Prepared for submission to JHEP

Rinormalizzazione algebrica della teoria di gauge di Yang-Mills

Luca Martinoia[1,2]

[1] *Dipartimento di Fisica, Università di Genova, via Dodecaneso 33, I-16146, Genova, Italy*
[2] *I.N.F.N. - Sezione di Genova, via Dodecaneso 33, I-16146, Genova, Italy*

E-mail: luca.martinoia@ge.infn.it

Contents

1 Introduzione

1.1 Motivazione

Era noto sin dai primissimi tempi che la QFT predice divergenze UV quando si prova a calcolare osservabili oltre all'approssimazione semiclassica tree level. Questo ha dato origine prima alle procedure di regolarizzazione ed infine alla rinormalizzazione, come modo di ottenere risultati finiti da integrali divergenti, confermando la validità di teorie di successo come QED, QCD e il Modello Standard. E' ormai noto che tutti gli schemi di rinormalizzazione e le procedure di regolarizzazione sono equivalenti (a patto che non rompano esplicitamente le simmetrie della teoria), ma solo tramite la rinormalizzazione algebrica, sviluppata negli anni '70 da Becchi, Rouet e Stora, si può dare una giustificazione precisa di questo fenomeno.

Le identità di Ward e di Slavnov-Taylor descrivono l'azione delle simmetrie su una teoria quantistica, e appaiono come identità che le funzioni di Green devono soddisfare. Lo scopo della rinormalizzazione (perturbativa) è mostrare che è sempre possibile costruire, a tutti gli ordini perturbativi, una teoria (il cui contenuto è fissato dai campi e dalle simmetrie) le cui funzioni di Green soddisfano le identità di Ward.

In particolare, sfruttando le proprietà dell'invarianza BRS (rigida o locale) ed il Quantum Action Principle (quindi località e power-counting), è possibile mostrare algebricamente se sia possibile preservare le identità di Ward a livello quantistico, in modo da cancellare i più generali termini che impediscono il persistere di una simmetria tramite l'introduzione di opportuni contro-termini nell'azione. Se invece non è possibile cancellare i termini che rompono la simmetria con contro-termini locali, allora la teoria si dice anomala.

Il potere della rinormalizzazione algebrica è che è estremamente generale, non fa riferimento a nessuna procedura di regolarizzazione o schema perturbativo ed è valida ad ogni ordine perturbativo in $\hbar$. L'aspetto negativo è che non è in grado di prevedere a quale ordine appariranno problemi nella procedura di rinormalizzazione (esempio, le anomalie), ma può solo prevedere che accadranno.

Queste note seguono l'approccio e le notazioni riportate in [1] e a lezione.

1.2 Preliminari I: Generatori funzionali

Introduciamo i vari funzionali generatori W, Z e Γ [1–3]. Nel caso più generale, di un'azione con interazioni e operatori composti, dobbiamo aggiungere sia sorgenti J per i campi singoli ϕ, sia sorgenti ρ per polinomi in campi locali $Q(x)$. L'azione totale Σ è

$$\Sigma(\phi,\rho) = \Sigma_{\text{free}}(\phi) + \Sigma_{\text{int}}(\phi) + \int \mathrm{d}x\ \rho_p(x) Q^p_{\text{class}}(x) \tag{1.1}$$

Definiamo quindi W tramite il path integral (notare l'integrale solo su ϕ)

$$W(J,\rho) \coloneqq \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi\ e^{-\frac{1}{\hbar}\Sigma(\phi,\rho)+\int \mathrm{d}x J(x)\phi(x)} \tag{1.2a}$$

Derivando il funzionale generatore W per le sorgenti ρ o J otteniamo formalmente tutte le funzioni di Green della teoria ad ogni ordine perturbativo. Questo corrisponde ad avere quantizzato la teoria classica, poiché la conoscenza di tutte le funzioni di Green è equivalente ad avere risolto la teoria.

Analogamente definiamo Z e Γ (tramite trasformata di Legendre), i generatori rispettivamente per le funzioni di Green connesse e le funzioni di Green 1PI

$$W(J,\rho) \coloneqq e^{-\frac{1}{\hbar}Z(J,\rho)} \tag{1.2b}$$

$$\Gamma(\phi,\rho) \coloneqq Z(J,\rho) - \int \mathrm{d}x\ J^i(x)\phi_i\Big|_{\phi_i(x)=\frac{\delta Z}{\delta J^i(x)}} \tag{1.2c}$$

In particolare, definendo l'operatore $Q^p(x)$, osserviamo che

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho_p(x)}\Big|_{\rho=0} \coloneqq Q^p(x)\cdot\Gamma(\phi) = Q^p_{\text{class}}(x) + \mathcal{O}(\hbar) \tag{1.3}$$

genera le funzioni di Green 1PI con l'inserzione di un operatore $Q^p(x)$. Infine, ricordiamo che espandendo in potenze di $\hbar$ il generatore funzionale Γ, al primo ordine questo corrisponde all'azione classica $\Gamma(\phi) = \Sigma(\phi) + \mathcal{O}(\hbar)$, per questa ragione Γ è anche chiamata *azione quantistica.*

1.3 Preliminari II: Identità di Ward e di Slavnov-Taylor

Consideriamo un teoria la cui azione $\Sigma(\phi)$ è invariante sotto l'azione di una simmetria *rigida*, cioè il cui parametro infinitesimo non è un parametro locale. Questa agisce sui campi con le trasformazioni infinitesime non lineari

$$\delta\phi_i(x) = i\varepsilon^a R_{a,i}(x) \tag{1.4}$$

con ε parametro infinitesimo e studiamo il caso in cui R appartenga alla rappresentazione di un gruppo di Lie. Per esempio, per il caso di trasformazioni locali,

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\omega \qquad \text{Maxwell, lineare} \tag{1.5a}$$

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu\omega^a + f_{abc}A^b_\mu\omega^c \qquad \text{Yang-Mills, non lineare} \tag{1.5b}$$

Chiamiamo X_a gli elementi di una base dell'algebra di Lie, questi soddisfano

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \tag{1.6}$$

e la conseguente identità di Jacobi a causa dell'antisimmetria di f_{abc}. Chiediamo dunque che le variazioni rigide infinitesime soddisfino[1]

$$\int \mathrm{d}y \left(R_{b,j}(y)\frac{\delta R_{a,i}(x)}{\delta\phi_j(y)} - R_{a,j}\frac{\delta R_{b,i}(x)}{\delta\phi_j(y)} \right) = i f_{abc} R_{c,i}(x) \tag{1.7}$$

[1] Si ottiene chiedendo che due trasformazioni di fila R_a e R_b, seguite dalle stesse operazioni eseguite in senso opposto, diano una trasformazione totale R_c.

