Esercizi di analisi

Francesco Florian, Ilaria Fontana,
Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato

5 novembre 2016

Indice

1 Esercizi sugli anelli

We start with a lemma.

Lemma 1. *Every open set $A \subseteq \mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals.*

Dimostrazione. First, we remind what a *base for a topology* is. Let (X, τ) be a topological space. A base for τ is a set $\mathcal{A} \subseteq \tau$ such that

$$\forall T \in \tau \ \forall x \in T \ \exists A(x, T) \in \mathcal{A} \ x \in A \subseteq T.$$

If $T \in \tau$, using the notation of the previous definition, then we have that

$$T = \bigcup_{x \in T} A(x, T).$$

In other words a base for τ is a subset $\mathcal{A}$ of τ such that every set of τ can be written as an union of elements in $\mathcal{A}$.

Now, given any open set T of $\mathbb{R}$ and given $x \in \mathbb{R}$ by definition exists an open interval contained in T and containing x. It is easy to find an open interval with rational endpoints which contains x and which is contained in T. This shows that the set

$$\{]\,a,\, b\,[\, : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

is a base of the Euclidean topology. Since the base is countable, this proves that every open set of $\mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals. □

Esercizio 1 (2016-10-10). *Let us show that*

$$\begin{aligned} \operatorname{Bor} \mathbb{R} &= \sigma\left(\{]\,a,\, b\,[\, : a, b \in \mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{[\,a,\, b\,] : a, b \in \mathbb{R}\}\right) && \text{(1a)} \\ &= \sigma\left(\{]\,a,\, b\,] : a, b \in \mathbb{Q}\}\right) = \sigma(\mathfrak{E}_i) && \text{(1b)} \end{aligned}$$

where

1. $\mathfrak{E}_1 \coloneqq \{]\,a,\, +\infty\,[\, : a \in \mathbb{R}\}$;
2. $\mathfrak{E}_2 \coloneqq \{[\,a,\, +\infty\,[\, : a \in \mathbb{R}\}$;
3. $\mathfrak{E}_3 \coloneqq \{]\,+\infty,\, a\,[\, : a \in \mathbb{R}\}$;
4. $\mathfrak{E}_4 \coloneqq \{]\,+\infty,\, a\,] : a \in \mathbb{R}\}$;

Dimostrazione. Let us call $\sigma(\mathfrak{A}_1), \sigma(\mathfrak{A}_2), \sigma(\mathfrak{A}_3)$ the three σ-ring that appear in the statement of this exercise that still do not have a name. First, let us observe that the various σ rings we deal with are not only σ-rings but also σ-algebras. In fact for each of them $\mathbb{R}$ can be written as a countable union of its elements.

In order to prove the various equalities $\sigma(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{N})$ we will first prove that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, thus obtaining $\sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \sigma(\mathfrak{N})$ and the then we will prove that $\mathfrak{N} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$ concluding the proof.

Since the set of all open intervals is a subset of the family of the open sets, considering the generated σ-rings, we obtain that $\sigma(\mathfrak{A}_1) \subseteq \operatorname{Bor} R$. The other inclusion follows from the lemma we have seen before this exercise, which states that every open set can be written as a numerable union of open intervals. $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ because every open interval can be written as the complementary of a closed set and vice versa. Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{A}_2) = \sigma(\mathfrak{A}_3)$. The key point is to notice that every $[a, b]$ can be written as the countable intersection $\bigcap \left\{ \left]\, a - \frac{1}{n},\, b \,\right] \right\}$, that every $]\,a,\,b\,]$ can be written as the countable union $\bigcup\big\{\big[\,a+\frac{1}{n},\,b\,\big]\big\}$, and to remember that a σ-algebra contains all the countable unions and countable intersections.

