

Esercizi di analisi

Francesco Florian, Ilaria Fontana,
Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato

8 aprile 2017

Indice

1	Esercizi sugli anelli	3
2	Esercizi sugli ideali	5
3	Intergrali	8
4	Metriche e misure	9
5	Misure segnate	12

1 Esercizi sugli anelli

We start with a lemma.

Lemma 1. *Every open set $A \subseteq \mathbb{R}$ can be written as a countable union of open intervals.*

Dimostrazione. First, we remind what a *base for a topology* is. Let (X, τ) be a topological space. A base for τ is a set $\mathcal{A} \subseteq \tau$ such that

$$\forall T \in \tau \forall x \in T \exists A(x, T) \in \mathcal{A} \ x \in A \subseteq T.$$

If $T \in \tau$, using the notation of the previous definition, then we have that

$$T = \bigcup_{x \in T} A(x, T).$$

In other words a base for τ is a subset \mathcal{A} of τ such that every set of τ can be written as an union of elements in \mathcal{A} .

Now, given any open set T of \mathbb{R} and given $x \in \mathbb{R}$ by definition exists an open interval contained in T and containing x . It is easy to find an open interval with rational endpoints which contains x and which is contained in T . This shows that the set

$$\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \}$$

is a base of the Euclidean topology. Since the base is countable, this proves that every open set of \mathbb{R} can be written as a countable union of open intervals. \square

Esercizio 1 (2016-10-10). *Let us show that*

$$\text{Bor } \mathbb{R} = \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{R} \}) = \sigma(\{ [a, b] : a, b \in \mathbb{R} \}) \quad (1a)$$

$$= \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \}) = \sigma(\mathfrak{E}_i) \quad (1b)$$

where

$$1. \ \mathfrak{E}_1 := \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \};$$

$$2. \ \mathfrak{E}_2 := \{ [a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \};$$

$$3. \ \mathfrak{E}_3 := \{]+\infty, a[: a \in \mathbb{R} \};$$

$$4. \ \mathfrak{E}_4 := \{]+\infty, a] : a \in \mathbb{R} \};$$

Dimostrazione. Let us call $\sigma(\mathfrak{A}_1), \sigma(\mathfrak{A}_2), \sigma(\mathfrak{A}_3)$ the three σ -ring that appear in the statement of this exercise that still do not have a name. First, let us observe that the various σ rings we deal with are not only σ -rings but also σ -algebras. In fact for each of them \mathbb{R} can be written as a countable union of its elements.

In order to prove the various equalities $\sigma(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{N})$ we will first prove that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, thus obtaining $\sigma(\mathfrak{M}) \subseteq \sigma(\mathfrak{N})$ and then we will prove that $\mathfrak{N} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$ concluding the proof.

Since the set of all open intervals is a subset of the family of the open sets, considering the generated σ -rings, we obtain that $\sigma(\mathfrak{A}_1) \subseteq \text{Bor } \mathbb{R}$. The other inclusion follows from the lemma we have seen before this exercise, which states that every open set can be written as a numerable union of open intervals. $\sigma(\mathfrak{A}_1) = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ because every open interval can be written as the complementary of a closed set and vice versa. Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{A}_2) = \sigma(\mathfrak{A}_3)$. The key point is to notice that every $[a, b]$ can be written as the countable intersection $\bigcap \{]a - \frac{1}{n}, b] \}$,

that every $]a, b]$ can be written as the countable union $\bigcup \{[a + \frac{1}{n}, b]\}$, and to remember that a σ -algebra contains all the countable unions and countable intersections.

Clearly $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_4)$ and $\sigma(\mathfrak{E}_2) = \sigma(\mathfrak{E}_3)$, because every element of each first set is the complementary of an element of each second set, and vice versa. The inclusion $\sigma(\mathfrak{E}_1) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_1)$ follows by the fact that $]a, +\infty[$ can be written as $]a, a + 2[\cup \bigcup a + n, a + n + 2[$. Also the other inclusion is true because $]a, b[=]a, +\infty[\cap \bigcup b - \frac{1}{n}, +\infty[$.

It remains to prove that $\sigma(\mathfrak{E}_1) = \sigma(\mathfrak{E}_2)$. This can be done observing that $]a, +\infty[= \bigcup [a + \frac{1}{n}, +\infty[$ and that $[a, +\infty[= \bigcap]a - \frac{1}{n}, +\infty[$.