Consideriamo ora un funzionale $F(\phi)$. L'azione della simmetria sul funzionale è descritta da un operatore $\mathcal{W}_a$

$$\delta F = -i\varepsilon^a \mathcal{W}_a F \tag{1.8}$$

$$\mathcal{W}_a := -\int \mathrm{d}x \; R_{a,i} \frac{\delta}{\delta \phi_i} \tag{1.9}$$

e, grazie a (1.7), soddisfa

$$[\mathcal{W}_a, \mathcal{W}_b] = i f_{abc} \mathcal{W}_c \tag{1.10}$$

1.3.1 Trasformazioni lineari

Consideriamo il caso di trasformazioni lineari

$$R_{a,i}(x) = T_{a,i}{}^{j} \phi_j(x) \tag{1.11}$$

dove T_a sono matrici che soddisfano l'algebra di Lie del gruppo. L'invarianza dell'azione $\Sigma(\phi)$ sotto la trasformazione lineare è data da

$$\delta\Sigma = \mathcal{W}_a \Sigma = -\int \mathrm{d}x \; T_{a,i}{}^{j} \phi_j \frac{\delta}{\delta \phi_i} \Sigma = 0 \tag{1.12}$$

Al tree level, l'azione coincide con il generatore funzionale Γ, per cui facendo una trasformazione di Legendre ed esponenziando troviamo $W^{(0)}$, il generatore delle funzioni di Green a tree level. Questo soddisfa l'identità di Ward funzionale

$$\mathcal{W}_a W^{(0)}(J) = \int \mathrm{d}x \; J^i T_{a,i}{}^{j} \frac{\delta}{\delta J^j} W^{(0)}(J) = 0 \tag{1.13}$$

Agendo con la derivata funzionale su questa espressione si ottengono le identità di Ward sulle funzioni di Green.

1.3.2 Transformazioni non-lineari: BRS

Nel caso non lineare, come sono le trasformazioni BRS, per poter correttamente definire i campi a livello quantistico si deve prima aggiungere all'azione un termine con sorgenti che accoppiano ai campi non lineari

$$\Sigma_{\text{ext}}(\phi, \rho) = i \int \mathrm{d}x \; \rho^i \varepsilon^a R_{a,i} \tag{1.14}$$

L'azione classica totale è dunque data da

$$\Sigma_{\text{tot}} = \Sigma(\phi) + \Sigma_{\text{ext}}(\phi, \rho) = \Gamma^{(0)} \tag{1.15}$$

A differenza del caso lineare, quest'azione non è invariante sotto la simmetria infinitesima $\delta\phi$, proprio a causa del termine di sorgente esterna. La soluzione è dunque quella di promuovere il parametro infinitesimo ε^a a variabile di Grassmann ed associargli la trasformazione[2]

$$\delta\varepsilon^a = -\frac{1}{2} f_{abc}\varepsilon^b\varepsilon^c \tag{1.16}$$

Con questa definizione l'operatore di BRS δ è nilpotente $\delta^2 = 0$,[3] mentre l'azione totale è invariante $\delta\Gamma^{(0)} = 0$. Scriviamo l'invarianza dell'azione in forma funzionale

$$\mathcal{S}(\Gamma^{(0)}) \coloneqq \int \mathrm{d}x \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\rho^i}\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta\phi_i} - \frac{1}{2} f_{bca}\varepsilon^b\varepsilon^c \frac{\partial\Gamma^{(0)}}{\partial\varepsilon^a} = 0 \tag{1.17}$$

Quest'ultima equazione è detta *identità di Slavnov-Taylor* e generalizza le identità di Ward al caso di trasformazioni non lineari. Intuitivamente funziona come l'identità di Ward: si applica la regola di Liebnitz per la variazione indotta dalla simmetria $\delta\Sigma \sim \int \delta\phi\,(\delta\Sigma/\delta\phi)$, ma dato che $\delta\phi$ è associato ad una trasformazione non lineare, si usa l'inserzione $\delta\phi \sim \delta\Sigma/\delta\rho$.

1.4 Quantum Action Principle (QAP)

Il Quantum Action Principle è stato proposto e dimostrato da Lowenstein e Lam in [4–7]. Il QAP dimostra che certe equazioni, quando portate a livello perturbativo, rinormalizzano assumendo una forma dettata da operatori locali di dimensione fissata se la teoria è locale e power-counting rinormalizzabile.

Se per esempio non ci sono inserzioni polinomiali, ma solo lineari, al tree level si trova l'equazione formale (è l'equazione del moto in forma funzionale)

$$\left.\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi_i(x)}\right|_{\phi\to-\hbar\frac{\delta}{\delta J}} W + J^i(x)W = 0 \tag{1.18}$$

dove $\delta\Sigma/\delta\phi_i$ è un'inserzione con dimensione $D - d_i$. Se la teoria è power-counting rinormalizzabile, la stessa struttura sopravvive ad ogni ordine perturbativo in $\hbar$ e generalizza a

$$\Delta^i(x)\cdot W + J^i(x)W = 0 \tag{1.19}$$

dove $\Delta^i(x)$ è un operatore di campo locale con dimensione $D - d_i$ (e che coincide con l'inserzione classica $\delta\Sigma/\delta\phi_i$ al tree-level). La stessa struttura sopravvive anche per il caso di Z e Γ, in particolare si trova

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} - \Delta^i(x)\cdot\Gamma = 0 \tag{1.20}$$

[2] Si verifica per calcolo diretto che $\delta\Sigma_{\text{ext}} = 0$.

[3] L'operatore di BRS ha un'interpretazione geometrica affine a quello di derivata esterna d, con cui per esempio condivide immediatamente la nilpotenza $\mathrm{d}^2 = 0$ e quindi le proprietà coomologiche.

Nel caso invece in cui nella teoria ci siano anche polinomi $Q^a(x)$ con dimensione d_{Q^a}, accoppiati con sorgenti esterne $\rho_a(x)$ di dimensione $D-d_{Q^a}$, si ottiene l'espressione formale

$$\left(Q^a(x)\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi_i(x)}\right)\cdot W - \hbar J^i(x)\frac{\delta W}{\delta\rho_a(x)} = 0 \tag{1.21}$$

la cui versione rinormalizzata è

$$\Delta^{ai}(x)\cdot W - \hbar J^i(x)\frac{\delta W}{\delta\rho_a(x)} = 0 \tag{1.22}$$

dove ora $\Delta^{ai}(x)$ è un operatore composto locale di dimensione $D - d_i + d_{Q^a}$. Per il funzionale Γ la stessa equazione rinormalizzata è

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho_a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} - \Delta^{ia}(x)\cdot\Gamma = 0 \tag{1.23}$$

Queste equazioni rinormalizzate, in termini di generiche inserzioni locali $\Delta^i(x)$ (integrali o meno), sono il risultato principale del QAP. In particolare il QAP quindi ci dice che quando rinormalizziamo i generatori funzionali, dobbiamo in generale considerare le più generiche correzioni polinomiali con dimensione fissata. Inoltre, è possibile mostrare che la base dei campi classici della teoria, quando rinormalizza, rimane comunque una base valida per descrivere la teoria rinormalizzata.

2 Teoria di gauge di Yang-Mills: gauge-fixing e BRS a tree-level

Consideriamo un campo di gauge A_μ con valori nell'algebra di Lie del gruppo [1–3, 8]. Questi appartengono alla rappresentazione aggiunta, i.e. ci sono tanti campi di gauge quanti i generatori del gruppo τ_a

$$A_\mu(x) \coloneqq A^a_\mu(x)\tau_a \tag{2.1}$$

Prendiamo i generatori nella rappresentazione fondamentale

$$[\tau_a, \tau_b] = i f_{abc}\tau_c \qquad\qquad \mathrm{Tr}\tau_a\tau_b = \delta_{ab} \tag{2.2}$$

La materia $\psi(x)$ invece trasforma sotto una qualche rappresentazione finita del gruppo i cui generatori sono T_a.

