Esercizi di analisi

Francesco Florian, Ilaria Fontana,
Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato

8 novembre 2016

Indice

1 Esercizi sugli anelli

We start with a lemma.

Lemma 1. *Every open set $A \subseteq \mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals.*

Dimostrazione. First, we remind what a *base for a topology* is. Let (X, τ) be a topological space. A base for τ is a set $\mathcal{A} \subseteq \tau$ such that

$$\forall T \in \tau \ \forall x \in T \ \exists A(x, T) \in \mathcal{A} \ x \in A \subseteq T.$$

If $T \in \tau$, using the notation of the previous definition, then we have that

$$T = \bigcup_{x \in T} A(x, T).$$

In other words a base for τ is a subset $\mathcal{A}$ of τ such that every set of τ can be written as an union of elements in $\mathcal{A}$.

Now, given any open set T of $\mathbb{R}$ and given $x \in \mathbb{R}$ by definition exists an open interval contained in T and containing x. It is easy to find an open interval with rational endpoints which contains x and which is contained in T. This shows that the set

$$\{]\, a,\ b\, [\,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

is a base of the Euclidean topology. Since the base is countable, this proves that every open set of $\mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals. $\square$

Esercizio 1 (2016-10-10). *Let us show that*

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R} = \sigma\left(\{]\, a,\ b\, [\,:\, a, b \in \mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{[\, a,\ b\,] \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}\right) \tag{1a}$$

$$= \sigma\left(\{]\, a,\ b\,] \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}\right) = \sigma(\mathfrak{E}_i) \tag{1b}$$

where

1. $\mathfrak{E}_1 := \{]\, a,\ +\infty\, [\,:\, a \in \mathbb{R}\}$;
2. $\mathfrak{E}_2 := \{[\, a,\ +\infty\, [\,:\, a \in \mathbb{R}\}$;
3. $\mathfrak{E}_3 := \{]\, +\infty,\ a\, [\,:\, a \in \mathbb{R}\}$;
4. $\mathfrak{E}_4 := \{]\, +\infty,\ a\,] \,:\, a \in \mathbb{R}\}$;

Dimostrazione. Let us call $\sigma(\mathfrak{A}_1), \sigma(\mathfrak{A}_2), \sigma(\mathfrak{A}_3)$ the three σ-ring that appear in the statement of this exercise that still do not have a name. First, let us observe that the various σ rings we deal with are not only σ-rings but also σ-algebras. In fact for each of them $\mathbb{R}$ can be written as a countable union of its elements.

In order to prove the various equalities $\sigma(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{N})$ we will first prove that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, thus obtaining $\sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \sigma(\mathfrak{N})$ and the then we will prove that $\mathfrak{N} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$ concluding the proof.

Since the set of all open intervals is a subset of the family of the open sets, considering the generated σ-rings, we obtain that $\sigma(\mathfrak{A}_1) \subseteq \operatorname{Bor} R$. The other inclusion follows from the lemma we have seen before this exercise, which states that every open set can be written as a numerable union of open intervals. $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ because every open interval can be written as the complementary of a closed set and vice versa. Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{A}_2) = \sigma(\mathfrak{A}_3)$. The key point is to notice that every $[a, b]$ can be written as the countable intersection $\bigcap \left\{ \left]\, a - \frac{1}{n},\ b\, \right] \right\}$, that every $]\,a,\,b\,]$ can be written as the countable union $\bigcup\left\{\left[\,a+\frac{1}{n},\,b\,\right]\right\}$, and to remember that a σ-algebra contains all the countable unions and countable intersections.

Clearly $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_4)$ and $\sigma(\mathfrak{E}_2) = \sigma(\mathfrak{E}_3)$, because every element of each first set is the complementary of an element of each second set, and vice versa. The inclusion $\sigma(\mathfrak{E}_1) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ follows by the fact that $]\,a,\,+\infty\,[$ can be written as $]\,a,\,a+2\,[\,\cup\bigcup\,]\,a+n,\,a+n+2\,[$. Also the other inclusion is true because $]\,a,\,b\,[\,=\,]\,a,\,+\infty\,[\,\cap\bigcup\,]\,b-\frac{1}{n},\,+\infty\,[$.

