Soluzione esatta del modello di Ising 2D secondo Onsager e Kaufman

di Luca Martinoia

1 Introduzione al modello

Il modello di Ising è un modello matematico che descrive il comportamento di un reticolo di spin, è quindi per sua natura molto adatto a descrivere sistemi ferromagnetici. E' un modello molto importante in fisica, perchè è stato il primo modello esattamente risolubile non banale che mostrava una transizione di fase, il che ha permesso di validare la teoria alla base della meccanica statistica, ma ha anche dato numerosi spunti per capire come generalizzare lo studio delle transizioni di fase usando metodi diversi dalle teorie di campo medio.

Dal punto di vista fisico-matematico il modello (usando le notazioni adottate sul Huang), nel caso generale, altro non è che un insieme di N spin s_i (con $i=1,2,\ldots N$), distribuiti su un reticolo d dimensionale (detto Λ), dove ogni spin può assumere i valori $+1$ e -1 (spin up e down). Ad ogni sito reticolare è associato uno spin ed una configurazione di spin $s=\{s_1,s_2,\ldots\}$ vuol dire assegnare ad ogni spin un valore preciso.

Con queste notazioni, l'Hamiltoniana del sistema si può scrivere come

$$E\{s\}=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\epsilon_{ij}\,s_i\;s_j-\mu\sum_{i=1}^{N}h_i\,s_i \tag{1}$$

dove ϵ_{ij} rappresenta l'energia di interazione tra gli spin i e j, h il campo magnetico esterno e μ il momento magnetico (convenzionalmente con un segno meno davanti).

Il caso generale è molto complicato, vengono quindi di solito fatte alcune semplificazioni che rendono il problema più gestibile. Prima di tutto si impone che l'interazione tra gli spin non avvenga a distanza arbitraria, ma che avvenga solo tra "primi vicini", cioè tra spin situati su punti reticolari adiacenti. La prima somma non scorre più quindi su tutti i possibili spin, ma solo sulle coppie di spin vicini, di solito indicati con $<ij>$. Successivamente si impone che l'energia tra le coppie sia la stessa, cioè che $\epsilon_{ij}=\epsilon$ costante per ogni i,j. Per finire, si impone che il campo esterno sia costante (h) o, in certi casi, nullo. Con queste convenzioni l'Hamiltoniana risulta essere

$$E\{s\}=-\epsilon\sum_{<ij>}s_is_j-H\sum_{i=1}^{N}s_i$$

dove abbiamo ridefinito $H=\mu h$. Se $\epsilon>0$ l'interazione è detta *ferromagnetica*, mentre se $\epsilon<0$ è detta *antiferromagnetica* (nel seguito si considererà $\epsilon>0$).

La funzione di partizione canonica $\mathcal{Z}$ (come funzione della temperatura e del campo esterno) è semplicemente

$$\mathcal{Z}(H,T)=\sum_{s_1=\pm1}\sum_{s_2=\pm2}\ldots\sum_{s_N=\pm1}e^{-\beta E\{s\}}=\sum_{s}e^{-\beta E\{s\}}$$

dove la somma all'ultimo membro va intesa come una somma su tutte le possibili configurazioni del sistema. Analogamente quindi, la misura canonica è

$$P_\beta(s)=\frac{e^{-\beta E\{s\}}}{\mathcal{Z}}$$

E l'energia libera per particella appare, nel limite termodinamico, come

$$-\beta f(H,T)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mathcal{Z} \tag{2}$$

Dal potenziale termodinamico è poi possibile risalire alle altre grandezze termodinamiche, come l'energia e la magnetizzazione media.

2 Impostazione del problema nel caso bidimensionale

2.1 Preparazione

Prima di iniziare la soluzione vera e propria è bene fare chiarezza su alcune scelte, convenzioni e nomenclatura da usare nel seguito.

Nella soluzione si considera un reticolo quadrato di $N = n^2$ punti reticolari (reticolo $n \times n$) con condizioni al contorno periodiche, cioè tali per cui la riga/colonna $n+1$ è uguale alla prima riga/colonna, questo è equivalente a lavorare con un reticolo a forma di toroide.

Chiamiamo μ_α (con $\alpha = 1, ...n$) l'insieme ordinato degli spin dell'α-esima riga

$$\mu_\alpha \equiv \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}_{\text{riga}\,\alpha} \qquad \text{toroide:} \quad \mu_{n+1} = \mu_1 \quad e \quad s_{n+1} = s_1$$

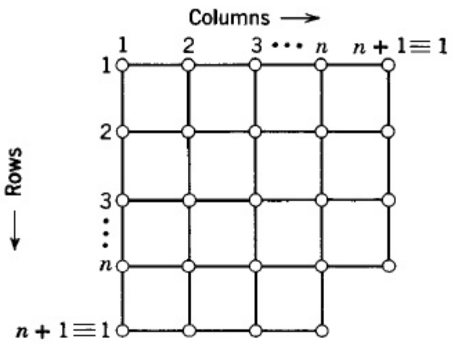

Figura 1. Reticolo $2D$.

Definiamo $E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})$ come l'energia di interazione tra la riga α e la successiva (ricordiamo che, nell'ipotesi di primi vicini, solo le righe adiacenti interagiscono), mentre $E(\mu_\alpha)$ è l'energia di interazione tra spin della stessa riga più l'energia di interazione con il campo esterno.

$$E(\mu, \mu') = -\epsilon \sum_{k=1}^{n} s_k\, s'_k$$

$$E(\mu) = -\epsilon \sum_{k=1}^{n} s_k\, s_{k+1} - H \sum_{k=1}^{n} s_k$$

dove μ e μ' sono le configurazioni di due righe adiacenti. Con queste notazioni l'energia totale del sistema, per una data configurazione, è

$$E\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \sum_{\alpha=1}^{n} [E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) + E(\mu_\alpha)]$$

Definiamo adesso una matrice $2^n \times 2^n$ tale per cui i suoi elementi di matrice siano

$$\langle \mu | \mathbf{P} | \mu' \rangle \equiv e^{-\beta[E(\mu, \mu') + E(\mu)]}$$

Con queste definizioni quindi la funzione di partizione si scrive come

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(H, T) &= \sum_{\mu_1} \ldots \sum_{\mu_n} \exp\left\{-\beta \sum_{\alpha=1}^{n} [E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) + E(\mu_\alpha)]\right\} = \\
&= \sum_{\mu_1} \ldots \sum_{\mu_n} \langle \mu_1 | \mathbf{P} | \mu_2 \rangle \langle \mu_2 | \mathbf{P} | \mu_3 \rangle \cdots \langle \mu_n | \mathbf{P} | \mu_1 \rangle = \\
&= \sum_{\mu_1} \langle \mu_1 | \mathbf{P}^n | \mu_1 \rangle = \operatorname{Tr} \mathbf{P}^n
\end{aligned}$$

Dato che la traccia di una matrice non dipende dalla base, possiamo per semplicità scegliere di lavorare nella base in cui **P** appare come diagonale, con $\lambda_1 ... \lambda_{2^n}$ i 2^n autovalori della matrice. Quindi la funzione di partizione assume la semplice forma

$$\mathcal{Z}(H,T) = \sum_{\alpha=1}^{2^n} (\lambda_\alpha)^n$$

Raccogliendo l'autovalore massimo $\lambda_{\max}$, nel limite $n \to \infty$, tutti gli altri autovalori vanno a zero e l'unico valore che conta è appunto il massimo. Inoltre, essendo che $\lambda_{\max}$ ci aspettiamo sia dell'ordine di e^n, abbiamo che

$$-\beta f(H,T) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{Z} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \lambda_{\max} \tag{3}$$

dove abbiamo ipotizzato che il limite esista finito e che gli autovalori siano tutti positivi. Il problema quindi si riduce a trovare il valore esatto dell'autovalore massimo della matrice **P**.

