Esercizi di analisi

Francesco Florian, Ilaria Fontana,
Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato

8 aprile 2017

Indice

1 Esercizi sugli anelli

We start with a lemma.

Lemma 1. *Every open set $A \subseteq \mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals.*

Dimostrazione. First, we remind what a *base for a topology* is. Let (X, τ) be a topological space. A base for τ is a set $\mathcal{A} \subseteq \tau$ such that

$$\forall T \in \tau \ \forall x \in T \ \exists A(x,T) \in \mathcal{A} \ x \in A \subseteq T.$$

If $T \in \tau$, using the notation of the previous definition, then we have that

$$T = \bigcup_{x \in T} A(x,T).$$

In other words a base for τ is a subset $\mathcal{A}$ of τ such that every set of τ can be written as an union of elements in $\mathcal{A}$.

Now, given any open set T of $\mathbb{R}$ and given $x \in \mathbb{R}$ by definition exists an open interval contained in T and containing x. It is easy to find an open interval with rational endpoints which contains x and which is contained in T. This shows that the set

$$\{]\,a,\, b\,[\, : \, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

is a base of the Euclidean topology. Since the base is countable, this proves that every open set of $\mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals. □

Esercizio 1 (2016-10-10). *Let us show that*

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R} = \sigma\left(\{]\,a,\, b\,[\, : \, a, b \in \mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{[\,a,\, b\,] \, : \, a, b \in \mathbb{R}\}\right) \tag{1a}$$

$$= \sigma\left(\{]\,a,\, b\,] \, : \, a, b \in \mathbb{Q}\}\right) = \sigma(\mathfrak{E}_i) \tag{1b}$$

where

1. $\mathfrak{E}_1 := \{]\,a,\, +\infty\,[\, : \, a \in \mathbb{R}\}$;
2. $\mathfrak{E}_2 := \{[\,a,\, +\infty\,[\, : \, a \in \mathbb{R}\}$;
3. $\mathfrak{E}_3 := \{]\,+\infty,\, a\,[\, : \, a \in \mathbb{R}\}$;
4. $\mathfrak{E}_4 := \{]\,+\infty,\, a\,] \, : \, a \in \mathbb{R}\}$;

Dimostrazione. Let us call $\sigma(\mathfrak{A}_1), \sigma(\mathfrak{A}_2), \sigma(\mathfrak{A}_3)$ the three σ-ring that appear in the statement of this exercise that still do not have a name. First, let us observe that the various σ rings we deal with are not only σ-rings but also σ-algebras. In fact for each of them $\mathbb{R}$ can be written as a countable union of its elements.

In order to prove the various equalities $\sigma(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{N})$ we will first prove that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, thus obtaining $\sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \sigma(\mathfrak{N})$ and the then we will prove that $\mathfrak{N} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$ concluding the proof.

Since the set of all open intervals is a subset of the family of the open sets, considering the generated σ-rings, we obtain that $\sigma(\mathfrak{A}_1) \subseteq \operatorname{Bor} R$. The other inclusion follows from the lemma we have seen before this exercise, which states that every open set can be written as a numerable union of open intervals. $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ because every open interval can be written as the complementary of a closed set and vice versa. Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{A}_2) = \sigma(\mathfrak{A}_3)$. The key point is to notice that every $[a, b]$ can be written as the countable intersection $\bigcap \left\{ \left]\, a - \frac{1}{n},\, b\,\right] \right\}$, that every $]\,a,\,b\,]$ can be written as the countable union $\bigcup\big\{\big[\,a+\frac{1}{n},\,b\,\big]\big\}$, and to remember that a σ-algebra contains all the countable unions and countable intersections.

Clearly $\sigma(\mathfrak{E}_1)=\sigma(\mathfrak{E}_4)$ and $\sigma(\mathfrak{E}_2)=\sigma(\mathfrak{E}_3)$, because every element of each first set is the complementary of an element of each second set, and vice versa. The inclusion $\sigma(\mathfrak{E}_1)\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ follows by the fact that $]\,a,\,+\infty\,[$ can be written as $]\,a,\,a+2\,[\,\cup\bigcup\,]\,a+n,\,a+n+2\,[$. Also the other inclusion is true because $]\,a,\,b\,[\,=\,]\,a,\,+\infty\,[\,\cap\bigcup\,]\,b-\frac{1}{n},\,+\infty\,[$.

It remains to prove that $\sigma(\mathfrak{E}_1)=\sigma(\mathfrak{E}_2)$. This can be done observing that $]\,a,\,+\infty\,[\;=\bigcup\big[\,a+\frac{1}{n},\,+\infty\,\big[$ and that $[\,a,\,+\infty\,[\,=\bigcap\,]\,a-\frac{1}{n},\,+\infty\,[$.

