

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

MISURA DELLA SEZIONE D'URTO

Corso di laurea in Fisica Generale



Candidato: Luca Martinoia

Matricola: 3630563

Anno accademico: 2013/2014

29/10/2014

1 Modelli teorici

La misura della *sezione d'urto* è un aspetto molto importante in fisica atomica e delle particelle, perchè permette di studiare le interazioni e gli urti tra le particelle. Ha quindi un'importanza fondamentale nella fisica moderna, anche se i concetti fondamentali possono essere dedotti direttamente dalla meccanica classica. Il concetto di sezione d'urto è legato alla diffusione (spesso anche *scattering*) di corpi su potenziali esterni o particelle. In generale, senza entrare nei dettagli matematici

Definizione. La sezione d'urto è una quantità adoperata per descrivere un processo di interazione tra corpi (sia questo diffusione, assorbimento o altro), che permette di stimare la possibilità che il corpo incidente si trovi in uno stato finale diverso da quello iniziale.

La sezione d'urto ha le dimensioni di un'area. Classicamente può essere intesa come la sezione perpendicolare alla traiettoria della particella incidente che quest'ultima deve attraversare per subire i fenomeni di diffusione.

1.1 Meccanica classica

In questa sezione si propone lo studio della sezione d'urto che deriva dai problemi di scattering per campi di *forze centrali*. Si consideri un raggio uniforme di particelle (non in senso quantistico) tutte con la stessa massa ed energia cinetica che incide su un campo di forza centrale. Il raggio è definito dalla sua intensità, cioè il numero di particelle per unità di tempo che attraversa una sezione del raggio ($I = N / \Delta S \Delta t$). Quanto la singola particella si avvicina al campo questa viene deviata dalla sua traiettoria rettilinea iniziale, ma una volta superata la regione nella quale si rileva la forza la particella riprenderà ad avere un moto rettilineo uniforme, con la stessa energia di prima (urti elastici per campi conservativi). In generale ovviamente la direzione iniziale e quella finale non sono uguali.

La sezione d'urto differenziale $\sigma(\vec{\Omega})$ per eventi di scattering in una certa direzione è definita come

$$\sigma(\vec{\Omega})d\Omega = \frac{\text{numero di particelle diffuse nell'angolo solido } d\Omega \text{ per unità di tempo}}{\text{intensità incidente } (I)}$$

Dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido nella direzione $\vec{\Omega}$. Per campi di forza centrale si ha completa simmetria intorno all'asse relativo al raggio incidente, quindi l'elemento di angolo solido può essere espresso come

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta \quad (1)$$

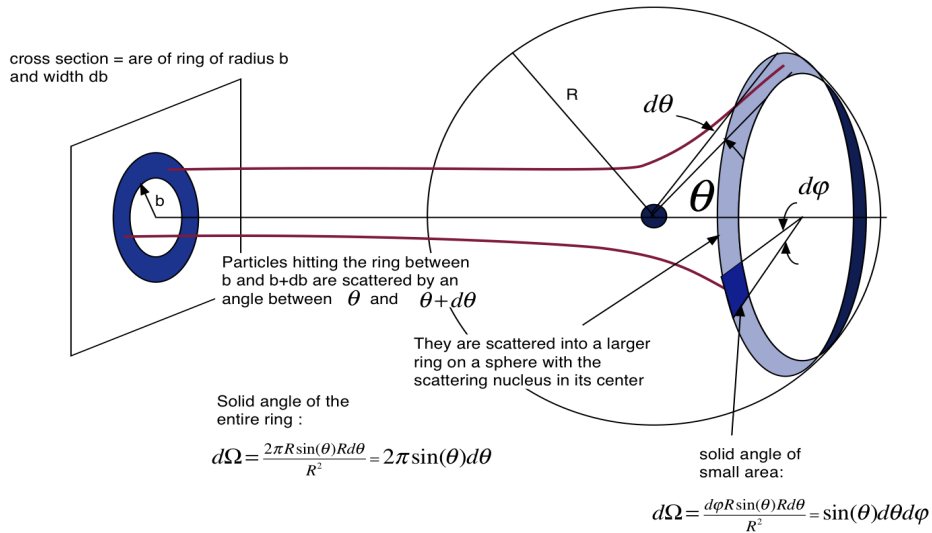


Figura 1. Rappresentazione schematica dello scattering su un campo di forza centrale. Il parametro d'impatto b è la distanza tra la linea rossa (prima che venga deflessa) e l'asse centrale del raggio incidente.