Le trasformazioni di gauge sono date da

$$\delta A^a_\mu(x) = \partial_\mu\omega^a + f_{abc}A^b_\mu\omega^c \tag{2.3a}$$
$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu\omega(x) + i[\omega(x), A_\mu(x)] = D_\mu\omega(x) \tag{2.3b}$$
$$\delta\psi(x) = i\omega^a(x)T_a\psi(x) \tag{2.3c}$$

dove abbiamo definito $\omega = \omega^a \tau_a$ nella seconda riga. Definiamo anche la field strength e la derivata covariante

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \tag{2.4}$$

$$D_\mu \psi := \left(\partial_\mu - i A_\mu^a T_a\right) \psi \tag{2.5}$$

notare che, contrariamente a Maxwell, $F_{\mu\nu}$ non è invariante di gauge.

La più generica azione per puro Yang-Mills che sia power-counting rinormalizzabile in $4d$ e gauge invariante è semplicemente

$$\Sigma_{\text{inv}} = \int \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{4g^2} \mathrm{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) = \Sigma_{\text{YM}} \tag{2.6}$$

e l'oggetto quantistico che ci interessa è W, il generatore delle funzioni di Green.

Per quantizzare la teoria si segue la procedura di Faddeev-Popov per definire il path integral [9]: questo permette di eliminare la ridondanza delle trasformazioni di gauge fattorizzando le configurazioni di campo equivalente. Questo è fatto introducendo un termine di gauge-fixing che, una volta esponenziato, produce un'azione totale che dipende da 4 campi: il campo di gauge A_μ, i ghost c e $\bar{c}$ ed il campo Nakanishi-Lautrup B (campo ausiliario, moltiplicatore di Lagrange della condizione di gauge-fixing). Tutti i campi sono a valori nell'algebra, e.g. $c = c^a \tau_a$, inoltre c, $\bar{c}$ sono campi di Grassmann, quindi anticommutano tra loro.

La condizione di gauge è data da ($\alpha = 0$ è detto gauge di Landau)

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta B} = \partial^\mu A_\mu + \alpha B (= 0) \tag{2.7}$$

per cui il termine di gauge-fixing è

$$\Sigma_{\text{gf}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[-\bar{c}^a \partial^\mu (D_\mu c)_a + \mathrm{Tr}\left(B \partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2\right)\right] \tag{2.8}$$

$$D_\mu c = \partial_\mu c + i[c, A_\mu]$$

e l'azione totale è finalmente data da

$$\Sigma = \Sigma_{\text{inv}}(A) + \Sigma_{\text{gf}}(A, c, \bar{c}, B) \tag{2.9}$$

Con il termine di gauge-fixing l'azione non è più invariante sotto trasformazioni di gauge, emerge però una nuova simmetria, detta BRS (indicata con s), ottenuta promuovendo il parametro di gauge ω a campo di Grassmann. Sotto BRS i vari campi trasformano come

$$s A_\mu = D_\mu c \qquad s\psi = i c^a T_a \psi \tag{2.10a}$$

$$s\bar{\psi} = i \bar{\psi} T_a c^a \qquad s c^a = -\frac{1}{2} f_{abc} c^b c^c \quad (sc = ic^2) \tag{2.10b}$$

$$s\bar{c} = B \qquad sB = 0 \tag{2.10c}$$

Notare inoltre che s è nilpotente, cioè $s^2 = 0$. $\bar{c}$ e B sono detti *doppietto di BRS*, poiché sono sconnessi dagli altri campi sotto l'azione di s, trasformano linearmente e danno trivialmente zero sotto s^2. **[Qual è la corrente conservata (on-shell) associata a BRS? Che significato ha? Large gauge transformations?]**

Le trasformazioni di BRS sono non-lineari: per poter definire esattamente come BRS agisce sulle funzioni di Green a livello quantistico è necessario introdurre delle sorgenti esterne ρ^μ e σ che sono invarianti sotto BRS e che accoppiano con gli operatori non-lineari della teoria. Nel caso di puro Yang-Mills, senza materia, si deve quindi aggiungere all'azione

$$\Sigma_{\text{ext}} = \int \mathrm{d}^4x \left(\mathrm{Tr}\rho^\mu sA_\mu + \mathrm{Tr}\sigma sc\right) \tag{2.11}$$

e l'azione totale ora è semplicemente

$$\Sigma = \Sigma_{\text{inv}}(A) + \Sigma_{\text{gf}}(A, c, \bar{c}, B) + \Sigma_{\text{ext}}(A, c, \rho, \sigma) \tag{2.12}$$

L'invarianza dell'azione totale sotto BRS può essere scritta in forma funzionale, tramite l'identità di Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = 0 \tag{2.13}$$

dove l'operatore $\mathcal{S}$ non-lineare agisce su un generico funzionale $\mathcal{F}$ come[4]

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \int \mathrm{d}^4x \left(\mathrm{Tr}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho^\mu}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A_\mu} + \mathrm{Tr}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\sigma}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c} + \mathrm{Tr}B\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{c}}\right) \tag{2.14}$$

I primi due termini sono propriamente Slavnov-Taylor, vedi Eq. (1.17), mentre l'ultimo termine è il termine relativo alle trasformazioni lineari, l'identità di Ward, ottenuto facendo la variazione di Σ rispetto ai campi lineari B e $\bar{c}$. L'ultimo termine che appare in Eq, (1.17) non appare qui, questo perché $\varepsilon \sim c$ è un campo ora e va trattato al pari delle altre variabili.

E' interessante notare che Σ_{gf} è BRS esatta, cioè

$$\Sigma_{\text{gf}} = s\ \mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^4x \left(\bar{c}\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}\bar{c}B\right) \tag{2.15}$$

si dimostra usando il fatto che l'operatore s è un operatore di Grassmann, quindi anticommuta con c.

L'azione totale Σ è BRS invariante, power-counting rinormalizzabile e preserva il ghost-number (anche detta carica di Faddeev-Popov, indicata con $\Phi\Pi$). Questo perché s aumenta di 1 la carica $\Phi\Pi$ dei campi (ed infatti $s^2 = 0$ come si conviene per variabili di Grassmann). Notare che $\Phi\Pi[\Sigma] = 0$.

[4] A_μ e c sono reali, mentre $\bar{c}$, ρ^μ e σ immaginari.

	s	A_μ	c	$\bar{c}$	B	ρ^μ	σ
$\Phi\Pi$	1	0	1	-1	0	-1	-2
Dimensioni	0	1	0	2	2	3	4

Table 1. Dimensioni di massa e ghost number (carica di Faddeev-Popov) dei vari campi e operatori della teoria.

3 Rinormalizzazione: la condizione di consistenza

Vogliamo estendere la teoria classica di Yang-Mills a livello quantistico. Questo corrisponde al trovare, ordine per ordine perturbativamente in $\hbar$, un funzionale generatore Γ (l'azione quantistica) che dipenda dagli stessi campi (rinormalizzati) e che soddisfi le stesse simmetrie. In particolare quindi ci chiediamo se sia possibile trovare un $\Gamma(A, c, \bar{c}, B, \rho, \sigma)$ che soddisfi la stessa identità di Slavnov-Taylor (2.13) dell'azione.