2.2 Forma della matrice P

Per ricavare gli elementi della matrice **P** rispetto ad una data configurazione s possiamo scrivere

$$\langle s_1, ..., s_n|\mathbf{P}|s'_1, ..., s'_n\rangle = \prod_{k=1}^{n} e^{\beta H s_k} e^{\beta \epsilon s_k s_{k+1}} e^{\beta \epsilon s_k s'_k}$$

Definiamo ora tre nuove matrici, sempre $2^n \times 2^n$, chiamate $\mathbf{V}'_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$, tali per cui

$$\begin{aligned}
\langle s_1, ..., s_n|\mathbf{V}'_1|s'_1, ..., s'_n\rangle &= \prod_{k=1}^{n} e^{\beta \epsilon s_k s'_k} \\
\langle s_1, ..., s_n|\mathbf{V}_2|s'_1, ..., s'_n\rangle &= \delta_{s_1 s'_1} ... \delta_{s_n s'_n} \prod_{k=1}^{n} e^{\beta \epsilon s_k s_{k+1}} \\
\langle s_1, ..., s_n|\mathbf{V}_3|s'_1, ..., s'_n\rangle &= \delta_{s_1 s'_1} ... \delta_{s_n s'_n} \prod_{k=1}^{n} e^{\beta H s_k}
\end{aligned} \tag{4}$$

con $\delta_{ss'}$ il simbolo di Kronecker. In questa forma $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ risultano diagonali, inoltre si ritrova che

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}_3 \, \mathbf{V}_2 \, \mathbf{V}'_1$$

2.3 Matrici di spin

Introduciamo ora delle nuove matrici, che permettono di riscrivere le tre matrici **V** in una forma più comoda e gestibile. Chiamiamo le tre solite matrici di spin di Pauli X, Y e Z

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per le quali valgono le solite proprietà

$$\begin{array}{ccc}
X^2 = 1 & Y^2 = 1 & Z^2 = 1 \\
\{X, Y\} = 0 & \{Y, Z\} = 0 & \{Z, X\} = 0 \\
XY = iZ & YZ = iX & ZX = iY
\end{array} \tag{5}$$

Definiamo adesso tre nuovi set di matrici $2^n \times 2^n$ nel seguente modo ($\alpha = 1, ..., n$)[1]

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_\alpha &\equiv 1 \times 1 \times \cdots \times X \times \cdots \times 1 \\
\mathbf{Y}_\alpha &\equiv 1 \times 1 \times \cdots \times Y \times \cdots \times 1 \qquad (\alpha - \text{esima posizione}) \\
\mathbf{Z}_\alpha &\equiv 1 \times 1 \times \cdots \times Z \times \cdots \times 1
\end{aligned}$$

1. Il prodotto diretto va inteso nel modo usuale: date due matrici quadrate $m \times m$ A e B, il prodotto diretto $A \times B$ è una matrice $m^2 \times m^2$ con elementi di matrice dati da $\langle i\ i'|A \times B|j\ j'\rangle \equiv \langle i|A|j\rangle\langle i'|B|j'\rangle$.

Valgono le seguenti proprietà (per $\alpha \neq \beta$)

$$\begin{aligned}[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta] = [\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Y}_\beta] = [\mathbf{Z}_\alpha, \mathbf{Z}_\beta] &= 0 \\ [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{Y}_\beta] = [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{Z}_\beta] = [\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Z}_\beta] &= 0\end{aligned}$$

Inoltre, fissato α, le matrici così definite formalmente soddisfano le proprietà 5.

Per ogni matrice X il cui quadrato è l'identità si può far vedere, sfruttando lo sviluppo in serie della funzione esponenziale, che vale la seguente equivalenza

$$e^{\theta X} = \cosh\theta + X \sinh\theta \tag{6}$$

con θ numero complesso. In particolare quindi questo vale, sempre con la solita prescrizione della scrittura formale per i tre set di matrici $\mathbf{X}_\alpha$, $\mathbf{Y}_\alpha$ e $\mathbf{Z}_\alpha$.

2.4 Le matrici V

Dalla prima equazione 4 si nota che $\mathbf{V}_1'$ altro non è che il prodotto diretto di n matrici identiche 2×2

$$\mathbf{V}_1' = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \times \cdots \times \boldsymbol{a}$$

dove $\boldsymbol{a}$ è definita come

$$\langle s|\boldsymbol{a}|s'\rangle = e^{\beta\epsilon s s'}$$

Da cui

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} e^{\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} \\ e^{-\beta\epsilon} & e^{\beta\epsilon} \end{pmatrix} = e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon} X = \sqrt{2\sinh(2\beta\epsilon)}\, e^{\theta X} \qquad \text{con} \quad \tanh\theta \equiv e^{-2\beta\epsilon}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la 6.[2] Possiamo quindi riscrivere $\mathbf{V}_1'$ nella forma

$$\mathbf{V}_1' = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2}\, e^{\theta X} \times e^{\theta X} \times \cdots \times e^{\theta X}$$

Poichè vale la seguente relazione

$$e^{\theta X} \times e^{\theta X} \times \cdots \times e^{\theta X} = e^{\theta \mathbf{X}_1}\, e^{\theta \mathbf{X}_2} \cdots e^{\theta \mathbf{X}_n}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1' &= [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2}\, \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 &= \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\theta \mathbf{X}_\alpha} \qquad \text{con} \quad \tanh\theta \equiv e^{-2\beta\epsilon}\end{aligned} \tag{7}$$

Analogamente si ottiene

$$\mathbf{V}_2 = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\beta\epsilon \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha+1}} \qquad \text{con} \quad \mathbf{Z}_{n+1} \equiv \mathbf{Z}_1 \tag{8}$$

$$\mathbf{V}_3 = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\beta H \mathbf{Z}_\alpha}$$

$$\mathbf{P} = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2}\, \mathbf{V}_3 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 \tag{9}$$

Noi in particolare studieremo il caso $H = 0$, cioè campo esterno nullo. In questo caso $\mathbf{V}_3 = 1$ ed il problema si riduce a diagonalizzare ciò che resta della matrice $\mathbf{P}$. Questo purtroppo non ci permette di studiare la magnetizzazione media, dato che è la derivata rispetto ad H dell'energia libera, ma possiamo comunque trovare il punto critico e l'andamento asintotico.

2. Per calcolo diretto.

3 Parentesi matematica

Definiamo un insieme di $2n$ matrici Γ_μ ($\mu = 1, 2, ..., 2n$) tali che soddisfino le regole di anticommutazione

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad \mu, \nu = 1, ..., 2n \tag{10}$$

Queste matrici soddisfano alcune proprietà che non dimostriamo, in particolare

a) Le Γ_μ non possono essere più piccole di $2^n \times 2^n$.

b) Chiamati $\{\Gamma_\mu\}$ e $\{\Gamma'_\mu\}$ due insiemi di matrici che soddisfano la proprietà 10, allora esiste una matrice non singolare $\mathbf{S}$ tale per cui $\Gamma_\mu = \mathbf{S}\Gamma'_\mu \mathbf{S}^{-1}$.

c) Ogni matrice $2^n \times 2^n$ può essere espressa come una combinazione lineare della matrice unità, delle matrici Γ_μ e di tutti i prodotti indipententi del tipo $\Gamma_\mu\Gamma_\nu$, $\Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\lambda$, etc...

Il caso $n = 1$ fornisce semplicemente le matrici di Pauli, quello $n = 2$ le matrici gamma di Dirac γ_μ. Una possibile rappresentazione delle matrici $\{\Gamma_\mu\}$ è

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 = \mathbf{Z}_1 & \Gamma_2 = \mathbf{Y}_1 \\ \Gamma_3 = \mathbf{X}_1\mathbf{Z}_2 & \Gamma_4 = \mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2 \\ \Gamma_5 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{Z}_3 & \Gamma_6 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \Gamma_{2\alpha-1} & = & \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_{\alpha-1}\,\mathbf{Z}_\alpha & \alpha = 1, ..., n \\ \Gamma_{2\alpha} & = & \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_{\alpha-1}\,\mathbf{Y}_\alpha & \alpha = 1, ..., n \end{array} \tag{11}$$

Si possono inoltre ottenere rappresentazioni equivalente scambiando i ruoli di $\mathbf{X}_\alpha$ e $\mathbf{Z}_\alpha$ o anche, semplicemente, permutando gli indici delle matrici $\Gamma_1, ..., \Gamma_{2n}$.

