

# Esercizi di analisi

Francesco Florian, Ilaria Fontana,  
Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato

6 aprile 2017

## Indice

<b>1</b>	<b>Esercizi sugli anelli</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Esercizi sugli ideali</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Intergrali</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Metriche e misure</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Misure segnate</b>	<b>12</b>

# 1 Esercizi sugli anelli

We start with a lemma.

**Lemma 1.** *Every open set  $A \subseteq \mathbb{R}$  can be written as a countable union of open intervals.*

*Dimostrazione.* First, we remind what a *base for a topology* is. Let  $(X, \tau)$  be a topological space. A base for  $\tau$  is a set  $\mathcal{A} \subseteq \tau$  such that

$$\forall T \in \tau \forall x \in T \exists A(x, T) \in \mathcal{A} \ x \in A \subseteq T.$$

If  $T \in \tau$ , using the notation of the previous definition, then we have that

$$T = \bigcup_{x \in T} A(x, T).$$

In other words a base for  $\tau$  is a subset  $\mathcal{A}$  of  $\tau$  such that every set of  $\tau$  can be written as an union of elements in  $\mathcal{A}$ .

Now, given any open set  $T$  of  $\mathbb{R}$  and given  $x \in \mathbb{R}$  by definition exists an open interval contained in  $T$  and containing  $x$ . It is easy to find an open interval with rational endpoints which contains  $x$  and which is contained in  $T$ . This shows that the set

$$\{ ]a, b[ : a, b \in \mathbb{Q} \}$$

is a base of the Euclidean topology. Since the base is countable, this proves that every open set of  $\mathbb{R}$  can be written as a countable union of open intervals.  $\square$

**Esercizio 1 (2016-10-10).** *Let us show that*

$$\text{Bor } \mathbb{R} = \sigma(\{ ]a, b[ : a, b \in \mathbb{R} \}) = \sigma(\{ [a, b] : a, b \in \mathbb{R} \}) \quad (1a)$$

$$= \sigma(\{ ]a, b[ : a, b \in \mathbb{Q} \}) = \sigma(\mathfrak{E}_i) \quad (1b)$$

where

$$1. \ \mathfrak{E}_1 := \{ ]a, +\infty[ : a \in \mathbb{R} \};$$

$$2. \ \mathfrak{E}_2 := \{ [a, +\infty[ : a \in \mathbb{R} \};$$

$$3. \ \mathfrak{E}_3 := \{ ]+\infty, a[ : a \in \mathbb{R} \};$$

$$4. \ \mathfrak{E}_4 := \{ ]+\infty, a] : a \in \mathbb{R} \};$$

*Dimostrazione.* Let us call  $\sigma(\mathfrak{A}_1), \sigma(\mathfrak{A}_2), \sigma(\mathfrak{A}_3)$  the three  $\sigma$ -ring that appear in the statement of this exercise that still do not have a name. First, let us observe that the various  $\sigma$  rings we deal with are not only  $\sigma$ -rings but also  $\sigma$ -algebras. In fact for each of them  $\mathbb{R}$  can be written as a countable union of its elements.

In order to prove the various equalities  $\sigma(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{N})$  we will first prove that  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ , thus obtaining  $\sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \sigma(\mathfrak{N})$  and then we will prove that  $\mathfrak{N} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$  concluding the proof.

Since the set of all open intervals is a subset of the family of the open sets, considering the generated  $\sigma$ -rings, we obtain that  $\sigma(\mathfrak{A}_1) \subseteq \text{Bor } \mathbb{R}$ . The other inclusion follows from the lemma we have seen before this exercise, which states that every open set can be written as a numerable union of open intervals.  $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$  because every open interval can be written as the complementary of a closed set and vice versa. Let us now prove that  $\sigma(\mathfrak{A}_2) = \sigma(\mathfrak{A}_3)$ . The key point is to notice that every  $[a, b]$  can be written as the countable intersection  $\bigcap \{ ]a - \frac{1}{n}, b] \}$ ,

that every  $]a, b]$  can be written as the countable union  $\bigcup \{[a + \frac{1}{n}, b]\}$ , and to remember that a  $\sigma$ -algebra contains all the countable unions and countable intersections.

Clearly  $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_4)$  and  $\sigma(\mathfrak{E}_2) = \sigma(\mathfrak{E}_3)$ , because every element of each first set is the complementary of an element of each second set, and vice versa. The inclusion  $\sigma(\mathfrak{E}_1) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$  follows by the fact that  $]a, +\infty[$  can be written as  $]a, a + 2[ \cup \bigcup a + n, a + n + 2[$ . Also the other inclusion is true because  $]a, b[ = ]a, +\infty[ \cap \bigcup b - \frac{1}{n}, +\infty[$ .

It remains to prove that  $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_2)$ . This can be done observing that  $]a, +\infty[ = \bigcup [a + \frac{1}{n}, +\infty[$  and that  $[a, +\infty[ = \bigcap ]a - \frac{1}{n}, +\infty[$ .