The exercise is completed. \square

Esercizio 2 (2016-10-10). Let us show that the Borel set $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$ coincides with the sets

$$\mathfrak{S} := \{B \cup A : B \in \text{Bor } \mathbb{R}, A \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$$

and also with the set

$$\sigma(\mathfrak{B}) := \sigma(\{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{-\infty, +\infty\}).$$

Dimostrazione. First we are going to prove that $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{B})$. The inclusion (\supseteq) easily follows from the fact that every set in \mathfrak{B} belongs, by definition, also to \mathfrak{S} . In order to prove the other inclusion we will first prove that $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$, and then we will prove the same for $\{-\infty, +\infty\}$. From the previous exercise, if we prove that $\mathfrak{E}_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$, since $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{E}_2)$, we obtain that $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathfrak{B})$. It is sufficient to prove that $\{+\infty\} \in \mathfrak{B}$ since we know that

$$\{[a, +\infty[\cup \{+\infty\} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{B}.$$

For this purpose let us write

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[.$$

It remains to prove that $\{-\infty\} \in \mathfrak{B}$. This is proved by the following:

$$\{-\infty\} = [-\infty, +\infty] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, +\infty],$$

which is the difference of an element of \mathfrak{B} and a countable union of elements of \mathfrak{B} .

Let us now prove that $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$ coincides with the other two sets. First we will prove that $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{S}$. In order to do this we remind who the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are: if A is an open set of \mathbb{R} then $A \cap \mathbb{R}$ is an open set of \mathbb{R} and if $-\infty$ (respectively $+\infty$) is contained in A , then exists $a \in \mathbb{R}$ such that $[-\infty, a[\subseteq A$ (respectively $]a, +\infty] \subseteq A$). Since all the open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ are clearly contained in \mathfrak{S} , the inclusion we want to prove follows.

Let us now prove that $\sigma(\mathfrak{B}) \subseteq \text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$. This is obvious since the sets of \mathfrak{B} are all open sets of $\overline{\mathbb{R}}$ and so the sigma-ring they generate is contained in $\text{Bor } \overline{\mathbb{R}}$.

This completes the proof. \square

Esercizio 3 (2016-10-10). Sia $\emptyset \neq \mathfrak{E}_0 \subseteq \mathbb{P}(X)$ e per $\alpha \in \text{Ord}$ sia

$$\mathfrak{E}_\alpha := \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \setminus B_n : A_n, B_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta \right) \right\}. \quad (2)$$

Dimostrare allora che $\sigma(\mathfrak{E}_0) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni.

\supseteq Si può dimostrare utilizzando il principio di induzione transfinita, nella forma

$$P(0) \wedge \forall \alpha > 0 (\forall \beta < \alpha P(\beta) \implies P(\alpha)) \implies \forall \alpha P(\alpha)$$

sulla proposizione $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

$\alpha = 0$ Vero per definizione di (σ) -anello generato.

$\alpha > 0$ Per ipotesi induttiva $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\beta \forall \beta < \alpha$, quindi $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta$. Ma $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ è chiuso per differenza e unione numerabile, quindi date due successioni $A_n, B_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{E}_\beta$, abbiamo che $\forall n \in \mathbb{N} C_n = A_n \setminus B_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$, e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathfrak{E}_0)$. Per ipotesi un generico elemento di \mathfrak{E}_α si scrive in questa forma, e dunque $\sigma(\mathfrak{E}_0) \supseteq \mathfrak{E}_\alpha$.

Allora $\sigma(\mathfrak{E}_0)$ contiene ogni \mathfrak{E}_α , e quindi anche la loro unione.

\subseteq Basta dimostrare che $S := \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathfrak{E}_\alpha$ è un anello.

Differenza Siano $A, B \in S$; allora $\exists \alpha_1, \alpha_2 < \omega_1$: $A \in \mathfrak{E}_{\alpha_1}, B \in \mathfrak{E}_{\alpha_2}$, e sia $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. allora per ipotesi $A \setminus B \in \mathfrak{E}_{\alpha+1}$, con $\alpha + 1 < \omega_1$, perché ω_1 non è un successore.

Unione Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di S , $B_n = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$, e sia α_n il più piccolo ordinale per cui $A_n \in \mathfrak{E}_{\alpha_n}$. Dato che $\text{Cof}(\omega_1) > \aleph_0$ $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, e dunque per ipotesi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{E}_\alpha \subseteq S$

Abbiamo anche dimostrato che da $\lambda = \omega_1$ in poi la successione $\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathfrak{E}_\alpha$ è stazionaria. \square

2 Esercizi sugli ideali

Esercizio 4 (2016-10-13). Sia $\emptyset \neq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ anello. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. \mathfrak{N} è un ideale in \mathfrak{A} secondo la definizione usata in Algebra, ovvero

$$\begin{cases} A, B \in \mathfrak{N} \implies A \Delta B \in \mathfrak{N} \\ A \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{N} \end{cases} \quad \begin{matrix} (3a) \\ (3b) \end{matrix}$$

2. \mathfrak{N} è un ideale secondo la definizione usata in teoria degli insiemi, ossia se valgono le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} A \subseteq B \in \mathfrak{N}, A \in \mathfrak{A} \implies A \in \mathfrak{N} \\ A, B \in \mathfrak{N} \implies A \cup B \in \mathfrak{N} \end{cases} \quad \begin{matrix} (4a) \\ (4b) \end{matrix}$$

3. se $A \in \mathfrak{A}$, $B, C \in \mathfrak{N}$ e $A \subseteq B \cup C$ allora $A \in \mathfrak{N}$.