Clearly $\sigma(\mathfrak{E}_1)=\sigma(\mathfrak{E}_4)$ and $\sigma(\mathfrak{E}_2)=\sigma(\mathfrak{E}_3)$, because every element of each first set is the complementary of an element of each second set, and vice versa. The inclusion $\sigma(\mathfrak{E}_1)\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ follows by the fact that $]\,a,\,+\infty\,[$ can be written as $]\,a,\,a+2\,[\,\cup\bigcup\,]\,a+n,\,a+n+2\,[$. Also the other inclusion is true because $]\,a,\,b\,[\,=\,]\,a,\,+\infty\,[\,\cap\bigcup\,]\,b-\frac{1}{n},\,+\infty\,[$.

It remains to prove that $\sigma(\mathfrak{E}_1)=\sigma(\mathfrak{E}_2)$. This can be done observing that $]\,a,\,+\infty\,[\;=\bigcup\big[\,a+\frac{1}{n},\,+\infty\,\big[$ and that $[\,a,\,+\infty\,[\,=\bigcap\,]\,a-\frac{1}{n},\,+\infty\,[$.

The exercise is completed. $\square$

Esercizio 2 (2016-10-10). *Let us show that the Borel set* $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$ *coincides with the sets*

$$\mathfrak{S}\coloneqq\{B\cup A\colon B\in\operatorname{Bor}\mathbb{R},\ A\subseteq\{-\infty,+\infty\}\}$$

and also with the set

$$\sigma(\mathfrak{B})\coloneqq\sigma\left(\{[a,+\infty]:a\in\mathbb{R}\}\cup\{[-\infty,+\infty]\}\right).$$

Dimostrazione. First we are going to prove that $\mathfrak{S}=\sigma(\mathfrak{B})$. The inclusion $(\supseteq)$ easily follows from the fact that every set in $\mathfrak{B}$ belongs, by definition, also to $\mathfrak{S}$. In order to prove the other inclusion we will first prove that $\mathcal{B}\subseteq\sigma(\mathfrak{B})$, and the we will prove the same for $\{-\infty,+\infty\}$. From the previous exercise, if we prove that $\mathfrak{E}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{B})$, since $\mathcal{B}=\sigma(\mathfrak{E}_2)$, we obtain that $\mathcal{B}\subseteq\sigma(\mathfrak{B})$. It is sufficient to prove that $\{+\infty\}\in\mathfrak{B}$ since we know that

$$\{[\,a,\,+\infty\,[\,\cup\{+\infty\}:a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathfrak{B}.$$

For this purpose let us write

$$\{+\infty\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty].$$

It remains to prove that $\{-\infty\}\in\mathfrak{B}$. This is proved by the following:

$$\{-\infty\}=[-\infty,+\infty]\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\,a,\,+\infty\,],$$

which is the difference of an element of $\mathfrak{B}$ and a countable union of elements of $\mathfrak{B}$.

Let us now prove that $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$ coincides with the other two sets. First we will prove that $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}\subseteq\mathfrak{S}$. In order to do this we remind who the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are: if A is an open set of $\overline{\mathbb{R}}$ then $A\cap\mathbb{R}$ is an open set of $\mathbb{R}$ and if $-\infty$ (respectively $+\infty$) is contained in A, then exists $a\in\mathbb{R}$ such that $[-\infty,a[\subseteq A$ (respectively $]a,+\infty]\subseteq A$). Since all the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are clearly contained in $\mathfrak{S}$, the inclusion we want to prove follows.

Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{B})\subseteq\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$. This is obvious since the sets of $\mathfrak{B}$ are all open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ and so the sigma-ring they generate is contained in $\operatorname{Bor}\overline{\mathbb{R}}$.

This completes the proof. $\square$

Esercizio 3 (2016-10-10). *Sia* $\emptyset\neq\mathfrak{E}_0\subseteq\mathbb{P}(X)$ *e per* $\alpha\in\operatorname{Ord}$ *sia*

$$\mathfrak{E}_\alpha\coloneqq\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(A_n\setminus B_n\colon A_n,B_n\in\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{E}_\beta\right)\right\}. \tag{2}$$

Dimostrare allora che $\sigma(\mathfrak{E}_0)=\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathfrak{E}_\alpha$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni.

