - f_{n-1})$, autrement dit : $Y_{m,n} - Y_{m,n-1} = \delta V_{m,n} - \delta f_n$. En supposant que les différences verticales dans Y sont négligeables ou non affectées par f , la probabilité conditionnelle $p(V|f)$ dépend uniquement des différences horizontales, (5) devient alors :

$$p(V|f) \propto \exp \left(- \sum_{m=1}^M \sum_{n=2}^N \phi(\delta V_{m,n} - \delta f_n) \right) \quad (6)$$

2.1.3 Maximum de Vraisemblance (MLE)

On fait le choix de considérer que la différence entre colonnes $Y_{m,n} - Y_{m,n-1}$ suit une distribution Laplacienne ; ce qui correspond à considérer un bruit non-gaussien robuste. Cela signifie que la fonction de coût associé $\phi(x)$ est linéaire, autrement dit, $\phi(x) \propto |x|$.

Ainsi, maximiser la vraisemblance $p(V|f)$ revient à trouver les f_n qui alignent les différences $\delta V_{m,n}$ sur la structure statistique attendu de Y . La vraisemblance $p(V|f)$ reflète la pénalité sur les écarts entre les différences observées $\delta V_{m,n}$, et celles dues à f_n :

Remarque : Maximiser la vraisemblance $p(V|f)$, revient à minimiser le négatif du logarithme de la vraisemblance.

$$\delta \hat{f}_n = \arg \min_{\delta f_n} \left(\sum_{m=1}^M |\delta V_{m,n} - \delta f_n| \right) \quad (7)$$

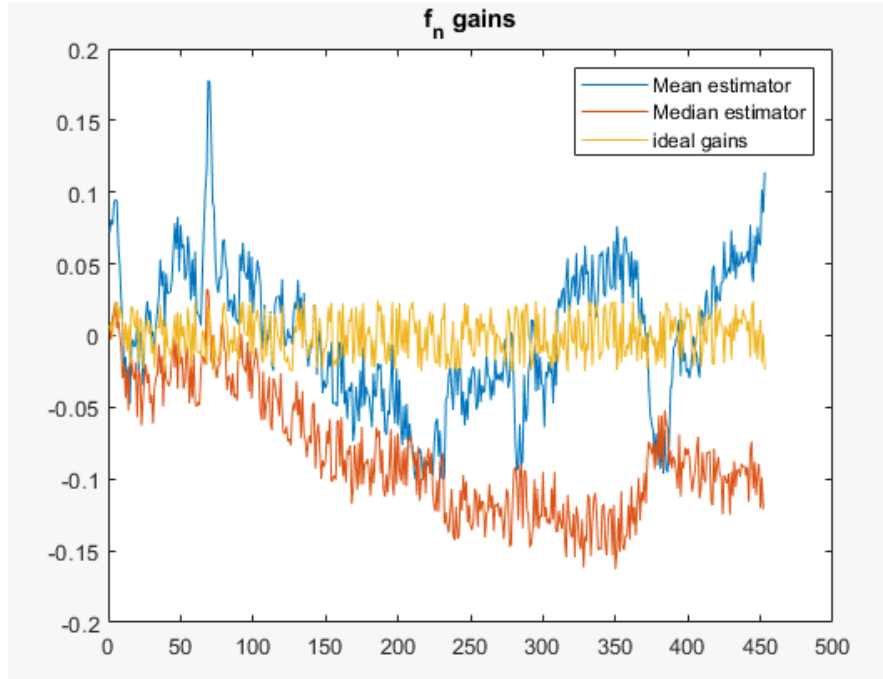
Pour une fonction de coût Laplacienne, on sait qu'un tel minimum est atteint exactement en la valeur de la médiane. Ainsi, les f_n sont reconstruit de manière cumulative à partir des différentes médianes δf_n , et on obtiens l'estimateur suivant :