The exercise is completed.  $\square$

**Esercizio 2 (2016-10-10).** Let us show that the Borel set  $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$  coincides with the sets

$$\mathfrak{S} := \{B \cup A : B \in \text{Bor } \mathbb{R}, A \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$$

and also with the set

$$\sigma(\mathfrak{B}) := \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{-\infty, +\infty\}).$$

*Dimostrazione.* First we are going to prove that  $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{B})$ . The inclusion  $(\supseteq)$  easily follows from the fact that every set in  $\mathfrak{B}$  belongs, by definition, also to  $\mathfrak{S}$ . In order to prove the other inclusion we will first prove that  $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$ , and then we will prove the same for  $\{-\infty, +\infty\}$ . From the previous exercise, if we prove that  $\mathfrak{E}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$ , since  $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{E}_2)$ , we obtain that  $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$ . It is sufficient to prove that  $\{+\infty\} \in \mathfrak{B}$  since we know that

$$\{[a, +\infty[ \cup \{+\infty\} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{B}.$$

For this purpose let us write

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[.$$

It remains to prove that  $\{-\infty\} \in \mathfrak{B}$ . This is proved by the following:

$$\{-\infty\} = [-\infty, +\infty] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, +\infty],$$

which is the difference of an element of  $\mathfrak{B}$  and a countable union of elements of  $\mathfrak{B}$ .

Let us now prove that  $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$  coincides with the other two sets. First we will prove that  $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{S}$ . In order to do this we remind who the open sets of  $\overline{\mathbb{R}}$  are: if  $A$  is an open set of  $\mathbb{R}$  then  $A \cap \mathbb{R}$  is an open set of  $\mathbb{R}$  and if  $-\infty$  (respectively  $+\infty$ ) is contained in  $A$ , then exists  $a \in \mathbb{R}$  such that  $[-\infty, a[ \subseteq A$  (respectively  $]a, +\infty] \subseteq A$ ). Since all the open sets of  $\overline{\mathbb{R}}$  are clearly contained in  $\mathfrak{S}$ , the inclusion we want to prove follows.

Let us now prove that  $\sigma(\mathfrak{B}) \subseteq \text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$ . This is obvious since the sets of  $\mathfrak{B}$  are all open sets of  $\overline{\mathbb{R}}$  and so the sigma-ring they generate is contained in  $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$ .

This completes the proof.  $\square$

**Esercizio 3 (2016-10-10).** Sia  $\emptyset \neq \mathfrak{E}_0 \subseteq \mathbb{P}(X)$  e per  $\alpha \in \text{Ord}$  sia

$$\mathfrak{E}_\alpha := \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( A_n \setminus B_n : A_n, B_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta \right) \right\}. \quad (2)$$

Dimostrare allora che  $\sigma(\mathfrak{E}_0) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo le due inclusioni.

$\supseteq$  Si può dimostrare utilizzando il principio di induzione transfinita, nella forma

$$P(0) \wedge \forall \alpha > 0 (\forall \beta < \alpha P(\beta) \implies P(\alpha)) \implies \forall \alpha P(\alpha)$$

sulla proposizione  $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$ .

$\alpha = 0$  Vero per definizione di  $(\sigma)$ -anello generato.

$\alpha > 0$  Per ipotesi induttiva  $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\beta \forall \beta < \alpha$ , quindi  $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta$ . Ma  $\sigma(\mathfrak{E}_0)$  è chiuso per differenza e unione numerabile, quindi date due successioni  $A_n, B_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta$ , abbiamo che  $\forall n \in \mathbb{N} C_n = A_n \setminus B_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$ , e  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$ . Per ipotesi un generico elemento di  $\mathfrak{E}_\alpha$  si scrive in questa forma, e dunque  $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$ .

Allora  $\sigma(\mathfrak{E}_0)$  contiene ogni  $\mathfrak{E}_\alpha$ , e quindi anche la loro unione.

$\subseteq$  Basta dimostrare che  $S := \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$  è un anello.

**Differenza** Siano  $A, B \in S$ ; allora  $\exists \alpha_1, \alpha_2 < \omega_1$ :  $A \in \mathfrak{E}_{\alpha_1}, B \in \mathfrak{E}_{\alpha_2}$ , e sia  $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . allora per ipotesi  $A \setminus B \in \mathfrak{E}_{\alpha+1}$ , con  $\alpha + 1 < \omega_1$ , perché  $\omega_1$  non è un successore.

