

Esercizi di analisi

Francesco Florian, Ilaria Fontana,
Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato

9 novembre 2016

Indice

1	Esercizi sugli anelli	3
2	Esercizi sugli ideali	5
3	Intergrali	6
4	Metriche e misure	7

1 Esercizi sugli anelli

We start with a lemma.

Lemma 1. *Every open set $A \subseteq \mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals.*

Dimostrazione. First, we remind what a *base for a topology* is. Let (X, τ) be a topological space. A base for τ is a set $\mathcal{A} \subseteq \tau$ such that

$$\forall T \in \tau \forall x \in T \exists A(x, T) \in \mathcal{A} \ x \in A \subseteq T.$$

If $T \in \tau$, using the notation of the previous definition, then we have that

$$T = \bigcup_{x \in T} A(x, T).$$

In other words a base for τ is a subset \mathcal{A} of τ such that every set of τ can be written as an union of elements in \mathcal{A} .

Now, given any open set T of \mathbb{R} and given $x \in \mathbb{R}$ by definition exists an open interval contained in T and containing x . It is easy to find an open interval with rational endpoints which contains x and which is contained in T . This shows that the set

$$\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \}$$

is a base of the Euclidean topology. Since the base is countable, this proves that every open set of \mathbb{R} can be written as a countable union of open intervals. \square

Esercizio 1 (2016-10-10). *Let us show that*

$$\text{Bor } \mathbb{R} = \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{R} \}) = \sigma(\{ [a, b] : a, b \in \mathbb{R} \}) \quad (1a)$$

$$= \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \}) = \sigma(\mathfrak{E}_i) \quad (1b)$$

where

$$1. \ \mathfrak{E}_1 := \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \};$$

$$2. \ \mathfrak{E}_2 := \{ [a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \};$$

$$3. \ \mathfrak{E}_3 := \{]+\infty, a[: a \in \mathbb{R} \};$$

$$4. \ \mathfrak{E}_4 := \{]+\infty, a] : a \in \mathbb{R} \};$$

Dimostrazione. Let us call $\sigma(\mathfrak{A}_1), \sigma(\mathfrak{A}_2), \sigma(\mathfrak{A}_3)$ the three σ -ring that appear in the statement of this exercise that still do not have a name. First, let us observe that the various σ rings we deal with are not only σ -rings but also σ -algebras. In fact for each of them \mathbb{R} can be written as a countable union of its elements.

In order to prove the various equalities $\sigma(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{N})$ we will first prove that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, thus obtaining $\sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \sigma(\mathfrak{N})$ and then we will prove that $\mathfrak{N} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$ concluding the proof.

Since the set of all open intervals is a subset of the family of the open sets, considering the generated σ -rings, we obtain that $\sigma(\mathfrak{A}_1) \subseteq \text{Bor } \mathbb{R}$. The other inclusion follows from the lemma we have seen before this exercise, which states that every open set can be written as a numerable union of open intervals. $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ because every open interval can be written as the complementary of a closed set and vice versa. Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{A}_2) = \sigma(\mathfrak{A}_3)$. The key point is to notice that every $[a, b]$ can be written as the countable intersection $\bigcap \{]a - \frac{1}{n}, b] \}$,

that every $]a, b]$ can be written as the countable union $\bigcup \{[a + \frac{1}{n}, b]\}$, and to remember that a σ -algebra contains all the countable unions and countable intersections.

Clearly $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_4)$ and $\sigma(\mathfrak{E}_2) = \sigma(\mathfrak{E}_3)$, because every element of each first set is the complementary of an element of each second set, and vice versa. The inclusion $\sigma(\mathfrak{E}_1) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ follows by the fact that $]a, +\infty[$ can be written as $]a, a + 2[\cup \bigcup a + n, a + n + 2[$. Also the other inclusion is true because $]a, b[=]a, +\infty[\cap \bigcup b - \frac{1}{n}, +\infty[$.

It remains to prove that $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_2)$. This can be done observing that $]a, +\infty[= \bigcup [a + \frac{1}{n}, +\infty[$ and that $[a, +\infty[= \bigcap]a - \frac{1}{n}, +\infty[$.