It remains to prove that $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_2)$. This can be done observing that $]\,a,\,+\infty\,[\,= \bigcup\left[\,a+\frac{1}{n},\,+\infty\,\right[$ and that $[\,a,\,+\infty\,[\,=\bigcap\,\left]\,a-\frac{1}{n},\,+\infty\,\right[$.

The exercise is completed. ◻

Esercizio 2 (2016-10-10). *Let us show that the Borel set* $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$ *coincides with the sets*

$$\mathfrak{S} \coloneqq \{B \cup A \colon B \in \operatorname{Bor}\mathbb{R},\ A \subseteq \{-\infty,+\infty\}\}$$

and also with the set

$$\sigma(\mathfrak{B}) \coloneqq \sigma\left(\{[a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty,+\infty]\}\right).$$

Dimostrazione. First we are going to prove that $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{B})$. The inclusion $(\supseteq)$ easily follows from the fact that every set in $\mathfrak{B}$ belongs, by definition, also to $\mathfrak{S}$. In order to prove the other inclusion we will first prove that $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$, and the we will prove the same for $\{-\infty,+\infty\}$. From the previous exercise, if we prove that $\mathfrak{E}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$, since $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{E}_2)$, we obtain that $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$. It is sufficient to prove that $\{+\infty\} \in \mathfrak{B}$ since we know that

$$\{[\,a,\,+\infty\,[\,\cup\{+\infty\} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{B}.$$

For this purpose let us write

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty].$$

It remains to prove that $\{-\infty\} \in \mathfrak{B}$. This is proved by the following:

$$\{-\infty\} = [-\infty,+\infty] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\,a,\,+\infty\,]\,,$$

which is the difference of an element of $\mathfrak{B}$ and a countable union of elements of $\mathfrak{B}$.

Let us now prove that $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$ coincides with the other two sets. First we will prove that $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{S}$. In order to do this we remind who the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are: if A is an open set of $\overline{\mathbb{R}}$ then $A \cap \mathbb{R}$ is an open set of $\mathbb{R}$ and if $-\infty$ (respectively $+\infty$) is contained in A, then exists $a \in \mathbb{R}$ such that $[-\infty,a[\subseteq A$ (respectively $]a,+\infty] \subseteq A$). Since all the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are clearly contained in $\mathfrak{S}$, the inclusion we want to prove follows.

Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{B}) \subseteq \operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$. This is obvious since the sets of $\mathfrak{B}$ are all open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ and so the sigma-ring they generate is contained in $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$.

This completes the proof. ◻

Esercizio 3 (2016-10-10). *Sia* $\emptyset \neq \mathfrak{E}_0 \subseteq \mathbb{P}(X)$ *e per* $\alpha \in \mathrm{Ord}$ *sia*

$$\mathfrak{E}_\alpha \coloneqq \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(A_n \setminus B_n \colon A_n, B_n \in \bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{E}_\beta\right)\right\}. \tag{2}$$

Dimostrare allora che $\sigma(\mathfrak{E}_0) = \bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathfrak{E}_\alpha$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni.

$\supseteq$ Si può dimostrare utilizzando il principio di induzione transfinita, nella forma

$$P(0) \wedge \forall \alpha > 0 \, (\forall \beta < \alpha P(\beta) \implies P(\alpha)) \implies \forall \alpha P(\alpha)$$

sulla proposizione $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

$\alpha = 0$ Vero per definizione di (σ-)anello generato.

