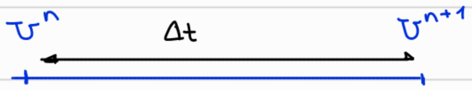
ESQUEMAS RUNGE KUTTA



El objetivo es cambiar el Δt. Para ello se considera el error cometido.

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t_n \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

DATOS : b_i, c_i, a_{ij} → Butcher

$$K_i = F(U^n + \Delta t_n \sum_{j=1}^{s} \underbrace{a_{ij}}_{\text{Matriz}} \underbrace{k_j}_{\text{Vector}} ;\ t_n + c_i \Delta t_n) \qquad i = 1, \dots, s$$

Si el nº de etapas (s) es 2:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t_n (b_1 \cdot k_1 + b_2 k_2)$$

$$K_1 = F(U^n + \Delta t_n (a_{11} k_1 + a_{12} k_2),\ t_n + c_1 \Delta t_n) \quad (I)$$

$$K_2 = F(U^n + \Delta t_n (a_{21} k_1 + a_{22} k_2),\ t_n + c_2 \Delta t_n) \quad (II)$$

? ?

Estos sistemas son implícitos (no es fácil despejar K_1 y K_2)

- ¿Qué tendría que ocurrir con $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ para que fuera sist explícito?

(I) $a_{11} = 0$ y $a_{12} = 0$ ⟶ $K_1 = F(U^n, t_n, c_1 \Delta t)$

(II) $a_{22} = 0$ y $a_{21} \neq 0$ (da igual pq k_1 ya se sabe) → $K_2 = F(U^n + \Delta t_n \cdot a_{21} \cdot K_1,\ t_n + c_2 \Delta t_n)$

La matriz a_{ij} es: $\quad a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ matriz triangular 0.

lo que cambia de un RK y otro

No hay relación entre el orden del esquema y nº de etapas. Lo que existe es anomalías.

- Cálculo del error local de truncación cometido en Runge Kutta

$$\underbrace{T^{n+1}}_{\text{Error local de truncación}} = U(t_{n+1}) - U^{n+1} = K_1 \cdot \Delta t_n^{q+1} \quad (a)$$

$q \Rightarrow$ orden del esquema.

Runge Kutta embebido → tiene un orden menor, pero más error y lo que se quiere es que comparta los valores de K_i de un Runge Kutta normal. La diferencia será el error cometido

RK embebido : b_i^*

$$T^{n+1} = U(t_{n+1}) - U_*^{n+1} = K_2 \, \Delta t_n^{q} \quad (b)$$

Este valor es mayor

Si restamos (a) y (b):

$$\| U_*^{n+1} - U^{n+1} \| = \| K_2 \| \cdot \Delta t_n^{q} \quad (1)$$

$\varepsilon = \|K_2\| \, \Delta t_{max}^{q}$ (2)

↳ Cuando integro con un Δt_{max}, el error cometido es el máximo

Si divido (1) entre (2):

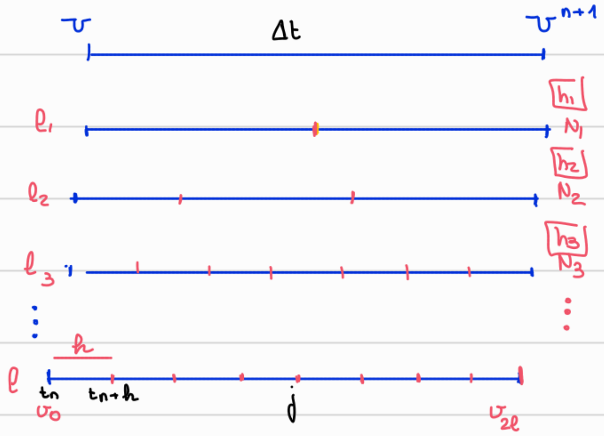
$$\left(\frac{\Delta t_n}{\Delta t_{max}}\right)^q = \frac{\|U_m^{n+1} - U^{n+1}\|}{\varepsilon} \longrightarrow \boxed{\Delta t_{max} = \left(\frac{\varepsilon}{\|U_*^{n+1} - U^{n+1}\|}\right)^{1/q} \cdot \Delta t_n}$$