Definiamo quindi la teoria dalla condizione di gauge fixing (2.7), opportunamente generalizzata a livello quantistico

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B} = \partial^\mu A_\mu + \alpha B (= 0) \tag{3.1}$$

e dall'identità di Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Gamma) = 0 \tag{3.2}$$

3.1 Condizione di gauge-fixing

Iniziamo verificando che (3.1) non riceva correzioni radiative. Per fare ciò procediamo per induzione: assumiamo che la condizione si valida all'ordine $n-1$ in $\hbar$, aggiungiamo la più generica correzione Δ^a all'ordine n in $\hbar$ consistente con power-counting e località (QAP). Δ^a è qunidi un funzionale locale di dimensione 2 e carica $\Phi\Pi[\Delta^a] = 0$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B^a} = \partial^\mu A^a_\mu + \alpha B^a + \hbar^n \Delta^a + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{3.3}$$

Scriviamo Δ^a nella forma più generale possibile

$$\Delta^a(x) = F^a(A, c, \bar{c}) + \omega_{ab} B^b \tag{3.4}$$

dove F^a è un polinomio locale, mentre ω_{ab} sono numeri. Poiché B^a sono scalari, vale la proprietà generica che

$$\left[\frac{\delta}{\delta B^a(x)}, \frac{\delta}{\delta B^b(y)}\right] = 0 \tag{3.5}$$

da cui, agendo con il commutatore su Γ, otteniamo la condizione di consistenza

$$\frac{\delta \Delta^b(y)}{\delta B^a(x)} - \frac{\delta \Delta^a(x)}{\delta B^b(y)} = 0 \tag{3.6}$$

che implica $\omega_{ab} = \omega_{ba}$. Questa è una condizione di integrabilità che mostra che il più generico termine di rottura della condizione di gauge può essere scritta come una derivata funzionale rispetto a B^a

$$\Delta^a(x) = \frac{\delta}{\delta B^a(x)} \int \mathrm{d}^4 y \left(B^b F^b + \frac{1}{2}\omega_{cb} B^c B^b \right) = \frac{\delta}{\delta B^a}\tilde{\Delta} \tag{3.7}$$

Poiché appare come derivata rispetto a B^a il termine di rottura Δ^a può essere riassorbito come contro-termine in Γ all'ordine n in $\hbar$, lasciando la condizione di gauge fixing invariata. Abbiamo quindi dimostrato che è sempre possibile aggiungere un opportuno contro-termine a Γ, in modo da cancellare ogni possibile violazione della condizione di gauge-fixing.

3.2 Ghost equation

Dato un funzionale $\mathcal{F}$, si mostra per calcolo diretto che questo soddisfa l'identità

$$\frac{\delta}{\delta B}\mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta B} - \partial^\mu A_\mu\right) = \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \partial^\mu \frac{\delta}{\delta \rho^\mu}\right)\mathcal{F} := \mathcal{G}\mathcal{F} \tag{3.8}$$

dove $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ è l'operatore lineare di Slavnov-Taylor rispetto al funzionale $\mathcal{F}$[5]

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} := \int \mathrm{d}^4 x \left(\mathrm{Tr}\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^\mu}\frac{\delta}{\delta A_\mu} + \mathrm{Tr}\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta A_\mu}\frac{\delta}{\delta \rho^\mu} + \mathrm{Tr}\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \sigma}\frac{\delta}{\delta c} + \mathrm{Tr}\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta c}\frac{\delta}{\delta \sigma} + \mathrm{Tr} B \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right) \tag{3.9}$$

il quale soddisfa l'equazione di anticommutazione

$$\mathcal{G}\mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\mathcal{G}\mathcal{F} = 0 \tag{3.10}$$

Data l'identità di Slavnov-Taylor e la condizione di gauge-fixing, si può mostrare che

$$\mathcal{G}\Gamma = 0 \tag{3.11}$$

e questa equazione è detta *ghost equation*.

Per provare che (3.11) rimane valida ad ogni ordine in $\hbar$ procediamo come per l'equazione del gauge fixing: assumiamo sia valida all'ordine $n-1$ in $\hbar$ e verifichiamo che la più generica correzione può essere riassorbita. Per fare ciò definiamo la nuova variabile

$$\hat{\rho}^\mu = \rho^\mu + \partial^\mu \bar{c} \tag{3.12}$$

lasciando invariati gli altri campi. L'equazione di ghost si riscrive allora come[6]

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}} = 0 \tag{3.13}$$

[5]Si trova naturalmente che se $\Gamma^{(n-1)}$ soddisfa $\mathcal{S}(\Gamma^{(n-1)}) = 0$, allora $\Delta^{(n)}$ deve soddisfare $\mathcal{S}_{\Gamma^{(n-1)}}\Delta^{(n)} = 0$ se si vuole che $\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n-1)} + \Delta^{(n)}$ soddisfi $\mathcal{S}(\Gamma^{(n)}) = 0$.

[6]Calcolo diretto.

e da qui, poiché l'equazione è una semplice derivata funzionale come nel caso dell'equazione di gauge-fixing, si procede alla stessa maniera e si riesce a rinormalizzare. Il più generico polinomio Δ che viola l'equazione deve avere dimensione 2 e carica $\Phi\Pi$ uguale a 1.

$$\Delta^a \subset \alpha_1 A^2 c + \alpha_2 c A^2 + \alpha_3 A_\mu c A^\mu + \alpha_4 c B + \alpha_5 B c + \alpha_6 \bar{c} c^2 + \alpha_7 c^2 \bar{c} + \alpha_8 c \bar{c} c \tag{3.14}$$

e questo può sempre essere scritto come derivata funzionale di un polinomio $\Delta = \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \tilde{\Delta}$. Il fatto che l'equazione di ghost non rinormalizzi è la prova che i ghost stessi non subiscono correzioni radiative e non appaiano quindi come contro-termini.

Dalle due equazioni di ghost (3.11) e gauge-fixing (3.1) si trova che il generatore funzionale Γ si può scrivere come

$$\Gamma(A, c, \bar{c}, B, \rho, \sigma) = \hat{\Gamma}(A, c, \hat{\rho}, \sigma) + \mathrm{Tr} \int \mathrm{d}^4 x \left(B \partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2} B^2 \right) \tag{3.15}$$

dove $\hat{\Gamma}$ non dipende dal campo B e dipende da $\bar{c}$ solo tramite $\hat{\rho}$. Poiché vale ad ogni ordine in $\hbar$, l'azione stessa Σ soddisfa la stessa decomposizione.

3.3 Identità di Slavnov-Taylor

Rimane da far vedere che Γ soddisfi l'identità di Slavnov-Taylor. Per prima cosa esprimiamo in forma funzionale la proprietà di nilpotenza dell'operatore di BRS: questo corrisponde alle due condizioni

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0 \qquad \forall \mathcal{F} \tag{3.16a}$$

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} \mathcal{S}_\mathcal{F} = 0 \qquad \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0 \tag{3.16b}$$

ed inoltre definiamo $b \coloneqq \mathcal{S}_\Sigma$ l'operatore di Slavnov-Taylor linearizzato rispetto all'azione classica Σ. Poiché l'azione classica soddisfa, per costruzione, $\mathcal{S}(\Sigma) = 0$, la seconda condizione implica subito $b^2 = 0$. L'azione di b sui campi è data da[7]

$$b[A, c, \bar{c}, B] = s[A, c, \bar{c}, B] \tag{3.17a}$$

$$b \hat{\rho}^\mu = \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu} + \partial^\mu B = \frac{1}{g^2} D_\nu F^{\mu\nu} + i \{\hat{\rho}^\mu, c\} \tag{3.17b}$$

$$b \sigma = \frac{\delta \Sigma}{\delta c} = \partial_\mu \hat{\rho}^\mu - i[A_\mu, \hat{\rho}^\mu] - i[\sigma, c] \tag{3.17c}$$