Se ora scegliamo un certo set specifico di $\{\Gamma_\mu\}$, possiamo introdurre una nuova matrice ω di dimensione $2n \times 2n$ che descrive una trasformazione lineare ortogonale sui membri di $\{\Gamma_\mu\}$.

$$\Gamma'_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu}\,\Gamma_\nu$$

dove in generale $\omega_{\mu\nu}$ sono numeri complessi tali per cui

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu}\,\omega_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \omega^T\omega = 1$$

La matrice ω è quindi una matrice di rotazione nello spazio ordinato delle $\{\Gamma_\mu\}$. Poichè anche le $\{\Gamma'_\mu\}$ soddisfano 10, dalla proprietà b) sappiamo che esiste una matrice $\mathbf{S}(\omega)$ tale per cui

$$\Gamma'_\mu = \mathbf{S}(\omega)\,\Gamma_\mu\,\mathbf{S}^{-1}(\omega)$$

C'è una corrispondenza $\mathbf{S}(\omega) \longleftrightarrow \omega$, per cui è possibile dire che $\mathbf{S}(\omega)$ è semplicemente una rappresentazione di dimensione $2^n \times 2^n$ di una rotazione ω in uno spazio $2n$-dimensionale.

$$\Gamma'_\mu = \mathbf{S}(\omega)\,\Gamma_\mu\,\mathbf{S}^{-1}(\omega) = \sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu}\,\Gamma_\nu$$

E' chiaro che date due rotazioni ω_1 ed ω_2, la matrice $\omega_1\,\omega_2$ è anch'essa una rotazione, inoltre, essendo $\mathbf{S}(\omega)$ una rappresentazione, vale la proprietà

$$\mathbf{S}(\omega_1\,\omega_2) = \mathbf{S}(\omega_1)\,\mathbf{S}(\omega_2) \tag{12}$$

Consideriamo adesso una rotazione specifica: prendiamo una rotazione nel piano $\mu\nu$ di un angolo θ (complesso), definita dalla trasformazione[3]

$$\begin{cases} \Gamma'_\lambda = \Gamma_\lambda & \lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu \\ \Gamma'_\mu = \Gamma_\mu \cos\theta + \Gamma_\nu \sin\theta & \mu \neq \nu \\ \Gamma'_\nu = -\Gamma_\mu \sin\theta + \Gamma_\nu \cos\theta & \mu \neq \nu \end{cases}$$

La matrice di rotazione associata a questa trasformazione la indichiamo con $\omega(\mu\nu|\theta)$ ed è sostanzialmente una matrice identità, tranne per la sottomatrice 2×2 indicata dalle righe $\mu\nu$, dove appare invece la solita matrice di rotazione bidimensionale. Per questa matrice valgono le due proprietà

$$\begin{aligned} \omega(\mu\nu|\theta) &= \omega(\nu\mu|-\theta) \\ \omega^T(\mu\nu|\theta)\,\omega(\mu\nu|\theta) &= 1 \end{aligned}$$

Lemma 1. *Se* $\omega(\mu\nu|\theta) \longleftrightarrow \mathbf{S}(\theta)$ *allora*

$$\mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta) = e^{-1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} \tag{13}$$

Dimostrazione. Se $\mu\neq\nu$, poichè $\Gamma_\mu\Gamma_\nu = -\Gamma_\nu\Gamma_\mu$ allora vale che $(\Gamma_\mu\Gamma_\nu)^2 = \Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\nu = -1$ (notando che $\Gamma_\mu^2 = 1$). Si può dunque scrivere un'identità analoga alla 6[4]

$$e^{-1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} = \cos\frac{\theta}{2} - \Gamma_\mu\Gamma_\nu\sin\frac{\theta}{2}$$

Dato che $(\Gamma_\mu\Gamma_\nu)(\Gamma_\nu\Gamma_\mu) = (\Gamma_\nu\Gamma_\mu)(\Gamma_\mu\Gamma_\nu) = 1$ si ottiene

$$e^{1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu}\, e^{-1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} = e^{1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu}\, e^{1/2\theta\Gamma_\nu\Gamma_\mu} = e^{1/2\theta(\Gamma_\mu\Gamma_\nu+\Gamma_\nu\Gamma_\mu)} = 1$$

Da cui possiamo concludere che

$$\mathbf{S}_{\mu\nu}^{-1}(\theta) = e^{1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu}$$

Per calcolo diretto si può mostrare che

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta)\Gamma_\lambda\mathbf{S}_{\mu\nu}^{-1}(\theta) &= \Gamma_\lambda \qquad \lambda\neq\mu, \lambda\neq\nu \\ \mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta)\Gamma_\mu\mathbf{S}_{\mu\nu}^{-1}(\theta) &= \Gamma_\mu\cos\theta + \Gamma_\nu\sin\theta \\ \mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta)\Gamma_\mu\mathbf{S}_{\mu\nu}^{-1}(\theta) &= -\Gamma_\mu\sin\theta + \Gamma_\nu\cos\theta \end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Gli autovalori di* $\omega(\mu\nu|\theta)$ *sono 1 (con molteplicità* $2n-2$*) e* $e^{\pm i\theta}$. *Gli autovalori di* $\mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta)$ *sono* $e^{\pm i\theta/2}$ *(ognuno con molteplicità* 2^{n-1}*).*

Dimostrazione. La prima parte si vede per calcolo diretto, è sufficente diagonalizzare la matrice. La seconda affermazione invece può essere provata scegliendo una rappresentazione specifica per $\Gamma_\mu\Gamma_\nu$, dato che gli autovalori non dipendono dalla rappresentazione scelta.

Scegliamo la rappresentazione tipo la 11, ma con $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ scambiati di ruolo. Possiamo scegliere le due matrici Γ_μ e Γ_ν liberamente senza perdita di generalità. Per semplicità possiamo per esempio prendere

$$\Gamma_\mu = \mathbf{Z}_1\mathbf{X}_2 \qquad \text{e} \qquad \Gamma_\nu = \mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_2$$

Con questa scelta si ottiene che

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu = \mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2 = i\mathbf{Z}_2 = 1\times\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\times 1\times\cdots\times 1$$

Si ha quindi

$$\mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} - \Gamma_\mu\Gamma_\nu\sin\frac{\theta}{2} = 1\times\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}\times 1\times\cdots\times 1$$

In questa rappresentazione gli elementi di matrice di $\mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta)$ sono, esplicitamente,

$$\langle s_1, \ldots, s_n|\mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta)|s_1', \ldots, s_n'\rangle = e^{-is_2\theta/2}\prod_{k=1}^{n}\delta_{s_k s_k'}$$

$\mathbf{S}_{\mu\nu}(\theta)$ è dunque diagonale e gli autovalori sono $e^{i\theta/2}$ ed $e^{-i\theta/2}$ ciascuno ripetuto 2^{n-1} volte. s_2 appare unicamente per la scelta del segno. □

3. La definizione è diversa da quella classica per seguire le notazioni usate sul Huang.
4. Come prima, è sufficente sviluppare in serie l'esponenziale e separare in termini pari e dispari.