$\alpha > 0$ Per ipotesi induttiva $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\beta \, \forall \beta < \alpha$, quindi $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{E}_\beta$. Ma $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ è chiuso per differenza e unione numerabile, quindi date due successioni $A_n, B_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{E}_\beta$, abbiamo che $\forall n \in \mathbb{N} \, C_n = A_n \setminus B_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$, e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$. Per ipotesi un generico elemento di $\mathfrak{E}_\alpha$ si scrive in questa forma, e dunque $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

Allora $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ contiene ogni $\mathfrak{E}_\alpha$, e quindi anche la loro unione.

$\subseteq$ Basta dimostrare che $S \coloneqq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$ è un anello.

Differenza Siano $A, B \in S$; allora $\exists \alpha_1, \alpha_2 < \omega_1 \colon A \in \mathfrak{E}_{\alpha_1}, B \in \mathfrak{E}_{\alpha_2}$, e sia $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. allora per ipotesi $A \setminus B \in \mathfrak{E}_{\alpha+1}$, con $\alpha + 1 < \omega_1$, perché ω_1 non è un successore.

Unione Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione si elementi di S, $B_n = \emptyset \, \forall n \in \mathbb{N}$, e sia α_n il più piccolo ordinale per cui $A_n \in \mathfrak{E}_{\alpha_n}$. Dato che $\mathrm{Cof}(\omega_1) > \aleph_0$ $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, e dunque per ipotesi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{E}_\alpha \subseteq S$

Abbiamo anche dimostrato che da $\lambda = \omega_1$ in poi la successione $\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{E}_\alpha$ è stazionaria. □

2 Esercizi sugli ideali

Esercizio 4.

Esercizio 5 (13/10/2016). *Sia $\mathfrak{N}$ un ideale di un anello $\mathfrak{A}$.*

1. *Descrivere l'insieme* algebra($\mathfrak{N}$).

2. *Dimostrare che se $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale in $\mathfrak{A}$ e se $\mathfrak{M}$ è un σ-anello allora* algebra($\mathfrak{M}$) *è in realtà una σ-algebra.*

Dimostrazione. Assegnato a Ilaria. □

Esercizio 6 (2016-10-13). *Sia $\emptyset \neq \mathfrak{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$ e sia $\emptyset \neq A \subseteq X$. Allora $\sigma(\mathfrak{E} \cap A) = \sigma(\mathfrak{E}) \cap A$ avendo definito $\mathfrak{E} \cap A \coloneqq \{E \cap A \colon E \in \mathfrak{E}\}$.*

1. *Descrivere l'insieme* algebra($\mathfrak{N}$).

2. *Dimostrare che se $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale in $\mathfrak{A}$ e se $\mathfrak{M}$ è un σ-anello allora* algebra($\mathfrak{M}$) *è in realtà una σ-algebra.*

Dimostrazione. Assegnato a Gaetano. □

Esercizio 7 (13/10/2016). *Sia $\emptyset \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ algebra in $\mathbb{P}(X)$ con $X \notin \mathfrak{N}$.*

1.

Definiamo la funzione $\nu(\cot)$ *ponendo*

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \textit{se } A \in \mathfrak{N} \\ +\infty & \textit{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che ν *è finitamente additiva se e solo se* $\mathfrak{N}$ *è un ideale.*
Definiamo ora

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \textit{se } A \in \mathfrak{N} \\ 1 & \textit{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che ν *è finitamente additiva se e solo se* $\mathfrak{N}$ *è un ideale massimale in* $\mathfrak{A}$.

Dimostrazione. La prima parte è stata svolta da Stefano, la seconda è da svolgere. □

3 Intergrali

Esercizio 8 (28/10/2017). *Sia* f μ*-misurabile e positiva, sia*

$$\forall A \in \mathfrak{A} \ \nu(A) := \int f\chi_A \, \mathrm{d}\mu$$

Dimostrare che $\nu\colon \mathfrak{A} \to [\,0,\, +\infty\,]$ *è una misura* σ*-additiva.*

Dimostrazione. Dimostriamo intanto l'additività: sia $C = A \sqcup B$; allora $f\chi_C = f\chi_A + f\chi_B$ e quindi $\nu(C) = \int f\chi_C \,\mathrm{d}\mu = \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu + \int f\chi_B \,\mathrm{d}\mu = \nu(A) + \nu(B)$ per la linearità dell'integrale se tutti i termini sono finiti, oppure perché per $0 \le c \le +\infty$, $c + \infty = +\infty$.