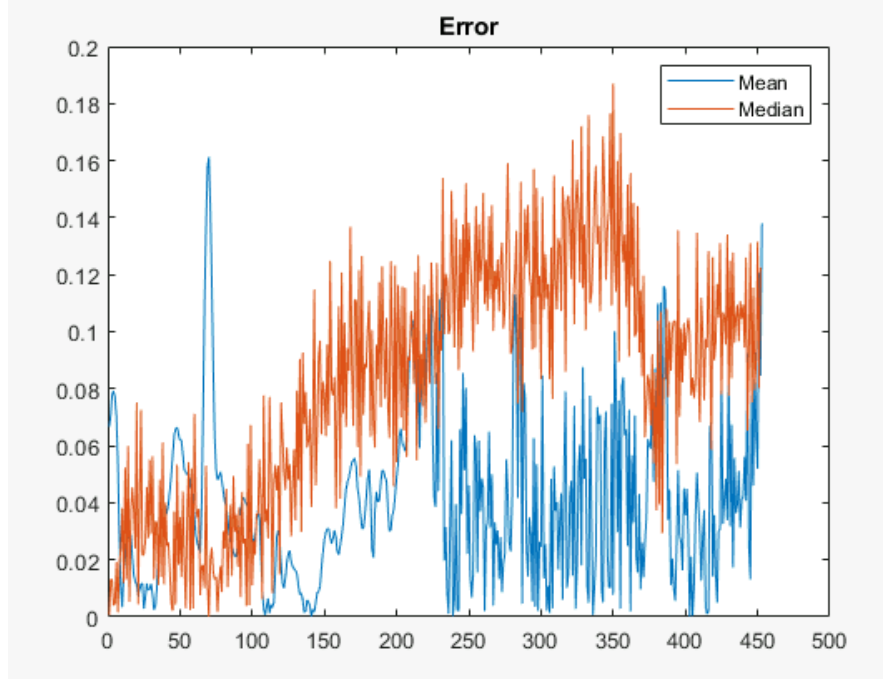
$$\hat{f}_n^2 = \sum_{n=2}^N \delta \hat{f}_n + C \quad (8)$$

où C est une constante additive choisie de telle sorte que les f_n aient une moyenne nulle.

Remarque : Ce choix est robuste aux valeurs abérrantes car la médiane minimise une perte linéaire au lieu d'une perte quadratique.

2.2 Interprétation des résultats





On se rend compte que la méthode 2 n'améliore pas l'estimation des gains vis-à-vis de la première méthode. Encore une fois, on voit que l'estimateur est sensible aux valeurs aberrantes. Il va donc nous falloir aller plus loin dans notre raisonnement afin de trouver un meilleur estimateur des gains.

3 Maximum a posteriori (MAP) (*Méthode 3*)

Avec la méthode 2, on a introduit un estimateur par vraisemblance $p(V|f)$, permettant de décrire comment les observations V sont liées aux f_n . Cependant, on a vu que cela n'était pas suffisant ; il serait intéressant à présent, de considérer une probabilité **a priori** $p(f)$ qui imposent des contraintes directement sur les f_n .

3.1 Préliminaires mathématiques

On introduit donc le **Maximum a posteriori** ou **MAP**, formellement on a :

$$\hat{f}_{MAP} = \arg \max_f p(V|f) \quad (9)$$

Or d'après la loi de Bayes, $p(f|V) \propto p(V|f).p(f)$, avec :

- $p(V|f) \propto \exp \left(- \sum_{m=1}^M \sum_{n=2}^N \phi(\delta V_{m,n} - \delta f_n) \right)$
- $p(f) \propto \exp(-\mu \|f\|_2^2)$

Maximiser $p(f|V)$ revient donc à minimiser le négatif de son logarithmique :

$$J(f) = \underbrace{\sum_{m=1}^M \sum_{n=2}^N \phi(\delta V_{m,n} - \delta f_n)}_{\text{Erreur de vraisemblance}} + \underbrace{\mu \|f\|_2^2}_{\text{Régularisation quadratique}}. \quad (10)$$

Cette fois ci, on prend $\phi(x) = \frac{1}{T}x^2$, ce qui correspond à une distribution gaussienne pour les différences entre voisins ($\delta V_{m,n}$).

Cela conduit à un critère MAP de la forme :