The exercise is completed. $\square$

Esercizio 2 (2016-10-10). *Let us show that the Borel set* $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$ *coincides with the sets*

$$\mathfrak{S}\coloneqq\{B\cup A\colon B\in\operatorname{Bor}\mathbb{R},\ A\subseteq\{-\infty,+\infty\}\}$$

and also with the set

$$\sigma(\mathfrak{B})\coloneqq\sigma\left(\{[a,+\infty]:a\in\mathbb{R}\}\cup\{[-\infty,+\infty]\}\right).$$

Dimostrazione. First we are going to prove that $\mathfrak{S}=\sigma(\mathfrak{B})$. The inclusion $(\supseteq)$ easily follows from the fact that every set in $\mathfrak{B}$ belongs, by definition, also to $\mathfrak{S}$. In order to prove the other inclusion we will first prove that $\mathcal{B}\subseteq\sigma(\mathfrak{B})$, and the we will prove the same for $\{-\infty,+\infty\}$. From the previous exercise, if we prove that $\mathfrak{E}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{B})$, since $\mathcal{B}=\sigma(\mathfrak{E}_2)$, we obtain that $\mathcal{B}\subseteq\sigma(\mathfrak{B})$. It is sufficient to prove that $\{+\infty\}\in\mathfrak{B}$ since we know that

$$\{[\,a,\,+\infty\,[\,\cup\{+\infty\}:a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathfrak{B}.$$

For this purpose let us write

$$\{+\infty\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty].$$

It remains to prove that $\{-\infty\}\in\mathfrak{B}$. This is proved by the following:

$$\{-\infty\}=[-\infty,+\infty]\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\,a,\,+\infty\,],$$

which is the difference of an element of $\mathfrak{B}$ and a countable union of elements of $\mathfrak{B}$.

Let us now prove that $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$ coincides with the other two sets. First we will prove that $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}\subseteq\mathfrak{S}$. In order to do this we remind who the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are: if A is an open set of $\overline{\mathbb{R}}$ then $A\cap\mathbb{R}$ is an open set of $\mathbb{R}$ and if $-\infty$ (respectively $+\infty$) is contained in A, then exists $a\in\mathbb{R}$ such that $[-\infty,a[\subseteq A$ (respectively $]a,+\infty]\subseteq A$). Since all the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are clearly contained in $\mathfrak{S}$, the inclusion we want to prove follows.

Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{B})\subseteq\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$. This is obvious since the sets of $\mathfrak{B}$ are all open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ and so the sigma-ring they generate is contained in $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$.

This completes the proof. $\square$

Esercizio 3 (2016-10-10). *Sia* $\emptyset\neq\mathfrak{E}_0\subseteq\mathbb{P}(X)$ *e per* $\alpha\in\operatorname{Ord}$ *sia*

$$\mathfrak{E}_\alpha\coloneqq\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(A_n\setminus B_n\colon A_n,B_n\in\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{E}_\beta\right)\right\}. \tag{2}$$

Dimostrare allora che $\sigma(\mathfrak{E}_0)=\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathfrak{E}_\alpha$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni.

$\supseteq$ Si può dimostrare utilizzando il principio di induzione transfinita, nella forma

$$P(0) \wedge \forall \alpha > 0\, (\forall \beta < \alpha P(\beta) \implies P(\alpha)) \implies \forall \alpha P(\alpha)$$

sulla proposizione $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

$\alpha = 0$ Vero per definizione di (σ-)anello generato.

$\alpha > 0$ Per ipotesi induttiva $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\beta\, \forall \beta < \alpha$, quindi $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{E}_\beta$. Ma $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ è chiuso per differenza e unione numerabile, quindi date due successioni $A_n, B_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{E}_\beta$, abbiamo che $\forall n \in \mathbb{N}\, C_n = A_n \setminus B_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$, e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$. Per ipotesi un generico elemento di $\mathfrak{E}_\alpha$ si scrive in questa forma, e dunque $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

Allora $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ contiene ogni $\mathfrak{E}_\alpha$, e quindi anche la loro unione.

$\subseteq$ Basta dimostrare che $S := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$ è un anello.

Differenza Siano $A, B \in S$; allora $\exists \alpha_1, \alpha_2 < \omega_1 \colon A \in \mathfrak{E}_{\alpha_1}, B \in \mathfrak{E}_{\alpha_2}$, e sia $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. allora per ipotesi $A \setminus B \in \mathfrak{E}_{\alpha+1}$, con $\alpha + 1 < \omega_1$, perché ω_1 non è un successore.

Unione Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione si elementi di S, $B_n = \emptyset\, \forall n \in \mathbb{N}$, e sia α_n il più piccolo ordinale per cui $A_n \in \mathfrak{E}_{\alpha_n}$. Dato che $\mathrm{Cof}(\omega_1) > \aleph_0$ $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, e dunque per ipotesi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{E}_\alpha \subseteq S$

Abbiamo anche dimostrato che da $\lambda = \omega_1$ in poi la successione $\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{E}_\alpha$ è stazionaria. □

2 Esercizi sugli ideali

Esercizio 4 (2016-10-13). *Sia $\emptyset \neq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ anello. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathfrak{N}$ è un ideale in $\mathfrak{A}$ secondo la definizione usata in Algebra, ovvero*

$$\begin{cases} A, B \in \mathfrak{N} \implies A \Delta B \in \mathfrak{N} & \text{(3a)} \\ A \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{N} & \text{(3b)} \end{cases}$$

2. *$\mathfrak{N}$ è un ideale secondo la definizion usata ini teoria degli insiemi, ossia se valgono le condizioni seguenti:*

$$\begin{cases} A \subseteq B \in \mathfrak{N},\ A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \in \mathfrak{N} & \text{(4a)} \\ A, B \in \mathfrak{N} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{N} & \text{(4b)} \end{cases}$$

3. *se $A \in \mathfrak{A},\ B, C \in \mathfrak{N}$ e $A \subseteq B \cup C$ allora $A \in \mathfrak{N}$.*

Dimostrazione. Mostriamo la catena di implicazioni $2 \implies 3 \implies 1 \implies 2$.