$\supseteq$ Si può dimostrare utilizzando il principio di induzione transfinita, nella forma

$$P(0) \wedge \forall \alpha > 0 \, (\forall \beta < \alpha P(\beta) \implies P(\alpha)) \implies \forall \alpha P(\alpha)$$

sulla proposizione $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

$\alpha = 0$ Vero per definizione di (σ-)anello generato.

$\alpha > 0$ Per ipotesi induttiva $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\beta \, \forall \beta < \alpha$, quindi $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{E}_\beta$. Ma $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ è chiuso per differenza e unione numerabile, quindi date due successioni $A_n, B_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{E}_\beta$, abbiamo che $\forall n \in \mathbb{N} \, C_n = A_n \setminus B_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$, e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$. Per ipotesi un generico elemento di $\mathfrak{E}_\alpha$ si scrive in questa forma, e dunque $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

Allora $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ contiene ogni $\mathfrak{E}_\alpha$, e quindi anche la loro unione.

$\subseteq$ Basta dimostrare che $S \coloneqq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$ è un anello.

Differenza Siano $A, B \in S$; allora $\exists \alpha_1, \alpha_2 < \omega_1 \colon A \in \mathfrak{E}_{\alpha_1}, B \in \mathfrak{E}_{\alpha_2}$, e sia $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. allora per ipotesi $A \setminus B \in \mathfrak{E}_{\alpha+1}$, con $\alpha + 1 < \omega_1$, perché ω_1 non è un successore.

Unione Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione si elementi di S, $B_n = \emptyset \, \forall n \in \mathbb{N}$, e sia α_n il più piccolo ordinale per cui $A_n \in \mathfrak{E}_{\alpha_n}$. Dato che $\mathrm{Cof}(\omega_1) > \aleph_0$ $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, e dunque per ipotesi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{E}_\alpha \subseteq S$

Abbiamo anche dimostrato che da $\lambda = \omega_1$ in poi la successione $\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{E}_\alpha$ è stazionaria. □

2 Esercizi sugli ideali

Esercizio 4 (13/10/2016). *Sia $\mathfrak{N}$ un ideale di un anello $\mathfrak{A}$.*

1. *Descrivere l'insieme* algebra$(\mathfrak{N})$.
2. *Dimostrare ceh se $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale in $\mathfrak{A}$ e se $\mathfrak{M}$ è un σ-anello allora* algebra$(\mathfrak{M})$ *è in realtà una σ-algebra.*

Dimostrazione.

Esercizio 5 (13/10/2016). *Sia $\emptyset \neq \mathfrak{E} \subseteq \mathbb{P}X$ e sia $\emptyset \neq A \subseteq X$. Allora $\sigma(\mathfrak{E} \cap A) = \sigma(\mathfrak{E}) \cap A$ avendo definito $\mathfrak{E} \cap A \coloneqq \{E \cap A \colon E \in \mathfrak{E}\}$.*

1. *Descrivere l'insieme* algebra$(\mathfrak{N})$.
2. *Dimostrare ceh se $\mathfrak{N}$ è un σ-ideale in $\mathfrak{A}$ e se $\mathfrak{M}$ è un σ-anello allora* algebra$(\mathfrak{M})$ *è in realtà una σ-algebra.*

Dimostrazione. Assegnato a Gaetano. □

Esercizio 6 (13/10/2016). *Sia $\emptyset \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ algebra in $\mathbb{P}(X)$ con $X \notin \mathfrak{N}$. Definiamo la funzione $\nu(\cot)$ ponendo*

$$\nu(A) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ +\infty & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che ν è finitamente additiva se e solo se $\mathfrak{N}$ è un ideale.