Dimostrazione. Mostriamo la catena di implicazioni $2 \implies 3 \implies 1 \implies 2$.

$2 \implies 3$ Siano A, B, C come nelle ipotesi del Punto 3. Allora per ipotesi vale 4b, e quindi $B \cup C \in \mathfrak{N}$. Usando quindi il fatto che $A \subseteq B \cup C$ e l'ipotesi 4a, si ottiene $A \in \mathfrak{N}$.

$3 \implies 1$ Siano $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{N}$; allora $\mathfrak{A} \ni A \cap B \subseteq B \cup B$ dunque per il Punto 3 $A \cap B \in \mathfrak{N}$.

Siano ora $A, B \in \mathfrak{N}$; allora per definizione di differenza simmetrica $\mathfrak{A} \ni A \Delta B \subseteq A \cup B$ e dunque per il Punto 3 $A \Delta B \in \mathfrak{N}$.

1 \implies 2 Dimostriamo le due condizioni.

4a Se A, B soddisfano le ipotesi, allora $A = A \cap B \in \mathfrak{N}$ perché $B \in \mathfrak{N}$.

4b Se A, B soddisfano le ipotesi, allora $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ è la somma (dell'anello, quindi la differenza simmetrica) di due elementi che per definizione di ideale appartengono a \mathfrak{N} . Quindi per definizione $A \cup B \in \mathfrak{N}$. \square

Esercizio 5 (13/10/2016). Sia \mathfrak{N} un ideale di un anello \mathfrak{A} .

1. Descrivere l'insieme $\text{algebra}(\mathfrak{N})$.

2. Dimostrare che se \mathfrak{N} è un σ -ideale in \mathfrak{A} e se \mathfrak{M} è un σ -anello allora $\text{algebra}(\mathfrak{M})$ è in più una σ -algebra.

Dimostrazione. 1. Sia $\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \cup \hat{\mathfrak{N}}$, dove $\hat{\mathfrak{N}} = \{X \setminus A : A \in \mathfrak{N}\}$. Dimostriamo che \mathfrak{L} è un'algebra:

- dato che $\emptyset \in \mathfrak{N}$, abbiamo per definizione $X = X \setminus \emptyset \in \mathfrak{L}$;
- dimostriamo che \mathfrak{L} è chiuso per differenza e unione. Dati $A, B \in \mathfrak{L}$ abbiamo le seguenti possibilità:
 - $A, B \in \mathfrak{N}$. In questo caso $A \setminus B, A \cup B \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$ perché \mathfrak{N} è un anello;
 - esattamente uno tra A e B appartiene a \mathfrak{N} . Possiamo supporre $A, C := X \setminus B \in \mathfrak{N}$. Allora $A \setminus B = A \cap C \in \mathfrak{N}$; $A \cup B = X \setminus C \cup A = X \setminus (C \setminus A) \in \hat{\mathfrak{N}}$.
 - $C := X \setminus A, D := X \setminus B \in \mathfrak{N}$. Allora $A \cup B = X \setminus (C \cap D) \in \hat{\mathfrak{N}}$; $B \setminus A = (X \setminus C) \setminus (X \setminus D) = D \setminus C \in \mathfrak{N}$

Dato che per definizione $\text{algebra}(\mathfrak{N})$ deve contenere X e quindi tutti gli elementi di $\hat{\mathfrak{N}}$, questo implica che $\text{algebra}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{L}$.

2. Basta dimostrare che \mathfrak{M} è chiuso per unioni numerabili. Sia C_n una successione di elementi di $\text{algebra}(\mathfrak{N})$. Se $\forall n \ C_n \in \mathfrak{N}$ allora $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathfrak{N}$; altrimenti, dato che \mathfrak{N} è un ideale, $\hat{\mathfrak{N}}$ è un filtro, quindi è chiuso per sovrainsieme: sia allora $k : C_k \in \hat{\mathfrak{N}}$; abbiamo che $C \supseteq C_k$, e quindi per la proprietà appena enunciata $C \in \hat{\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{M}$. \square

Nota 1. La dimostrazione del primo punto dell'esercizio precedente non richiede l'ipotesi che \mathfrak{N} sia un ideale. Sfruttando questo fatto è possibile dare una dimostrazione più corta come segue: Sia $\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ l'anello quoziente. Allora l'insieme $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{E}$ è chiaramente un'anello; allora è un anello anche $\emptyset + \mathfrak{N} \cup X + \mathfrak{N} = \mathfrak{L}$.