$$J_2(f) = \frac{1}{T} \|D(s - f)\|_2^2 + \mu \|f\|_2^2 \quad (11)$$

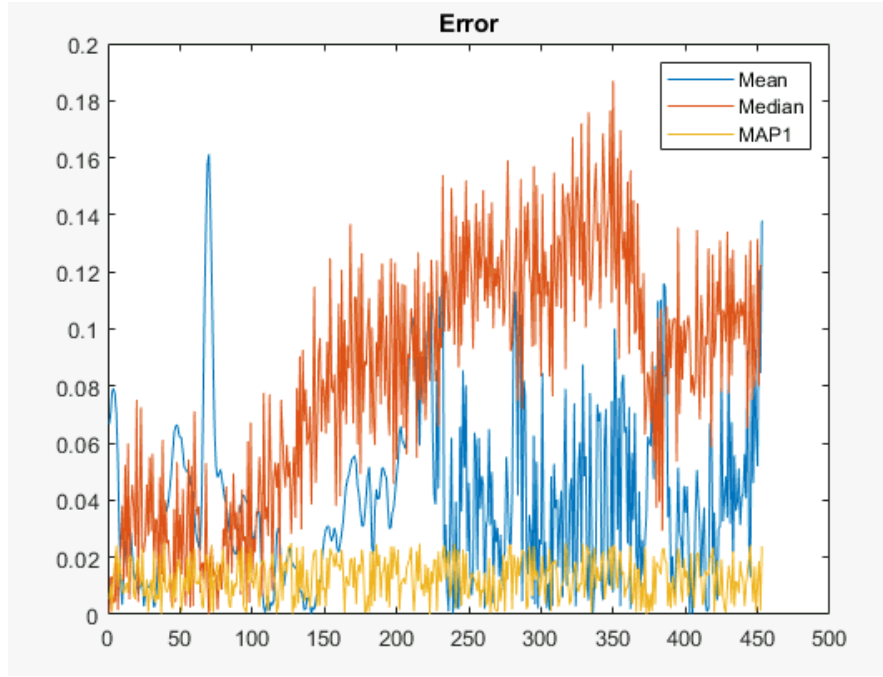
où, D est une matrice de différences finies, $s = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V_{m,n}$ est la moyenne empirique des colonnes, $\mu = \frac{T}{2M\sigma^2}$ contrôle le poids de la régularisation.

Comme le critère $J_2(f)$ est quadratique et peut être résolu analytiquement. La solution est donnée par la résolution du système linéaire suivant :

$$(D^T D + \mu I)f = D^T Ds \quad (12)$$

Remarques : D est une matrice tridiagonale principalement rempli de 0 ('sparse' matrix sur matlab), ce qui permet de gagner en temps de calcul.

3.2 Interprétation des résultats



La régularisation quadratique favorise des solutions pour f qui sont petites en norme L_2 . Cela impose une régularisation qui rend f lisse et stable, en évitant des variations abruptes. Les résultats sont bien plus satisfaisant avec ce nouvel estimateur (MAP1).

4 MAP avec distribution Laplacienne (*Méthode 4*)

Dans la méthode précédente, on choisissait une distribution gaussienne des différences observées, on propose dans cette dernière partie, de considérer une distribution **Laplacienne**. La fonction de coût devient alors : $\phi(x) = \frac{1}{T}|x|$:

$$J_2(f) = \frac{1}{T} \|D(s - f)\|_1 + \mu \|f\|_2^2 \quad (13)$$

Cette approche permet d'être plus robuste vis-à-vis des valeurs aberrantes, cependant, la présence de la norme L_1 rend le problème non-différentiable, ce qui exclut une résolution analytique simple comme dans la méthode 3.

Le critère MAP se réécrit donc comme un problème d'optimisation convexe non-différentiable :

$$\min_f \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M \|D(s - f)\|_1 + \mu \|f\|_2^2. \quad (14)$$

que l'on peut résoudre avec des méthodes d'optimisations telle qu'un algorithme de descente de gradient proximal (avec seuillage doux pour la norme L_1)

4.1 Interprétations des résultats

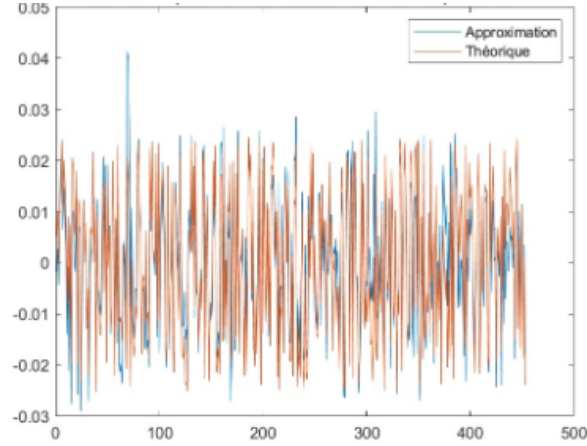


FIGURE 4 – Estimation des gains obtenues avec la norme L_1

On ne distingue pas de net amélioration par rapport à l'utilisation de la norme L_2 (méthode 3), cependant pour d'autre problème, on pourrait préférer cette méthode 4 aux autres et notamment à la méthode 3.