The exercise is completed. \square

Esercizio 2 (2016-10-10). Let us show that the Borel set $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$ coincides with the sets

$$\mathfrak{S} := \{B \cup A : B \in \text{Bor } \mathbb{R}, A \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$$

and also with the set

$$\sigma(\mathfrak{B}) := \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{-\infty, +\infty\}).$$

Dimostrazione. First we are going to prove that $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{B})$. The inclusion (\supseteq) easily follows from the fact that every set in \mathfrak{B} belongs, by definition, also to \mathfrak{S} . In order to prove the other inclusion we will first prove that $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$, and then we will prove the same for $\{-\infty, +\infty\}$. From the previous exercise, if we prove that $\mathfrak{E}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$, since $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{E}_2)$, we obtain that $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$. It is sufficient to prove that $\{+\infty\} \in \mathfrak{B}$ since we know that

$$\{[a, +\infty[\cup \{+\infty\} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{B}.$$

For this purpose let us write

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[.$$

It remains to prove that $\{-\infty\} \in \mathfrak{B}$. This is proved by the following:

$$\{-\infty\} = [-\infty, +\infty] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, +\infty],$$

which is the difference of an element of \mathfrak{B} and a countable union of elements of \mathfrak{B} .

Let us now prove that $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$ coincides with the other two sets. First we will prove that $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{S}$. In order to do this we remind who the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are: if A is an open set of \mathbb{R} then $A \cap \mathbb{R}$ is an open set of \mathbb{R} and if $-\infty$ (respectively $+\infty$) is contained in A , then exists $a \in \mathbb{R}$ such that $[-\infty, a[\subseteq A$ (respectively $]a, +\infty] \subseteq A$). Since all the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are clearly contained in \mathfrak{S} , the inclusion we want to prove follows.

Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{B}) \subseteq \text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$. This is obvious since the sets of \mathfrak{B} are all open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ and so the sigma-ring they generate is contained in $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$.

This completes the proof. \square

Esercizio 3 (2016-10-10). Sia $\emptyset \neq \mathfrak{E}_0 \subseteq \mathbb{P}(X)$ e per $\alpha \in \text{Ord}$ sia

$$\mathfrak{E}_\alpha := \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \setminus B_n : A_n, B_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta \right) \right\}. \quad (2)$$

Dimostrare allora che $\sigma(\mathfrak{E}_0) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni.

⊇ Si può dimostrare utilizzando il principio di induzione transfinita, nella forma

$$P(0) \wedge \forall \alpha > 0 (\forall \beta < \alpha P(\beta) \implies P(\alpha)) \implies \forall \alpha P(\alpha)$$

sulla proposizione $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

$\alpha = 0$ Vero per definizione di (σ) -anello generato.

$\alpha > 0$ Per ipotesi induttiva $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\beta \forall \beta < \alpha$, quindi $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta$. Ma $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ è chiuso per differenza e unione numerabile, quindi date due successioni $A_n, B_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta$, abbiamo che $\forall n \in \mathbb{N} C_n = A_n \setminus B_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$, e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$. Per ipotesi un generico elemento di \mathfrak{E}_α si scrive in questa forma, e dunque $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

Allora $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ contiene ogni \mathfrak{E}_α , e quindi anche la loro unione.

⊆ Basta dimostrare che $S := \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$ è un anello.

Differenza Siano $A, B \in S$; allora $\exists \alpha_1, \alpha_2 < \omega_1$: $A \in \mathfrak{E}_{\alpha_1}, B \in \mathfrak{E}_{\alpha_2}$, e sia $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. allora per ipotesi $A \setminus B \in \mathfrak{E}_{\alpha+1}$, con $\alpha + 1 < \omega_1$, perché ω_1 non è un successore.