Dimostrazione. Assegnato a Barbetta. □

3 Intergrali

4 Metriche e submisure

Esercizio 7 (2016-10-20-1). *Sia* $\mathfrak{A}$ *un anello,* $\eta\colon \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ *una submisura. Sia come al solito* $\mathfrak{N}(\eta) = \{A \in \mathfrak{A}\colon \eta(A) = 0\}$. *Dimostrare che*

1. *Se* $\mathfrak{N}(\eta)$ *è un ideale di* $\mathfrak{A}$ *e* η *è una* σ*-submisura, allora* $\mathfrak{N}$ *è un* σ*-ideale.*
2. *Se* $A, B \in \mathfrak{A}$ *e* $A \cap B \in \mathfrak{N}(\eta)$*, allora* $\eta(A) = \eta(A \cap N) = \eta(B)$.
3. *Se* $A \in \mathfrak{A}$*,* $N \in \mathfrak{N}(\eta)$*, allora* $\eta(A) = \eta(A \cup N) = \eta(A \Delta N) = \eta(A \setminus N)$

Dimostrazione.

Esercizio 8 (2016-10-20-2). *Sia* $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ *un* σ*-anello,* $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ *una misura* σ*-additiva. Sia* $\mathfrak{N} := \{N\colon \exists A \in \mathfrak{A}, N \subseteq A, A \in \mathfrak{N}(\mu)\}$.

1. *Dimostrare che* $\mathfrak{N}$ *è un* σ*-ideale in* $\mathbb{P}(X)$.
2. *Sia* $\mathfrak{L} := \text{anello}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N})$. *Dimostrare che* $\mathfrak{L} = \{A \Delta N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\} = \{A \sqcup N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$

Dimostrazione.

1. Sia $\hat{N} \subseteq N \in \mathfrak{N}$; per ipotesi $\exists A \in \mathfrak{A}\colon N \subseteq A$, $\mu(A) = 0$, ma allora anche $\hat{N} \subseteq A$, e quindi $\hat{N} \in \mathfrak{N}$.

   Sia ora $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathfrak{N}$; per ipotesi $\forall n \exists A_n \in \mathfrak{A}\colon \mu(A_n) = 0$, $N_n \in A_n$; allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e per la σ-additività di μ, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$ e quindi per definizione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{N}$.

2. Poniamo
$$\mathfrak{U} := \{A \Delta N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$
$$\mathfrak{T} := \{A \sqcup N\colon A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$
   Mostriamo che $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$ Siano $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$.

   - $\subseteq$ Consideriamo $A \Delta N = (A \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$. Per ipotesi $\exists C \in \mathfrak{A}$ di misura nulla tale che $N \subseteq C$. Sia $B = A \cap C$; allora
$$B \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0;$$
     inoltre
$$A \setminus N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N).$$
     Allora abbiamo
$$A \Delta N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$$
     dove $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ e $(B \setminus N) \sqcup (N \setminus A) \in \mathfrak{N}$, e dunque $A \Delta N \in \mathfrak{T}$.
   - $\supseteq$ Sia ora $A \cap N = \emptyset$. Allora $A \sqcup N = A \Delta N$ e la tesi è provata.

   Mostriamo ora $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$.

   - $\supseteq$ È vero perché per definizione ogni anello è chiuso per differenza simmetrica.

- $\subseteq$ Basta mostrare che $\mathfrak{U}$ è un anello e che contiene $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$; $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$ perché ogni elemento A di $\mathfrak{A}$ si scrive come $A\Delta\emptyset$, e analogamente $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$ Perché ogni elemento N di $\mathfrak{N}$ si scrive come $N\Delta\emptyset$.

  Per provare che $\mathfrak{U}$ è un anello mostriamo che $\mathfrak{T}$ è chiuso per unione disgiunta e differenza.

  - $\sqcup$ Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$ disgiunti; allora $(A \sqcup N) \sqcup (A_1 \sqcup N_1) = (A \sqcup A_1) \sqcup (N \sqcup N_1) \in \mathfrak{U}$, perché l'unione è associativa e commutativa.
  - $\setminus$ Mostriamo la differenza di due elementi di $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$ appartiene a $\mathfrak{U}$. Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$; allora $(A \sqcup N) \setminus (A_1 \sqcup N_1) = (A \setminus A_1 \setminus N_1) \sqcup (N \setminus A_1 \setminus N_1)$.

    Ma il secondo insieme dell'unione è un sottoinsieme di N, e quindi appartiene all'ideale $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$.