dove Θ è l'angolo tra la direzione incidente e quella deflessa, noto come *angolo di scattering*. E' conveniente esprimere il momento angolare delle particelle in funzione dell'energia e del *parametro d'impatto* b , definito come la distanza tra il centro della forza e la velocità incidente. Se v_0 è la velocità delle particelle incidenti si ha

$$l = mv_0 b = b\sqrt{2mE} \quad (2)$$

Fissata l'energia ed il parametro d'impatto l'angolo di scattering Θ è univocamente determinato. Il numero di particelle (per unità di tempo) deflesse ad un angolo solido $d\Omega$ che stanno tra Θ e $\Theta + d\Theta$ dev'essere quindi uguale al numero di particelle incidenti con parametro d'impatto tra $b(\theta)$ e $b + db$ (equazione (1))

$$2\pi I b |db| = 2\pi \sigma(\Theta) I \sin \Theta |d\Theta|$$

I valori assoluto sono introdotti perchè il numero di particelle dev'essere ovviamente positivo, mentre spesso b e θ variano con sengo opposto. Se si considera il parametro d'impatto come funzione dell'energia e dell'angolo di scattering

$$b = b(\Theta, E)$$

allora la dipendenza della sezione d'urto differenziale $\sigma(\theta)$ è data da

$$\sigma(\Theta) = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right| \quad (3)$$

E' interessante discutere anche della grandezza σ_T , chiamata *sezione d'urto totale* e definita come

$$\sigma_T = \int_{\Omega} \sigma(\vec{\Omega}') d\Omega' = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta$$

La sezione d'urto totale rappresenta quindi la frazione di particelle diffuse per unità di tempo e di area in ogni direzione dell'angolo solido. E' quindi una grandezza importante in fisica atomica perchè permette di determinare il raggio d'azione di un certo campo di forza.

1.1.1 Equazione angolare per campi centrali

E' possibile ottenere un'espressione generale per l'angolo di scattering come funzione del parametro d'impatto. Nel caso di forze centrali repulsive l'orbita deve essere simmetrica lungo la direzione che collega periapside (il punto dell'orbita più vicino al centro di scattering) e il centro stesso, quindi

$$\Theta = \pi - 2\Psi \quad (4)$$

se Ψ è l'angolo tra la direzione incidente e l'asse di simmetria.

Per ottenere un'espressione esplicita di Ψ è necessario studiare prima le orbite causate dai campi di forze centrali. Se la forza è di tipo centrale $f(r)$ (e quindi piana) ci si può ricondurre all'equazione

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \quad (5)$$

Poichè il moto è piano e centrale il momento angolare si conserva e permette di riscrivere l'equazione (5) in funzione di l

$$mr^2\dot{\theta} = l \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right) \quad (6)$$

indicando con $V(r)$ il potenziale della forza. Moltiplicando l'equazione per \dot{r} e raccogliendo nella derivata temporale si ottiene

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$$

Si ha quindi che la somma degli argomenti dev'essere costante, la relazione trovata è infatti il principio di conservazione dell'energia (nel caso in esame dev'essere costante perchè la forza è conservativa). Questa può essere risolta per \dot{r} ed integrata

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \quad (7)$$

Si è così ottenuta un'equazione generale che lega t e r (in teoria può essere risolta ed invertita per ottenere $r = r(t)$) in funzione degli integrali del moto: l'energia E e il momento angolare l . Una volta trovata l'equazione radiale l'equazione angolare è risolta sostituendo nell'espressione per il momento

$$mr^2\dot{\theta} = l \quad \Rightarrow \quad \theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0$$