Esercizio 6 (2016-10-13). Sia $\emptyset \neq \mathfrak{E} \subseteq \mathbb{P}(X)$ e sia $\emptyset \neq A \subseteq X$. Allora $\sigma(\mathfrak{E} \cap A) = \sigma(\mathfrak{E}) \cap A$ avendo definito $\mathfrak{E} \cap A := \{E \cap A : E \in \mathfrak{E}\}$.

Dimostrazione. Assegnato a Gaetano. \square

Esercizio 7 (13/10/2016). Le seguenti due proprietà sono equivalenti per un ideale \mathfrak{N} in un'algebra di insiemi $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$.

1. Essere massimale nella famiglia degli ideali propri.
2. Essere un ideale massimale come nella definizione per famiglie di insiemi, cioè $\forall A \in \mathfrak{A}, A \in \mathfrak{N} \vee \tilde{A} \in \mathfrak{N}$.

Dimostrazione. \Rightarrow Sappiamo per un teorema di algebra che $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ è un campo. L'elemento unitario di \mathfrak{A} è X , e quindi la classe $X + \mathfrak{N}$ è l'unità del campo. Questo significa che

$$\forall A \in \mathfrak{A}, A \notin \mathfrak{N} \exists B: A + \mathfrak{N} \cdot B + \mathfrak{N} = X + \mathfrak{N}$$

cioè

$$A \cap B \in X \Delta \mathfrak{N} := \{D \in \mathfrak{A}: \exists N \in \mathfrak{N}, D = X \setminus N\}$$

e quindi A coincide con X a meno di un elemento dell'ideale \mathfrak{N} , ossia $\tilde{A} \in \mathfrak{N}$.

\Leftarrow Supponiamo per assurdo che non valga il Punto 1: allora esiste $A \notin \mathfrak{N}$ tale che l'ideale \mathfrak{N}' generato da $\mathfrak{N} \cup \{A\}$ è proprio. Per il Punto 2 $\tilde{A} \in \mathfrak{N}$ e quindi, dato che un ideale è chiuso per unione $X = A \cup \tilde{A} \in \mathfrak{N}'$, e poiché gli ideali sono chiusi per contenimento $\mathfrak{N}' = \mathfrak{A}$, assurdo. \square

Nota 2. Il campo quoziente dell'esercizio precedente è \mathbb{F}_2 , infatti ogni elemento non in \mathfrak{N} è nella classe di X .

Esercizio 8 (13/10/2016). Sia $\emptyset \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ algebra in $\mathbb{P}(X)$ con $X \notin \mathfrak{N}$. Definiamo la funzione $\nu(\cdot)$ ponendo

1.

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ +\infty & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che ν è finitamente additiva se e solo se \mathfrak{N} è un ideale.

2. Definiamo ora

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A \in \mathfrak{N} \\ 1 & \text{se } A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Mostrare che ν è finitamente additiva se e solo se \mathfrak{N} è un ideale massimale in \mathfrak{A} .

Dimostrazione. 1. Sappiamo che per un anello l'additività e la finita additività coincidono. Allora ν è finitamente additiva se e solo se $(\forall A, B \in \mathfrak{A} \nu(A \sqcup B) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N} \wedge B \in \mathfrak{N})$, (dato che $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N}$), e quindi se e solo se $A \sqcup B \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow A \in \mathfrak{N} \wedge B \in \mathfrak{N}$.

Questo equivale a $B \subseteq A \in \mathfrak{N} \Rightarrow B \in \mathfrak{N}$ (perché $B \sqcup (A \setminus B) \in \mathfrak{N}$) e $A, B \in \mathfrak{N} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{N}$ (questa è l'unione disgiunta di A e $B \setminus A$, che usando la condizione appena trovata sono elementi di \mathfrak{N} ; viceversa la condizione sull'unione implica chiaramente quella sull'unione disgiunta).

2. Sappiamo già che gli insiemi di misura nulla formano un ideale. Resta quindi da dimostrare che ν è finitamente additiva se e solo se questo ideale è massimale.

\Rightarrow Supponiamo che la misura sia finitamente additiva e per assurdo \mathfrak{N} non sia massimale. Allora $\exists A \in \mathfrak{A}: A \notin \mathfrak{N}, \tilde{A} \notin \mathfrak{N}$. Allora $\nu(X) = \nu(A \sqcup \tilde{A}) = \nu(A) + \nu(\tilde{A}) = 2$, assurdo.

\Leftarrow Sia ora \mathfrak{N} massimale, e consideriamo $A, B \in \mathfrak{A}$ disgiunti. Ci sono tre possibilità:

- Se $A, B \in \mathfrak{N}$, $\nu(A) = \nu(B) = \nu(A \cup B) = 0$ e la finita additività vale.
- Se esattamente uno tra A e B è un elemento di \mathfrak{N} , $A \cup B \notin \mathfrak{N}$, perché l'ideale è chiuso per sottoinsiemi. In questo caso $\nu(A) + \nu(B) = 1 + 0 = \nu(A \cup B)$ e la finita additività vale.