    Inoltre sia $N_1 \subseteq B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0$ contenuto in $A \setminus A_1$. $A \setminus A_1 \setminus N_1 = A \setminus A_1 \setminus B \sqcup B \setminus N_1$ dove e quindi il primo insieme dell'unione appartiene ad $\mathfrak{U}$.

    Dato che abbiamo già dimostrato che $\mathfrak{U}$ è chiuso per unioni disgiunte, è chiuso anche per differenza. □

Esercizio 9 (27/10/2016). *Definiamo $\overline{\mu}(A\Delta N) := \mu(A) \, \forall A \in \mathfrak{A}, N \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\overline{\mu}$ è ben definita, σ-additiva, completa e che $\overline{\mu}\mid_{\mathfrak{A}} = \mu$.*

Nota 1. *La misura $\overline{\mu}$ così definita si dice completamento di μ.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathfrak{U} := \{A\Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$. Gli ultimi due punti sono ovvi prendendo $A = \emptyset$ e $N = \emptyset$ rispettivamente. Dimostriamo quindi i primi due.

- Dimostriamo che $\overline{\mu}$ è ben definita. Sia $A_1\Delta N_1 = A_2\Delta N_2$, con $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}; N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$. Allora $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A} : \mu(B_1) = \mu(B_2) = 0, N_1 \subseteq B_1, N_2 \subseteq B_2$. Quindi $A_1 \subseteq A_2 \cup B_1 \cup B_2$ e per l'additività della misura $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$; allo stesso modo anche $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ e quindi $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

- Per dimostrare la σ-additività utilizziamo l'esercizio precedente: dati A, N come nelle ipotesi, $\exists \overline{A} \in \mathfrak{A}; \overline{N} \in \mathfrak{N} : A\Delta N = \overline{A} \sqcup \overline{N}$. Inoltre, per la buona definizione di $\overline{\mu}$, e poiché $\overline{A} \sqcup \overline{N} = \overline{A}\Delta\overline{N}$, abbiamo che $\mu(A) = \mu(\overline{A})$. Sia quindi $(A_k\Delta N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi disgiunti in $\mathfrak{U}$. Dato che $\mathfrak{N}$ è un σ-anello $\exists \hat{A} : \mu(\hat{A}) = 0, \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \subseteq \hat{A}$. Inoltre detti $\hat{A}_k := A_k \setminus \hat{A}$, si ha $\mu(A_k) = \mu(\hat{A}_k)$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k\Delta N_k)\right) &= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} (\overline{A}_k \sqcup \overline{N}_k)\right) = \\
&= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\hat{A}_k \sqcup \left(\overline{N}_k \cup \hat{A}\right)\right)\right) = \\
&= \overline{\mu}\left(\hat{A} \sqcup \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \hat{A}_k\right) = \\
&= \mu\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \hat{A}_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(\hat{A}_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(A_k\right) = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{\mu}\left(A_k\Delta N_k\right)
\end{aligned}
$$

  che è la σ-additività. □

Esercizio 10 (14/10/2016). *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra, e $S(\mathfrak{A})$ l'insieme delle funzione semplici su $\mathfrak{A}$. Sia $E = (S(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_s))$, $T \in E' = \{\xi \in E * \text{continue}\}$. Sappiamo che $\exists \mu \colon T(f) = \int f \,\mathrm{d}\mu$. Calcolare la norma $\|T\|$ operatoriale in funzione della misura.*

Dimostrazione.

Esercizio 11 (14/10/2016). *Sia $\mathfrak{A}$ un anello, $\mu \colon \mathfrak{A} \to X$ Dire quali delle seguenti sono equivalenti, nei due casi $X = \mathbb{R}$ e $X = [\,0, +\infty\,]$:*

1. *μ è σ-additiva*
2. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \uparrow A \in \mathfrak{A}$ *si ha* $\mu(A_n) \to \mu(A)$
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \downarrow A \in \mathfrak{A}$ *si ha* $\mu(A_n) \to \mu(A)$
4. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A},\ A_n \downarrow \emptyset$ *si ha* $\mu(A_n) \to 0$

Dimostrazione.