Unione Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di S , $B_n = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$, e sia α_n il più piccolo ordinale per cui $A_n \in \mathfrak{E}_{\alpha_n}$. Dato che $\text{Cof}(\omega_1) > \aleph_0$ $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, e dunque per ipotesi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{E}_\alpha \subseteq S$

Abbiamo anche dimostrato che da $\lambda = \omega_1$ in poi la successione $\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathfrak{E}_\alpha$ è stazionaria. \square

2 Esercizi sugli ideali

1;2802;0c

Esercizio 4 (13/10/2016). Sia \mathfrak{N} un ideale di un anello \mathfrak{A} .

1. Descrivere l'insieme $\text{algebra}(\mathfrak{N})$.
2. Dimostrare che se \mathfrak{N} è un σ -ideale in \mathfrak{A} e se \mathfrak{M} è un σ -anello allora $\text{algebra}(\mathfrak{M})$ è in realtà una σ -algebra.

Dimostrazione. Assegnato a Ilaria. \square

Esercizio 5 (2016-10-13). Sia $\emptyset \neq \mathfrak{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$ e sia $\emptyset \neq A \subseteq X$. Allora $\sigma(\mathfrak{E} \cap A) = \sigma(\mathfrak{E}) \cap A$ avendo definito $\mathfrak{E} \cap A := \{E \cap A : E \in \mathfrak{E}\}$.

1. Descrivere l'insieme $\text{algebra}(\mathfrak{N})$.
2. Dimostrare che se \mathfrak{N} è un σ -ideale in \mathfrak{A} e se \mathfrak{M} è un σ -anello allora $\text{algebra}(\mathfrak{M})$ è in realtà una σ -algebra.

Dimostrazione. Assegnato a Gaetano. \square

Esercizio 6 (13/10/2016). Le definizioni di ideale massimale nel senso di algebra e di analisi sono equivalenti.

Dimostrazione. Scrivo velocemente un'implicazione, va messo a posto.

Se \mathfrak{N} è un ideale massimale in $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ nel senso di analisi, allora è anche massimale nell'insieme degli ideali propri (cioè la definizione di algebra): se per assurdo non lo fosse, esisterebbe $A \notin \mathfrak{N}$ tale che l'ideale \mathfrak{N}' generato da $\mathfrak{N} \cup \{A\}$ è proprio. Per definizione di ideale massimale (in analisi) $\tilde{A} \in \mathfrak{N}$ e quindi, dato che un ideale è chiuso per unione $X = A \cup \tilde{A} \in \mathfrak{N}'$, e poiché gli ideali sono chiusi per contenimento $\mathfrak{N}' = \mathfrak{A}$, assurdo. \square

Esercizio 7 (13/10/2016). Sia $\emptyset \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ algebra in $\mathbb{P}(X)$ con $X \notin \mathfrak{N}$.

1.

Definiamo la funzione $\nu(\text{cot})$ ponendo

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ +\infty & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che ν è finitamente additiva se e solo se \mathfrak{N} è un ideale.

Definiamo ora

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ 1 & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che ν è finitamente additiva se e solo se \mathfrak{N} è un ideale massimale in \mathfrak{A} .

Dimostrazione. La prima parte è stata svolta da Stefano, la seconda è da svolgere.

Seconda parte: Sappiamo già che gli insiemi di misura nulla formano un ideale. Resta quindi da dimostrare che ν è finitamente additiva se e solo se questo ideale è massimale.

\Rightarrow Supponiamo che la misura sia finitamente additiva e per assurdo \mathfrak{N} non sia massimale. Allora $\exists A \in \mathfrak{A}: A \notin \mathfrak{N}, \tilde{A} \notin \mathfrak{N}$. Allora $\nu(X) = \nu(A \sqcup \tilde{A}) = \nu(A) + \nu(\tilde{A}) = 2$, assurdo.

