

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

IL PRINCIPIO DI FERMAT E LE BASI DELL'OTTICA GEOMETRICA

Corso di laurea in Fisica Generale



Candidato: Luca Martinoia

Matricola: 3630563

Anno accademico 2013/2014

29/10/2014

1 Il principio di Fermat

Il principio di Fermat (Pierre de Fermat, 1601-1665) è il principio alla base dell'ottica geometrica, grazie a questo principio (che sorge da pure osservazioni sperimentali) è infatti possibile impostare semplici problemi di ottica senza dover partire da nozioni più sofisticate come le equazioni di Maxwell o la teoria delle onde.

In una semplice formulazione euristica il principio di Fermat afferma:

Principio di Fermat. *Un raggio di luce che viaggia da un punto A ad un punto B percorre la traiettoria che necessita del minor tempo per essere attraversata.*

Il principio di Fermat definisce il concetto di raggio luminoso e permette di calcolarne la traiettoria in numerosi casi.

Volendo convertire in formule l'enunciato del principio di Fermat si trova che il tempo T che necessita un raggio luminoso per andare dal punto A al punto B è dato da

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt = \frac{1}{c} \int_{t_A}^{t_B} \frac{c}{v} \frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_A^B n(s) ds$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto, $v = \frac{ds}{dt}$ è la velocità della luce nel mezzo di propagazione e $n = c/v$ è l'indice di rifrazione del mezzo e s è l'ascissa curvilinea.

E' importante osservare che, data una curva, è sempre possibile ricondursi ad una parametrizzazione con l'ascissa curvilinea.

Dimostrazione. Nota una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si definisce ascissa curvilinea la particolare parametrizzazione ottenuta fissando l'estremo inferiore a , in modo tale che

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

dipenda solo dal parametro t , in cui $s(t)$ rappresenta la lunghezza dell'arco di curva da a a t . Dato che $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ si può invertire $s(t)$ e ottenere così $t = t(s)$ ottenendo quindi $\alpha(t(s)) = \beta(s)$. Inoltre, con la parametrizzazione mostrata, il vettore tangente è sempre unitario

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t)\| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \|\alpha'(t)\| \frac{1}{|s'(t)|} = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = 1 \quad \square$$

Si può quindi definire il *cammino ottico* nel modo seguente:

Definizione 1. *Il cammino ottico di una traiettoria $\vec{r}(s)$ seguita da un raggio luminoso da un punto A ad un punto B si definisce come*

$$A \equiv \int_A^B n(\vec{r}(s)) ds = \int_A^B n(\vec{r}(s)) \sqrt{\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}} ds \quad (1)$$

dove $ds^2 = d\vec{r}(s) \cdot d\vec{r}(s)$ è l'elemento di lunghezza dell'arco ds lungo $\vec{r}(s)$ per quel punto. L'ultima uguaglianza permessa poichè, parametrizzata sull'ascissa curvilinea, la curva ha vettore tangente unitario. La curva $\vec{r}(s)$ è detta *brachistocrona*, cioè curva di tempo minimo.

Quindi si ottiene la banale relazione $T = cA$, che permette di convertire il problema di minimo per il funzionale T nella ricerca del minimo del funzionale A (che dipende solo da parametri puramente geometrici).

E' possibile dunque enunciare il principio di Fermat in una formulazione più moderna, che si collega in modo semplice e naturale alla teoria dei principi variazionali.

Principio di Fermat. *La traiettoria $\vec{r}(s)$ seguita da un raggio luminoso da un punto A ad un punto B è tale da lasciare il cammino ottico stazionario rispetto a deformazioni differenziabili ad estremi fissi ad un parametro η . In altre parole $\vec{r}(s)$ è la traiettoria effettivamente seguita dal raggio luminoso se soddisfa*

$$\delta A = 0 \quad \text{dove} \quad \delta A = \frac{d}{d\eta} A(\eta) = \frac{d}{d\eta} \left[\int_A^B n(\vec{r}(s, \eta)) ds \right]_{\eta=0} \quad (2)$$

con le seguenti condizioni su $\vec{r}(s, \eta)$ e sulla deformazione infinitesima $\delta\vec{r}(s) = \frac{d\vec{r}}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$

$$\vec{r}(s, 0) = \vec{r}(s) \quad \vec{r}(s_A, \eta) = \vec{r}(s_A) \quad \vec{r}(s_B, \eta) = \vec{r}(s_B) \quad \delta\vec{r}(s_A) = \delta\vec{r}(s_B) = 0$$

E' ragionevole a questo punto applicare il principio di Hamilton al funzionale A , per il quale quindi si osserva che $n(\vec{r}(s)) \sqrt{\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}} = L(\vec{r}(s), \dot{\vec{r}}(s))$ è la Lagrangiana ottica per il sistema in esame.