**Unione** Sia  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di elementi di  $S$ ,  $B_n = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ , e sia  $\alpha_n$  il più piccolo ordinale per cui  $A_n \in \mathfrak{E}_{\alpha_n}$ . Dato che  $\text{Cof}(\omega_1) > \aleph_0$   $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$ , e dunque per ipotesi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{E}_\alpha \subseteq S$

Abbiamo anche dimostrato che da  $\lambda = \omega_1$  in poi la successione  $\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathfrak{E}_\alpha$  è stazionaria.  $\square$

## 2 Esercizi sugli ideali

**Esercizio 4 (2016-10-13).** Sia  $\emptyset \neq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$  anello. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $\mathfrak{N}$  è un ideale in  $\mathfrak{A}$  secondo la definizione usata in Algebra, ovvero

$$\begin{cases} A, B \in \mathfrak{N} \implies A \Delta B \in \mathfrak{N} \\ A \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{N} \end{cases} \quad \begin{matrix} (3a) \\ (3b) \end{matrix}$$

2.  $\mathfrak{N}$  è un ideale secondo la definizione usata in teoria degli insiemi, ossia se valgono le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} A \subseteq B \in \mathfrak{N}, A \in \mathfrak{A} \implies A \in \mathfrak{N} \\ A, B \in \mathfrak{N} \implies A \cup B \in \mathfrak{N} \end{cases} \quad \begin{matrix} (4a) \\ (4b) \end{matrix}$$

3. se  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $B, C \in \mathfrak{N}$  e  $A \subseteq B \cup C$  allora  $A \in \mathfrak{N}$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo la catena di implicazioni  $2 \implies 3 \implies 1 \implies 2$ .

$2 \implies 3$  Siano  $A, B, C$  come nelle ipotesi del Punto 3. Allora per ipotesi vale 4b, e quindi  $B \cup C \in \mathfrak{N}$ . Usando quindi il fatto che  $A \subseteq B \cup C$  e l'ipotesi 4a, si ottiene  $A \in \mathfrak{N}$ .

$3 \implies 1$  Siano  $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{N}$ ; allora  $\mathfrak{A} \ni A \cap B \subseteq B \cup B$  dunque per il Punto 3  $A \cap B \in \mathfrak{N}$ .

Siano ora  $A, B \in \mathfrak{N}$ ; allora per definizione di differenza simmetrica  $\mathfrak{A} \ni A \Delta B \subseteq A \cup B$  e dunque per il Punto 3  $A \Delta B \in \mathfrak{N}$ .

1  $\implies$  2 Dimostriamo le due condizioni.

**4a** Se  $A, B$  soddisfano le ipotesi, allora  $A = A \cap B \in \mathfrak{N}$  perché  $B \in \mathfrak{N}$ .

**4b** Se  $A, B$  soddisfano le ipotesi, allora  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$  è la somma (dell'anello, quindi la differenza simmetrica) di due elementi che per definizione di ideale appartengono a  $\mathfrak{N}$ . Quindi per definizione  $A \cup B \in \mathfrak{N}$ .  $\square$

**Esercizio 5 (13/10/2016).** Sia  $\mathfrak{N}$  un ideale di un anello  $\mathfrak{A}$ .

1. Descrivere l'insieme  $\text{algebra}(\mathfrak{N})$ .

2. Dimostrare che se  $\mathfrak{N}$  è un  $\sigma$ -ideale in  $\mathfrak{A}$  e se  $\mathfrak{M}$  è un  $\sigma$ -anello allora  $\text{algebra}(\mathfrak{M})$  è in più una  $\sigma$ -algebra.

*Dimostrazione.* 1. Sia  $\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \cup \hat{\mathfrak{N}}$ , dove  $\hat{\mathfrak{N}} = \{X \setminus A : A \in \mathfrak{N}\}$ . Dimostriamo che  $\mathfrak{L}$  è un'algebra:

- dato che  $\emptyset \in \mathfrak{N}$ , abbiamo per definizione  $X = X \setminus \emptyset \in \mathfrak{L}$ ;
- dimostriamo che  $\mathfrak{L}$  è chiuso per differenza e unione. Dati  $A, B \in \mathfrak{L}$  abbiamo le seguenti possibilità:
  - $A, B \in \mathfrak{N}$ . In questo caso  $A \setminus B, A \cup B \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$  perché  $\mathfrak{N}$  è un anello;
  - esattamente uno tra  $A$  e  $B$  appartiene a  $\mathfrak{N}$ . Possiamo supporre  $A, C := X \setminus B \in \mathfrak{N}$ . Allora  $A \setminus B = A \cap C \in \mathfrak{N}$ ;  $A \cup B = X \setminus C \cup A = X \setminus (C \setminus A) \in \hat{\mathfrak{N}}$ .
  - $C := X \setminus A, D := X \setminus B \in \mathfrak{N}$ . Allora  $A \cup B = X \setminus (C \cap D) \in \hat{\mathfrak{N}}$ ;  $B \setminus A = (X \setminus C) \setminus (X \setminus D) = D \setminus C \in \mathfrak{N}$

Dato che per definizione  $\text{algebra}(\mathfrak{N})$  deve contenere  $X$  e quindi tutti gli elementi di  $\hat{\mathfrak{N}}$ , questo implica che  $\text{algebra}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{L}$ .