- Se $A, B \notin \mathfrak{N}$, $\nu(A) + \nu(B) = 2 > \nu(A \cup B)$. Dimostriamo allora per assurdo che questo caso non può verificarsi. Per la massimalità dell'ideale $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathfrak{N}$ e inoltre $\mathfrak{N} \ni \tilde{A} \cup \tilde{B} = \widetilde{A \cap B} = \tilde{\emptyset} = X$, assurdo perché per definizione gli ideali massimali sono propri. \square

3 Integrali

Esercizio 9 (28/10/2017). Sia f μ -misurabile e positiva, sia

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \nu(A) := \int f \chi_A \, d\mu$$

Dimostrare che $\nu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura σ -additiva.

Dimostrazione. Dimostriamo intanto l'additività: sia $C = A \sqcup B$; allora $f \chi_C = f \chi_A + f \chi_B$ e quindi $\nu(C) = \int f \chi_C \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu + \int f \chi_B \, d\mu = \nu(A) + \nu(B)$ per la linearità dell'integrale se tutti i termini sono finiti, oppure perché per $0 \leq c \leq +\infty$, $c + \infty = +\infty$.

Sia ora $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ una successione di insiemi disgiunti, e $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Sia $B_n = \bigcup_{j \leq n} A_j$. Per la finita additività sappiamo che

$$\int f \chi_{B_n} \, d\mu = \sum_{j \leq n} \int f \chi_{A_j} \, d\mu$$

inoltre $\lim_{n \rightarrow +\infty} f \chi_{B_n} = f \chi_A$ ¹, quindi dal lemma di Fatou

$$\int f \chi_A \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f \chi_{B_n} \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \leq n} \int f \chi_{A_j} \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f \chi_{A_n} \, d\mu$$

Infine, dato che $B_n \uparrow A$, $f \chi_{B_n} \leq f \chi_A$, e quindi per la monotonia dell'integrale $\int f \chi_A \, d\mu \geq \int f \chi_{B_n} \, d\mu$ e

$$\int f \chi_A \, d\mu \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f \chi_{B_n} \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f \chi_{B_n} \, d\mu$$

Questa disuguaglianza, combinata con quella che deriva dal lemma di Fatou, ci dà la tesi. \square

Esercizio 10 (3/11/2016). Trovare dei controesempi alle seguenti:

1. Il lemma di Fatou enunciato con \limsup al posto del \liminf
2. Il lemma di Fatou enunciato con l'uguaglianza.

Dimostrazione. Usiamo in entrambi i casi la misura di Lebesgue su \mathbb{R} .

- Sia $f_{2n} = \chi_{[0, 1/2[}$, $f_{2n+1} = \chi_{[1/2, 1]}$. Allora $\int f_{2n} \, d\mu = \int f_{2n+1} \, d\mu = 1/2$, quindi $\limsup \int f_n \, d\mu = 1/2$, mentre $\limsup f_n = \chi_{[0, 1]}$ e quindi $\int \limsup f_n \, d\mu = 1$.
- Sia $f_n = n \chi_{[0, 1/n]}$. Allora $\int f_n \, d\mu = 1$, e quindi $\liminf \int f_n \, d\mu = 1$; inoltre $\liminf f_n = 0$ q.o. e quindi $\int \liminf f_n \, d\mu = 0$. \square

¹questo limite e i prossimi esistono perché consideriamo successioni crescenti

4 Metriche e misure

Esercizio 11 (2016-10-14). Sia $\mathfrak{P} := \{[a, b[: -\infty < a \leq b < +\infty\}$, sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e sia $\mu_g([a, b]) := g(b) - g(a)$.

1. Dimostrare che μ_g è una misura finitamente additiva.
2. Dimostrare che μ_g σ -additiva se e solo se $\forall x \in \mathbb{R} \ g(x - \circ) = g(x)$.²

Dimostrazione. 1. Mostriamo che se l'unione di un numero finito di elementi di \mathfrak{P} appartiene a \mathfrak{P} , allora la misura dell'unione è la somma delle misure.

Sia quindi $[a, b[= \bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k[$; a meno di un riordinamento³ possiamo supporre che $b_k = a_{k-1} \ \forall \ 2 \leq k \leq n$; $a_1 = a =: b_0, b_n = b$. Allora

$$\mu_g([a, b]) = g(b_n) - g(b_0) = \sum_{k=1}^n (g(b_k) - g(b_{k-1})) = \sum_{k=1}^n (g(b_k) - g(a_k)) = \sum_{k=1}^n \mu_g([a_k, b_k]).$$

che è quanto dovevamo dimostrare.

2. Dimostriamo le due implicazioni.

\Rightarrow Supponiamo per assurdo che esista $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \rightarrow x^-$ e $g(x - \circ) < g(x)$; allora $\Delta_n = [x, x_n] \downarrow \emptyset$, ma $\mu_g(\Delta_n) \rightarrow g(x) - g(x - \circ) > 0$, assurdo.