Il principio di Hamilton afferma infatti

Principio di Hamilton. *Dati due punti A e B nello spazio-tempo delle configurazioni di un sistema lagrangiano, la curva γ effettivamente seguita dal sistema per spostarsi tra i due punti medesimi è quella che rende stazionario l'integrale di azione $I = \int_{t_0}^{t_1} L dt$.*

Nel caso in esame in realtà l'integrale di azione non dipende dal tempo e l'energia risulta costante; è quindi riconducibile alla forma più semplice del Principio di Maupertuis, per il quale l'integrale d'azione si riduce ad essere

$$I = \int_{\gamma} \vec{p} \cdot d\vec{r}$$

La Lagrangiana ottica soddisfa la proprietà di omogeneità nelle variabili $\dot{\vec{r}}$, cioè $L(\vec{r}, \lambda \dot{\vec{r}}) = \lambda L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$. In questo caso quindi la Lagrangiana soddisfa la relazione¹

$$\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot d\vec{r} = \vec{p} \cdot d\vec{r} = L ds$$

Da cui si trova quindi che

$$A = \int_{\gamma} \vec{p} \cdot d\vec{r} = \int n(\vec{r}(s)) ds \quad (3)$$

In particolare si può esplicitare il principio di Fermat in coordinate cartesiane. Se si scrive quindi il cammino ottico usando l'asse z come variabile indipendente (cioè $x(z), y(z)$) si ottiene

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2} = [1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} dz = \frac{1}{\gamma} dz$$

con la notazione $\dot{x} = dx/dz$, $\dot{y} = dy/dz$, $\gamma = dz/ds$. In questo sistema l'azione ottica dal principio di Hamilton risulta essere della forma

$$A = \int_{z_A}^{z_B} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) dz \quad (4)$$

1. Se $L(\vec{r}, \lambda \dot{\vec{r}}) = \lambda L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ si può derivare rispetto a λ entrambi i membri, ottenendo così $\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = L$.

Dimostrazione. Si può quindi mostrare come questa interpretazione del principio di Fermat conduce alle equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana ottica, infatti (indicando con un indice basso η le funzioni coordinate della deformazione)

$$\delta A = \frac{d}{d\eta} \left[\int_{z_A}^{z_B} L(x_\eta, y_\eta, \dot{x}_\eta, \dot{y}_\eta, z) dz \right]_{\eta=0}$$

$$\delta A = \left[\int_{z_A}^{z_B} \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial y_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial^2 x_\eta}{\partial z \partial \eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y_\eta}{\partial z \partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad \text{se } \dot{x}_\eta = \frac{dx_\eta}{dz} \text{ e } \dot{y}_\eta = \frac{dy_\eta}{dz}$$

si definiscono $\delta x = \frac{\partial x_\eta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$ e $\delta y = \frac{\partial y_\eta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$, ricordando che $\delta x(z_A) = \delta x(z_B) = \delta y(z_A) = \delta y(z_B) = 0$

$$\delta A = \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dz$$

$$\text{per parti } \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dz = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{z_A}^{z_B} - \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) dz = - \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) dz$$

$$\delta A = \int_{z_A}^{z_B} \delta x \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \delta y \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) dz = 0$$

Questo integrale, dovendo fare zero per ogni possibile deformazione $\delta x, \delta y$ ad estremi fissi, produce così le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema in esame.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \end{cases} \quad \square$$

Il procedimento di cui sopra è ovviamente generalizzabile anche a sistemi non cartesiani, utilizzando quindi come Lagrangiana la Lagrangiana ottica, si trova

$$\delta A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0$$

Inserendo nell'equazione di Eulero-Lagrange $L(\vec{r}(s), \dot{\vec{r}}(s)) = n(\vec{r}(s)) |\dot{\vec{r}}(s)|$ si ottiene

$$\frac{\partial n}{\partial r_i} |\dot{\vec{r}}| = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{r}_i}{|\dot{\vec{r}}|} n \right)$$

ricordando che, parametrizzando rispetto all'ascissa curvilinea, $|\dot{\vec{r}}| = 1$, si ricava così l'equazione eiconale dei raggi

$$\nabla n(\vec{r}) = \frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (5)$$

Risolvendo questa equazione differenziale nei vari casi si ottengono le traiettorie percorse dai raggi luminosi.