2. Basta dimostrare che  $\mathfrak{M}$  è chiuso per unioni numerabili. Sia  $C_n$  una successione di elementi di  $\text{algebra}(\mathfrak{N})$ . Se  $\forall n \ C_n \in \mathfrak{N}$  allora  $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathfrak{N}$ ; altrimenti, dato che  $\mathfrak{N}$  è un ideale,  $\hat{\mathfrak{N}}$  è un filtro, quindi è chiuso per sovrainsieme: sia allora  $k : C_k \in \hat{\mathfrak{N}}$ ; abbiamo che  $C \supseteq C_k$ , e quindi per la proprietà appena enunciata  $C \in \hat{\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ .  $\square$

**Nota 1.** La dimostrazione del primo punto dell'esercizio precedente non richiede l'ipotesi che  $\mathfrak{N}$  sia un ideale. Sfruttando questo fatto è possibile dare una dimostrazione più corta come segue: Sia  $\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$  l'anello quoziente. Allora l'insieme  $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{E}$  è chiaramente un'anello; allora è un anello anche  $\emptyset + \mathfrak{N} \cup X + \mathfrak{N} = \mathfrak{L}$ .

**Esercizio 6 (2016-10-13).** Sia  $\emptyset \neq \mathfrak{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$  e sia  $\emptyset \neq A \subseteq X$ . Allora  $\sigma(\mathfrak{E} \cap A) = \sigma(\mathfrak{E}) \cap A$  avendo definito  $\mathfrak{E} \cap A := \{E \cap A : E \in \mathfrak{E}\}$ .

*Dimostrazione.* Assegnato a Gaetano.  $\square$

**Esercizio 7 (13/10/2016).** Le seguenti due proprietà sono equivalenti per un ideale  $\mathfrak{N}$  in un'algebra di insiemi  $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ .

1. Essere massimale nella famiglia degli ideali propri.
2. Essere un ideale massimale come nella definizione per famiglie di insiemi, cioè  $\forall A \in \mathfrak{A}, A \in \mathfrak{N} \vee \tilde{A} \in \mathfrak{N}$ .

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$  Sappiamo per un teorema di algebra che  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$  è un campo. L'elemento unitario di  $\mathfrak{A}$  è  $X$ , e quindi la classe  $X + \mathfrak{N}$  è l'unità del campo. Questo significa che

$$\forall A \in \mathfrak{A}, A \notin \mathfrak{N} \exists B: A + \mathfrak{N} \cdot B + \mathfrak{N} = X + \mathfrak{N}$$

cioè

$$A \cap B \in X \Delta \mathfrak{N} := \{D \in \mathfrak{A}: \exists N \in \mathfrak{N}, D = X \setminus N\}$$

e quindi  $A$  coincide con  $X$  a meno di un elemento dell'ideale  $\mathfrak{N}$ , ossia  $\tilde{A} \in \mathfrak{N}$ .

$\Leftarrow$  Supponiamo per assurdo che non valga il Punto 1: allora esiste  $A \notin \mathfrak{N}$  tale che l'ideale  $\mathfrak{N}'$  generato da  $\mathfrak{N} \cup \{A\}$  è proprio. Per il Punto 2  $\tilde{A} \in \mathfrak{N}$  e quindi, dato che un ideale è chiuso per unione  $X = A \cup \tilde{A} \in \mathfrak{N}'$ , e poiché gli ideali sono chiusi per contenimento  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{A}$ , assurdo.  $\square$

**Nota 2.** Il campo quoziente dell'esercizio precedente è  $\mathbb{F}_2$ , infatti ogni elemento non in  $\mathfrak{N}$  è nella classe di  $X$ .

**Esercizio 8 (13/10/2016).** Sia  $\emptyset \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$  algebra in  $\mathbb{P}(X)$  con  $X \notin \mathfrak{N}$ . Definiamo la funzione  $\nu(\cdot)$  ponendo

1.

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ +\infty & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che  $\nu$  è finitamente additiva se e solo se  $\mathfrak{N}$  è un ideale.

2. Definiamo ora

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ 1 & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che  $\nu$  è finitamente additiva se e solo se  $\mathfrak{N}$  è un ideale massimale in  $\mathfrak{A}$ .

*Dimostrazione.* 1. Sappiamo che per un anello l'additività e la finita additività coincidono. Allora  $\nu$  è finitamente additiva se e solo se  $(\forall A, B \in \mathfrak{A} \nu(A \sqcup B) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N} \wedge B \in \mathfrak{N})$ , (dato che  $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N}$ ), e quindi se e solo se  $A \sqcup B \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N} \wedge B \in \mathfrak{N}$ .

Questo equivale a  $B \subseteq A \in \mathfrak{N} \Rightarrow B \in \mathfrak{N}$  (perché  $B \sqcup (A \setminus B) \in \mathfrak{N}$ ) e  $A, B \in \mathfrak{N} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{N}$  (questa è l'unione disgiunta di  $A$  e  $B \setminus A$ , che usando la condizione appena trovata sono elementi di  $\mathfrak{N}$ ; viceversa la condizione sull'unione implica chiaramente quella sull'unione disgiunta).

2. Sappiamo già che gli insiemi di misura nulla formano un ideale. Resta quindi da dimostrare che  $\nu$  è finitamente additiva se e solo se questo ideale è massimale.