$2 \implies 3$ Siano A, B, C come nelle ipotesi del Punto 3. Allora per ipotesi vale 4b, e quindi $B \cup C \in \mathfrak{N}$. Usando quindi il fatto che $A \subseteq B \cup C$ e l'ipotesi 4a, si ottiene $A \in \mathfrak{N}$.

$3 \implies 1$ Siano $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{N}$; allora $\mathfrak{A} \ni A \cap B \subseteq B \cup B$ dunque per il Punto 3 $A \cap B \in \mathfrak{N}$.

Siano ora $A, B \in \mathfrak{N}$; allora per definizione di differenza simmetrica $\mathfrak{A} \ni A \Delta B \subseteq A \cup B$ e dunque per il Punto 3 $A \Delta B \in \mathfrak{N}$.

$1 \implies 2$ Dimostriamo le due condizioni.

4a Se A, B soddisfano le ipotesi, allora $A = A \cap B \in \mathfrak{N}$ perché $B \in \mathfrak{N}$.

4b Se A, B soddisfano le ipotesi, allora $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ è la somma (dell'anello, quindi la differenza simmetrica) di due elementi che per definizione di ideale appartengono a $\mathfrak{N}$. Quindi per definizione $A \cup B \in \mathfrak{N}$. □

Esercizio 5 (13/10/2016). *Sia $\mathfrak{N}$ un ideale di un anello $\mathfrak{A}$.*

1. *Descrivere l'insieme* algebra$(\mathfrak{N})$.
2. *Dimostrare che se $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale in $\mathfrak{A}$ e se $\mathfrak{M}$ è un σ-anello allora* algebra$(\mathfrak{M})$ *è in più una σ-algebra.*

Dimostrazione. 1. Sia $\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \cup \hat{\mathfrak{N}}$, dove $\hat{\mathfrak{N}} = \{X \setminus A \colon A \in \mathfrak{N}\}$. Dimostriamo che $\mathfrak{L}$ è un'algebra:

- dato che $\emptyset \in \mathfrak{N}$, abbiamo per definizione $X = X \setminus \emptyset \in \mathfrak{L}$;
- dimostriamo che $\mathfrak{L}$ è chiuso per differenza e unione. Dati $A, B \in \mathfrak{L}$ abbiamo le seguenti possibilità:
  - $A, B \in \mathfrak{N}$. In questo caso $A \setminus B,\ A \cup B \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$ perché $\mathfrak{N}$ è un anello;
  - esattamente uno tra A e B appartiene a $\mathfrak{N}$. Possiamo supporre $A, C \coloneqq X \setminus B \in \mathfrak{N}$. Allora $A \setminus B = A \cap C \in \mathfrak{N}$; $A \cup B = X \setminus C \cup A = X \setminus (C \setminus A) \in \hat{\mathfrak{N}}$.
  - $C \coloneqq X \setminus A, D \coloneqq X \setminus B \in \mathfrak{N}$. Allora $A \cup B = X \setminus (C \cap D) \in \hat{\mathfrak{N}}$; $B \setminus A = (X \setminus C) \setminus (X \setminus D) = D \setminus C \in \mathfrak{N}$

  Dato che per definizione algebra$(\mathfrak{N})$ deve contenere X e quindi tutti gli elementi di $\hat{\mathfrak{N}}$, questo implica che algebra$(\mathfrak{N}) = \mathfrak{L}$.

2. Basta dimostrare che $\mathfrak{M}$ è chiuso per unioni numerabili. Sia C_n una successione di elementi di algebra$(\mathfrak{N})$. Se $\forall n\ C_n \in \mathfrak{N}$ allora $C \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathfrak{N}$; altrimenti, dato che $\mathfrak{N}$ è un ideale, $\hat{\mathfrak{N}}$ è un filtro, quindi è chiuso per sovrainsiemi: sia allora $k \colon C_k \in \hat{\mathfrak{N}}$; abbiamo che $C \supseteq C_k$, e quindi per la proprietà appena enunciata $C \in \hat{\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{M}$. □

Nota 1. *La dimostrazione del primo punto dell'esercizio precedente non richiede l'ipotesi che $\mathfrak{N}$ sia un ideale. Sfruttando questo fatto è possibile dare una dimostrazione più corta come segue: Sia $\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ l'anello quoziente. Allora l'insieme $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{E}$ è chiaramente un'anello; allora è un anello anche $\emptyset + \mathfrak{N} \cup X + \mathfrak{N} = \mathfrak{L}$.*

Esercizio 6 (2016-10-13). *Sia $\emptyset \neq \mathfrak{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$ e sia $\emptyset \neq A \subseteq X$. Allora $\sigma(\mathfrak{E} \cap A) = \sigma(\mathfrak{E}) \cap A$ avendo definito $\mathfrak{E} \cap A \coloneqq \{E \cap A \colon E \in \mathfrak{E}\}$.*