In particolare, in coordinate cartesiane si trova (definendo il vettore $\vec{q} = (x(z), y(z))$ e ricordando che $ds = \frac{1}{\gamma} dz$)

$$\gamma \frac{d}{dz} \left(n(\vec{q}, z) \gamma \frac{d\vec{q}}{dz} \right) = \frac{\partial n}{\partial \vec{q}} \quad (6)$$

1.1 Metodi equivalenti

E' possibile arrivare all'equazione eiconale dei raggi in diversi modi, anche se nell'elaborato tutto il procedimento si sviluppa intorno all'ipotesi iniziale del principio di Fermat.

Una trattazione analoga è infatti fornita dalla propagazione delle onde di Huygens (*Huygens' wavelets*; Christiaan Huygens, 1629-1695), secondo il quale un certo fronte d'onda $S(\vec{r})$ si muove lungo il raggio vettore $\vec{n}(\vec{r}) = \nabla S = n\hat{s}$ così che la variazione differenziale su una distanza $d\vec{r}$ lungo il raggio risulti data da

$$\nabla S(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{n}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = n(\vec{r}) ds \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla S(\vec{r}) = n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (7)$$

Dalla seconda equazione infatti (*equazione dell'eiconale*), osservando preliminarmente che

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla = \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla$$

si trova, derivando rispetto al parametro s

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla (\nabla S) = \frac{1}{2n} \nabla |\nabla S|^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \nabla n$$

dove si utilizza il modulo dell'equazione di Huygens nel penultimo passaggio, ricordando che $|\dot{\vec{r}}| = 1$.

Dall'equazione (3) e (7) risulta evidente che il principio di Fermat altro non è che l'applicazione del principio di Maupertuis all'eiconale.

In alternativa, con un procedimento introdotto più di recente, si ricava l'equazione di Huygens (e quindi l'equazione dei raggi), partendo direttamente dalle equazioni di Maxwell, cercando come soluzioni al sistema onde *pseudo-semplfici* del tipo

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, \omega) &= \vec{E}_0(\vec{r}, \omega) e^{-ik_0 S(\vec{r}, \omega)} \\ \vec{B}(\vec{r}, \omega) &= \vec{B}_0(\vec{r}, \omega) e^{-ik_0 S(\vec{r}, \omega)} \end{aligned}$$

nel caso in cui le ampiezze siano funzioni deboli della posizione. Inserendo queste soluzioni nelle equazioni di Maxwell e sfruttando l'*approssimazione ottico-geometrica* si ricava l'equazione eiconale per i raggi. Da queste equazioni inoltre si può intuire la provenienza di $S(\vec{r})$ come equazione di un piano che rappresenta il fronte d'onda, esso è infatti l'argomento della funzione esponenziale (eiconale).

1.2 Applicazioni

E' interessante ora provare ad utilizzare l'equazione dei raggi per risolvere dei semplici problemi.

1.2.1 Miraggi

L'aria in prossimità di una superficie calda (come la Terra) si scalda e diventa meno densa con il diminuire della distanza dalla superficie. Connesso con questo fatto si verifica anche una variazione dell'indice di rifrazione che, in prima approssimazione, possiamo considerari vari linearmente con l'altezza dal suolo con una dipendenza del tipo

$$n(x) = n_0(1 + \kappa x)$$

dove ovviamente x è l'altezza dalla superficie, n_0 l'indice di rifrazione sulla superficie e κ una costante positiva che determina l'incremento di $n(x)$. Se si riduce il problema a due soli assi ($n(x)$ dipende solo da un parametro, quindi la soluzione dipende solo dalla distanza sul piano $y-z$, non dai singoli valori di y e z) l'equazione dei raggi (6), parametrizzata sull'asse z diventa del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1+\kappa x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \dot{x} \right) = \kappa$$

