Tensore energia impulso in Relatività Generale

Luca Martinoia

Necessità del tensore energia impulso in RG

Il potenziale gravitazionale classico soddisfa l'*equazione di Poisson*

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

Principio di covarianza: cerchiamo un'equazione tensoriale che si riconduca a quella classica nel caso di campi deboli e velocità piccole.

L'ipotesi di campo debole si traduce nel fatto che la metrica è quasi piatta, quindi $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.[1]

[1] Metrica *mostly pluses* $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ed unità naturali $c = 1$.

Limite classico, equazione per la geodetica, troviamo

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G\rho$$

Principio di covarianza: tensore di rango 2 LHS che descriva la gravità (legato alla metrica) ed uno RHS che tenga conto del contenuto di materia.
In RG abbiamo alcuni tensori di rango 2 legati alla metrica: $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu}$. L'unico che soddisfa tutte le condizioni necessarie è però il tensore di Einstein.
Per corpi estesi: *tensore energia impulso* $T^{\mu\nu}$.

Equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Tensore energia impulso

Definizione

$T^{\mu\nu}$ è il flusso della densità di momento p^μ attraverso una superficie a x^ν costante.

Ha varie definizioni operative possibili in base all'ambito

- In teoria dei campi si definisce come la corrente conservata dal teorema di Noether per la simmetria di traslazione spazio-temporale
- In RG, alla Einstein-Hilbert, si definisce il tensore come la derivata funzionale dell'azione rispetto alla metrica

Indipendentemente dalla definizione, quello che serve a noi è il tensore energia impulso per un fluido ideale.

Tensore energia impulso in fisica classica

La fluidodinamica classica si basa su alcune equazioni fondamentali. La prima è l'*equazione di continuità* della massa[2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

Applicando $F_i = ma_i$ ad un volumetto di fluido si trova l'*equazione di Eulero*.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + f_i$$

Valida se si trascurano i termini dissipativi e viscosi (altrimenti si ottiene *Navier-Stokes*) $\rightarrow$ Fluido ideale.

[2] Indici latini da 1 a 3

La densità di momento è ρv_i. Studiamone la derivata temporale

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i$$

Riscriviamo il primo addendo usando l'eq. di Eulero[3] ed il secondo addendo con l'eq. di continuità.

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} v_i = 0$$
$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_k}\delta_{ik} + \frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} = 0$$
$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik} = 0$$

[3] Senza forze esterne

Definiamo il tensore della densità di momento come

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik}$$

Da questo è possibile estendere la definizione ad un tensore energia impulso classico $T_{NR}^{\mu\nu}$ a quattro componenti identificando

$$T_{NR}^{00} = \rho \qquad T_{NR}^{0i} = T_{NR}^{i0} = \rho v^i \qquad T_{NR}^{ik} = \Pi^{ik}$$

Con questa definizione $T_{NR}^{\mu\nu}$ è un tensore conservato

$$\partial_\mu T_{NR}^{\mu\nu} = 0$$

che riproduce sulla componente temporale l'equazione di continuità e sulla componente spaziale l'equazione di conservazione del momento.

Estensione relativistica

Cerchiamo la generalizzazione relativistica. L'analogo del vettore velocità è il vettore quadri-velocità, definito come la variazione della coordinata rispetto al tempo proprio

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad \Longrightarrow \quad u^\mu = \gamma(1, v_i)$$

che soddisfa la condizione di normalizzazione $u^\mu u_\mu = -1$.

Definizione

In analogia al caso classico, per un fluido perfetto relativistico

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P\Delta^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}$$

dove $\Delta^{\mu\nu}$ è un proiettore sulle componenti ortogonali a u^μ

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu \quad \Longrightarrow \quad \Delta^\mu_\nu u^\nu = 0$$

Proprietà tensore energia impulso

Proprietà:

- $T^{\mu\nu}$ è conservato (necessariamente, dato che il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$ ha divergenza nulla)[4]

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

  con D_μ derivata covariante
- Simmetrico[5] $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$
- Nel limite classico si ritrova il tensore energia impulso non relativistico

[4] Discende dall'invarianza per diffeomorfismi

[5] Questa proprietà non è automaticamente soddisfatta nella definizione campistica del tensore energia impulso dal Teorema di Noether

Derivazione relativistica

Si ottiene lo stesso risultato solo da RS. Nel sistema di riferimento di riposo del fluido (RF) il tensore energia impulso è necessariamente diagonale (perché fluido perfetto) e per l'isotropia tutte le componenti spaziali sono uguali

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{RF}} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Se il fluido si muove con quadri-velocità u^μ rispetto ad un osservatore, il tensore energia impulso si ottiene da $T^{\mu\nu}_{\mathrm{RF}}$ via boost con velocità $-u^\mu$. Si trova subito il risultato

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)g^{\mu\nu} + Pu^\mu u^\nu$$

Equazioni di Friedmann

La più generica metrica omogenea, isotropa ed a curvatura costante: metrica di Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

Applicando questa metrica alle equazioni di Einstein, con tensore energia impulso per un fluido perfetto $\rightarrow$ equazioni di Friedmann: determinano l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$$

Conservazione energia

Oltre alle equazioni di Friedmann, usando la conservazione del tensore energia impulso per la componente temporale ed usando il tensore del fluido perfetto, si ottiene

$$D_\mu T^{\mu 0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(P+\rho)$$

Per risolvere questa equazione e le equazioni di Friedmann è necessario fornire un'*equazione di stato* che lega P e ρ.

Equazione di stato

La forma più semplice è del tipo

$$P = w\rho$$

con w una costante.
I casi fisici più semplici sono: *materia* e *radiazione*. Oltre a questi si può considerare un'equazione di stato per il termine di *costante cosmologica* Λ. Sostituendo l'equazione di stato nella conservazione dell'energia si trova

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}$$

Che ha come soluzione generale

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-3(1+w)} & w \neq -1 \\ \text{cost} & w = -1 \end{cases}$$

Materia

Analizziamo ora le singole componenti. Per la materia non relativistica la pressione è trascurabile rispetto alla densità di energia, in altri termini

$$P = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = 0$$

Da cui otteniamo subito che

$$\rho_m \propto a^{-3}$$

Lo interpretiamo come il fatto che la densità di materia decresce con l'aumentare del volume.

Radiazione

Per trovare l'equazione di stato della radiazione usiamo il tensore energia impulso elettromagnetico

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \frac{1}{4\pi}(F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma})$$

Che è a traccia nulla $T^{\mu}_{\mu} = 0$.
Per il fluido perfetto traccia nulla si traduce in

$$P = \frac{1}{3}\rho \implies w = \frac{1}{3}$$

Con questa equazione di stato troviamo

$$\rho_{rad} \propto a^{-4}$$

Lo interpretiamo dicendo che la densità di radiazione decresce (come per la materia) con il volume, ma perde anche energia per redshift.

Energia oscura

Consideriamo adesso l'effetto dell'energia oscura. Questa appare nell'equazione di Einstein aggiungendo il termine di costante cosmologica

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda$$

Interpretiamo il nuovo termine come il tensore energia impulso del vuoto, quindi

$$T_{\Lambda}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Da cui si trova che l'equazione di stato è

$$P = -\rho = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad \Longrightarrow \quad w = -1$$

E quindi la densità di energia del vuoto è costante.