Procediamo ora alla solita maniera: assumiamo di essere riusciti a implementare l'identità di Slavnov-Taylor fino all'ordine $n-1$ in $\hbar$, cioè assumiamo di aver costruito un generatore funzionale $\Gamma^{(n-1)}$ tale che

$$\mathcal{S}(\Gamma^{(n-1)}) = \mathcal{O}(\hbar^n) \tag{3.18}$$

[7] Calcolo diretto. Nelle variabili $\hat{\rho}^\mu$ non appare il termine di ghost nell'azione. La derivata $\delta\Sigma_{\mathrm{gf}}/\delta A_\mu = -\partial^\mu B$ cancella il $\partial^\mu B$ che appare esplicito. Gli altri termini seguono semplicemente per derivata.

e vogliamo trovare i contro-termini tali per cui valga

$$\mathcal{S}(\Gamma^{(n)}) = \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{3.19}$$

Adesso l'applicazione del QAP ci dice che il più generico termine che rompe l'identità di Slavnov-Taylor è un polinomio locale integrato $\Delta(A, c, \bar{c}, B, \hat{\rho}, \sigma)$ con ghost number $\Phi\Pi$ uguale a 1 (ricordarsi che $\mathcal{S}$ porta carica di ghost 1) e dimensione 4

$$\mathcal{S}(\Gamma^{(n)}) = \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{3.20}$$

Sfruttando adesso prima (3.10) e poi (3.8) si trova che il più generico polinomio Δ deve soddisfare i seguenti vincoli

$$\frac{\delta}{\delta B}\Delta = \mathcal{G}\Delta = 0 \tag{3.21}$$

Inoltre, la prima condizione di nilpotenza in (3.16), insieme con l'ovvia identificazione

$$\mathcal{S}_\Gamma = b + \mathcal{O}(\hbar) \tag{3.22}$$

implica la *condizione di consistenza*, cioè Δ deve essere b-chiusa

$$b\Delta = 0 \tag{3.23}$$

Poiché b è nilpotente, una possibile soluzione è assumere che Δ sia a sua volta una variazione esatta locale di b

$$\Delta = b\tilde{\Delta} \tag{3.24}$$

con $\tilde{\Delta}$ un polinomio integrato di dimensione 4 e carica $\Phi\Pi[\tilde{\Delta}] = 0$. Possiamo adesso verificare che questa soluzione permette di scrivere $\tilde{\Delta}$ come contro-termine: ridefiniamo il funzionale generatore come

$$\Gamma \quad \rightarrow \quad \Gamma' = \Gamma - \hbar^n \tilde{\Delta} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{3.25}$$

e verifichiamo che Γ' soddisfi l'identità di Slavnov-Taylor all'ordine n in $\hbar$. Applicando l'operatore di Slavnov-Taylor a Γ' troviamo

$$\mathcal{S}(\Gamma - \hbar^n \tilde{\Delta}) = \mathcal{S}(\Gamma) - \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) = \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{3.26}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathcal{S}(\hbar^n \tilde{\Delta}) = b(\hbar^n \tilde{\Delta}) = \hbar^n \Delta$. Questo dimostra che, se vale l'Ansatz (3.24), allora è possibile aggiungere contro-termini all'azione quantistica tali per cui l'identità di Slavnov-Taylor rimane esatta all'ordine n in $\hbar$.

Resta da controllare che il contro-termine che abbiamo aggiunto soddisfi i vincoli imposti dalla condizione di gauge-fixing (3.1) e dall'equazione di ghost (3.11), specificatamente chiediamo che[8]

$$\frac{\delta}{\delta B}\tilde{\Delta} = \frac{\delta}{\delta \bar{c}}\tilde{\Delta} = 0 \tag{3.27}$$

dove ricordiamo che Δ già soddisfa questi vincoli, vedi (3.21). Espandiamo ora $\tilde{\Delta}$ rispetto agli autovalori n dell'operatore $\mathcal{N}$[9]

$$\mathcal{N} = \mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^4x \left(B\frac{\delta}{\delta B} + \bar{c}\frac{\delta}{\delta \bar{c}}\right) = \left\{b, \mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^4x \; \bar{c}\frac{\delta}{\delta B}\right\} \tag{3.28}$$

che conta il grado di B e $\bar{c}$ dei polinomi[10] e otteniamo

$$\tilde{\Delta} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\Delta}_n \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{N}\tilde{\Delta}_n = n\tilde{\Delta}_n \tag{3.29}$$

La stessa espansione in n per Δ identifica $n = 0$ come l'unico termine rilevante, poiché Δ deve soddisfare le due equazioni (3.21), cioè Δ non dipende da B e $\bar{c}$. Sfruttando la definizione di $\mathcal{N}$ in termini di anticommutatore e la nilpotenza di b si trova che $\mathcal{N}$ commuta con l'operatore b. Applichiamo ora l'operatore di conta ad entarmbi i lati dell'Ansatz (3.24) (e ricordando $\mathcal{N}\Delta = 0$) otteniamo

$$\sum_{n\geq 1} n \; b\tilde{\Delta}_n = 0 \tag{3.30}$$

L'unica soluzione generale possibile è che $b\tilde{\Delta}_n = 0$ per tutti gli n positivi, quindi il termine rilevante è il monomio di grado $n = 0$ e ci permette di identificare

$$\Delta = b\tilde{\Delta}_0 \tag{3.31}$$

Poiché $\tilde{\Delta}_0$ è indipendente da B e $\bar{c}$ per costruzione, questo soddisfa identicamente i vincoli (3.27), come richiesto.

In questa sezione abbiamo assunto che il termine di rottura dell'identità di Slavnov-Taylor sia scrivibile in forma banale, come forma esatta (3.24). Potrebbero però esistere anche soluzioni della condizione di consistenza (3.23) non triviali, queste non possono essere riassorbite come contro-termini e danno luogo ad anomalie (di gauge).

[8] Il contrario non è necessario: se anche i contro-termini che servono per mantenere valida l'equazione di ghost e gauge-fixing non sono identicamente zero sotto l'applicazione di $\mathcal{S}$, abbiamo appena mostrato che possiamo comunque cancellarli con opportuni ulteriori contro-termini. E' però importante che questi nuovi contro-termini non cambino le equazioni precedendi, altrimenti si entra in un loop senza uscita.

[9] L'anticommutatore si trova per calcolo diretto usando le proprietà di anticommutatività dei Grassmann.

[10] $\mathcal{N}$ conta il grado del polinomio nel senso che $\mathcal{N}\mathcal{F} = n\mathcal{F}$ dove n è il grado del polinomio.

Il problema del trovare le soluzioni di $b\Delta = 0$ è un problema di *coomologia*. L'operatore di cobordo (coboundary operator, e.g. d che trasforma n-forme in $(n+1)$-forme) è l'operatore nilpotente b (in questo caso b fa passare da n a $n+1$ di ghost number). b agisce sullo spazio dei polinomi locali dei campi che sono invarianti di Poincaré, i funzionali locali.

Le classi di coomologia sono definite dalla relazione d'equivalenza

$$\Delta' \sim \Delta'' \quad \text{se e solo se} \quad \Delta' - \Delta'' = b\tilde{\Delta} \tag{3.32}$$

con $\tilde{\Delta}$ un funzionale locale di dimensione 4, cioè possono differire solo per b-differenziali esatti.

La classe di equivalenza nulla corrisponde all'insieme di polinomi locali identificati dall'Ansatz (3.24), mentre se la classe di coomologia è non nulla si hanno anomalie.