$\Rightarrow$  Supponiamo che la misura sia finitamente additiva e per assurdo  $\mathfrak{N}$  non sia massimale. Allora  $\exists A \in \mathfrak{A}: A \notin \mathfrak{N}, \tilde{A} \notin \mathfrak{N}$ . Allora  $\nu(X) = \nu(A \sqcup \tilde{A}) = \nu(A) + \nu(\tilde{A}) = 2$ , assurdo.

$\Leftarrow$  Sia ora  $\mathfrak{N}$  massimale, e consideriamo  $A, B \in \mathfrak{A}$  disgiunti. Ci sono tre possibilità:

- Se  $A, B \in \mathfrak{N}$ ,  $\nu(A) = \nu(B) = \nu(A \cup B) = 0$  e la finita additività vale.
- Se esattamente uno tra  $A$  e  $B$  è un elemento di  $\mathfrak{N}$ ,  $A \cup B \notin \mathfrak{N}$ , perché l'ideale è chiuso per sottoinsiemi. In questo caso  $\nu(A) + \nu(B) = 1 + 0 = \nu(A \cup B)$  e la finita additività vale.

- Se  $A, B \notin \mathfrak{N}$ ,  $\nu(A) + \nu(B) = 2 > \nu(A \cup B)$ . Dimostriamo allora per assurdo che questo caso non può verificarsi. Per la massimalità dell'ideale  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathfrak{N}$  e inoltre  $\mathfrak{N} \ni \tilde{A} \cup \tilde{B} = \widetilde{A \cap B} = \tilde{\emptyset} = X$ , assurdo perché per definizione gli ideali massimali sono propri.  $\square$

### 3 Integrali

**Esercizio 9 (28/10/2017).** Sia  $f$   $\mu$ -misurabile e positiva, sia

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \nu(A) := \int f \chi_A \, d\mu$$

Dimostrare che  $\nu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  è una misura  $\sigma$ -additiva.

*Dimostrazione.* Dimostriamo intanto l'additività: sia  $C = A \sqcup B$ ; allora  $f \chi_C = f \chi_A + f \chi_B$  e quindi  $\nu(C) = \int f \chi_C \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu + \int f \chi_B \, d\mu = \nu(A) + \nu(B)$  per la linearità dell'integrale se tutti i termini sono finiti, oppure perché per  $0 \leq c \leq +\infty$ ,  $c + \infty = +\infty$ .

Sia ora  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$  una successione di insiemi disgiunti, e  $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Sia  $B_n = \bigcup_{j \leq n} A_j$ . Per la finita additività sappiamo che

$$\int f \chi_{B_n} \, d\mu = \sum_{j \leq n} \int f \chi_{A_j} \, d\mu$$

inoltre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f \chi_{B_n} = f \chi_A$ <sup>1</sup>, quindi dal lemma di Fatou

$$\int f \chi_A \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f \chi_{B_n} \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \leq n} \int f \chi_{A_j} \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f \chi_{A_n} \, d\mu$$

Infine, dato che  $B_n \uparrow A$ ,  $f \chi_{B_n} \leq f \chi_A$ , e quindi per la monotonia dell'integrale  $\int f \chi_A \, d\mu \geq \int f \chi_{B_n} \, d\mu$  e

$$\int f \chi_A \, d\mu \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f \chi_{B_n} \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f \chi_{B_n} \, d\mu$$

Questa disuguaglianza, combinata con quella che deriva dal lemma di Fatou, ci dà la tesi.  $\square$

**Esercizio 10 (3/11/2016).** Trovare dei controesempi alle seguenti:

1. Il lemma di Fatou enunciato con  $\limsup$  al posto del  $\liminf$
2. Il lemma di Fatou enunciato con l'uguaglianza.

*Dimostrazione.* Usiamo in entrambi i casi la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ .

- Sia  $f_{2n} = \chi_{[0, 1/2[}$ ,  $f_{2n+1} = \chi_{[1/2, 1]}$ . Allora  $\int f_{2n} \, d\mu = \int f_{2n+1} \, d\mu = 1/2$ , quindi  $\limsup \int f_n \, d\mu = 1/2$ , mentre  $\limsup f_n = \chi_{[0, 1]}$  e quindi  $\int \limsup f_n \, d\mu = 1$ .
- Sia  $f_n = n \chi_{[0, 1/n]}$ . Allora  $\int f_n \, d\mu = 1$ , e quindi  $\liminf \int f_n \, d\mu = 1$ ; inoltre  $\liminf f_n = 0$  q.o. e quindi  $\int \liminf f_n \, d\mu = 0$ .  $\square$

<sup>1</sup>questo limite e i prossimi esistono perché consideriamo successioni crescenti



## 4 Metriche e misure

**Esercizio 11 (2016-10-14).** Sia  $\mathfrak{P} := \{[a, b[ : -\infty < a \leq b < +\infty\}$ , sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  crescente e sia  $\mu_g([a, b]) := g(b) - g(a)$ .