Lemma 3. *Definiamo ω come il prodotto di n rotazioni piane che commutano tra loro*

$$\omega = \omega(\alpha\beta|\theta_1)\,\omega(\gamma\delta|\theta_2)\cdots\omega(\mu\nu|\theta_n)$$

Dove $\{\alpha,\beta,\ldots,\mu,\nu\}$ è una permutazione dell'insieme $\{1,2,\ldots,2n\}$ e gli angoli sono come al solito numeri complessi. Valgono allora le seguenti proprietà

a) $\omega \longleftrightarrow \mathbf{S}(\omega)$ *con*

$$\mathbf{S}(\omega) = e^{-1/2\theta_1\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}\, e^{-1/2\theta_2\Gamma_\gamma\Gamma_\delta}\cdots e^{-1/2\theta_n\Gamma_\mu\Gamma_\nu} \tag{14}$$

b) I $2n$ autovalori di ω sono

$$e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \ldots, e^{\pm i\theta_n} \tag{15}$$

c) I 2^n autovalori di $\mathbf{S}(\omega)$ sono

$$e^{i/2(\pm\theta_1\pm\theta_2\pm\cdots\pm\theta_n)}$$

dove bisogna intendere di scegliere tutti i segni liberamente.

Dimostrazione. Il primo punto deriva semplicemente dalle proprietà delle rappresentazioni 12, il secondo ed il terzo punto dal Lemma 1 e 2 e dal fatto che, poichè $[\Gamma_\mu\Gamma_\nu, \Gamma_\alpha\Gamma_\beta] = 0$, è possibile manovrare gli esponenziali come se fossero numerici. □

A patto quindi di poter scrivere ω come prodotto di rotazioni che commutano, è possibile risalire subito agli autovalori di $\mathbf{S}(\omega)$.

4 Soluzione

Se adesso usiamo l'equazione 9 nella formula 3 per l'energia libera, nel caso $H = 0$, troviamo subito

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mathcal{Z}(0,T) = \frac{1}{2}\log[2\sinh(2\beta\epsilon)] + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Lambda \tag{16}$$

dove abbiamo definito Λ come il più grande autovalore della matrice $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$, con $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ date da 7 e 8. Resta quindi da trovare Λ e confermare le ipotesi di partenza (autovalori tutti positivi e che il limite esista).

4.1 V in termini delle rappresentazioni S(ω)

Con la rappresentazione definita in 11, si può osservare che

$$\Gamma_{2\alpha}\,\Gamma_{2\alpha-1} = \mathbf{Y}_\alpha\,\mathbf{Z}_\alpha = i\mathbf{X}_\alpha \qquad \alpha = 1,\ldots,n$$

Da cui si ottiene subito che 7 può essere riscritta come

$$\mathbf{V}_1 = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\theta\mathbf{X}_\alpha} = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{-i\theta\Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha-1}}$$

Poichè $\mathbf{V}_1$ ha esattamente la forma 14, è un prodotto di rotazioni piane che commutano tra loro. Sempre dalla 11 inoltre si trova[5]

$$\begin{aligned}\Gamma_{2\alpha+1}\,\Gamma_{2\alpha} &= \mathbf{X}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha+1}\mathbf{Y}_\alpha = i\mathbf{Z}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha+1}\\ \Gamma_1\Gamma_{2n} &= \mathbf{Z}_1(\mathbf{X}_1\ldots\mathbf{X}_{n-1})\mathbf{Y}_n = -i\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_n(\mathbf{X}_1\ldots\mathbf{X}_n)\end{aligned}$$

Dalla forma esplicita in 8 si ottiene

$$\mathbf{V}_2 = \left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{\beta\epsilon\mathbf{Z}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha+1}}\right] e^{\beta\epsilon\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_1}$$

5. Nell'ultimo passaggio bisogna inserire $1 = \mathbf{X}_n\mathbf{X}_n$ per ottenere il risultato.

Poichè l'ultimo fattore commuta con la produttoria, usando le due formule appena ricavate, si può scrivere[6]

$$\mathbf{V}_2 = e^{\beta\epsilon \mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_1}\left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{\beta\epsilon \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha+1}}\right] = e^{i\beta\epsilon \mathbf{U}\Gamma_1\Gamma_{2n}} \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\beta\epsilon\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}}$$

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\ldots\mathbf{X}_n \tag{17}$$

Anche $\mathbf{V}_2$ ha quasi la forma 14, l'unica differenza è il fattore iniziale che contiene un termine extra ad esponenziale, dovuto alla scelta delle condizioni al contorno periodiche. Da tutto questo possiamo riscrivere $\mathbf{V}$ come

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1 = e^{i\phi \mathbf{U}\Gamma_1\Gamma_{2n}}\left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\phi\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}}\right]\left[\prod_{\lambda=1}^{n} e^{-i\theta\Gamma_{2\lambda}\Gamma_{2\lambda-1}}\right] \tag{18}$$

con le convenzioni $\phi = \beta\epsilon$, $\epsilon > 0$ e $\theta \equiv \tanh^{-1} e^{-2\phi}$.

La matrice $\mathbf{U}$ ha le seguenti proprietà:

a) $\mathbf{U}^2 = 1$, $\quad \mathbf{U}(1+\mathbf{U}) = 1+\mathbf{U}$, $\quad \mathbf{U}(1-\mathbf{U}) = -(1-\mathbf{U})$

b) $\mathbf{U} = i^n \Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_{2n}$[7]

c) $\mathbf{U}$ commuta con un numero pari di matrici Γ_μ ed anticommuta con un numero dispari di matrici Γ_μ.

Si può mostrare inoltre che

$$\begin{aligned} e^{i\phi\Gamma_1\Gamma_{2n}\mathbf{U}} &= \left[\frac{1}{2}(1+\mathbf{U}) + \frac{1}{2}(1-\mathbf{U})\right][\cos\phi + i\Gamma_1\Gamma_{2n}\mathbf{U}\sin\phi] = \\ &= \frac{1}{2}(1+\mathbf{U})[\cos\phi + i\Gamma_1\Gamma_{2n}\sin\phi] + \frac{1}{2}(1-\mathbf{U})[\cos\phi - i\Gamma_1\Gamma_{2n}\sin\phi] = \\ &= \frac{1}{2}(1+\mathbf{U})e^{i\phi\Gamma_1\Gamma_{2n}} + \frac{1}{2}(1-\mathbf{U})e^{-i\phi\Gamma_1\Gamma_{2n}} \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella 18 si ottiene la seguente forma per $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}(1+\mathbf{U})\mathbf{V}^+ + \frac{1}{2}(1-\mathbf{U})\mathbf{V}^-$$

con

$$\mathbf{V}^\pm \equiv e^{\pm i\phi\Gamma_1\Gamma_{2n}}\left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\phi\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}}\right]\left[\prod_{\lambda=1}^{n} e^{-i\theta\Gamma_{2\lambda}\Gamma_{2\lambda-1}}\right] \tag{19}$$

Dove, in questa forma, $\mathbf{V}^\pm$ sono entrambe rappresentazioni di spin.

4.2 U in forma diagonale

Le tre matrici $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}^+$ e $\mathbf{V}^-$ commutano tra loro, dato che i Γ_μ appaiono sempre a coppie; questo implica che esiste una base in cui possono essere diagonalizzati simultaneamente. Per prima cosa riscriviamo $\mathbf{V}$ nella base in cui $\mathbf{U}$ è diagonale (ma non lo sono necessariamente le altre due matrici).

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{R}^{-1} &\equiv \tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}(1+\tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{V}}^+ + \frac{1}{2}(1-\tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{V}}^- \\ \tilde{\mathbf{U}} &\equiv \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{V}}^\pm &\equiv \mathbf{R}\mathbf{V}^\pm\mathbf{R}^{-1} \end{aligned}$$

6. Il primo fattore è stato lavorato notando che $\mathbf{U}^2 = 1$, quindi $\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_n\,\mathbf{U}^2 = i\Gamma_1\Gamma_{2n}\mathbf{U}$ ed $\mathbf{U}$ commuta con un numero pari di matrici Γ.