$\uparrow q \rightarrow \Delta t \downarrow$ porque más preciso será el esquema que se emplea

Esto no implica un coste adicional porque es un sist con funciones relacionadas

$\boxed{\text{GBS}}$ Es otro esquema temporal. Es un esquema multimalla

↳ Unipaso



Se define niveles siguiendo leyes

~~LEY QUE SIGUE LAS SUBDIVISIONES h.~~

$\rightarrow$ $\boxed{h = \frac{\Delta t}{2 N_l}}$ ~~$t_j = t_n + \frac{\Delta t}{2 \cdot N_l} \cdot j$~~

$t_1 = t_n + \frac{\Delta t}{2 N_l}$

Leap Frog — esquema de 2 pasos que arranca con Euler

LF $\quad U_{j+1} = U_{j-1} + 2h F_j \quad$ con $j = 1, \dots, 2l$

1. $U_1 = U_0 + h F_0$ inicial
2. $U_2 = U_0 + 2 h F_1$ $\quad j = 0$
3. $U_{2l+1} = U_{2l-1} + 2h F_{2l}$ $\quad j = 2l$ → último paso

$\xrightarrow{\text{NIVEL}}$ $U_{2l}^{*} = \frac{1}{4}\left(U_{2l+1} + 2U_{2l} + U_{2l-1}\right)$

Queremos calcular:

$$U(h) = a_0 + a_1 \cdot h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_q h^{2q} + \dots$$

El error está asociado a potencias pares porque emplea LF y es un esquema simétrico. → $\boxed{j+1 \text{ y } j-1}$

$x = h^2$

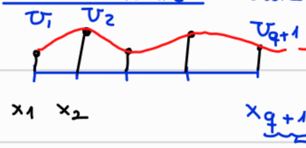
$U(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q \cdot x^q + \dots \quad j = 2l$ — Este cambio de variable es para resolverlo con el problema de Lagrange.

$U(x) = \sum_{j=0}^{q+1} \ell_j(x) \; U_j$

→ Polinomio de Lagrange

→ integración en los diferentes niveles.

RECORDATORIO: Polinomio Lagrange



→ porque es necesario tener $q+1$ puntos para calcularlo

El polinomio se define como.

$$U(x) = \sum_{j=0}^{q+1} \ell_j(x)\, U(x) \quad \text{con} \quad \ell_j = \frac{\overbrace{(x-x_1)}^{\text{MALLA1}}\ \overbrace{(x-x_2)}^{\text{MALLA2}} \dots (x-x_k)(x-x_{q+1})}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\dots(x_j - x_{q+1})}$$

No está $(x - x_j)$ → grado q (falta ese término)

$\ell_j(x_k) = 0$

$\ell_j(x_j) = 1$

$$U(x_k) = \sum_{j}^{q+1} \ell_j(x_k) \cdot U_j = 0 + 0 + \dots + U_k \cdot 1$$

En el problema de nuevo

$U(0) = \sum_{j=1}^{q+1} \ell_j(0)\, U_j$ → la suma ponderada da el mallado

No existe nivel 0.

El nivel del esquema depende los "q" que coja. Siempre cogeremos un nivel correspondiente a "q + 1" (porque el polinomio tiene un término independiente).

$q \longrightarrow U(0)$

Restando me da el error

$q+1 \longrightarrow U(0)$

$q+1 \rightarrow E = O(h^{2q+2})$

$q \longrightarrow E = O(h^{2q})$

Se asocian ∀ las mallas anteriores hasta el punto que dicen.

↳ Se baja nivel 2-3 y mirar si el error encaja o no