Sia ora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ una successione di insiemi disgiunti, e $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sia $B_n = \bigcup_{j\le n} A_j$. Per la finita additività sappiamo che

$$\int f\chi_{B_n} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j\le n} \int f\chi_{A_j} \,\mathrm{d}\mu$$

inoltre $\lim_{n\to+\infty} f\chi_{B_n} = f\chi_A$[1], quindi dal lemma di Fatou

$$\int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to+\infty} \int f\chi B_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\le n} \int f\chi_{A_j} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f\chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu$$

Infine, dato che $B_n \uparrow A$, $f\chi_{B_n} \le f\chi_A$, e quindi per la monotonia dell'integrale $\int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu \ge \int f\chi_{B_n} \,\mathrm{d}\mu$ e

$$\int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f\chi_{B_n} \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f\chi_{B_n} \,\mathrm{d}\mu$$

Questa disuguaglianza, combinata con quella che deriva dal lemma di Fatou, ci da la tesi. □

Esercizio 9 (3/11/2016). *Trovare dei controesempi alle seguenti:*

1. *Il lemma di Fatou enunciato con* $\limsup$ *al posto del* $\liminf$
2. *Il lemma di Fatou enunciato con l'uguaglianza.*

[1] questo limite e i prossimi esistono perché consideriamo successioni crescenti

4 Metriche e misure

Esercizio 10 (2016-10-13). *Sia $\emptyset \neq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ anello. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathfrak{N}$ è un ideale in $\mathfrak{A}$ (nel senso di Algebra I)*
2. $\begin{cases} A \subseteq B \in \mathfrak{N},\ A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \in \mathfrak{N} \\ A, B \in \mathfrak{N} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{N} \end{cases}$
3. *se $A \in \mathfrak{A}$ e $B, C \in \mathfrak{N}$ allora $A \in \mathfrak{A}$.*

Dimostrazione. Svolto da Ilaria. □

Esercizio 11 (2016-10-14). *Sia $\mathfrak{P} := \{[\,a,\, b\,[\,: -\infty < a \leq b < +\infty\}$, sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e sia $\mu_g([\,a,\, b\,[) := g(b) - g(a)$. Dimostrare che μ_g è una misura finitamente additiva. Dimostrare inoltre che μ_g σ-additiva se e solo se $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x - \circ) = g(x)$.* [2].

Dimostrazione. Svolto da Stefania. □

Esercizio 12 (2016-10-20). *Sia $\mathfrak{A}$ un anello, $\eta\colon \mathfrak{A} \to [\,0,\, +\infty\,]$ una submisura. Sia come al solito $\mathfrak{N}(\eta) = \{A \in \mathfrak{A}\colon \eta(A) = 0\}$. Dimostrare che*

1. *Se $\mathfrak{N}(\eta)$ è un ideale di $\mathfrak{A}$ e η è una σ-submisura, allora $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale.*
2. *Se $A, B \in \mathfrak{A}$ e $A \cap B \in \mathfrak{N}(\eta)$, allora $\eta(A) = \eta(A \cap N) = \eta(B)$.*
3. *Se $A \in \mathfrak{A}$, $N \in \mathfrak{N}(\eta)$, allora $\eta(A) = \eta(A \cup N) = \eta(A \Delta N) = \eta(A \setminus N)$*

Dimostrazione.

Esercizio 13 (2016-10-20). *Sia $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ un σ-anello, $\mu\colon \mathfrak{A} \to [\,0,\, +\infty\,]$ una misura σ-additiva. Sia $\mathfrak{N} := \{N\colon \exists A \in \mathfrak{A}, N \subseteq A, A \in \mathfrak{N}(\mu)\}$.*

1. *Dimostrare che $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale in $\mathbb{P}(X)$.*
2. *Sia $\mathfrak{L} :=$ anello$(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N})$. Dimostrare che $\mathfrak{L} = \{A \Delta N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\} = \{A \sqcup N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$*

Dimostrazione.