Dimostrazione. Assegnato a Gaetano. □

Esercizio 7 (13/10/2016). *Le seguenti due proprietà sono equivalenti per un ideale $\mathfrak{N}$ in un'algebra di insiemi $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$.*

1. *Essere massimale nella famiglia degli ideali propri.*
2. *Essere un ideale massimale come nella definizione per famiglie di insiemi, cioè $\forall A \in \mathfrak{A},\ A \in \mathfrak{N} \vee \widetilde{A} \in \mathfrak{N}$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sappiamo per un teorema di algebra che $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ è un campo. L'elemento unitario di $\mathfrak{A}$ è X, e quindi la classe $X + \mathfrak{N}$ è l'unità del campo. Questo significa che

$$\forall A \in \mathfrak{A}, A \notin \mathfrak{N}\ \exists B\colon A + \mathfrak{N} \cdot B + \mathfrak{N} = X + \mathfrak{N}$$

cioè

$$A \cap B \in X \Delta \mathfrak{N} := \{D \in \mathfrak{A}\colon \exists N \in \mathfrak{N}, D = X \setminus N\}$$

e quindi A coincide con X a meno di un elemento dell'ideale $\mathfrak{N}$, ossia $\widetilde{A} \in \mathfrak{N}$.

$\Leftarrow$ Supponiamo per assurdo che non valga il Punto 1: allora esiste $A \notin \mathfrak{N}$ tale che l'ideale $\mathfrak{N}'$ generato da $\mathfrak{N} \cup \{A\}$ è proprio. Per il Punto 2 $\widetilde{A} \in \mathfrak{N}$ e quindi, dato che un ideale è chiuso per unione $X = A \cup \widetilde{A} \in \mathfrak{N}'$, e poiché gli ideali sono chiusi per contenimento $\mathfrak{N}' = \mathfrak{A}$, assurdo. $\square$

Nota 2. *Il campo quoziente dell'esercizio precedente è $\mathbb{F}_2$, infatti ogni elemento non in $\mathfrak{N}$ è nella classe di X.*

Esercizio 8 (13/10/2016). *Sia $\emptyset \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ algebra in $\mathbb{P}(X)$ con $X \notin \mathfrak{N}$. Definiamo la funzione $\nu(\cdot)$ ponendo*

1. $$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ +\infty & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

   Mostrare che ν è finitamente additiva se e solo se $\mathfrak{N}$ è un ideale.

2. *Definiamo ora*

   $$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ 1 & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

   Mostrare che ν è finitamente additiva se e solo se $\mathfrak{N}$ è un ideale massimale in $\mathfrak{A}$.

Dimostrazione. 1. Sappiamo che per un anello l'additività e la finita additività coincidono. Allora ν è finitamente additiva se e solo se $(\forall A, B \in \mathfrak{A} \nu(A \sqcup B) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N} \wedge B \in \mathfrak{N})$, (dato che $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N}$), e quindi se e solo se $A \sqcup B \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N} \wedge B \in \mathfrak{N}$.

   Questo equivale a $B \subseteq A \in \mathfrak{N} \implies B \in \mathfrak{N}$ (perché $B \sqcup (A \setminus B) \in \mathfrak{N}$) e $A, B \in \mathfrak{N} \implies A \cup B \in \mathfrak{N}$ (questa è l'unione disgiunta di A e $B \setminus A$, che usando la condizione appena trovata sono elementi di $\mathfrak{N}$; viceversa la condizione sull'unione implica chiaramente quella sull'unione disgiunta).

2. Sappiamo già che gli insiemi di misura nulla formano un ideale. Resta quindi da dimostrare che ν è finitamente additiva se e solo se questo ideale è massimale.

   $\Rightarrow$ Supponiamo che la misura sia finitamente additiva e per assurdo $\mathfrak{N}$ non sia massimale. Allora $\exists A \in \mathfrak{A}\colon A \notin \mathfrak{N}, \widetilde{A} \notin \mathfrak{N}$. Allora $\nu(X) = \nu(A \sqcup \widetilde{A}) = \nu(A) + \nu(\widetilde{A}) = 2$, assurdo.

   $\Leftarrow$ Sia ora $\mathfrak{N}$ massimale, e consideriamo $A, B \in \mathfrak{A}$ disgiunti. Ci sono tre possibilità:

   - Se $A, B \in \mathfrak{N}$, $\nu(A) = \nu(B) = \nu(A \cup B) = 0$ e la finita additività vale.
   - Se esattamente uno tra A e B è un elemento di $\mathfrak{N}$, $A \cup B \notin \mathfrak{N}$, perché l'ideale è chiuso per sottoinsiemi. In questo caso $\nu(A) + \nu(B) = 1 + 0 = \nu(A \cup B)$ e la finita additività vale.

– Se $A, B \notin \mathfrak{N}$, $\nu(A)+\nu(B) = 2 > \nu(A\cup B)$. Dimostriamo allora per assurdo che questo caso non può verificarsi. Per la massimalità dell'ideale $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathfrak{N}$ e inoltre $\mathfrak{N} \ni \widetilde{A}\cup\widetilde{B} = \widetilde{A\cap B} = \widetilde{\emptyset} = X$, assurdo perché per definizione gli ideali massimali sono propri. □

3 Intergrali

Esercizio 9 (28/10/2017). *Sia f μ-misurabile e positiva, sia*

$$\forall A \in \mathfrak{A}\ \nu(A) \coloneqq \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu$$

Dimostrare che $\nu\colon \mathfrak{A} \to [\,0,\,+\infty\,]$ è una misura σ-additiva.