7. Questo perchè per ogni coppia $\Gamma_{2\alpha-1}\Gamma_\alpha = \mathbf{Z}_\alpha\mathbf{Y}_\alpha = -i\mathbf{X}_\alpha$

Dato che $\mathbf{U}^2 = 1$ gli autovalori possono essere solo $+1$ e -1. Dalla forma in 17 si può riscrivere $\mathbf{U}$ come prodotto diretto $\mathbf{U} = X \times X \times \cdots \times X$ per cui una forma diagonale è data da $\mathbf{U} = Z \times Z \times \cdots \times Z$ da cui si capisce che gli autovalori $+1$ e -1 appaiono con ugual frequenza. E' quindi possibile scegliere in particolare una base in cui $\mathbf{U}$ appare diagonale e tale per cui tutti gli autovalori $+1$ sono in una sottomatrice e tutti i -1 in un'altra, quindi una matrice diagonale a blocchi nella forma

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Dove 1 è la matrice identità in 2^{n-1} dimensioni. Poichè i $\tilde{\mathbf{V}}^{\pm}$ commutano con $\tilde{\mathbf{U}}$ devono anch'essi avere una forma a blocchi

$$\tilde{\mathbf{V}}^{\pm} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}^{\pm} & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}^{\pm} \end{pmatrix}$$

dove le matrici $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ $\mathfrak{U}^{\pm}$ e $\mathfrak{G}^{\pm}$ non sono necessariamente diagonali. In particolare quindi

$$\frac{1}{2}(1 + \tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{V}}^{+} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}^{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}(1 - \tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{V}}^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}^{-} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Per cui

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}^{+} & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}^{-} \end{pmatrix}$$

Il problema di diagonalizzare $\mathbf{V}$ si è quindi ridotto a diagonalizzare $\tilde{\mathbf{V}}$ e, più specificatamente, a diagonalizzare 21 e 22. Per fare ciò è conventiente partire diagonalizzando $\tilde{\mathbf{V}}^{\pm}$ separatamente ed indipendentemente e, in teoria, selezionare quali sono gli autovalori da tenere per ciascuna matrice (quelli che rientrano in $\mathfrak{U}^{+}$ e $\mathfrak{G}^{-}$). Nella pratica quest'ultimo passaggio non è necessario, perchè nel limite $n \to \infty$ è sufficiente sapere gli autovalori totali di $\tilde{\mathbf{V}}^{\pm}$ per tovare quello massimo. Inoltre, dato che gli autovalori di $\tilde{\mathbf{V}}^{\pm}$ sono uguali a quelli di $\mathbf{V}^{\pm}$, si preferisce diagonalizzare queste ultime indipendentemente.

4.3 Autovalori di $\mathbf{V}^{\pm}$

Abbiamo detto che $\mathbf{V}^{\pm}$ sono rappresentazioni di spin, chiamiamo quindi con $\Omega^{\pm}$ le rotazioni nello spazio $2n \times 2n$ delle matrici Γ_μ di cui le $\mathbf{V}^{\pm}$ sono rappresentazioni.

$$\mathbf{V}^{\pm} = \mathbf{S}(\Omega^{\pm}) \longleftrightarrow \Omega^{\pm}$$

Dall'equazione 19 e 13 si ottiene subito che

$$\Omega^{\pm} = \omega(1, 2n | \mp 2i\phi) \left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(2\alpha+1, 2\alpha | 2i\phi) \right] \left[\prod_{\lambda=1}^{n} \omega(2\lambda, 2\lambda - 1 | 2i\theta) \right]$$

con le $\omega(\mu\nu|\theta)$ che, come al solito, sono le rotazioni sul piano $\mu\nu$ di un angolo ϑ. Gli autovalori di $\Omega^{\pm}$ sono gli stessi di $\omega^{\pm}$, perchè matrici simili, con $\omega^{\pm}$ definita come

$$\omega^{\pm} \equiv \Delta \Omega^{\pm} \Delta^{-1}$$

dove Δ è la radice quadrata dell'ultimo fattore[8]

$$\Delta \equiv \sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n} \omega(2\lambda, 2\lambda - 1 | 2i\theta)} = \prod_{\lambda=1}^{n} \omega(2\lambda, 2\lambda - 1 | i\theta)$$

8. Cerchiamo una matrice che, moltiplicata per se stessa, fornisca l'argomento della radice. Per rotazioni sullo stesso piano vale la proprietà $\omega(\mu\nu|\theta_1 + \theta_2) = \omega(\mu\nu|\theta_1)\,\omega(\mu\nu|\theta_2)$, in particolare quindi $i\theta + i\theta = 2i\theta$.

Si può riscrivere quindi

$$\omega^{\pm} \equiv \Delta \chi^{\pm} \Delta$$

Con

$$\begin{aligned}
\Delta &= \omega(12|-i\theta)\,\omega(34|-i\theta)\cdots\omega(2n-1,2n|-i\theta)\\
\chi^{\pm} &= \omega(1,2n|\mp 2i\phi)[\omega(23|-2i\phi)\,\omega(45|-2i\phi)\cdots\omega(2n-2,2n-1|-2i\phi)]
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà $\omega(\mu\nu|\theta) = \omega(\nu\mu|-\theta)$ ed il fatto che $\Delta^2\,\Delta^{-1} = \Delta$.

In forma esplicita queste due matrici hanno la forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} J & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \cdots & \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & J & & \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots \end{matrix} & & \ddots & \\ & & & J \end{pmatrix} \qquad J \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & -i\sinh\theta \\ i\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

$$\chi^{\pm} = \begin{pmatrix} a & 0\ 0 & & \cdots & & \mp b \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & K & & & & \\ & & K & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & K & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \pm b & & & \cdots & 0\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad K \equiv \begin{pmatrix} \cosh 2\phi & -i\sinh 2\phi \\ i\sinh 2\phi & \cosh 2\phi \end{pmatrix}$$

$$a \equiv \cosh 2\phi$$
$$b \equiv i\sinh 2\phi$$

Per calcolo diretto si ottiene

$$\omega^{\pm} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mp B^* \\ B^* & A & B & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & B^* & A & B & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & \\ \mp B & 0 & & & & B^* & A \end{pmatrix}$$

dove abbiamo definito

$$A \equiv \begin{pmatrix} \cosh 2\phi\cosh 2\theta & -i\cosh 2\phi\sinh 2\theta \\ i\cosh 2\phi\sinh 2\theta & \cosh 2\phi\cosh 2\theta \end{pmatrix}$$

$$B \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sinh 2\phi\sinh 2\theta & i\sinh 2\phi\sinh^2\theta \\ -i\sinh 2\phi\cosh^2\theta & -\frac{1}{2}\sinh 2\phi\sinh 2\theta \end{pmatrix}$$

e B^* è l'hermitiano coniugato di B.

Per trovare gli autovalori di $\omega^{\pm}$ proviamo a scrivere un autovettore nella forma

$$\psi = \begin{pmatrix} zu \\ z^2 u \\ \vdots \\ z^n u \end{pmatrix}$$

Dove z è un numero complesso ed u è un vettore bidimensionale. L'equazione agli autovalori si riduce quindi alla forma

$$\omega^{\pm}\,\psi = \lambda\psi$$

cioè, esplicitamente

$$\begin{aligned}(zA+z^2B\mp z^nB^*)u &= z\lambda u\\(z^2A+z^3B+z\ B^*)u &= z^2\lambda u\\(z^3A+z^4B+z^2\ B^*)u &= z^3\lambda u\\&\vdots\\(z^{n-1}A+z^nB+z^{n-2}\ B^*)u &= z^{n-1}\lambda u\\(z^nA\mp z\ B+z^{n-1}B^*)u &= z^n\lambda u\end{aligned}$$

Le equazioni dalla 2 alla $n-1$ sono tutte uguali, a patto di dividere per una potenza adeguata di z (che è sempre diversa da zero). Le uniche tre equazioni indipendenti sono quindi

$$\begin{aligned}(A+zB\mp z^{n-1}B^*)u &= \lambda u\\(A+z\ B+z\ ^{-1}B^*)u &= \lambda u\\(A\mp z^{1-n}B+z^{-1}B^*)u &= \lambda u\end{aligned}$$