1. Sia $\hat{N} \subseteq N \in \mathfrak{N}$; per ipotesi $\exists A \in \mathfrak{A}\colon N \subseteq A$, $\mu(A) = 0$, ma allora anche $\hat{N} \subseteq A$, e quindi $\hat{N} \in \mathfrak{N}$.

   Sia ora $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathfrak{N}$; per ipotesi $\forall n \exists A_n \in \mathfrak{A}\colon \mu(A_n) = 0$, $N_n \in A_n$; allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e per la σ-additività di μ, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$ e quindi per definizione $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{N}$.

2. Poniamo
$$\mathfrak{U} := \{A \Delta N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$
$$\mathfrak{T} := \{A \sqcup N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

   Mostriamo che $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$ Siano $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$.

[2] Con $g(x - \circ)$ indichiamo $\lim_{y \to x^-} g(x)$

- $\subseteq$ Consideriamo $A\Delta N = (A \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$. Per ipotesi $\exists C \in \mathfrak{A}$ di misura nulla tale che $N \subseteq C$. Sia $B = A \cap C$; allora
$$B \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0;$$
inoltre
$$A \setminus N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N).$$
Allora abbiamo
$$A\Delta N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$$
dove $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ e $(B \setminus N) \sqcup (N \setminus A) \in \mathfrak{N}$, e dunque $A\Delta N \in \mathfrak{T}$.
- $\supseteq$ Sia ora $A \cap N = \emptyset$. Allora $A \sqcup N = A\Delta N$ e la tesi è provata.

Mostriamo ora $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$.

- $\supseteq$ È vero perché per definizione ogni anello è chiuso per differenza simmetrica.
- $\subseteq$ Basta mostrare che $\mathfrak{U}$ è un anello e che contiene $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$; $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$ perché ogni elemento A di $\mathfrak{A}$ si scrive come $A\Delta\emptyset$, e analogamente $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$ Perché ogni elemento N di $\mathfrak{N}$ si scrive come $N\Delta\emptyset$.

  Per provare che $\mathfrak{U}$ è un anello mostriamo che $\mathfrak{T}$ è chiuso per unione disgiunta e differenza.
  - $\sqcup$ Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$ disgiunti; allora $(A \sqcup N) \sqcup (A_1 \sqcup N_1) = (A \sqcup A_1) \sqcup (N \sqcup N_1) \in \mathfrak{U}$, perché l'unione è associativa e commutativa.
  - $\setminus$ Mostriamo la differenza di due elementi di $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$ appartiene a $\mathfrak{U}$. Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$; allora $(A \sqcup N) \setminus (A_1 \sqcup N_1) = (A \setminus A_1 \setminus N_1) \sqcup (N \setminus A_1 \setminus N_1)$.
    Ma il secondo insieme dell'unione è un sottoinsieme di N, e quindi appartiene all'ideale $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$.
    Inoltre sia $N_1 \subseteq B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0$ contenuto in $A \setminus A_1$. $A \setminus A_1 \setminus N_1 = A \setminus A_1 \setminus B \sqcup B \setminus N_1$ dove e quindi il primo insieme dell'unione appartiene ad $\mathfrak{U}$.
    Dato che abbiamo già dimostrato che $\mathfrak{U}$ è chiuso per unioni disgiunte, è chiuso anche per differenza. □

Esercizio 14 (2016-10-27). *Definiamo $\overline{\mu}(A\Delta N) := \mu(A)\,\forall A \in \mathfrak{A}, N \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\overline{\mu}$ è ben definita, σ-additiva, completa e che $\overline{\mu}\,|_{\mathfrak{A}}= \mu$.*

Nota 1. *La misura $\overline{\mu}$ così definita si dice completamento di μ.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathfrak{U} := \{A\Delta N \colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$. Gli ultimi due punti sono ovvi prendendo $A = \emptyset$ e $N = \emptyset$ rispettivamente. Dimostriamo quindi i primi due.