Se il raggio parte quasi orizzontale rispetto alla superficie si ha che $\dot{x}^2 \ll 1$, inoltre si ipotizza che l'indice di rifrazione sia poco variabile, cioè $\kappa x \ll 1$, ottenendo quindi

$$\frac{d^2 x}{dz^2} \approx \kappa$$

La traiettoria, parametrizzata su z , risulta quindi essere

$$\vec{r}(z) = x(z)\hat{x} + z\hat{z} = \left(\frac{\kappa}{2}z^2 + \tan \theta_0 z + x_0 \right) \hat{x} + z \hat{z}$$

Se le condizioni iniziali erano tali da avere un raggio che, per $z = 0$, si trovava ad altezza x_0 con angolo θ_0 rispetto all'orizzontale.

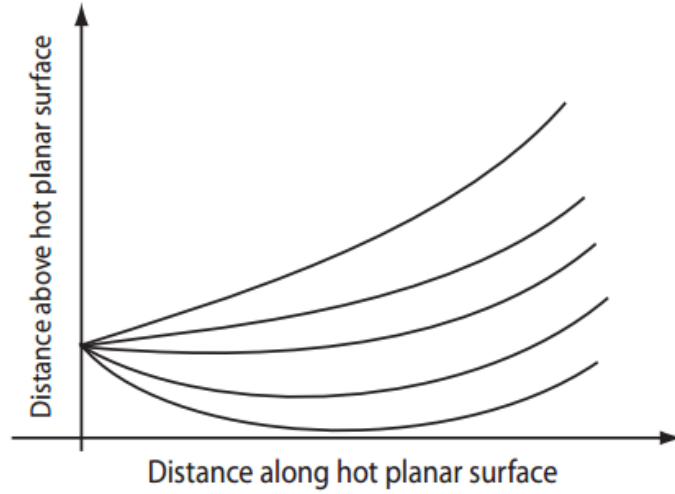


Figura 1. Rappresentazione grafica della funzione $x(z)$ che, in prima approssimazione, mostra come i raggi luminosi tendano a curvare in prossimità di una superficie calda, producendo l'effetto del *miraggio*

1.2.2 Materiale omogeneo

Un altro esempio notevole è quello dei materiali omogenei, cioè con indice di rifrazione costante. Non è particolarmente interessante dal punto di vista matematico, ma è cruciale nelle approssimazioni dell'ottica geometrica, secondo la quale i raggi si propagano in linee rette. Si osserva infatti che, se $n(\vec{r}) = \text{cost}$ la traiettoria è appunto una retta

$$\nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds} = \text{cost} \Rightarrow \vec{r} = s\vec{a} + \vec{b} \quad \text{con } \vec{a}, \vec{b} \text{ vettori costanti}$$

2 Le basi dell'ottica geometrica

L'*ottica geometrica* è quella particolare branca dell'ottica secondo la quale la luce si propaga seguendo raggi rettilinei. In generale l'ottica geometrica è una teoria tutt'altro che completa ed infatti è in grado di spiegare solo i principi più semplici come riflessione, rifrazione e gli effetti delle lenti. Nei casi più complessi, ovviamente, per descrivere correttamente i fenomeni ottici andrebbe sviluppata la teoria ondulatoria dalle equazioni di Maxwell, necessaria per esempio nella formulazione dei fenomeni di interferenza e diffrazione.

2.1 Limite ottico-geometrico

I due modelli, quello ondulatorio e quello geometrico, devono fornire gli stessi risultati a patto di agire sotto le condizioni imposte dal così detto limite *ottico-geometrico*. Il limite ottico-geometrico è soddisfatto quando la lunghezza d'onda della luce è molto minore della lunghezza caratteristica del sistema ($\frac{\lambda}{L} \ll 1$) così che l'onda risulti costante per tutto il sistema in esame.

2.2 Legge della rifrazione (legge di Snell)

La rifrazione è un fenomeno per il quale la luce, quando attraversa un'interfaccia, cioè passa da un mezzo ad un altro con indici di rifrazione diversi, subisce una deviazione. Il principio di Fermat permette di calcolare la traiettoria della luce in queste situazioni, in conformità con il principio infatti la luce segue la curva che necessita del minor tempo per essere attraversata, tenendo conto del fatto che la velocità in un mezzo con indice di rifrazione n è $v = c/n$.