Se si impone $z^n=\mp 1$ il sistema si riduce ulteriormente ad un'unica equazione

$$(A+zB+z^{-1}B^*)u = \lambda u$$

in cui la scelta del segno di z^n è associata al segno di $\omega^\pm$. Da questa condizione si ricava che, per ciascun ω^+ ed ω^-, ci sono n valori di z accettabili

$$z_k = e^{i\pi k/n}$$

$$\begin{aligned}k &= 1,3,5,...,2n-1 &\quad \text{per}\,\omega^+\\k &= 0,2,4,...,2n-2 &\quad \text{per}\,\omega^-\end{aligned}$$

Per ogni k specifico ci sono 2 autovalori λ_k che si ottengono dall'equazione

$$(A+z_kB+z_k^{-1}B^*)u = \lambda_k u$$

Questo fornisce in tutto $2n$ autovalori per ciascuna rotazione $\omega^\pm$. Se adesso si osserva che[9]

$$\det|A+z_kB+z_k^{-1}B^*|=1$$

se ne deduce che i 2 autovalori λ_k possono essere espressi nella forma[10]

$$\lambda_k=e^{\pm\gamma_k} \qquad k=0,1,...,2n-1 \tag{23}$$

Che sono $2n$ autovalori per i k pari ed uguale per i k dispari. I γ_k si possono ricavare calcolando la traccia

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A+z_k\,B+z_k^{-1}B^*)=\frac{1}{2}(e^{\gamma_k}+e^{-\gamma_k})=\cosh\gamma_k$$

Calcolando esplicitamente questa espressione si ottiene la seguente equazione

$$\cosh\gamma_k=\cosh 2\phi\cosh 2\theta-\cos\frac{\pi k}{n}\sinh 2\phi\sinh 2\theta \qquad k=0,1,...,2n-1$$

Per la simmetria su γ_k, se γ_k è una soluzione allora anche $-\gamma_k$ lo è, ma questo è ridondante rispetto alla scelta del segno in 23, scegliamo quindi di considerare solo le soluzioni positive dell'equazione.

Valgono le seguenti proprietà

$$\gamma_k = \gamma_{2n-k} \tag{24}$$

$$0 < \gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_n \tag{25}$$

dove la prima deriva semplicemente dal fatto che $\cos(2\pi-\alpha)=\cos(\alpha)$, mentre la seconda la si può mostrare calcolando la derivata $\partial\gamma_k/\partial k\geqslant 0$ per $k\leqslant n$.

9. Per calcolo diretto.

10. Questo perchè data una matrice quadrata A vale la proprietà che $\det|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2$ con λ_1 e λ_2 gli autovalori. Nel caso in esame quindi si deve avere che $\lambda_{k1}=1/\lambda_{k2}$ con $k1$ e $k2$ indici associati alla stessa coppia k.

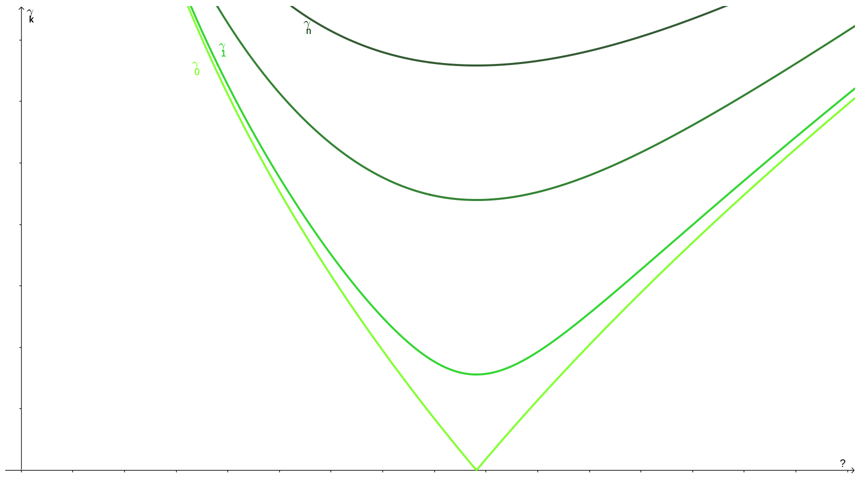

Figura 2. Grafico γ_k in funzione di ϕ.

Gli autovalori di $\Omega^{\pm}$ sono gli stessi di $\omega^{\pm}$, per cui si capisce che $\Omega^{\pm}$ è il prodotto di rotazioni planari che commutano tra loro (infatti gli autovalori sono nella stessa forma del Lemma 3, formula 15). Sempre usando il Lemma 3 è quindi possibile riscrivere i 2^n autovalori di $\mathbf{V}^+$ e $\mathbf{V}^-$

$$\text{autovalori di } \mathbf{V}^- \;:\; e^{1/2(\pm\gamma_0\pm\gamma_2\pm\ldots\pm\gamma_{2n-2})} \tag{26}$$
$$\text{autovalori di } \mathbf{V}^+ \;:\; e^{1/2(\pm\gamma_1\pm\gamma_3\pm\ldots\pm\gamma_{2n-1})} \tag{27}$$

dove la selta dei segni va fatta indipendentemente per ogni termine.

5 Autovalori di V

Come abbiamo visto gli autovalori di $\mathbf{V}$ sono dati da una metà degli autovalori di $\mathbf{V}^+$ e da una metà degli autovalori di $\mathbf{V}^-$. Questi autovalori sono tutti positivi (i γ sono tutti reali) e di ordine n (ci sono n autovalori γ, ciascuno di ordine 1), quindi la formula 16 è corretta.

Poichè siamo interessati non a tutti gli autovalori di $\mathbf{V}$, ma solo al più grande, non è necessario capire quale delle due metà degli autovalori di $\mathbf{V}^{\pm}$ è da conservare, cercando l'autovalore massimo in assoluto si troverà quello cercato.

Ipotizziamo che la matrice $\mathbf{F}$ $(2^n \times 2^n)$ trasformi 21 in forma diagonale e, analogamente, $\mathbf{G}$ per 22.

$$\mathbf{F}\left[\frac{1}{2}(1+\tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{V}}^+\right]\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}_D^+$$
$$\mathbf{G}\left[\frac{1}{2}(1-\tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{V}}^-\right]\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{V}_D^-$$

Dove $\mathbf{V}_D^{\pm}$ sono matrici diagonali i cui autovalori non nulli sono metà degli autovalori dati da 26 e 27. Da quello che abbiamo già visto, poichè $\tilde{\mathbf{U}}$ e $\tilde{\mathbf{V}}^{\pm}$ commutano, è possibile scegliere $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ in modo tale che $\tilde{\mathbf{U}}$ resti diagonale sotto le due trasformazioni, cioè $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{F}^{-1}$ e $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{G}^{-1}$ non fanno altro che permutare gli autovalori di $\tilde{\mathbf{U}}$ sulla diagonale. In particolare quindi, poichè avevamo scelto $\tilde{\mathbf{U}}$ in modo tale che fosse composto dalle due sotto matrici 1 e -1 (equazione 20), possiamo chiedere che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ lascino $\tilde{\mathbf{U}}$ immutato o lo cambino di segno, in altri termini: commutano o anticommutano con $\tilde{\mathbf{U}}$.

$$\mathbf{V}_D^+ = \frac{1}{2}(1\pm\tilde{\mathbf{U}})\mathbf{F}\tilde{\mathbf{V}}^+\mathbf{F}^{-1} \tag{28}$$
$$\mathbf{V}_D^- = \frac{1}{2}(1\pm\tilde{\mathbf{U}})\mathbf{G}\tilde{\mathbf{V}}^-\mathbf{G}^{-1} \tag{29}$$

La scelta del segno andrebbe fatta per calcolo diretto delle due matrici di trasformazione, ma al fine di trovare solo l'autovalore massimo non è necessario.[11]

Se adesso ci si concentra sugli autovalori, si possono scrivere le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1\pm\tilde{\mathbf{U}}) &= \frac{1}{2}(1\pm\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\cdots\mathbf{Z}_n)\\ \mathbf{F}\tilde{\mathbf{V}}^+\mathbf{F}^{-1} &= \prod_{k=1}^{n} e^{1/2\gamma_{2k-1}\mathbf{Z}_{Pk}}\\ \mathbf{G}\tilde{\mathbf{V}}^-\mathbf{G}^{-1} &= \prod_{k=1}^{n} e^{1/2\gamma_{2k-2}\mathbf{Z}_{Qk}}\end{aligned}$$