- Dimostriamo che $\overline{\mu}$ è ben definita. Sia $A_1\Delta N_1 = A_2\Delta N_2$, con $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}; N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$. Allora $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A} \colon \mu(B_1) = \mu(B_2) = 0, N_1 \subseteq B_1, N_2 \subseteq B_2$. Quindi $A_1 \subseteq A_2 \cup B_1 \cup B_2$ e per l'additività della misura $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$; allo stesso modo anche $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ e quindi $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

- Per dimostrare la σ-additività utilizziamo l'esercizio precedente: dati A, N come nelle ipotesi, $\exists \overline{A} \in \mathfrak{A}; \overline{N} \in \mathfrak{N} \colon A\Delta N = \overline{A} \sqcup \overline{N}$. Inoltre, per la buona definizione di $\overline{\mu}$, e poiché $\overline{A} \sqcup \overline{N} = \overline{A}\Delta\overline{N}$, abbiamo che $\mu(A) = \mu(\overline{A})$. Sia quindi $(A_k\Delta N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi disgiunti in $\mathfrak{U}$. Dato che $\mathfrak{N}$ è un σ-anello $\exists \hat{A} \colon \mu(\hat{A}) = 0, \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \subseteq \hat{A}$. Inoltre detti $\hat{A}_k \coloneqq A_k \setminus \hat{A}$, si ha $\mu(A_k) = \mu(\hat{A}_k)$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \Delta N_k)\right) &= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\overline{A}_k \sqcup \overline{N}_k\right)\right) = \\
&= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\hat{A}_k \sqcup \left(\overline{N}_k \cup \hat{A}\right)\right)\right) = \\
&= \overline{\mu}\left(\hat{A} \sqcup \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \hat{A}_k\right) = \\
&= \mu\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \hat{A}_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(\hat{A}_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(A_k\right) = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{\mu}\left(A_k \Delta N_k\right)
\end{aligned}$$

che è la σ-additività. □

Esercizio 15 (2016-10-24). *Sia $\mathfrak{A}$ anello. Sia $\mu \colon \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ una misura σ-additiva. Definiamo come al solito μ^* misura esterna e $\mathfrak{M}$ l'insieme dei misurabili. Già sappiamo che $\mu^*_{|\mathfrak{M}} =: \overline{\mu}$ è una misura σ-additiva.*

Sia ora $\mathfrak{L}$ anello con $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$, sia $\nu \colon \mathfrak{L} \to [\,0, +\infty\,]$ misura σ-additiva con $\nu_{|\mathfrak{A}} = \mu$. Dimostrare che allora $\nu = \overline{\nu}_{|\mathfrak{L}}$.

Esercizio 16 (2016-10-14). *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra, e $S(\mathfrak{A})$ l'insieme delle funzione semplici su $\mathfrak{A}$.*

Sia $E = (S(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_s))$, $T \in E' = \{\xi \in E * continue\}$. Sappiamo che $\exists \mu \colon T(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Calcolare la norma $\|T\|$ operatoriale in funzione della misura.

Dimostrazione.

Esercizio 17 (2016-10-14). *Sia $\mathfrak{A}$ un anello, $\mu \colon \mathfrak{A} \to X$ Dire quali delle seguenti sono equivalenti, nei due casi $X = \mathbb{R}$ e $X = [\,0, +\infty\,]$:*

1. *μ è σ-additiva*
2. *$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \uparrow A \in \mathfrak{A}$ si ha $\mu(A_n) \to \mu(A)$*
3. *$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \downarrow A \in \mathfrak{A}$ si ha $\mu(A_n) \to \mu(A)$*
4. *$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \downarrow \emptyset$ si ha $\mu(A_n) \to 0$*

Dimostrazione.