4 Coomologia BRS: anomalia di gauge

Studiamo ora la soluzione più generale al problema di coomologia dato dalla condizione di consistenza (3.23). Cerchiamo quindi il più generale funzionale locale Δ di dimensione 4 e ghost number 1 che soddisfi la condizione. La soluzione generale è data da

$$b\Delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = b\tilde{\Delta} + \hat{\Delta} \quad \text{con} \quad b\hat{\Delta} = 0 \tag{4.1}$$

e nella sezione precedente abbiamo studiato il caso in cui $\hat{\Delta} = 0$.

Per prima cosa notiamo che l'azione classica Σ è invariante sotto la trasformazione rigida lineare

$$\delta_{\text{rig}}\phi(x) = i[\varepsilon^a \tau_a, \phi(x)] = i\varepsilon^a \delta_a \phi(x) \qquad \phi = A_\mu, c, \bar{c}, B, \rho, \sigma \tag{4.2}$$

Questa simmetria sopravvive ad ogni ordine in $\hbar$, per cui anche l'azione quantistica Γ soddisfa l'identità di Ward

$$\mathcal{W}_a \Gamma = \int \mathrm{d}^4x \sum_\phi \delta_a \phi \frac{\delta}{\delta\phi} \Gamma = 0 \tag{4.3}$$

e dalla proprietà di commutazione

$$\mathcal{W}_a \mathcal{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{W}_a \mathcal{F} \qquad \forall \mathcal{F} \tag{4.4}$$

si ottiene una condizione di consistenza su Δ, cioè Δ deve essere invariante sotto le trasformazioni rigide (4.2)

$$\mathcal{W}_a \Delta = 0 \tag{4.5}$$

per cui nel cercare la soluzione all'equazione di consistenza possiamo limitarci a cercare funzionali locali Δ che siano invarianti rigidi.

4.1 Indipendenza dell'anomalia dai campi esterni

Per prima cosa, mostriamo che il termine di anomalia non dipende dai campi esterni $\hat{\rho}$ (e quindi $\bar{c}$) e σ. Usando la notazione per le classi di equivalenza (3.32) scriviamo

$$\Delta(A, c, \hat{\rho}, \sigma) \sim \Delta(A, c) \tag{4.6}$$

Cioè i due Δ sono nella stessa classe di equivalenza: la dipendenza da σ e $\hat{\rho}$ è solo nel termine triviale $b\tilde{\Delta}$. Ricordiamo che Δ non può dipendere esplicitamente da B e $\bar{c}$ a causa dei vincoli imposti dalla condizione di gauge-fixing e l'equazione di ghost (3.21).

Iniziamo mostrando che Δ non dipende ad σ. Sapendo che $\dim[\sigma] = 4$ e $\Phi\Pi[\sigma] = -2$, il più generale polinomio con dimensione 4 e ghost number 1 che dipende da σ ha la forma **[Perché non vengono mai considerati multi-trace operators?]**

$$\Delta \subset \alpha_0 \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \, \sigma c^3 \tag{4.7}$$

la condizione di consistenza, applicata su questo polinomio, fornisce[11]

$$\begin{aligned} 0 = b\Delta &= \alpha_0 \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta c} c^3 + i\sigma c^4 \right) + \text{termini indipendenti da } \sigma \\ &= i\alpha_0 \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \left([c, \sigma] c^3 + \sigma c^4 \right) + \text{termini indipendenti da } \sigma \\ &= -i\alpha_0 \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \, \sigma c^4 + \text{termini indipendenti da } \sigma \end{aligned} \tag{4.8}$$

quindi l'unica soluzione è imporre $\alpha_0 = 0$ e dunque Δ non dipende da σ.

Analogamente, il più generico polinomio in $\hat{\rho}$ è dato da

$$\begin{aligned} &\Delta \subset \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \, \hat{\rho}^\mu R_\mu(A, c) \\ &R_\mu(A, c) = \alpha_1 \partial_\mu c c + \alpha_2 c \partial_\mu c + \alpha_3 A_\mu c^2 + \alpha_4 c A_\mu c + \alpha_5 c^2 A_\mu \end{aligned} \tag{4.9}$$

Applicando la condizione di consistenza troviamo

$$\begin{aligned} b\Delta &= \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} - \hat{\rho}^\mu b R_\mu \right) \\ &= \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \left(i\{\hat{\rho}^\mu, c\} R_\mu - \hat{\rho}^\mu b R_\mu \right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

che ha come soluzione

$$\alpha_3 = -i\alpha_1 \qquad \alpha_4 = 0 \qquad \alpha_5 = i\alpha_2 \tag{4.11}$$

[11] Calcolo diretto, ricordando che $ic^2 = bc$ e dunque $ibc^2 = b^2c = 0$ per la nilpotenza.

Ma con queste condizioni è possibile riscrivere Δ come la b-variazione del polinomio locale[12]

$$\Delta \subset b\mathrm{Tr} \int \mathrm{d}^4 x \hat{\rho}^\mu \left(-\alpha_1 A_\mu c + \alpha_2 c A_\mu\right) \tag{4.12}$$

a meno di termini che non dipendono da σ e $\hat{\rho}^\mu$. Non è quindi parte della coomologia, ed è riassorbibile in $\tilde{\Delta}$. Abbiamo dunque fatto vedere che $\Delta \sim \Delta(A, c)$, come volevamo.

4.2 L'anomalia di gauge e l'equazione di discesa

Rimane quindi da risolvere la coomologia della condizione di consistenza[13]

$$s\Delta(A, c) = 0 \tag{4.13}$$

Questa equazione è nota come *equazione di consistenza di Wess-Zumino*, scritta con il formalismo BRS. Indichiamo con l'apice il ghost number e scriviamo genericamente

$$\Delta = \int \mathrm{d}^4 x \; Q^1(x) \tag{4.14}$$

Poiché $s\Delta = 0$, ne consegue che

$$sQ^1 = \partial_\mu Q^2_\mu \tag{4.15}$$

dove l'azione di s aumenta di 1 il ghost number, inoltre poiché l'integrale deve essere zero, l'unica soluzione è che sQ^1 sia una derivata totale e quindi Q^2_μ ha dimensione 3. Sfruttiamo ora la proprietà di nilpotenza di s e otteniamo[14]

$$sQ^2_\mu = \partial^\nu Q^3_{[\mu\nu]} \qquad \Longrightarrow \qquad \partial^\mu s Q^2_\mu = 0 \tag{4.16}$$

Gli stessi passaggi possono ora essere ripetuti in serie, aumentando sempre di 1 il ghost number, il numero di indici antisimmetrizzati e riducendo di uno la dimensione del polinomio. Si arriva così alle così dette *equazioni di discesa*

$$\begin{aligned} sQ^1 &= \partial_\mu Q^2_\mu \\ sQ^2_\mu &= \partial^\nu Q^3_{[\mu\nu]} \\ sQ^3_{[\mu\nu]} &= \partial^\rho Q^4_{[\mu\nu\rho]} \\ sQ^4_{[\mu\nu\rho]} &= \partial^\lambda Q^5_{[\mu\nu\rho\lambda]} \\ sQ^5_{[\mu\nu\rho\lambda]} &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

[12] Calcolo diretto.

[13] $b = s$ quando agisce su A_μ o c.

[14] Poiché $s^2 Q^1 = \partial_\mu s Q^2_\mu = 0$ per la nilpotenza, l'unico modo è che Q^3 porti con sè una derivata e due indici antisimmetrizzati, in modo tale che $\partial_\mu \partial_\nu Q^3_{[\mu,\nu]} = 0$.

dove l'ultima equazione nasce dal fatto che Q^6 avrebbe dimensione -1, ma non ci sono campi con dimensione negativa.