1. Dimostrare che  $\mu_g$  è una misura finitamente additiva.
2. Dimostrare che  $\mu_g$   $\sigma$ -additiva se e solo se  $\forall x \in \mathbb{R} \ g(x - \circ) = g(x)$ .<sup>2</sup>

*Dimostrazione.* 1. Mostriamo che se l'unione di un numero finito di elementi di  $\mathfrak{P}$  appartiene a  $\mathfrak{P}$ , allora la misura dell'unione è la somma delle misure.

Sia quindi  $[a, b[ = \bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k[$ ; a meno di un riordinamento<sup>3</sup> possiamo supporre che  $b_k = a_{k-1} \ \forall \ 2 \leq k \leq n$ ;  $a_1 = a =: b_0, b_n = b$ . Allora

$$\mu_g([a, b]) = g(b_n) - g(b_0) = \sum_{k=1}^n (g(b_k) - g(b_{k-1})) = \sum_{k=1}^n (g(b_k) - g(a_k)) = \sum_{k=1}^n \mu_g([a_k, b_k]).$$

che è quanto dovevamo dimostrare.

2. Dimostriamo le due implicazioni.

$\Rightarrow$  Supponiamo per assurdo che esista  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \rightarrow x^-$  e  $g(x - \circ) < g(x)$ ; allora  $\Delta_n = [x, x_n] \downarrow \emptyset$ , ma  $\mu_g(\Delta_n) \rightarrow g(x) - g(x - \circ) > 0$ , assurdo.

$\Leftarrow$  Sia  $\mathfrak{A} = \text{anello}(\mathfrak{P})$ ; sappiamo che  $\mu_g$  è finitamente additiva, quindi resta solo da dimostrare che  $\mu_g$  è regolare (cioè  $\forall A \in \mathfrak{A}, \forall \varepsilon > 0$  esistono un compatto  $K \subseteq A, B \in \mathfrak{A}$  tali che  $A \setminus K \subseteq B, \mu_g(B) < \varepsilon$ ).

Siano allora  $\varepsilon > 0, \mathfrak{A} \ni A = \bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k[$ , con  $[a_k, b_k] \in \mathfrak{P}$ ; dall'ipotesi che  $g$  è continua a sinistra sappiamo che  $\forall x \exists \delta(x) : g(x) - g(x - \delta) < \frac{\varepsilon}{n}$ .

Poniamo allora  $\delta_j = \delta(x_j), K_j = [a_j, b_j - \delta_j], B_j = [b_j - \delta_j, b_j[$ . Siano inoltre  $B = \bigcup B_j, K = \bigcup K_j$

Allora  $\mu_g(B_j) = g(b_j) - g(b_j - \delta_j) < \frac{\varepsilon}{n}$ , quindi  $\mu_g(B) < \varepsilon$ ; inoltre  $K$  è compatto e dunque  $B$  e  $K$  sono come nella definizione di misura regolare.  $\square$

**Esercizio 12 (2016-10-20).** Sia  $\mathfrak{A}$  un anello,  $\eta: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una submisura. Sia come al solito  $\mathfrak{N}(\eta) = \{A \in \mathfrak{A} : \eta(A) = 0\}$ . Dimostrare che

1. Se  $\mathfrak{N}(\eta)$  è un ideale di  $\mathfrak{A}$  e  $\eta$  è una  $\sigma$ -submisura, allora  $\mathfrak{N}$  è un  $\sigma$ -ideale.
2. Se  $A, B \in \mathfrak{A}$  e  $A \cap B \in \mathfrak{N}(\eta)$ , allora  $\eta(A) = \eta(A \cap N) = \eta(B)$ .
3. Se  $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}(\eta)$ , allora  $\eta(A) = \eta(A \cup N) = \eta(A \Delta N) = \eta(A \setminus N)$

*Dimostrazione.*

**Esercizio 13 (2016-10-20).** Sia  $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$  un  $\sigma$ -anello,  $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura  $\sigma$ -additiva. Sia  $\mathfrak{N} := \{N : \exists A \in \mathfrak{A}, N \subseteq A, A \in \mathfrak{N}(\mu)\}$ .

1. Dimostrare che  $\mathfrak{N}$  è un  $\sigma$ -ideale in  $\mathbb{P}(X)$ .

<sup>2</sup>Con  $g(x - \circ)$  indichiamo  $\lim_{y \rightarrow x^-} g(y)$

<sup>3</sup>e forse di intervalli vuoti?

2. Sia  $\mathfrak{L} := \text{anello}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N})$ . Dimostrare che  $\mathfrak{L} = \{A \Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\} = \{A \sqcup N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$

*Dimostrazione.* 1. Sia  $\hat{N} \subseteq N \in \mathfrak{N}$ ; per ipotesi  $\exists A \in \mathfrak{A} : N \subseteq A, \mu(A) = 0$ , ma allora anche  $\hat{N} \subseteq A$ , e quindi  $\hat{N} \in \mathfrak{N}$ .

Sia ora  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di elementi di  $\mathfrak{N}$ ; per ipotesi  $\forall n \exists A_n \in \mathfrak{A} : \mu(A_n) = 0, N_n \subseteq A_n$ ; allora  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  e per la  $\sigma$ -additività di  $\mu$ ,  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$  e quindi per definizione  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{N}$ .