In generale però non si è interessati a risolvere $r(t)$ e $\theta(t)$, ma piuttosto l'equazione della traiettoria $r(\theta)$. Per fare ciò, dall'equazione del momento angolare, si trova

$$l dt = mr^2 d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}$$

Sostituendo dunque la derivata nell'equazione (7.1) si trova

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0 \quad (8)$$

Ritornando quindi al problema di scattering è possibile ricavare l'angolo Ψ dall'equazione (8) ponendo come condizioni $r_0 = \infty$ quando $\theta_0 = \pi$ (direzione d'incidenza) e $\theta = \pi - \Psi$ quando $r = r_{\min}$. Queste fornisce

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} \quad (9)$$

Esprimendo l in funzione del parametro d'impatto (equazione (2),(4)) si trova l'espressione

$$\Theta(b) = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{s dr}{r \sqrt{r^2 \left(1 - \frac{V(r)}{E}\right) - b^2}} \quad (10)$$

La relazione trovata è raramente utilizzabile in problemi complessi e spesso si cerca di ricavare la relazione $b(\Theta)$ da considerazioni più elementari.

1.1.2 Applicazioni: sfera rigida

Il primo esempio in esame è la sfera rigida, cioè un potenziale del tipo

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{se } r \leq R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases}$$

In questo caso, come si vede in Figura 2, il parametro d'impatto b è legato all'angolo \hat{i} da $b = R \sin \hat{i}$, quindi, essendo l'angolo di scattering $\theta = \pi - 2\hat{i}$, si ottiene

$$b(\theta) = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Derivando si trova

$$\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{1}{2}R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Da cui

$$\sigma(\theta) = \frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \left(\frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$$

E' interessante calcolare la sezione d'urto totale nel caso della sfera rigida, si trova infatti

$$\sigma_T = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = \pi R^2$$

che è proprio la sezione della sfera: se infatti la particella passa per quell'area impatta con la sfera e viene deviata, se invece ha parametro iniziale $b > R$ questa semplicemente supera la sfera senza subire nessun effetto.

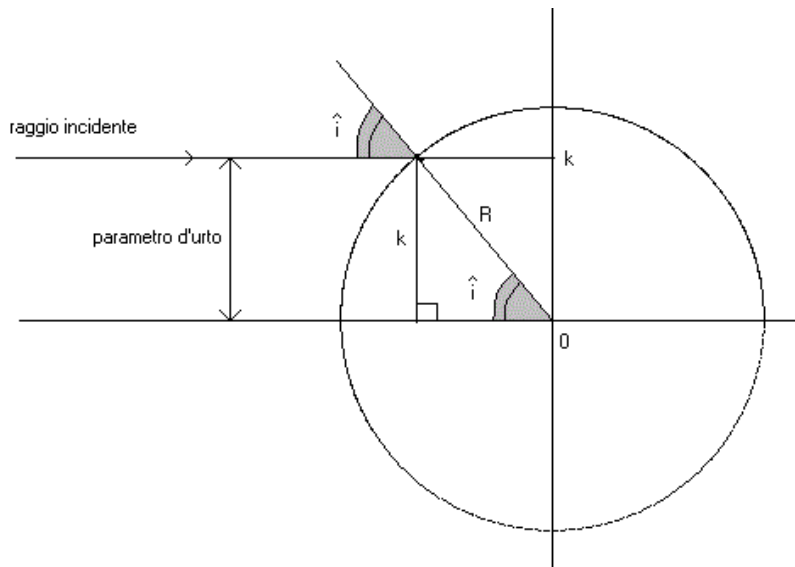


Figura 2. Schema per il problema della sfera rigida

1.1.3 Applicazioni: scattering di Rutherford

Lo scattering di Rutherford è il fenomeno per cui un fascio di particelle cariche su un bersaglio diffonde a causa della forza di repulsione di Coulomb. In questo esempio quindi si ha che il potenziale è del tipo

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad \Rightarrow \quad k = - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

In questo caso l'integrale (8) (rispetto alla variabile $u = 1/r$) si può risolvere esattamente

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}} = \theta' - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$$

Che risolta per u fornisce l'equazione dell'orbita in coordinate polari (equazione conica)

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right) \quad (11)$$

Da cui si trova che l'eccentricità e l'energia (dal teorema del Viriale¹) sono rispettivamente

