RECORDATORIO Error Euler

$$\|E^n\|_{\rho=1} \leq \varepsilon + \sup_{\forall k \in [1,n)} \|T^k\| \, n$$

Error local de Truncación $\quad [\text{Euler } U^{n+1} = U^n + \Delta t \cdot F^n]$

$$T^{n+1} = U(t_{n+1}) - U(t_n) - \Delta t \, F(U(t_n), t_n) =$$

Desarrollo taylor alrededor de t_n $\qquad$ Algo de orden

$$= \cancel{U(t_n)} + \cancel{\frac{dU}{dt}(t_n)\,\Delta t} + \frac{d^2U}{dt^2}(t_n)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) - \cancel{U(t_n)} - \cancel{\Delta t\, F(U(t_n), t_n)}$$

$$= \boxed{\frac{d^2U}{dt^2}(t_n)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)}$$

Ec. dif. $\dfrac{dU}{dt} = F(U, t)$

El error local de Truncacion de Euler es 2° mientras que el modelo es de 1° orden.

$$\sup_{\forall k \in [1,n]} \|T^k\| = \underbrace{K}_{\text{lo acotamos}} \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)$$

$T = n\Delta t \rightarrow \boxed{n = \dfrac{T}{\Delta t}}$

$t=0 \qquad T$

Por tanto:

$$\|E^n\|_{\rho=1} \leq \varepsilon + \sup_{\forall k \in [1,n)} \|T^k\| \cdot n = \varepsilon + k \frac{\Delta t^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{T}{\cancel{\Delta t}}$$

NO SABEMOS LO QUE VALE.

$T \rightarrow$ tiempo total que yo quiero conseguir

$$= \boxed{\varepsilon + k \frac{\Delta t \, T}{2}} \quad 1° \text{ orden}$$

Un esquema es de orden q cuando su error local de truncación es de orden $q+1$. (error orden 2 y modelo orden 1). Esto se debe a la acumulación.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Supongamos que queremos determinar: [algún dato numérico]

- $\phi(h)$ — h: paso de integración o paso espacial
- ϕ^0 = valor exacto

Hipótesis de que $\phi(h)$ admite desarrollo serie de —

$$\phi(h) = \phi^0 + \underbrace{k h^q}_{\text{algo}} + O(h^{q+1})$$

Vamos a integrar el problema con 2 pasos.

MALLADO 1 : h_1

$$\phi(h_1) = \phi^1 = \phi^0 + k h_1^q + O(h_1^{q+1}) \quad (1)$$

MALLADO 2 h_2

$$\phi(h_2) = \phi^2 = \phi_0 + k h_2^q + O(h_2^{q+1}) \quad (2)$$

(1) - (2)

$$\phi^1 - \phi^2 = k[h_1^q - h_2^q] + O \max(h_1^{q+1}, h_2^{q+2}]$$

$$k \simeq \frac{\phi^1 - \phi^2}{(h_1^q - h_2^q)} + \text{algo}$$

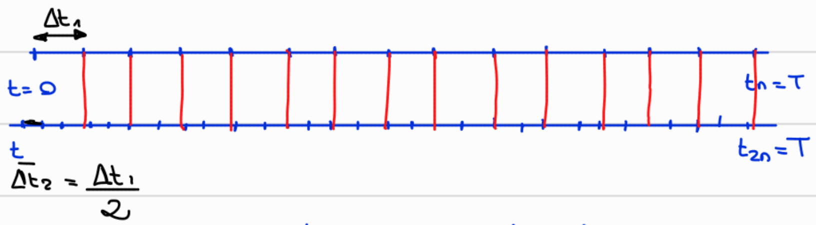
Error malla 1 $\rightarrow$ $E^1 = \phi^0 - \phi^1 \overset{(1)}{=} -k h_1^q \simeq \frac{(\phi^2 - \phi^1)}{h_1^q - h_2^q} \cdot h_1^q =$

$$= \frac{\phi^2 - \phi^1}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^q}$$

$\hookrightarrow$ Esta aproximación dependerá del nº de términos que desprecia_mos.

Creamos una integración

$h_2 = \frac{\Delta t_1}{2}$
$h_1 = \Delta t_1$



U^n

U^n

$$E^n = \frac{U^{2n} - U^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^q}$$

Error

$\hookrightarrow$ orden del esquema

El Error se debe determinar en los Δt que coinciden.

¿Cómo se estima el error si no se conoce q?

$\boxed{\text{CURVAS DE CONVERGENCIA}}$

$E^n = k \cdot \Delta t^q + O(\Delta t^q) \rightarrow$ "Error que cometo en una órbita en un n de pasos determinado para un Δt".

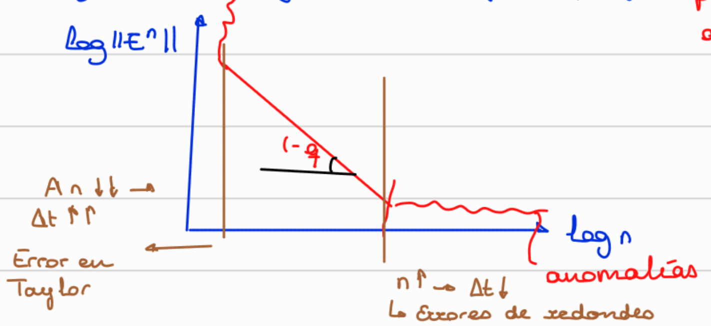
$n = \frac{T}{\Delta t}$

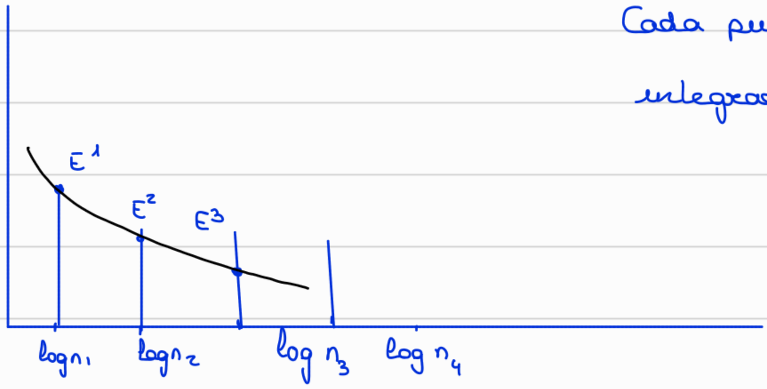
$$\log \|E^n\| = \log \|K\| + q \cdot \log \Delta t \qquad \log \Delta t = \log\left(\frac{T}{n}\right) = \log T - \log n$$

$$\log \|E^n\| = \log \|K\| + q \log T - \underline{q \log n}$$

pendiente algo $-q$

PYTO $\log 10 \rightarrow$ decimal
$\log \rightarrow \ln$





Cada punto se asocia a una integración

$$E^n = \frac{V^{2n} - V^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^q}$$

El error cae en la n que evaluas, no entre medias

La distancia

$$\boxed{\log \| E^n \| = \log \| V^{2n} - V^n \|} - \log \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^q \right)$$

La pendiente se saca con minimos cuadrados

1°) Pintar $\log \| V^{2n} - V^n \|$

2°) Calcular q (extrapolación cuadrática). Con el punto 1 se saca.

3°) Pintar el $\log \| E^n \|$