Dimostrazione. Dimostriamo intanto l'additività: sia $C = A \sqcup B$; allora $f\chi_C = f\chi_A + f\chi_B$ e quindi $\nu(C) = \int f\chi_C \,\mathrm{d}\mu = \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu + \int f\chi_B \,\mathrm{d}\mu = \nu(A)+\nu(B)$ per la linearità dell'integrale se tutti i termini sono finiti, oppure perché per $0 \le c \le +\infty$, $c + \infty = +\infty$.

Sia ora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ una successione di insiemi disgiunti, e $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sia $B_n = \bigcup_{j\le n} A_j$. Per la finita additività sappiamo che

$$\int f\chi_{B_n}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j\le n}\int f\chi_{A_j}\,\mathrm{d}\mu$$

inoltre $\lim_{n\to+\infty} f\chi_{B_n} = f\chi_A$[1], quindi dal lemma di Fatou

$$\int f\chi_A\,\mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to+\infty}\int f\chi B_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j\le n}\int f\chi_{A_j}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int f\chi_{A_n}\,\mathrm{d}\mu$$

Infine, dato che $B_n \uparrow A$, $f\chi_{B_n} \le f\chi_A$, e quindi per la monotonia dell'integrale $\int f\chi_A\,\mathrm{d}\mu \ge \int f\chi_{B_n}\,\mathrm{d}\mu$ e

$$\int f\chi_A\,\mathrm{d}\mu \ge \sup_{n\in\mathbb{N}}\int f\chi_{B_n}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int f\chi_{B_n}\,\mathrm{d}\mu$$

Questa disuguaglianza, combinata con quella che deriva dal lemma di Fatou, ci da la tesi. □

Esercizio 10 (3/11/2016). *Trovare dei controesempi alle seguenti:*

1. *Il lemma di Fatou enunciato con* $\limsup$ *al posto del* $\liminf$
2. *Il lemma di Fatou enunciato con l'uguaglianza.*

Dimostrazione. Usiamo in entrambi i casi la misura di Lebesue su $\mathbb{R}$.

- Sia $f_{2n} = \chi_{[\,0,\,1/2\,[}, f_{2n+1} = \chi_{[\,1/2,\,1\,]}$. Allora $\int f_{2n}\,\mathrm{d}\mu = \int f_{2n+1}\,\mathrm{d}\mu = 1/2$, quindi $\limsup \int f_n\,\mathrm{d}\mu = 1/2$, mentre $\limsup f_n = \chi_{[\,0,\,1\,]}$ e quindi $\int \limsup f_n\,\mathrm{d}\mu = 1$.
- Sia $f_n = n\chi_{[\,0,\,1/n\,]}$. Allora $\int f_n\,\mathrm{d}\mu = 1$, e quindi $\liminf \int f_n\,\mathrm{d}\mu = 1$; inoltre $\liminf f_n = 0$ q.o. e quindi $\int \liminf f_n\,\mathrm{d}\mu = 0$. □

[1] questo limite e i prossimi esistono perché consideriamo successioni crescenti

4 Metriche e misure

Esercizio 11 (2016-10-14). *Sia* $\mathfrak{P} := \{[\,a,\, b\,[\, : -\infty < a \leq b < +\infty\}$*, sia* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *crescente e sia* $\mu_g([\,a,\, b\,[) := g(b) - g(a)$.

1. *Dimostrare che* μ_g *è una misura finitamente additiva.*
2. *Dimostrare che* μ_g σ*-additiva se e solo se* $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x - \circ) = g(x)$. [2].

Dimostrazione.

1. Mostriamo che se l'unione di un numero finito di elementi di $\mathfrak{P}$ appartiene a $\mathfrak{P}$, allora la misura dell'unione è la somma delle misure.

   Sia quindi $[\,a,\, b\,[\, = \bigsqcup_{k=1}^{n} [\,a_k,\, b_k\,[$; a meno di un riordinamento [3] possiamo supporre che $b_k = a_{k-1}\ \forall\ 2 \leq k \leq n;\ a_1 = a =: b_0, b_n = b$. Allora

   $$\mu_g([\,a,\, b\,[) = g(b_n) - g(b_0) = \sum_{k=1}^{n}(g(b_k) - g(b_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n}(g(b_k) - g(a_k)) = \sum_{k=1}^{n}\mu_g([\,a_k,\, b_k\,[).$$

   che è quanto dovevamo dimostrare.

2. Dimostriamo le due implicazioni.

   $\Rightarrow$ Supponiamo per assurdo che esista $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \to x^-$ e $g(x - \circ) < g(x)$; allora $\Delta_n = [x, x_n] \downarrow \emptyset$, ma $\mu_g(\Delta_n) \to g(x) - g(x - \circ) > 0$, assurdo.