\Leftarrow Sia $\mathfrak{A} = \text{anello}(\mathfrak{P})$; sappiamo che μ_g è finitamente additiva, quindi resta solo da dimostrare che μ_g è regolare (cioè $\forall A \in \mathfrak{A}, \forall \varepsilon > 0$ esistono un compatto $K \subseteq A, B \in \mathfrak{A}$ tali che $A \setminus K \subseteq B, \mu_g(B) < \varepsilon$).

Siano allora $\varepsilon > 0, \mathfrak{A} \ni A = \bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k[$, con $[a_k, b_k] \in \mathfrak{P}$; dall'ipotesi che g è continua a sinistra sappiamo che $\forall x \exists \delta(x): g(x) - g(x - \delta) < \frac{\varepsilon}{n}$.

Poniamo allora $\delta_j = \delta(x_j), K_j = [a_j, b_j - \delta_j], B_j = [b_j - \delta_j, b_j[$. Siano inoltre $B = \bigcup B_j, K = \bigcup K_j$

Allora $\mu_g(B_j) = g(b_j) - g(b_j - \delta_j) < \frac{\varepsilon}{n}$, quindi $\mu_g(B) < \varepsilon$; inoltre K è compatto e dunque B e K sono come nella definizione di misura regolare. \square

Esercizio 12 (2016-10-20). Sia \mathfrak{A} un anello, $\eta: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ una submisura. Sia come al solito $\mathfrak{N}(\eta) = \{A \in \mathfrak{A}: \eta(A) = 0\}$. Dimostrare che

1. Se $\mathfrak{N}(\eta)$ è un ideale di \mathfrak{A} e η è una σ -submisura, allora \mathfrak{N} è un σ -ideale.
2. Se $A, B \in \mathfrak{A}$ e $A \Delta B \in \mathfrak{N}(\eta)$, allora $\eta(A) = \eta(A \cap B) = \eta(B)$.
3. Se $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}(\eta)$, allora $\eta(A) = \eta(A \cup N) = \eta(A \Delta N) = \eta(A \setminus N)$

Dimostrazione. 1. Basta dimostrare che \mathfrak{N} è chiuso per unioni numerabili.

Sia quindi $\mathfrak{A} \ni A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, con $A_n \in \mathfrak{N}$. Allora $\eta(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \eta(A_n) = 0$.

2. Per subaddittività e dato che $A \subseteq A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$ si ottiene $\eta(A) \leq \eta(A \cap B) + \eta(A \Delta B) = \eta(A \cap B)$; per monotonia $\eta(A) \geq \eta(A \cap B)$, e dunque $\eta(A) = \eta(A \cap B)$. La seconda uguaglianza è analoga. \square

²Con $g(x - \circ)$ indichiamo $\lim_{y \rightarrow x^-} g(y)$

³e forse di intervalli vuoti?

Esercizio 13 (2016-10-20). Sia $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ un σ -anello, $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ una misura σ -additiva. Sia $\mathfrak{N} := \{N: \exists A \in \mathfrak{A}, N \subseteq A, \mu(A) = 0\}$.

1. Dimostrare che \mathfrak{N} è un σ -ideale in $\mathbb{P}(X)$.

2. Sia $\mathfrak{L} := \text{anello}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N})$. Dimostrare che $\mathfrak{L} = \{A \Delta N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\} = \{A \sqcup N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$

Dimostrazione. 1. Sia $\hat{N} \subseteq N \in \mathfrak{N}$; per ipotesi $\exists A \in \mathfrak{A}: N \subseteq A, \mu(A) = 0$, ma allora anche $\hat{N} \subseteq A$, e quindi $\hat{N} \in \mathfrak{N}$.

Sia ora $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di \mathfrak{N} ; per ipotesi $\forall n \exists A_n \in \mathfrak{A}: \mu(A_n) = 0, N_n \subseteq A_n$; allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e per la σ -additività di μ , $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$ e quindi per definizione $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{N}$.

2. Poniamo

$$\mathfrak{U} := \{A \Delta N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

$$\mathfrak{T} := \{A \sqcup N: A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$$

Mostriamo che $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$ Siano $A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$.

\subseteq Consideriamo $A \Delta N = (A \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$. Per ipotesi $\exists C \in \mathfrak{A}$ di misura nulla tale che $N \subseteq C$. Sia $B = A \cap C$; allora

$$B \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0;$$

inoltre

$$A \setminus N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N).$$

Allora abbiamo

$$A \Delta N = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus N) \sqcup (N \setminus A)$$

dove $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ e $(B \setminus N) \sqcup (N \setminus A) \in \mathfrak{N}$, e dunque $A \Delta N \in \mathfrak{T}$.