Dal punto di vista fenomenologico la rifrazione è l'effetto fisico che fa sì che le immagini che osserviamo provenienti da mezzi diversi (come il classico esempio del cucchiaino immerso in un bicchiere d'acqua) ci appaiano come spezzate sull'interfaccia tra i due materiali.

La legge di Snell (Willebrord Snel van Royen, 1580-1626), in particolare, è una legge dell'ottica geometrica che determina il comportamento di un raggio di luce quando questo attraversa una discontinuità, cioè passa da due mezzi di propagazione diversi. In particolare permette di legare l'indice di rifrazione dei due mezzi con l'angolo con il quale il raggio incide e rifrange sulla superficie.

Si definisce *raggio incidente* il raggio luminoso che si propaga nel mezzo 1 e che giunge sulla superficie di transizione con un angolo θ_1 rispetto alla normale (vedere Figura 2) e *raggio rifratto* il raggio che, proseguendo dal punto di incidenza, si propaga nel mezzo 2 con angolo θ_2 .

Teorema 2. *La legge di Snell afferma che raggio incidente e rifratto stanno sullo stesso piano e che sussiste la seguente relazione tra l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione*

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (8)$$

dove n_1 ed n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi in prossimità della superficie.

Dimostrazione. Una possibile dimostrazione può essere ricavata direttamente dall'eiconale. L'equazione di Huygens infatti definisce il raggio vettore come (equazione (7))

$$\vec{n} = \nabla S = n(\vec{r})\hat{s}$$

integrando il gradiente su un cammino chiuso P si ha sempre zero, si trova così

$$\oint_P \nabla S(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_P \vec{n}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Si esegue l'integrale su un cammino rettangolare che racchiuda la discontinuità tra i due mezzi e si fa tendere a zero il lato perpendicolare all'interfaccia.

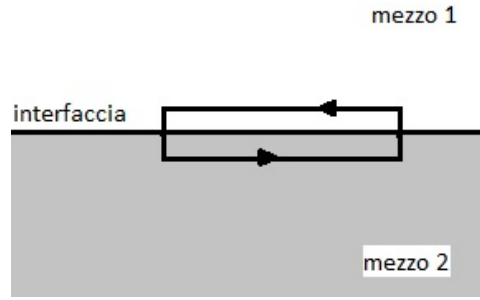


Figura 2. Percorso da seguire per il calcolo della circuitazione

In questo modo solo i contributi relativi ai lati paralleli alla superficie di discontinuità contribuiscono all'integrale e quindi la componente tangenziale deve conservarsi in prossimità dell'interfaccia. Questo vuol dire che

$$(\vec{n}_1 - \vec{n}_2) \times \hat{z} = 0$$

se si definisce con \hat{z} il versore normale alla superficie di separazione e \vec{n}_1 , \vec{n}_2 il raggio vettore rispettivamente incidente e rifratto. Proiettando quindi il vettore sulla tangente si ottiene

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \square$$

Da questa relazione si deduce, se si impone che l'angolo rifratto sia esattamente $\pi/2$, si trova che l'angolo incidente deve valere

$$\theta_I = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad n_2 < n_1$$

Questo angolo è chiamato angolo limite o angolo critico, se un raggio passa da un mezzo meno denso ad uno più denso ($n_2 < n_1$) con un angolo di incidenza maggiore dell'angolo critico esso viene totalmente riflesso e non si rileva nessun raggio rifratto (nell'ottica geometrica).