   $\Leftarrow$ Sia $\mathfrak{A} = \text{anello}(\mathfrak{P})$; sappiamo che μ_g è finitamente additiva, quindi resta solo da dimostrare che μ_g è regolare (cioè $\forall A \in \mathfrak{A}, \forall \varepsilon > 0$ esistono un compatto $K \subseteq A, B \in \mathfrak{A}$ tali che $A \setminus K \subseteq B, \mu_g(B) < \varepsilon$).
   Siano allora $\varepsilon > 0, \mathfrak{A} \ni A = \bigsqcup_{k=1}^{n} [\,a_k,\, b_k\,[$, con $[\,a_k,\, b_k\,] \in \mathfrak{P}$; dall'ipotesi che g è continua a sinistra sappiamo che $\forall x \exists \delta(x)\colon g(x) - g(x - \delta) < \frac{\varepsilon}{n}$.
   Poniamo allora $\delta_j = \delta(x_j),\ K_j = [\,a_j,\, b_j - \delta_j\,],\ B_j = [\,b_j - \delta_j,\, b_j\,[$. Siano inoltre $B = \bigcup B_j,\ K = \bigcup K_j$
   Allora $\mu_g(B_j) = g(b_j) - g(b_j - \delta_j) < \frac{\varepsilon}{n}$, quindi $\mu_g(B) < \varepsilon$; inoltre K è compatto e dunque B e K sono come nella definizione di misura regolare. □

Esercizio 12 (2016-10-20). *Sia* $\mathfrak{A}$ *un anello,* $\eta\colon \mathfrak{A} \to [\,0, +\infty\,]$ *una submisura. Sia come al solito* $\mathfrak{N}(\eta) = \{A \in \mathfrak{A}\colon \eta(A) = 0\}$*. Dimostrare che*

1. *Se* $\mathfrak{N}(\eta)$ *è un ideale di* $\mathfrak{A}$ *e* η *è una* σ*-submisura, allora* $\mathfrak{N}$ *è un* σ*-ideale.*
2. *Se* $A, B \in \mathfrak{A}$ *e* $A\Delta B \in \mathfrak{N}(\eta)$*, allora* $\eta(A) = \eta(A \cap B) = \eta(B)$.
3. *Se* $A \in \mathfrak{A}$*,* $N \in \mathfrak{N}(\eta)$*, allora* $\eta(A) = \eta(A \cup N) = \eta(A\Delta N) = \eta(A \setminus N)$

Dimostrazione.

1. Basta dimostrare che $\mathfrak{N}$ è chiuso per unioni numerabili.

   Sia quindi $\mathfrak{A} \ni A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, con $A_n \in \mathfrak{N}$. Allora $\eta(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n) = 0$.

2. Per subadditività e dato che $A \subseteq A \cup B = (A\Delta B) \cup (A \cap B)$ si ottiene $\eta(A) \leq \eta(A \cap B) + \eta(A\Delta B) = \eta(A \cap B)$; per monotonia $\eta(A) \geq \eta(A \cap B)$, e dunque $\eta(A) = \eta(A \cap B)$. La seconda uguaglianza è analoga.

[2] Con $g(x - \circ)$ indichiamo $\lim_{y\to x^-} g(y)$
[3] e forse di intervalli vuoti?

3. Le ultime due uguaglianze si ottengono subito dal Punto 2 perché $N = (A\Delta N)\Delta(A \setminus N) = (A \cup N)\Delta(A \setminus N)$. Inoltre per monotonia $\eta(A \setminus N) \leq \eta(A) \leq \eta(A \cup N) = \eta(A \setminus N)$, da cui la prima uguaglianza. $\square$

Esercizio 13 (2016-10-20). *Sia $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ un σ-anello, $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ una misura σ-additiva. Sia $\mathfrak{N} := \{N : \exists A \in \mathfrak{A}, N \subseteq A, A \in \mathfrak{N}(\mu)\}$.*

1. *Dimostrare che $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale in $\mathbb{P}(X)$.*
2. *Sia $\mathfrak{L} :=$ anello$(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{N})$. Dimostrare che $\mathfrak{L} = \{A\Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\} = \{A \sqcup N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$*

Dimostrazione. 1. Sia $\hat{N} \subseteq N \in \mathfrak{N}$; per ipotesi $\exists A \in \mathfrak{A} \colon N \subseteq A$, $\mu(A) = 0$, ma allora anche $\hat{N} \subseteq A$, e quindi $\hat{N} \in \mathfrak{N}$.

Sia ora $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathfrak{N}$; per ipotesi $\forall n \exists A_n \in \mathfrak{A} \colon \mu(A_n) = 0$, $N_n \in A_n$; allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e per la σ-additività di μ, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$ e quindi per definizione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{N}$.

2. Poniamo
$$\mathfrak{U} := \{A\Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$
$$\mathfrak{T} := \{A \sqcup N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

Mostriamo che $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$ Siano $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$.

$\subseteq$ Consideriamo $A\Delta N = (A \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$. Per ipotesi $\exists C \in \mathfrak{A}$ di misura nulla tale che $N \subseteq C$. Sia $B = A \cap C$; allora
$$B \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0;$$
inoltre
$$A \setminus N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N).$$
Allora abbiamo
$$A\Delta N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$$
dove $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ e $(B \setminus N) \sqcup (N \setminus A) \in \mathfrak{N}$, e dunque $A\Delta N \in \mathfrak{T}$.