\supseteq Sia ora $A \sqcup N = \emptyset$. Allora $A \sqcup N = A \Delta N$ e la tesi è provata.

Mostriamo ora $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$.

\supseteq È vero perché per definizione ogni anello è chiuso per differenza simmetrica.

\subseteq Basta mostrare che \mathfrak{U} è un anello e che contiene $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$; $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$ perché ogni elemento A di \mathfrak{A} si scrive come $A \Delta \emptyset$, e analogamente $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$ Perché ogni elemento N di \mathfrak{N} si scrive come $N \Delta \emptyset$.

Per provare che \mathfrak{U} è un anello mostriamo che \mathfrak{T} è chiuso per unione disgiunta e differenza.

\sqcup Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$ disgiunti; allora $(A \sqcup N) \sqcup (A_1 \sqcup N_1) = (A \sqcup A_1) \sqcup (N \sqcup N_1) \in \mathfrak{U}$, perché l'unione è associativa e commutativa.

\setminus Mostriamo la differenza di due elementi di $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$ appartiene a \mathfrak{U} . Siano $A \sqcup N, A_1 \sqcup N_1 \in \mathfrak{U}$; allora $(A \sqcup N) \setminus (A_1 \sqcup N_1) = (A \setminus A_1 \setminus N_1) \sqcup (N \setminus A_1 \setminus N_1)$.

Ma il secondo insieme dell'unione è un sottoinsieme di N , e quindi appartiene all'ideale $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}$.

Inoltre sia $N_1 \subseteq B \in \mathfrak{A}, \mu(B) = 0$ contenuto in $A \setminus A_1$. $A \setminus A_1 \setminus N_1 = A \setminus A_1 \setminus B \sqcup B \setminus N_1$ dove e quindi il primo insieme dell'unione appartiene ad \mathfrak{U} .

Dato che abbiamo già dimostrato che \mathfrak{U} è chiuso per unioni disgiunte, è chiuso anche per differenza. \square

Esercizio 14 (2016-10-27). Definiamo $\bar{\mu}(A\Delta N) := \mu(A) \forall A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}$.

1. Dimostrare che $\bar{\mu}$ è ben definita, σ -additiva, completa e che $\bar{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$.
2. Dimostrare che $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\bar{\mu})$.

Nota 3. La misura $\bar{\mu}$ così definita si dice *completamento* di μ .

Dimostrazione. 1. Definiamo $\mathfrak{U} := \{A\Delta N : A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}\}$. Gli ultimi due punti sono ovvi prendendo $A = \emptyset$ e $N = \emptyset$ rispettivamente. Dimostriamo quindi i primi due.

- Dimostriamo che $\bar{\mu}$ è ben definita. Sia $A_1\Delta N_1 = A_2\Delta N_2$, con $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}; N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$. Allora $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A} : \mu(B_1) = \mu(B_2) = 0, N_1 \subseteq B_1, N_2 \subseteq B_2$. Quindi $A_1 \subseteq A_2 \cup B_1 \cup B_2$ e per l'additività della misura $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$; allo stesso modo anche $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ e quindi $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.
- Per dimostrare la σ -additività utilizziamo l'esercizio precedente: dati A, N come nelle ipotesi, $\exists \bar{A} \in \mathfrak{A}; \bar{N} \in \mathfrak{N} : A\Delta N = \bar{A} \sqcup \bar{N}$. Inoltre, per la buona definizione di $\bar{\mu}$, e poiché $\bar{A} \sqcup \bar{N} = \bar{A}\Delta \bar{N}$, abbiamo che $\mu(A) = \mu(\bar{A})$. Sia quindi $(A_k\Delta N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi disgiunti in \mathfrak{U} . Dato che \mathfrak{N} è un σ -anello $\exists \hat{A} : \mu(\hat{A}) = 0, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subseteq \hat{A}$. Inoltre detti $\hat{A}_k := A_k \setminus \hat{A}$, si ha $\mu(A_k) = \mu(\hat{A}_k)$.

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k\Delta N_k) \right) &= \bar{\mu} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\bar{A}_k \sqcup \bar{N}_k) \right) = \\ &= \bar{\mu} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\hat{A}_k \sqcup (\bar{N}_k \cup \hat{A})) \right) = \\ &= \bar{\mu} \left(\hat{A} \sqcup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \right) = \\ &= \mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\hat{A}_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_k\Delta N_k) \end{aligned}$$

che è la σ -additività.

2. Gli elementi di \mathfrak{N} hanno tutti misura nulla perché sottoinsiemi di insiemi di misura nulla. Viceversa, sia A un insieme di misura nulla. Allora ovviamente $A \subseteq A$ e $\mu(A) = 0$, quindi per definizione $A \in \mathfrak{N}$. \square

Esercizio 15 (2016-10-24). Sia \mathfrak{A} anello. Sia $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ una misura σ -additiva. Definiamo come al solito μ^* misura esterna e \mathfrak{M} l'insieme dei misurabili. Già sappiamo che $\mu^*_{|\mathfrak{M}} =: \bar{\mu}$ è una misura σ -additiva.