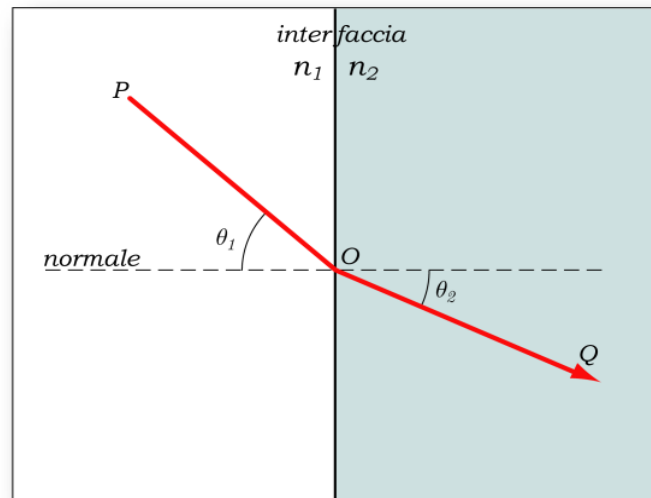


Figura 3. Rifrazione di Snell in prossimità dell'interfaccia

2.2.1 Problema di Feynman

La legge della rifrazione può essere dimostrata in maniera semplice come sopra, ma è interessante riportare una spiegazione molto chiara del fenomeno, dovuta a R. Feynman. Il famoso problema del bagnino di Feynman è un'analogo per spiegare il fenomeno luminoso utilizzando il principio di Fermat: un bagnino sulla costa, per raggiungere un uomo in difficoltà in mezzo al mare, dovrà cercare di percorrere il tragitto che necessita del minor tempo, tenendo conto del fatto che sulla spiaggia egli si muove più velocemente che in acqua. Poichè, come si è già dimostrato, la luce si propaga tramite raggi rettilinei nei mezzi omogenei, nelle ipotesi dell'ottica geometrica il problema della rifrazione si semplifica notevolmente e può essere risolto nel modo seguente.

Dimostrazione. Se la luce viaggia alla velocità v_1 nel primo mezzo e v_2 nel secondo mezzo il tempo totale di percorrenza è dato da

$$t_{tot} = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d^2 + (h-x)^2}}{v_2}$$

dove l è l'ascissa tra il punto di partenza P e l'interfaccia (posta in verticale, vedere Figura 3), d è l'ascissa tra l'interfaccia e il punto di arrivo, h è l'ordinata del punto di arrivo (il punto di partenza è l'origine), x è l'ordinata alla quale il raggio raggiunge l'interfaccia.

Per trovare il tempo minimo è necessario derivare ed imporre il risultato uguale a zero

$$\frac{x}{v_1} \frac{1}{\sqrt{l^2 + x^2}} + \frac{x-h}{v_2} \frac{1}{\sqrt{d^2 + (h-x)^2}} = 0$$

Questo si annulla solo se si annulla il numeratore, cioè

$$v_2 x \sqrt{d^2 + (h-x)^2} - v_1 (h-x) \sqrt{l^2 + x^2} = 0$$

che si può riscrivere come (ricordando che $v = c/n$)

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = n_2 \frac{h-x}{\sqrt{d^2 + (h-x)^2}}$$

Osservando che le due frazioni corrispondono esattamente a $\sin \theta_1$ e $\sin \theta_2$ (rispetto alla normale), si ottiene, come atteso, la legge di Snell (equazione (8))

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

□

2.3 Legge della riflessione

La legge della riflessione è una semplice legge fisica che permette di predire la traiettoria di un raggio di luce che viene riflesso da una superficie riflettente. Secondo questa legge il *raggio incidente* ed il *raggio riflesso* (quello creato dopo che la luce colpisce la superficie) stanno sullo stesso piano ed incidono sulla superficie in modo tale che i due raggi abbiano lo stesso angolo rispetto alla normale alla superficie riflettente. Ovviamente può anche questo esempio essere dimostrato applicando il principio di Fermat nell'ipotesi di un raggio specchiato, risolvendo l'opportuna equazione dei raggi.

Si può anche dimostrare con un ragionamento analogo a quello fatto per la rifrazione, ricordando però che in questo caso il raggio riflessi si propaga nello stesso mezzo del precedente, si ha quindi

$$\oint_P \nabla S(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_P \vec{n}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Facendo di nuovo tendere a zero i due lati perpendicolari alla superficie, restano solo i contributi relativi alle componenti tangenziali che devono annullarsi

$$\vec{n}_I(\vec{r}) \cdot d\vec{l} + \vec{n}_R(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_I dl \sin \theta_I - n_I dl \sin \theta_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_I = \theta_R$$

Bibliografia

E. Massa, Dispense del corso di Meccanica Analitica 1

E. Massa, Dispense del corso di Meccanica Analitica 2

David J. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics", Pearson, 3rd edition

R. Courant e D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics. Vol 1", Wiley, 1st edition

G. Bekefi e A.H. Barret, "Electromagnetic Vibration, Waves and Radiation", MIT Press, 3rd edition

H. Goldstein, "Classical Mechanics", Pearson, 3rd edition