$\supseteq$ Sia ora $A \cap N = \emptyset$. Allora $A \sqcup N = A\Delta N$ e la tesi è provata.

Mostriamo ora $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$.

$\supseteq$ È vero perché per definizione ogni anello è chiuso per differenza simmetrica.

$\subseteq$ Basta mostrare che $\mathfrak{U}$ è un anello e che contiene $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$; $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$ perché ogni elemento A di $\mathfrak{A}$ si scrive come $A\Delta\emptyset$, e analogamente $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$ Perché ogni elemento N di $\mathfrak{N}$ si scrive come $N\Delta\emptyset$.

Per provare che $\mathfrak{U}$ è un anello mostriamo che $\mathfrak{T}$ è chiuso per unione disgiunta e differenza.

$\sqcup$ Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$ disgiunti; allora $(A \sqcup N) \sqcup (A_1 \sqcup N_1) = (A \sqcup A_1) \sqcup (N \sqcup N_1) \in \mathfrak{U}$, perché l'unione è associativa e commutativa.

$\setminus$ Mostriamo la differenza di due elementi di $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$ appartiene a $\mathfrak{U}$. Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$; allora $(A \sqcup N) \setminus (A_1 \sqcup N_1) = (A \setminus A_1 \setminus N_1) \sqcup (N \setminus A_1 \setminus N_1)$.
Ma il secondo insieme dell'unione è un sottoinsieme di N, e quindi appartiene all'ideale $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$.
Inoltre sia $N_1 \subseteq B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0$ contenuto in $A \setminus A_1$. $A \setminus A_1 \setminus N_1 = A \setminus A_1 \setminus B \sqcup B \setminus N_1$ dove e quindi il primo insieme dell'unione appartiene ad $\mathfrak{U}$.
Dato che abbiamo già dimostrato che $\mathfrak{U}$ è chiuso per unioni disgiunte, è chiuso anche per differenza. □

Esercizio 14 (2016-10-27). *Definiamo* $\overline{\mu}(A \Delta N) \coloneqq \mu(A)\, \forall A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$.

1. *Dimostrare che* $\overline{\mu}$ *è ben definita,* σ*-additiva, completa e che* $\overline{\mu}\,|_{\mathfrak{A}} = \mu$.
2. *Dimostrare che* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\overline{\mu})$.

Nota 3. *La misura* $\overline{\mu}$ *così definita si dice completamento di* μ.

Dimostrazione. 1. Definiamo $\mathfrak{U} \coloneqq \{A \Delta N \colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$. Gli ultimi due punti sono ovvi prendendo $A = \emptyset$ e $N = \emptyset$ rispettivamente. Dimostriamo quindi i primi due.

- Dimostriamo che $\overline{\mu}$ è ben definita. Sia $A_1 \Delta N_1 = A_2 \Delta N_2$, con $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}; N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$. Allora $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A} \colon \mu(B_1) = \mu(B_2) = 0, N_1 \subseteq B_1, N_2 \subseteq B_2$. Quindi $A_1 \subseteq A_2 \cup B_1 \cup B_2$ e per l'additività della misura $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$; allo stesso modo anche $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ e quindi $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.
- Per dimostrare la σ-additività utilizziamo l'esercizio precedente: dati A, N come nelle ipotesi, $\exists \overline{A} \in \mathfrak{A}; \overline{N} \in \mathfrak{N} \colon A \Delta N = \overline{A} \sqcup \overline{N}$. Inoltre, per la buona definizione di $\overline{\mu}$, e poiché $\overline{A} \sqcup \overline{N} = \overline{A} \Delta \overline{N}$, abbiamo che $\mu(A) = \mu(\overline{A})$. Sia quindi $(A_k \Delta N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi disgiunti in $\mathfrak{U}$. Dato che $\mathfrak{N}$ è un σ-anello $\exists \hat{A} \colon \mu(\hat{A}) = 0, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subseteq \hat{A}$. Inoltre detti $\hat{A}_k \coloneqq A_k \setminus \hat{A}$, si ha $\mu(A_k) = \mu(\hat{A}_k)$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \Delta N_k)\right) &= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (\overline{A}_k \sqcup \overline{N}_k)\right) = \\
&= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\hat{A}_k \sqcup \left(\overline{N}_k \cup \hat{A}\right)\right)\right) = \\
&= \overline{\mu}\left(\hat{A} \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k\right) = \\
&= \mu\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\left(\hat{A}_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\left(A_k\right) = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\mu}\left(A_k \Delta N_k\right)
\end{aligned}$$

che è la σ-additività.