Sia ora \mathfrak{L} anello con $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$, sia $\nu : \mathfrak{L} \rightarrow [0, +\infty]$ misura σ -additiva con $\nu|_{\mathfrak{A}} = \mu$. Dimostrare che allora $\nu = \bar{\nu}|_{\mathfrak{L}}$.

Esercizio 16 (2016-10-14). Sia \mathfrak{A} un'algebra, e $S(\mathfrak{A})$ l'insieme delle funzione semplici su \mathfrak{A} . Sia $E = (S(\mathfrak{A}), \|\cdot\|_s)$, $T \in E' = \{\xi \in E^* \text{ continue}\}$. Sappiamo che $\exists \mu : T(f) = \int f d\mu$. Calcolare la norma $\|T\|$ operatoriale in funzione della misura.

Dimostrazione.

Esercizio 17 (2016-10-14). Sia \mathfrak{A} un anello, $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow X$. Dire quali delle seguenti sono equivalenti, nei due casi $X = \mathbb{R}$ e $X = [0, +\infty]$:

1. μ è σ -additiva
2. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}, A_n \uparrow A \in \mathfrak{A}$ si ha $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
3. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}, A_n \downarrow A \in \mathfrak{A}$ si ha $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
4. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}, A_n \downarrow \emptyset$ si ha $\mu(A_n) \rightarrow 0$

Dimostrazione.

5 Misure segnate

Esercizio 18. Sia P, N una decomposizione di Hahn, $P_0 \in \mathfrak{A}$, $N_0 := X \setminus P_0$.

Allora P_0, N_0 è una decomposizione di Hahn se e solo se $P \Delta P_0 \in \mathfrak{N}(\mu)$ se e solo se $N \Delta N_0 \in \mathfrak{N}(\mu)$, dove $\mathfrak{N}(\mu) := \{A \in \mathfrak{A}: \forall B \in \mathfrak{A}, B \subseteq A \mu(B) = 0\}$.

Dimostrazione.

Esercizio 19.

$$\begin{aligned}\mu^+(A) &= \sup\{\mu(M): M \in \mathfrak{A}, M \subseteq A\} \\ \mu^-(A) &= \inf\{\mu(M): M \in \mathfrak{A}, M \subseteq A\} \\ |\mu(A)| &= \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\mu|(A_i): n \in \mathbb{N}, \mathfrak{A} \ni A_i \text{ disgiunti}, A = \bigcup_{i=1}^n A_i\right\} \\ \mathfrak{N}(\mu) &= \mathfrak{N}(|\mu|) = \mathfrak{N}(\mu^+) \cap \mathfrak{N}(\mu^-)\end{aligned}$$

(quindi $\mathfrak{N}(\mu)$ è un σ -ideale in \mathfrak{A}).

Se $\nu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura σ -additiva, $f \in \mathcal{L}_1(\nu)$, $\mu(A) := \int_A f d\nu$, allora $\mu^+(A) = \int_A f^+ d\nu$, $\mu^-(A) = \int_A f^- d\nu$, $|(\mu)|(A) = \int_A |f| d\nu$.

Dimostrazione.

Esercizio 20 (Controesempio a Radon-Nikodym senza l'ipotesi di σ -finitezza). Sia α la misura di Lebesgue su $\text{Bor}([0, 1])$, μ la counting measure su $\text{Bor}([0, 1])$.

Dimostrare che $\nexists \lambda, \nu: \text{Bor}([0, 1]) \rightarrow [0, +\infty]$ misure σ -additive con $\mu = \lambda + \nu$, $\lambda \ll \alpha$, $\nu \perp \alpha$.

Dimostrazione. Siano per assurdo μ, ν due misure che soddisfano le richieste. Dimostriamo allora che $\mathfrak{N}(\nu) = \emptyset$.

Per $x \in [0, 1]$ abbiamo $1 = \mu(\{x\}) = \lambda(\{x\}) + \nu(\{x\})$, da cui $\nu(\{x\}) = 1$ dato che $\{x\} \in \mathfrak{N}(\alpha) \subseteq \mathfrak{N}(\lambda)$. Sia allora $\emptyset \neq B \in \text{Bor}([0, 1])$; per monotonia della misura, $\nu(B) \geq \nu(\{x\})$ per $x \in B$, che esiste per ipotesi.

Per definizione di singolarità tra misure $\exists N \in \mathfrak{N}(\nu)$, $A \in \mathfrak{N}(\alpha)$: $N \cup A = [0, 1]$. Quindi deve essere $A = [0, 1]$, che però non ha misura di Lebesgue nulla, e quindi non appartiene a $\mathfrak{N}(\alpha)$, assurdo. \square