\Leftarrow Sia ora \mathfrak{N} massimale, e consideriamo $A, B \in \mathfrak{A}$ disgiunti. Ci sono tre possibilità:

- Se $A, B \in \mathfrak{N}$, $\nu(A) = \nu(B) = \nu(A \cup B) = 0$ e la finita additività vale.
- Se esattamente uno tra A e B è un elemento di \mathfrak{N} , $A \cup B \notin \mathfrak{N}$, perché l'ideale è chiuso per sottoinsiemi. In questo caso $\nu(A) + \nu(B) = 1 + 0 = \nu(A \cup B)$ e la finita additività vale.
- Se $A, B \notin \mathfrak{N}$, $\nu(A) + \nu(B) = 2 > \nu(A \cup B)$. Dimostriamo allora per assurdo che questo caso non può verificarsi. Per la massimalità dell'ideale $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathfrak{N}$ e inoltre $\mathfrak{N} \ni \tilde{A} \cup \tilde{B} = \widetilde{A \cap B} = \tilde{\emptyset} = X$, assurdo perché per definizione gli ideali massimali sono propri. \square

3 Integrali

Esercizio 8 (28/10/2017). Sia f μ -misurabile e positiva, sia

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \nu(A) := \int f \chi_A \, d\mu$$

Dimostrare che $\nu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura σ -additiva.

Dimostrazione. Dimostriamo intanto l'additività: sia $C = A \sqcup B$; allora $f\chi_C = f\chi_A + f\chi_B$ e quindi $\nu(C) = \int f\chi_C d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_B d\mu = \nu(A) + \nu(B)$ per la linearità dell'integrale se tutti i termini sono finiti, oppure perché per $0 \leq c \leq +\infty$, $c + \infty = +\infty$.

Sia ora $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ una successione di insiemi disgiunti, e $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Sia $B_n = \bigcup_{j \leq n} A_j$. Per la finita additività sappiamo che

$$\int f\chi_{B_n} d\mu = \sum_{j \leq n} \int f\chi_{A_j} d\mu$$

inoltre $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\chi_{B_n} = f\chi_A^1$, quindi dal lemma di Fatou

$$\int f\chi_A d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f\chi_{B_n} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \leq n} \int f\chi_{A_j} d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f\chi_{A_n} d\mu$$

Infine, dato che $B_n \uparrow A$, $f\chi_{B_n} \leq f\chi_A$, e quindi per la monotonia dell'integrale $\int f\chi_A d\mu \geq \int f\chi_{B_n} d\mu$ e

$$\int f\chi_A d\mu \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f\chi_{B_n} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f\chi_{B_n} d\mu$$

Questa disuguaglianza, combinata con quella che deriva dal lemma di Fatou, ci dà la tesi. \square

Esercizio 9 (3/11/2016). *Trovare dei controesempi alle seguenti:*

1. Il lemma di Fatou enunciato con \limsup al posto del \liminf
2. Il lemma di Fatou enunciato con l'uguaglianza.

4 Metriche e misure

Esercizio 10 (2016-10-13). *Sia $\emptyset \neq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ anello. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. \mathfrak{N} è un ideale in \mathfrak{A} (nel senso di Algebra I)
2. $\begin{cases} A \subseteq B \in \mathfrak{N}, A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \in \mathfrak{N} \\ A, B \in \mathfrak{N} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{N} \end{cases}$
3. se $A \in \mathfrak{A}$ e $B, C \in \mathfrak{N}$ allora $A \in \mathfrak{A}$.

Dimostrazione. Svolto da Ilaria. \square

Esercizio 11 (2016-10-14). *Sia $\mathfrak{P} := \{[a, b[: -\infty < a \leq b < +\infty\}$, sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e sia $\mu_g([a, b]) := g(b) - g(a)$. Dimostrare che μ_g è una misura finitamente additiva. Dimostrare inoltre che μ_g σ -additiva se e solo se $\forall x \in \mathbb{R} g(x - \circ) = g(x)$.²*

Dimostrazione. Svolto da Stefania. \square

Esercizio 12 (2016-10-20). *Sia \mathfrak{A} un anello, $\eta: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ una submisura. Sia come al solito $\mathfrak{N}(\eta) = \{A \in \mathfrak{A} : \eta(A) = 0\}$. Dimostrare che*

¹questo limite e i prossimi esistono perché consideriamo successioni crescenti

²Con $g(x - \circ)$ indichiamo $\lim_{y \rightarrow x-} g(y)$

1. Se $\mathfrak{N}(\eta)$ è un ideale di \mathfrak{A} e η è una σ -submisura, allora \mathfrak{N} è un σ -ideale.
2. Se $A, B \in \mathfrak{A}$ e $A \cap B \in \mathfrak{N}(\eta)$, allora $\eta(A) = \eta(A \cap N) = \eta(B)$.
3. Se $A \in \mathfrak{A}$, $N \in \mathfrak{N}(\eta)$, allora $\eta(A) = \eta(A \cup N) = \eta(A \Delta N) = \eta(A \setminus N)$

Dimostrazione.