Dove la prima espressione deriva da 17, inoltre P e Q indicano due permutazioni sugli indici 1, 2, ..., n. Si arriva a questa forma perchè $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{V}}^+\mathbf{F}^{-1}$ e $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{V}}^-\mathbf{G}^{-1}$ devono avere gli stessi autovalori trovati in 27 e 26, ma non necessariamente con lo stesso ordine. Poichè gli autovalori di $\mathbf{Z}_k$ sono ±1 si ha, studiando gli autovalori, che

$$\frac{1}{2}(1\pm\tilde{\mathbf{U}}) = \begin{cases} 1 & \text{se un numero pari / dispari di } \mathbf{Z}_k \text{ ha autovalore } -1\\ 0 & \text{se un numero dispari / pari di } \mathbf{Z}_k \text{ ha autovalore } -1\end{cases}$$

dove la scelta di pari/dispari dipende dalla scelta del segno. Poichè questa condizione permane anche sotto permutazioni degli indici $\{\mathbf{Z}_k\}\longrightarrow\{\mathbf{Z}_{Pk}\}$, se ne deduce che gli autovalori di 28 (e 29) sono dati dagli autovalori di 27 (e 26) in cui appare un numero pari/dispari di segni $-$ ad esponente, in base alla scelta del segno $\pm$ di $\tilde{\mathbf{U}}$.

Dalla 25 si deduce che il più grande autovalore di $\mathbf{V}_D^+$ è dato da

$$\text{più grande autovalore di } \mathbf{V}_D^+ \text{: } e^{1/2(\pm\gamma_1+\gamma_3+\gamma_5+\ldots+\gamma_{2n-1})}$$

Dove il $\pm$ ancora dipende dalla scelta del segno in 28 (cioè se $\tilde{\mathbf{U}}$ commuta o anticommuta con $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$). Nel limite $n\to\infty$ il segno non ha più nessuna rilevanza e i due casi forniscono lo stesso risultato, poichè γ_1 diventa trascurabile rispetto all'intero esponente. Si può fare un ragionamento identico per $\mathbf{V}_D^-$ ed in definitiva si conclude quindi che i due autovalori massimi sono, nel limite $n\to\infty$

$$\begin{aligned}\text{più grande autovalore di } \mathbf{V}_D^+ &: e^{1/2(\gamma_1+\gamma_3+\gamma_5+\ldots+\gamma_{2n-1})}\\ \text{più grande autovalore di } \mathbf{V}_D^- &: e^{1/2(\gamma_0+\gamma_2+\gamma_4+\ldots+\gamma_{2n-2})}\end{aligned}$$

Ora studiando la crescita dei γ con la relazione 25 si ottiene che l'autovalore più grande è

$$\Lambda = e^{1/2(\gamma_1+\gamma_3+\gamma_5+\ldots+\gamma_{2n-1})} \tag{30}$$

5.1 Calcolo esplicito di Λ

Calcoliamo adesso in maniera esplicita Λ. Se inseriamo l'equazione 30 nel logaritmo che appare per il calcolo dell'energia libera otteniamo

$$\mathcal{L}\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}(\gamma_1+\gamma_3+\ldots+\gamma_{2n-1})$$

Se eseguiamo il seguente cambio di variabile

$$\begin{aligned}\gamma(\nu) &\equiv \gamma_{2k-1}\\ \nu &\equiv \frac{\pi}{n}(2k-1)\end{aligned}$$

Nel limite $n\to\infty$ la somma sui γ diventa una somma di Riemann che converge all'integrale

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{2k-1}\longrightarrow\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\nu\,\gamma(\nu)$$

11. Come dice Huang, facendo riferimento a Kaufman, si può dimostrare che sono da tenere i due segni $+$.

Se sostituito fornisce la seguente equazione per $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\nu\,\gamma(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\nu\,\gamma(\nu)$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la simmetria fornita da 24, cioè $\gamma(\nu) = \gamma(2\pi - \nu)$. Poichè $\gamma(\nu)$ è la soluzione positiva dell'equazione

$$\cosh\gamma(\nu) = \cosh 2\phi \cosh 2\theta - \cos\nu \sinh 2\phi \sinh 2\theta \tag{31}$$

in cui ricordiamo le solite definizioni

$$\begin{aligned} \phi &\equiv \beta\epsilon \qquad \epsilon > 0 \\ \theta &\equiv \tanh^{-1} e^{-2\phi} \end{aligned} \tag{32}$$

Con un po' di calcoli si può mostrare che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \sinh 2\theta &= \frac{1}{\sinh 2\phi} \\ \cosh 2\theta &= \coth 2\phi \end{aligned}$$

Per cui è possibile riscrivere l'equazione 31 come

$$\cosh\gamma(\nu) = \cosh 2\phi \coth 2\phi - \cos\nu$$

Per semplificare ulteriormente il calcolo si può utilizzare la seguente identità, valida per ogni z reale

$$|z| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\,t \log(2\cosh z - 2\cos t) \tag{33}$$

Grazie a questa relazione possiamo riscrivere $\gamma(\nu)$ in forma integrale

$$\begin{aligned} \gamma(\nu) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\nu' \log(2\cosh\gamma(\nu) - 2\cos\nu') = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\nu' \log(2\cosh 2\phi \coth 2\phi - 2\cos\nu - 2\cos\nu') \end{aligned}$$

Da cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} d\nu \int_0^{\pi} d\nu' \log[2\cosh 2\phi \coth 2\phi - 2(\cos\nu + \cos\nu')]$$

L'integrale va calcolato sul quadrato di lato π sui due assi ν e ν'. Grazie alla simmetria dell'integrale nelle variabili ed alle proprietà di simmetria della funzione coseno è possibile compiere il seguente cambio di variabili[12]

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{\nu + \nu'}{2} \leqslant \pi \qquad &e \qquad 0 \leqslant \nu - \nu' \leqslant \pi \\ \delta_1 \equiv \frac{\nu + \nu'}{2} \qquad &e \qquad \delta_2 \equiv \nu - \nu' \end{aligned}$$

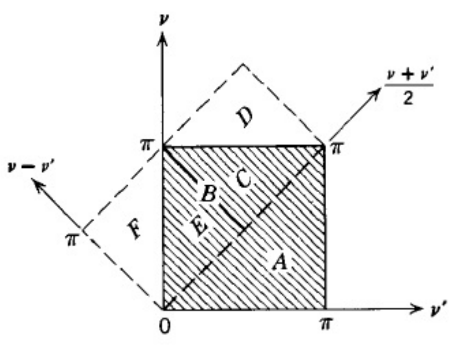

Figura 3. Area d'integrazione.

12. Data la simmetria su ν e ν' e della funzione coseno si ha che $\int_A = \int_B$, inoltre $\int_C = \int_D$ e $\int_E = \int_F$.

Con queste nuove variabili si può riscrivere

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi d\delta_1\int_0^\pi d\delta_2 \log\left(2\cosh 2\phi\coth 2\phi - 4\cos\delta_1\cos\frac{1}{2}\delta_2\right) = \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi d\delta_1\int_0^{\pi/2} d\delta_2 \log(2\cosh 2\phi\coth 2\phi - 4\cos\delta_1\cos\delta_2) = \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi d\delta_1\int_0^{\pi/2} d\delta_2 \log(2\cos\delta_2) + \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi d\delta_1\int_0^{\pi/2} d\delta_2 \log\left(\frac{D}{\cos\delta_2} - 2\cos\delta_1\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\delta_2 \log(2\cos\delta_2) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\delta_2 \cosh^{-1}\left(\frac{D}{2\cos\delta_2}\right)
\end{aligned}$$

Dove abbiamo definito

$$D \equiv \cosh 2\phi\coth 2\phi$$

La prima riga si trova per calcolo diretto eseguendo la sostituzione, la seconda usando le simmetrie della funzione coseno, la terza si ottiene facilmente raccogliendo 2cos δ_2 nel logaritmo ed infine l'ultima riga si ottiene applicando ancora una volta l'identità 33.