2. Gli elementi di $\mathfrak{N}$ hanno tutti misura nulla perché sottoinsiemi di insiemi di misura nulla. Viceversa, sia A un insieme di misura nulla. Allora ovviamente $A \subseteq A$ e $\mu(A) = 0$, quindi per definizione $A \in \mathfrak{N}$. □

Esercizio 15 (2016-10-24). *Sia* $\mathfrak{A}$ *anello. Sia* $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ *una misura* σ*-additiva. Definiamo come al solito* μ^* *misura esterna e* $\mathfrak{M}$ *l'insieme dei misurabili. Già sappiamo che* $\mu^*_{|\mathfrak{M}} =: \overline{\mu}$ *è una misura* σ*-additiva.*

Sia ora $\mathfrak{L}$ *anello con* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$*, sia* $\nu\colon \mathfrak{L} \to [\,0,\, +\infty\,]$ *misura* σ*-additiva con* $\nu_{|\mathfrak{A}} = \mu$*. Dimostrare che allora* $\nu = \overline{\nu}_{|\mathfrak{L}}$*.*

Esercizio 16 (2016-10-14). *Sia* $\mathfrak{A}$ *un'algebra, e* $S(\mathfrak{A})$ *l'insieme delle funzione semplici su* $\mathfrak{A}$*.*

Sia $E = (S(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_s))$*,* $T \in E' = \{\xi \in E * \text{continue}\}$*. Sappiamo che* $\exists \mu\colon T(f) = \int f \,\mathrm{d}\mu$*.*

Calcolare la norma $\|T\|$ *operatoriale in funzione della misura.*

Dimostrazione.

Esercizio 17 (2016-10-14). *Sia* $\mathfrak{A}$ *un anello,* $\mu\colon \mathfrak{A} \to X$ *Dire quali delle seguenti sono equivalenti, nei due casi* $X = \mathbb{R}$ *e* $X = [\,0,\, +\infty\,]$*:*

1. μ *è* σ*-additiva*
2. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \uparrow A \in \mathfrak{A}$ *si ha* $\mu(A_n) \to \mu(A)$
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \downarrow A \in \mathfrak{A}$ *si ha* $\mu(A_n) \to \mu(A)$
4. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \downarrow \emptyset$ *si ha* $\mu(A_n) \to 0$

Dimostrazione.

5 Misure segnate

Esercizio 18. *Sia* P, N *una decomposizione di Hahn,* $P_0 \in \mathfrak{A},\ N_0 := X \setminus P_0$*.*

Allora P_0, N_0 *è una decomposizione di Hahn se e solo se* $P \Delta P_0 \in \mathfrak{N}(\mu)$ *se e solo se* $N \Delta N_0 \in \mathfrak{N}(\mu)$*, dove* $\mathfrak{N}(\mu) := \{A \in \mathfrak{A}\colon \forall B \in \mathfrak{A}, B \subseteq A \mu(B) = 0\}$*.*

Dimostrazione.

Esercizio 19.

$$\begin{gathered}
\mu^+(A) = \sup\{\mu(M)\colon M \in \mathfrak{A}, M \subseteq A\} \\
\mu^-(A) = \inf\{\mu(M)\colon M \in \mathfrak{A}, M \subseteq A\} \\
|\mu(A)| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu|(A_i)\colon n \in \mathbb{N}, \mathfrak{A} \ni A_i \textit{ disgiunti, } A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} \\
\mathfrak{N}(\mu) = \mathfrak{N}(|\mu|) = \mathfrak{N}(\mu^+) \cap \mathfrak{N}(\mu^-)
\end{gathered}$$

(quindi $\mathfrak{N}(\mu)$ *è un* σ*-ideale in* $\mathfrak{A}$*).*

Se $\nu\colon \mathfrak{A} \to [\,0,\, +\infty\,]$ *è una misura* σ*-additiva,* $f \in \mathcal{L}_1(\nu)$*,* $\mu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\nu$*, allora* $\mu^+(A) = \int_A f^+ \,\mathrm{d}\nu$*,* $\mu^-(A) = \int_A f^- \,\mathrm{d}\nu$*,* $|(|\mu)(A) = \int_A |f| \,\mathrm{d}\nu$*.*

Dimostrazione.

Esercizio 20 (Controesempo a Radon-Nikodyn senza l'ipotesi di σ-finitezza). *Sia* α *la misura di Lebesgue su* $\mathrm{Bor}([\,0,\,1\,])$*,* μ *la counting measure su* $\mathrm{Bor}([\,0,\,1\,])$*.*

Dimostrare che $\nexists \lambda, \nu \colon \mathrm{Bor}([\,0,\,1\,]) \to [\,0,\,+\infty\,]$ *misure* σ*-additive con* $\mu = \lambda + \nu, \lambda \ll \alpha, \nu \perp \alpha$*.*

Dimostrazione. Siano per assurdo μ, ν due misure che soddisfano le richieste. Dimostriamo allora che $\mathfrak{N}(\nu) = \emptyset$.

Per $x \in [\,0,\,1\,]$ abbiamo $1 = \mu(\{x\}) = \lambda(\{x\}) + \nu(\{x\})$, da cui $\nu(\{x\}) = 1$ dato che $\{x\} \in \mathfrak{N}(\alpha) \subseteq \mathfrak{N}(\lambda)$. Sia allora $\emptyset \neq B \in \mathrm{Bor}([\,0,\,1\,])$; per monotonia della misura, $\nu(B) \geq \nu(\{x\})$ per $x \in B$, che esiste per ipotesi.

Per definizione di singolarità tra misure $\exists N \in \mathfrak{N}(\nu)$, $A \in \mathfrak{N}(\alpha) \colon N \cup A = [\,0,\,1\,]$. Quindi deve essere $A = [\,0,\,1\,]$, che però non ha misura di Lebesgue nulla, e quindi non appartiene a $\mathfrak{N}(\alpha)$, assurdo. $\square$