2. Poniamo

$$\mathfrak{U} := \{A \Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

$$\mathfrak{T} := \{A \sqcup N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

Mostriamo che  $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$  Siano  $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$ .

$\subseteq$  Consideriamo  $A \Delta N = (A \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$ . Per ipotesi  $\exists C \in \mathfrak{A}$  di misura nulla tale che  $N \subseteq C$ . Sia  $B = A \cap C$ ; allora

$$B \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0;$$

inoltre

$$A \setminus N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N).$$

Allora abbiamo

$$A \Delta N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$$

dove  $A \setminus B \in \mathfrak{A}$  e  $(B \setminus N) \sqcup (N \setminus A) \in \mathfrak{N}$ , e dunque  $A \Delta N \in \mathfrak{T}$ .

$\supseteq$  Sia ora  $A \cap N = \emptyset$ . Allora  $A \sqcup N = A \Delta N$  e la tesi è provata.

Mostriamo ora  $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$ .

$\supseteq$  È vero perché per definizione ogni anello è chiuso per differenza simmetrica.

$\subseteq$  Basta mostrare che  $\mathfrak{U}$  è un anello e che contiene  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$ ;  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$  perché ogni elemento  $A$  di  $\mathfrak{A}$  si scrive come  $A \Delta \emptyset$ , e analogamente  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$  Perché ogni elemento  $N$  di  $\mathfrak{N}$  si scrive come  $N \Delta \emptyset$ .

Per provare che  $\mathfrak{U}$  è un anello mostriamo che  $\mathfrak{T}$  è chiuso per unione disgiunta e differenza.

$\sqcup$  Siano  $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$  disgiunti; allora  $(A \sqcup N) \sqcup (A_1 \sqcup N_1) = (A \sqcup A_1) \sqcup (N \sqcup N_1) \in \mathfrak{U}$ , perché l'unione è associativa e commutativa.

$\setminus$  Mostriamo la differenza di due elementi di  $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$  appartiene a  $\mathfrak{U}$ . Siano  $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$ ; allora  $(A \sqcup N) \setminus (A_1 \sqcup N_1) = (A \setminus A_1 \setminus N_1) \sqcup (N \setminus A_1 \setminus N_1)$ . Ma il secondo insieme dell'unione è un sottoinsieme di  $N$ , e quindi appartiene all'ideale  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$ .

Inoltre sia  $N_1 \subseteq B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0$  contenuto in  $A \setminus A_1$ .  $A \setminus A_1 \setminus N_1 = A \setminus A_1 \setminus B \sqcup B \setminus N_1$  dove e quindi il primo insieme dell'unione appartiene ad  $\mathfrak{U}$ .

Dato che abbiamo già dimostrato che  $\mathfrak{U}$  è chiuso per unioni disgiunte, è chiuso anche per differenza.  $\square$

**Esercizio 14 (2016-10-27).** Definiamo  $\bar{\mu}(A \Delta N) := \mu(A) \forall A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$ .

1. Dimostrare che  $\bar{\mu}$  è ben definita,  $\sigma$ -additiva, completa e che  $\bar{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$ .

2. Dimostrare che  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\bar{\mu})$ .

**Nota 3.** La misura  $\bar{\mu}$  così definita si dice *completamento* di  $\mu$ .

*Dimostrazione.* 1. Definiamo  $\mathfrak{U} := \{A \Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$ . Gli ultimi due punti sono ovvi prendendo  $A = \emptyset$  e  $N = \emptyset$  rispettivamente. Dimostriamo quindi i primi due.

- Dimostriamo che  $\bar{\mu}$  è ben definita. Sia  $A_1 \Delta N_1 = A_2 \Delta N_2$ , con  $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}; N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$ . Allora  $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A} : \mu(B_1) = \mu(B_2) = 0, N_1 \subseteq B_1, N_2 \subseteq B_2$ . Quindi  $A_1 \subseteq A_2 \cup B_1 \cup B_2$  e per l'additività della misura  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$ ; allo stesso modo anche  $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$  e quindi  $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ .
- Per dimostrare la  $\sigma$ -additività utilizziamo l'esercizio precedente: dati  $A, N$  come nelle ipotesi,  $\exists \bar{A} \in \mathfrak{A}; \bar{N} \in \mathfrak{N} : A \Delta N = \bar{A} \sqcup \bar{N}$ . Inoltre, per la buona definizione di  $\bar{\mu}$ , e poiché  $\bar{A} \sqcup \bar{N} = \bar{A} \Delta \bar{N}$ , abbiamo che  $\mu(A) = \mu(\bar{A})$ . Sia quindi  $(A_k \Delta N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di elementi disgiunti in  $\mathfrak{U}$ . Dato che  $\mathfrak{N}$  è un  $\sigma$ -anello  $\exists \hat{A} : \mu(\hat{A}) = 0, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subseteq \hat{A}$ . Inoltre detti  $\hat{A}_k := A_k \setminus \hat{A}$ , si ha  $\mu(A_k) = \mu(\hat{A}_k)$ .