Sfruttando l'equivalenza $\cosh^{-1}x = \log\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$ si ottiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\delta \log\left[D\left(1+\sqrt{1-\kappa^2\cos^2\delta}\right)\right]$$

Con

$$\kappa \equiv \frac{2}{D}$$

E' possibile sostituire il coseno nell'ultimo integrale con un seno, senza cambiare il valore dell'integrale[13]. Per cui si ottiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2\cosh^2 2\beta\epsilon}{\sinh 2\beta\epsilon}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\phi \log\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}\right) \tag{34}$$

in questa espressione φ è solo il nome della variabile di integrazione e non ha nulla a che vedere con il il φ definito in 32.

5.2 Funzioni termodinamiche

Mettendo adesso l'equazione 34 nell'equazione 16 e 3 si ottiene la seguente forma per l'energia libera per particella

$$\beta f(0,T) = -\log(2\cosh 2\beta\epsilon) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\phi \log\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}\right)$$

L'energia interna per spin è dunque

$$u(0,T) = \frac{d}{d\beta}[\beta f(0,T)] = -2\epsilon\tanh 2\beta\epsilon + \frac{\kappa}{2\pi}\frac{d\kappa}{d\beta}\int_0^\pi d\phi\, \frac{\sin^2\phi}{\Delta(1+\Delta)} \tag{35}$$

Con $\Delta \equiv \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}$. Si può facilmente mostrare che vale la relazione[14]

$$\int_0^\pi d\phi\, \frac{\sin^2\phi}{\Delta(1+\Delta)} = -\frac{\pi}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^2}\int_0^\pi \frac{d\phi}{\Delta}$$

Per calcolo diretto e con un po' di algebra si può inoltre mostrare che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{d\beta} &= -2\epsilon\coth 2\beta\epsilon(2\tanh^2 2\beta\epsilon - 1) \\
-2\epsilon\tanh 2\beta\epsilon - \frac{1}{2\kappa}\frac{d\kappa}{d\beta} &= -\epsilon\coth 2\beta\epsilon
\end{aligned}$$

13. Dipende dal fatto che l'integrale tra 0 e π di $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$ è uguale.
14. E' sufficente razionalizzare e svolgere i calcoli.

Inserendo tutte queste relazioni nell'equazione 35 si ottiene

$$u(0,T) = -\epsilon \coth 2\beta\epsilon \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] \tag{36}$$

Dove $K_1(\kappa)$ è l'integrale ellittico completo di prima specie

$$K_1(\kappa) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \phi}}$$

Inoltre abbiamo definito

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv \frac{2}{D} = \frac{2 \sinh 2\beta\epsilon}{\cosh^2 2\beta\epsilon} \\ \kappa' &\equiv 2 \tanh^2 2\beta\epsilon - 1 \\ \kappa^2 + \kappa'^2 &= 1 \end{aligned}$$

Con queste convenzioni il calore specifico si esprime come

$$\frac{1}{k_B} c(0,T) = -\beta^2 \frac{d\ u(0,T)}{d\beta} = \frac{2}{\pi} (\beta\epsilon \coth 2\beta\epsilon)^2 \left\{ 2K_1(\kappa) - 2E_1(\kappa) - (1-\kappa') \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\}$$

In cui k_B è la costante di Boltzmann ed $E_1(\kappa)$ è l'integrale ellittico completo di seconda specie

$$E_1(\kappa) \equiv \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \phi}$$

L'integrale ellittico $K_1(\kappa)$ ha una singolarità per $\kappa = 1$ (cioè $\kappa' = 0$), in quell'intorno si trova che[15]

$$\begin{aligned} K_1(\kappa) &\approx \log \frac{4}{\kappa'} \\ E_1(\kappa) &\approx 1 \end{aligned} \tag{37}$$

Quindi tutte le funzioni termodinamiche hanno una singolarità in $\kappa = 1$, cioè in $T = T_c$ dove T_c è

$$\begin{aligned} 2 \tanh^2 \frac{2\epsilon}{k_B T_c} &= 1 \\ \frac{\epsilon}{k_B T_c} &= 0.440... \\ k_B T_c &= (2,269...)\epsilon \end{aligned}$$

Inoltre vale che

$$\begin{aligned} \cosh \frac{2\epsilon}{k_B T_c} &= \sqrt{2} \\ \sinh \frac{2\epsilon}{k_B T_c} &= 1 \end{aligned}$$

Quindi, con le stime asintotiche trovate prima e sviluppando in serie di Taylor al prim'ordine, si ottiene per il calore specifico per T vicino a T_c

$$\frac{1}{k_B} c(0,T) \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\epsilon}{k_B T_c} \right)^2 \left[-\log \left| 1 - \frac{T}{T_c} \right| + \log \left(\frac{k_B T_c}{2\epsilon} \right) - \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Che ha una singolarità logaritmica per $|T - T_c| \to 0$. Dalla 36 e dalla 37 si trova che l'energia interna è continua, quindi la transizione di fase è di seconda ordine e non presenta calore latente.

15. La prima relazione la si trova passando dal seno al coseno e sviluppando in serie di Taylor. La seconda invece è molto diretta.

Il parametro d'ordine della transizione, cioè la magnetizzazione spontanea, non può essere calcolato con quello fatto fin'ora. Questo perchè la magnetizzazione spontanea sarebbe la derivata dell'energia libera rispetto al campo esterno H, calcolata in $H = 0$, ma avendo imposto che il campo esterno è nullo è impossibile eseguire la derivata. Il calcolo esplicito della magnetizzazione spontanea è stato fatto per la prima volta da Yang, il risultato è dato da

$$m(0,T) = \begin{cases} 0 & \text{per}\, T > T_c \\ \{1 - [\sinh(2\beta\epsilon)]^{-4}\}^{1/8} & \text{per}\, T < T_c \end{cases}$$

Nel limite $T \to T_c^-$, da sinistra, si ha quindi che la magnetizzazione cambia con esponente critico $\frac{1}{8}$, risultato molto diverso da quello fornito dalla teoria di campo medio, che predice $\frac{1}{2}$ come esponente critico.

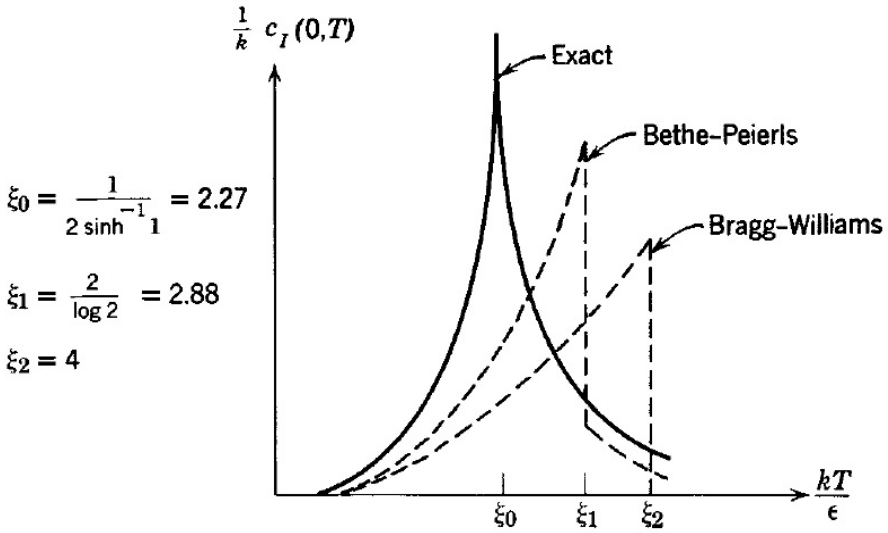

Figura 4. Andamento al punto critico di vari modelli.