Esercizio 13 (2016-10-20). Sia $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ un σ -anello, $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ una misura σ -additiva. Sia $\mathfrak{N} := \{N: \exists A \in \mathfrak{A}, N \subseteq A, \mu(A) = 0\}$.

1. Dimostrare che \mathfrak{N} è un σ -ideale in $\mathbb{P}(X)$.
2. Sia $\mathfrak{L} := \text{anello}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N})$. Dimostrare che $\mathfrak{L} = \{A \Delta N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\} = \{A \sqcup N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$

Dimostrazione. 1. Sia $\hat{N} \subseteq N \in \mathfrak{N}$; per ipotesi $\exists A \in \mathfrak{A}: N \subseteq A, \mu(A) = 0$, ma allora anche $\hat{N} \subseteq A$, e quindi $\hat{N} \in \mathfrak{N}$.

Sia ora $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di \mathfrak{N} ; per ipotesi $\forall n \exists A_n \in \mathfrak{A}: \mu(A_n) = 0, N_n \subseteq A_n$; allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e per la σ -additività di μ , $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$ e quindi per definizione $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{N}$.

2. Poniamo

$$\mathfrak{U} := \{A \Delta N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

$$\mathfrak{T} := \{A \sqcup N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

Mostriamo che $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$ Siano $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$.

\subseteq Consideriamo $A \Delta N = (A \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$. Per ipotesi $\exists C \in \mathfrak{A}$ di misura nulla tale che $N \subseteq C$. Sia $B = A \cap C$; allora

$$B \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0;$$

inoltre

$$A \setminus N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N).$$

Allora abbiamo

$$A \Delta N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$$

dove $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ e $(B \setminus N) \sqcup (N \setminus A) \in \mathfrak{N}$, e dunque $A \Delta N \in \mathfrak{T}$.

\supseteq Sia ora $A \cap N = \emptyset$. Allora $A \sqcup N = A \Delta N$ e la tesi è provata.

Mostriamo ora $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$.

\supseteq È vero perché per definizione ogni anello è chiuso per differenza simmetrica.

\subseteq Basta mostrare che \mathfrak{U} è un anello e che contiene $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$; $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$ perché ogni elemento A di \mathfrak{A} si scrive come $A \Delta \emptyset$, e analogamente $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$ Perché ogni elemento N di \mathfrak{N} si scrive come $N \Delta \emptyset$.

Per provare che \mathfrak{U} è un anello mostriamo che \mathfrak{T} è chiuso per unione disgiunta e differenza.

\sqcup Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$ disgiunti; allora $(A \sqcup N) \sqcup (A_1 \sqcup N_1) = (A \sqcup A_1) \sqcup (N \sqcup N_1) \in \mathfrak{U}$, perché l'unione è associativa e commutativa.

\ Mostriamo la differenza di due elementi di $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$ appartiene a \mathfrak{U} . Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$; allora $(A \sqcup N) \setminus (A_1 \sqcup N_1) = (A \setminus A_1 \setminus N_1) \sqcup (N \setminus A_1 \setminus N_1)$. Ma il secondo insieme dell'unione è un sottoinsieme di N , e quindi appartiene all'ideale $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$. Inoltre sia $N_1 \subseteq B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0$ contenuto in $A \setminus A_1$. $A \setminus A_1 \setminus N_1 = A \setminus A_1 \setminus B \sqcup B \setminus N_1$ dove e quindi il primo insieme dell'unione appartiene ad \mathfrak{U} . Dato che abbiamo già dimostrato che \mathfrak{U} è chiuso per unioni disgiunte, è chiuso anche per differenza. \square

Esercizio 14 (2016-10-27). Definiamo $\bar{\mu}(A \Delta N) := \mu(A) \forall A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$. Dimostrare che $\bar{\mu}$ è ben definita, σ -additiva, completa e che $\bar{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$.