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \Delta N_k) \right) &= \bar{\mu} \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\bar{A}_k \sqcup \bar{N}_k) \right) = \\ &= \bar{\mu} \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\hat{A}_k \sqcup (\bar{N}_k \cup \hat{A})) \right) = \\ &= \bar{\mu} \left( \hat{A} \sqcup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \right) = \\ &= \mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\hat{A}_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_k \Delta N_k) \end{aligned}$$

che è la  $\sigma$ -additività.

2. Gli elementi di  $\mathfrak{N}$  hanno tutti misura nulla perché sottoinsiemi di insiemi di misura nulla. Viceversa, sia  $A$  un insieme di misura nulla. Allora ovviamente  $A \subseteq A$  e  $\mu(A) = 0$ , quindi per definizione  $A \in \mathfrak{N}$ .  $\square$

**Esercizio 15 (2016-10-24).** Sia  $\mathfrak{A}$  anello. Sia  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura  $\sigma$ -additiva. Definiamo come al solito  $\mu^*$  misura esterna e  $\mathfrak{M}$  l'insieme dei misurabili. Già sappiamo che  $\mu^*_{|\mathfrak{M}} =: \bar{\mu}$  è una misura  $\sigma$ -additiva.

Sia ora  $\mathfrak{L}$  anello con  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ , sia  $\nu : \mathfrak{L} \rightarrow [0, +\infty]$  misura  $\sigma$ -additiva con  $\nu|_{\mathfrak{A}} = \mu$ . Dimostrare che allora  $\nu = \bar{\nu}|_{\mathfrak{L}}$ .

**Esercizio 16 (2016-10-14).** Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra, e  $S(\mathfrak{A})$  l'insieme delle funzione semplici su  $\mathfrak{A}$ .

Sia  $E = (S(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_s)$ ,  $T \in E' = \{\xi \in E' : \text{continua}\}$ . Sappiamo che  $\exists \mu : T(f) = \int f d\mu$ .

Calcolare la norma  $\|T\|$  operatoriale in funzione della misura.

*Dimostrazione.*

**Esercizio 17 (2016-10-14).** Sia  $\mathfrak{A}$  un anello,  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow X$ . Dire quali delle seguenti sono equivalenti, nei due casi  $X = \mathbb{R}$  e  $X = [0, +\infty]$ .

1.  $\mu$  è  $\sigma$ -additiva
2.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ ,  $A_n \uparrow A \in \mathfrak{A}$  si ha  $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
3.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ ,  $A_n \downarrow A \in \mathfrak{A}$  si ha  $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
4.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ ,  $A_n \downarrow \emptyset$  si ha  $\mu(A_n) \rightarrow 0$

*Dimostrazione.*

## 5 Misure segnate

**Esercizio 18.** Sia  $P, N$  una decomposizione di Hahn,  $P_0 \in \mathfrak{A}$ ,  $N_0 := X \setminus P_0$ .

Allora  $P_0, N_0$  è una decomposizione di Hahn se e solo se  $P \Delta P_0 \in \mathfrak{N}(\mu)$  se e solo se  $N \Delta N_0 \in \mathfrak{N}(\mu)$ , dove  $\mathfrak{N}(\mu) := \{A \in \mathfrak{A} : \forall B \in \mathfrak{A}, B \subseteq A \mu(B) = 0\}$ .

*Dimostrazione.*

**Esercizio 19.**

$$\begin{aligned}\mu^+(A) &= \sup\{\mu(M) : M \in \mathfrak{A}, M \subseteq A\} \\ \mu^-(A) &= \inf\{\mu(M) : M \in \mathfrak{A}, M \subseteq A\} \\ |\mu(A)| &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu|(A_i) : n \in \mathbb{N}, \mathfrak{A} \ni A_i \text{ disgiunti}, A = \bigcup_{i=1}^n A_i \right\} \\ \mathfrak{N}(\mu) &= \mathfrak{N}(|\mu|) = \mathfrak{N}(\mu^+) \cap \mathfrak{N}(\mu^-)\end{aligned}$$

(quindi  $\mathfrak{N}(\mu)$  è un  $\sigma$ -ideale in  $\mathfrak{A}$ ).

Se  $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  è una misura  $\sigma$ -additiva,  $f \in \mathcal{L}_1(\nu)$ ,  $\mu(A) := \int_A f \, d\nu$ , allora  $\mu^+(A) = \int_A f^+ \, d\nu$ ,  $\mu^-(A) = \int_A f^- \, d\nu$ ,  $|\mu|(A) = \int_A |f| \, d\nu$ .

*Dimostrazione.*

**Esercizio 20.** Sia  $\alpha$  la misura di Lebesgue su  $\text{Bor}([0, 1])$ ,  $\mu$  la counting measure su  $\text{Bor}([0, 1])$ .

Dimostrare che  $\nexists \lambda, \nu : \text{Bor}([0, 1]) \rightarrow [0, +\infty]$  misure  $\sigma$ -additive con  $\mu = \lambda + \nu$ ,  $\lambda \ll \alpha, \nu$