Le equazioni di discesa sono esprimibili anche usando la notazione delle forme, in particolare il lato destro è semplicemente $\mathrm{d} \star Q^p$. Sostanzialmente le equazioni di discesa discendono dal fatto che l'operatore nilpotente derivata esterna d ha comologia triviale sui funzionali locali, cioè l'unica soluzione a $\mathrm{d}f = 0$ è data da $f = \mathrm{d}w$. Sia s che d agiscono su funzionali locali (le p-forme): uno alza il ghost number di un'unità e l'altro la dimensione della p-forma. Sfruttando le proprietà di commutazione dei due operatori si risolvono le equazioni di discesa.

La soluzione più generale, a meno di termini BRS esatti o derivate totali, è data da

$$\begin{aligned} Q^1 &= \beta\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left(c\partial^\mu\left(\partial^\nu A^\rho A^\sigma + \frac{i}{2}A^\nu A^\rho A^\sigma\right)\right) \\ &= \beta\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}c_a\partial^\mu\left(d^{abc}\partial^\nu A^\rho_b A^\sigma_c + \frac{\mathcal{D}^{abcd}}{12}A^\nu_b A^\rho_c A^\sigma_d\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

dove β è il coefficiente dell'anomalia ed è group-theoretical. d_{abc} è il tensore totalmente simmetrico definito come

$$d_{(abc)} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\tau_a\{\tau_b, \tau_c\}\right) \tag{4.19}$$

e per finire abbiamo definito

$$\mathcal{D}_{abcd} = d^n{}_{ab}f_{ncd} + d^n{}_{ac}f_{ndb} + d^n{}_{ad}f_{nbc} \tag{4.20}$$

L'anomalia di gauge ABJ non abeliana è quindi

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} = \beta\mathcal{A} &= \beta\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^4x\; c\partial^\mu\left(\partial^\nu A^\rho A^\sigma + \frac{i}{2}A^\nu A^\rho A^\sigma\right) \\ &= \beta\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\int \mathrm{d}^4x\; c_a\partial^\mu\left(d^{abc}\partial^\nu A^\rho_b A^\sigma_c + \frac{\mathcal{D}^{abcd}}{12}A^\nu_b A^\rho_c A^\sigma_d\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Si possono scrivere libri interi sull'anomalia [8, 10], per i profondi legami che ha con la geometria e la topologia. In particolare qui ricordiamo brevemente che:

- L'esistenza dell'anomalia dipenda da β, il quale dipende dal gruppo di Lie e dalla scelta delle sue rappresentazioni.
- In particolare il Modello Standard (e singolarmente $SU(2)$ e QCD) non hanno anomalie di gauge (che portano ad incoerenze nella teoria), nè gravitazionali.
- La cancellazione delle anomalie di gauge spiega la quantizzazione delle cariche.
- L'anomalia è topologica (teorema dell'indice di Atiyah-Singer), è esatta ad un loop (triangle diagrams), è un effetto IR (dipende dagli zero-modes) e UV (regolarizzazione alla Fujikawa). Inoltre è collegata al theta term (che è derivata totale), al winding-number (classe di omotopia) e agli istantoni.

5 Stabilità

Abbiamo visto che l'identità di Slavnov-Taylor può essere rotta a livello quantistico da un'inserzione $\Delta = b\tilde{\Delta} + \hat{\Delta}$. Il primo termine può essere compensato dall'introduzione di un opportuno contro-termine locale nell'azione quantistica $\Gamma \to \Gamma' = \Gamma - \hbar^n \tilde{\Delta}$, mentre $\hat{\Delta}$ rappresenta un'anomalia di gauge della teoria e non può essere eliminato da contro-termini locali. Assumiamo nel seguito che non ci sia anomalia, cioè $\beta = 0$ e dunque $b\tilde{\Delta} = \Delta \neq 0$, cioè il contro-termine $\tilde{\Delta}$ non è BRS invariante in generale. Si nota dunque che $\tilde{\Delta}$ è definito solo modulo polinomi locali L che sono BRS invarianti, cioè tali per cui $bL = 0$, infatti sia $\tilde{\Delta}$ che $\tilde{\Delta} + L$ hanno lo stesso effetto di cancellare Δ nell'identità di Slavnov-Taylor. Chiamiamo dunque $\tilde{\Delta}$ il contro-termine non invariante di BRS e L il contro-termine invariante di BRS.

In questa sezione studiamo la *stabilità*: verifichiamo che la teoria sia stabile sotto l'effetto di correzioni radiative, cioè che il più generale contro-termine invariante L che possiamo aggiunge all'azione corrisponde a una rinormalizzazione dei campi e dei parametri già presenti nella teoria classica. Da un punto di vista formale, la stabilità è catturata dall'*equazione di Callan-Symanzik*. I contro-termini non invarianti di BRS non sono liberi, sono fissati dalla necessità di cancellare le fluttuazioni quantistiche rompono la simmetria, per cui non rientrano nel discorso della stabilità.

5.1 Contro-termini invarianti

Come abbiamo detto $\tilde{\Delta}$ è definito solo a meno di polinomi L di dimensione minore di 4 e ghost number 0, e che sono b-chiusi $bL = 0$.

Risolvere questa equazione è di nuovo un problema di coomologia, come per l'equazione di consistenza (3.23), cambia solo il grading: L è un funzionale locale con dimensione 4 e ghost number 0 (mentre $\Phi\Pi[\Delta] = 1$). La soluzione generale è data da

$$L = L_{\text{coom}} + b\hat{L} \tag{5.1}$$

$$L_{\text{coom}} = \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \; F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{5.2}$$

dove L_{coom} è l'unico elemento presente nella coomologia. $\hat{L}$ è un funzionale locale di ghost number -1 e dimensione 4 ed è una combinazione lineare di

$$\hat{L}_1 = \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \; \hat{\rho}^\mu A_\mu \tag{5.3a}$$

$$\hat{L}_2 = \operatorname{Tr} \int \mathrm{d}^4x \; \sigma c \tag{5.3b}$$

le cui b-variazioni sono

$$b\hat{L}_1 = \mathcal{N}_A \Sigma \coloneqq \operatorname{Tr} \left(N_A - N_\rho - N_B - N_{\bar{c}} \right) \Sigma + 2\alpha \partial_\alpha \Sigma \tag{5.4a}$$

$$b\hat{L}_2 = \mathcal{N}_c \Sigma \coloneqq \operatorname{Tr} \left(N_c - N_\sigma \right) \Sigma \tag{5.4b}$$

dove ricordiamo che N sono i *counting operators*

$$N_\varphi = \int \mathrm{d}^4x\ \varphi \frac{\delta}{\delta\varphi} \tag{5.5}$$

I tre coefficienti liberi di $L_{\text{coom}}, \hat{L}_1$ e $\hat{L}_2$ possono quindi essere scelti in modo tale che sia soddisfatte le condizioni di rinormalizzazione, che prendiamo essere[15]

$$\frac{d}{dp^2}\Gamma^T(p^2)\bigg|_{p^2=\mu^2} = -\frac{1}{g^2} \tag{5.6a}$$

$$\frac{d}{dp^2}\Gamma_{c\bar{c}}(p^2)\bigg|_{p^2=\mu^2} = 1 \tag{5.6b}$$

$$\Gamma_{\sigma^a c^b c^c}(p_1,p_2,p_3)\big|_{p_i^2=\mu^2} = f_{abc} \tag{5.6c}$$

dove il regolatore μ ha dimensione 1 e Γ^T è la parte trasversa (al momento) del propagatore del campo di gauge $\Gamma_{A^\mu A^\nu}$. Fisicamente queste condizioni corrispondo a chiedere: il propagatore fisico del campo di gauge ha residuo $-1/g^2$, il residuo del propagatore dei ghost è 1 e che il vertice tra σ e due ghost è uguale a f_{abc}.