Nota 1. La misura $\bar{\mu}$ così definita si dice completamente di μ .

Dimostrazione. Definiamo $\mathfrak{U} := \{A \Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$. Gli ultimi due punti sono ovvi prendendo $A = \emptyset$ e $N = \emptyset$ rispettivamente. Dimostriamo quindi i primi due.

- Dimostriamo che $\bar{\mu}$ è ben definita. Sia $A_1 \Delta N_1 = A_2 \Delta N_2$, con $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}; N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$. Allora $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A} : \mu(B_1) = \mu(B_2) = 0, N_1 \subseteq B_1, N_2 \subseteq B_2$. Quindi $A_1 \subseteq A_2 \cup B_1 \cup B_2$ e per l'additività della misura $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$; allo stesso modo anche $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ e quindi $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.
- Per dimostrare la σ -additività utilizziamo l'esercizio precedente: dati A, N come nelle ipotesi, $\exists \bar{A} \in \mathfrak{A}; \bar{N} \in \mathfrak{N} : A \Delta N = \bar{A} \sqcup \bar{N}$. Inoltre, per la buona definizione di $\bar{\mu}$, e poiché $\bar{A} \sqcup \bar{N} = \bar{A} \Delta \bar{N}$, abbiamo che $\mu(A) = \mu(\bar{A})$. Sia quindi $(A_k \Delta N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi disgiunti in \mathfrak{U} . Dato che \mathfrak{N} è un σ -anello $\exists \hat{A} : \mu(\hat{A}) = 0, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subseteq \hat{A}$. Inoltre detti $\hat{A}_k := A_k \setminus \hat{A}$, si ha $\mu(A_k) = \mu(\hat{A}_k)$.

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \Delta N_k) \right) &= \bar{\mu} \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (\bar{A}_k \sqcup \bar{N}_k) \right) = \\ &= \bar{\mu} \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\hat{A}_k \sqcup (\bar{N}_k \cup \hat{A}) \right) \right) = \\ &= \bar{\mu} \left(\hat{A} \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \right) = \\ &= \mu \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\hat{A}_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_k \Delta N_k) \end{aligned}$$

che è la σ -additività. \square

Esercizio 15 (2016-10-24). Sia \mathfrak{A} anello. Sia $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ una misura σ -additiva. Definiamo come al solito μ^* misura esterna e \mathfrak{M} l'insieme dei misurabili. Già sappiamo che $\mu^*_{|\mathfrak{M}} =: \bar{\mu}$ è una misura σ -additiva.

Sia ora \mathfrak{L} anello con $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$, sia $\nu : \mathfrak{L} \rightarrow [0, +\infty]$ misura σ -additiva con $\nu|_{\mathfrak{A}} = \mu$. Dimostrare che allora $\nu = \bar{\nu}|_{\mathfrak{L}}$.

Esercizio 16 (2016-10-14). Sia \mathfrak{A} un'algebra, e $S(\mathfrak{A})$ l'insieme delle funzione semplici su \mathfrak{A} .
 Sia $E = (S(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_s)$, $T \in E' = \{\xi \in E' * \text{continue}\}$. Sappiamo che $\exists \mu: T(f) = \int f \, d\mu$.
 Calcolare la norma $\|T\|$ operatoriale in funzione della misura.

Dimostrazione.

Esercizio 17 (2016-10-14). Sia \mathfrak{A} un anello, $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow X$ Dire quali delle seguenti sono equivalenti, nei due casi $X = \mathbb{R}$ e $X = [0, +\infty]$:

1. μ è σ -additiva
2. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}, A_n \uparrow A \in \mathfrak{A}$ si ha $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
3. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}, A_n \downarrow A \in \mathfrak{A}$ si ha $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
4. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}, A_n \downarrow \emptyset$ si ha $\mu(A_n) \rightarrow 0$

Dimostrazione.