5 Conclusion

Ce TP a exploré différentes approches statistiques pour estimer les gains nécessaires à la correction des images satellites affectées par des variations systématiques (effet de colonnage). Ces méthodes visent à reconstruire les images avec une qualité optimale, tout en s'adaptant aux spécificités des données mesurées. Voici les points clés de cette étude :

- **Moyenne empirique :** Cette méthode repose sur une estimation brutes des gains en utilisant la moyenne des colonnes. Bien qu'intuitive et facile à mettre en oeuvre, elle ne prend pas en compte les corrélations spatiales ou variations de paysages, limitant son efficacité.
- **Médiane :** En minimisant une fonction de coût basée sur les écarts absolus, cette approche est plus robuste aux valeurs aberrantes ; cependant, elle reste limitée en l'absence de régularisation ou de prise en compte globale des interactions entre colonnes.

- **Maximum de Vraisemblance :** Avec une hypothèse de distribution gaussienne, cette méthode modélise explicitement les différences entre pixels voisins et intègre une régularisation quadratique. Elle conduit à une solution analytique efficace mais sensible aux valeurs aberrantes.
- **Maximum à posteriori :** En introduisant une fonction de coût L_1 basée sur une distribution Laplacienne, cette méthode offre une robustesse accrue face aux anomalies dans les données. Bien que plus complexe à résoudre, elle s'avère particulièrement efficace pour des données bruitées ou irrégulières.

6 Annexe (Code Matlab)

```

1 %% Parameters
2 M = size(Z,1);
3 N = size(gth,1);
4
5
6 %% 7. Simulation de l'image
7 x = repmat(gth.',M,1);
8 W = x.*Z;
9 %W_auto = gth.'.*Z;
10 subplot(1,nbr_of_plots,2)
11 imshow(W,[])
12 title('Simulated W')
13
14 %% Logarithmique
15 V = log(W);
16 Y = log(Z);
17 fth = log(gth.')
18 subplot(1,nbr_of_plots,3);
19 imshow(V,[]);
20 title('Logarithmic image');
```

```

1 %% 8. Methode 1 - Moyenne empirique
2
3 %f_mean = mean(V);
4 f_mean = abs(mean(V,1) - mean(V,"all"));
5 f_mean = f_mean - mean(f_mean); % Centr r duit
6 V_mean = Y + f_mean;
7
8 %% Fourier Transform
9
10 N = nextpow2(M);
11 fft_mod = abs(fft(err1,N));
12 subplot(1,2,2)
13 plot(fft_mod)
14 title('fft mod of the gain error')
```

```

1
2 %% Methode 2 - MAP mediane
3
```

```

4 delta_v = diff(V,1,2);
5 delta_f = median(delta_v,1);
6 f_ML = cumsum(delta_f);
7
8 err2 = abs(f_ML - fth(1:452));

```

```

1 %% Methode 3
2 N = size(fth,1);
3
4 B = [-1 1; 0 1];
5
6
7 e = ones(N,1);
8 D = spdiags([-e e ],[0 1], N-1,N);
9
10 mu = 1;
11
12 s = mean(V, 1);
13 A = D' * D + mu * speye(N);
14 b = D' * D * s';
15 f_MAP1 = A \ b;
16
17
18 err3 = abs( f_MAP1 - fth.' ) ;
19
20 figure;
21 plot(err3);

```

```

1 %% Methode 4
2 f_MAP2 = MAPL1(V.',D,mu);
3 err = abs( f_MAP2 - fth.' );
4
5 figure;
6 plot(err);
7
8 figure
9 plot(f_MAP2);

```

Pour la visualisation :

```

1
2 %%
3 figure;
4 %subplot(1,3,2);
5 plot(f_mean)
6 hold on
7
8 plot(f_ML);
9 hold on;
10
11 %subplot(1,3,3)

```

```

12 plot(fth);
13 title('f_n gains')
14
15 legend(['Mean estimator'], ['Median estimator'], ['ideal gains'])
16
17 %%
18 figure;
19 %subplot(1,3,1);
20 plot(err1);
21 hold on
22
23 plot(err2)
24 hold on;
25
26 plot(err3);
27 title('Error');
28 legend(['Mean'], ['Median'], ['MAP1']);

```