5.2 Parametri fisici e non fisici

I tre contro-termini invarianti in (5.1) e (5.4) possono essere messi in corrispondenza con i campi e le costanti dell'azione classica. In particolare (5.1) può essere visto come una ridefinizione della costante di accoppiamento di gauge g (che è un parametro fisico).

Gli altri due termini, coomologicamente triviali, possono essere riassorbiti dalle seguenti ridefinizioni di campi (compatibili con invarianza BRS) **[Non chiarissimo. Credo che Piguet intenda che e.g. $A' = \delta A = Z_A$ in rinormalizzazione pertrubativa, ma non mi torna benissimo comunque.]**

$$\begin{aligned} &A' = z_1 A \qquad && \rho' = -z_1\rho \qquad && B' = -z_1 B \qquad && \bar{c}' = -z_1\bar{c} \\ &c' = z_2 c && \sigma' = -z_2\sigma && && \end{aligned} \tag{5.7}$$

Queste corrispondono a ridefinizioni non fisiche, in quanto i campi non sono direttamente osservabili. Questa divisione è vera in generale: i funzionali locali invarianti triviali corrispondono a rinormalizzazione di parametri e campi non fisici, mentre i contro-termini invarianti con coomologia non triviale corrispondono a rinormalizzazione di parametri fisici.

6 Indipendenza di gauge degli operatori di osservabili fisiche

Come ultima cosa, mostriamo che le quantità fisiche osservabili sono indipendenti dalla scelta del gauge, cioè che le osservabili non dipendono dalla scelta del parametro α in (3.1).

[15] Γ_{ij} sono l'inverso delle trasformate di Fourier delle n-point functions.

Classicamente le osservabili sono associate a campi composti $Q^i(x)$ che sono invarianti di gauge e sono costruiti dai campi di base A_μ (e ψ se c'è materia). Le stesse osservabili, a livello quantistico, sono definite come operatori invarianti sotto BRS e non triviali **[Perché solo non triviali?]**, cioè stanno nella coomologia di BRS con numero di ghost uguale a zero. Dal punto di vista funzionale questo vuol dire che le inserzioni di $Q^i(x)$ sul funzionale generatore W soddisfano le identità di Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}[Q^i(x)\cdot W] = 0 \qquad \text{con} \qquad Q^i(x)\cdot W \neq \mathcal{S}[\tilde{Q}^i(x)\cdot W] \tag{6.1}$$

A livello quantistico gli operatori $Q^i(x)$, invarianti di gauge, sono introdotti considerando campi esterni $q_i(x)$ che sono BRS invarianti e accoppiano agli operatori $Q^i(x)$. Si ottiene quindi un generatore delle funzioni di Green $W(J,q)$ che soddisfa

$$\mathcal{S}W(J,q) = 0 \tag{6.2}$$

dove l'operatore di Slavnov-Taylor $\mathcal{S}$ è sempre dato da (2.14) (questo perché $sq^i = 0$ per costruzione). Derivando questa espressione per $\delta/\delta q$ (che commuta con $\mathcal{S}$) otteniamo (6.1).

Mostriamo ora che le funzioni di Green $\langle TQ^i(x_1)\dots Q^j(x_n)\rangle$ di operatori invarianti di gauge, ottenute derivando il funzionale generatore

$$Z_{\text{inv}}(q) = Z(J,q)\big|_{J=0} \tag{6.3}$$

sono indipendenti dalla scelta del parametro di gauge, cioè

$$\partial_\alpha Z_{\text{inv}}(q) = 0 \tag{6.4}$$

Per fare ciò estendiamo la simmetria BRS, mantenendo la proprietà fondamentale (nilpotenza). In particolare anche il parametro di gauge ora varia sotto BRS[16]

$$s\alpha = \chi \qquad s\chi = 0 \tag{6.5}$$

con χ un parametro di Grassmann. L'identità di Slavnov-Taylor ha ora un termine aggiuntivo, dovuto alla nuova trasformazione (lineare)

$$\mathcal{S}'Z(J,q) = \mathcal{S}Z(J,q) + \chi\frac{\partial}{\partial\alpha}Z(J,q) = 0 \tag{6.6}$$

Derivando rispetto a χ e mettendo alla fine $J = \chi = 0$ si ottiene il risultato voluto (6.4).

L'azione classica che risolve l'identità di Slavnov-Taylor estesa (6.6) è comunque data da (2.12), con l'aggiunta di un unico termine che dipende dal nuovo parametro χ

$$\Sigma \subset \frac{\chi}{2}\text{Tr}\int \mathrm{d}^4x\ \bar{c}B \tag{6.7}$$

[16] Vagamente simile agli spurioni: cioè quando si espande una simmetria rotta in modo da includere anche trasformazioni sui parametri ed ottenere una simmetria esatta.

Il modo per farlo vedere è che $\Sigma_{\rm gf}$ è una variazione BRS-esatta (2.15) e sulla simmetria estesa guadagna un termine extra dovuto alla variazione BRS di α. Inoltre, poiché α e χ formano un doppietto di BRS, un teorema ci assicura che è sempre possibile implementare la rinormalizzazione, cioè trovare un contro-termine che preserva la simmetria descritta dall'identità di Slavnov-Taylor estesa (la coomologia non dipende da α o χ).

7 Conclusione

Abbiamo mostrato in queste note come applicare i metodi della rinormalizzazione algebrica per studiare la rinormalizzazione della teoria di puro Yang-Mills. In particolare abbiamo visto come la teoria è definita dalle sue simmetrie e dai suoi campi, queste simmetrie inducono delle equazioni che l'azione deve soddisfare. Generalizzando le equazioni ad ogni ordine perturbativo in $\hbar$ abbiamo mostrato come il più generale termine che si può aggiungere alle equazioni può essere riassorbito da contro-termini, tranne una singola classe di termini che producono la così detta anomalia di gauge e implicano un'instabilità della teoria.

References

[1] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic Renormalization.* Springer, 1995.

[2] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory.* IOP Publishing, 1993.

[3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory.* Perseus Books Publishing, 1995.

[4] Y.-M. P. Lam, *Equivalence theorem on bogoliubov-parasiuk-hepp-zimmermann-renormalized lagrangian field theories*, *Phys. Rev. D* **7** (May, 1973) 2943–2949.

[5] Y.-M. P. Lam, *Perturbation lagrangian theory for scalar fields-ward-takahashi identity and current algebra*, *Phys. Rev. D* **6** (Oct, 1972) 2145–2161.

[6] J. H. Lowenstein, *Differential vertex operations in Lagrangian field theory*, *Commun. Math. Phys.* **24** (1971) 1–21.

[7] J. H. Lowenstein, *Normal-product quantization of currents in lagrangian field theory*, *Phys. Rev. D* **4** (Oct, 1971) 2281–2290.

[8] D. Tong, *Gauge Theory.* Cambridge University, 2018.

[9] S. Coleman, *Aspects of Symmetry, Selected Erice Lectures.* Cambridge University Press, 1985.

[10] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory.* Oxford University Press, 1996.