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \quad E = -\frac{k}{2r_0}$$

Si trova subito che l'energia è maggiore di zero e l'orbita (dall'eccentricità, $\varepsilon > 1$) è un'iperbole (sostituendo il momento angolare in ragione dell'equazione (2)). Se si pone $\theta' = \pi$ il punto più vicino è quindi a $\theta = 0$ e l'orbita diventa (equazione (11))

$$\frac{1}{r} = \frac{mZ_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0l^2}(\varepsilon \cos \theta - 1)$$

La direzione incidente è quindi trovata ponendo $r \rightarrow \infty$, da cui (equazione (4))

$$\cos \Psi = \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Riarrangiando i conti² e sostituendo l'eccentricità si trova la relazione cercata

$$s = \frac{Z_1Z_2e^2}{8\pi\varepsilon_0E} \cot \frac{\Theta}{2}$$

che fornisce come valore della sezione d'urto differenziale

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{Z_1Z_2e^2}{8\pi\varepsilon_0E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad (12)$$

La sezione d'urto totale invece fornisce un valore infinito, si dice infatti che la forza elettrica ha raggio d'azione infinito, cioè non è possibile trovare un parametro d'urto così grande da non subire la deflessione, per quanto lontana e per quanto piccola possa essere la forza la particella incidente sarà sempre deflessa.

Rutherford (Ernest Rutherford, 1871-1937) ricavò la formula per la sezione d'urto differenziale e grazie a quella introdusse il suo nuovo modello atomico: il modello atomico di Thomson (quello maggiormente considerato a quei tempi) prevedeva gli elettroni attaccati al nucleo, in questo modello quindi un fascio di particelle alfa (nuclei di elio) su una lamina d'oro avrebbe dovuto produrre solo deviazioni a piccoli angoli. Rutherford eseguì l'esperimento e misurò anche scattering a grandi angoli, provò quindi a spiegare il fenomeno ipotizzando che gli elettroni fossero staccati dal nucleo atomico. In queste ipotesi egli ricavò la sezione d'urto (12) che, conformemente agli esperimenti, permette anche angoli di scattering molto ampi.

1. $E = T + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2}$

2. $\sin^2 \Theta/2 = 1/\varepsilon^2$ e analogamente $\cos^2 \Theta/2 = 1 - 1/\varepsilon^2$. Quindi $\cot^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{\cos^2 \Theta/2}{\sin^2 \Theta/2} = \varepsilon^2 - 1$

1.2 Meccanica quantistica (cenni)

Nella teoria quantistica dello scattering si immagina un'onda piana incidente³, $\psi(z) = Ae^{ikz}$, che viaggia nella direzione z . Quando questa incontra un potenziale viene diffusa, producendo un'onda sferica uscente, la soluzione generale che ci si aspetta è quindi del tipo (nell'ipotesi in cui il potenziale sia simmetrico per rotazioni sull'angolo ϕ)

$$\psi(r, \theta, \phi) \approx A \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \quad \text{per } r \text{ molto grande} \quad (13)$$

Il problema di scattering è appunto determinare l'ampiezza di scattering $f(\theta)$, questa è infatti la probabilità di scattering in una data direzione, ed è dunque connesso alla sezione d'urto differenziale. Si ha che la probabilità che una particella incidente, viaggiando a velocità v , passi attraverso un'area infinitesima $d\sigma_T$ nel tempo dt è data da

$$dP_{\text{in}} = |\psi_{\text{in}}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma_T$$

e dev'essere uguale alla probabilità che la particella sia deviata nel corrispondente angolo solido $d\Omega$

$$dP_{\text{out}} = |\psi_{\text{out}}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

Da cui segue (ricordando $d\sigma_T = \sigma(\theta) d\Omega$)

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma_T}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (14)$$

Nel seguito si mostrano due metodi per impostare il problema della ricerca della funzione $f(\theta)$ sotto certe ipotesi.

1.2.1 Analisi in onde parziali

E' noto che l'equazione di Schrödinger in 3 dimensioni (se potenziale centrale) ammette soluzioni a variabili separabili del tipo

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

dove Y_l^m è un'armonica sferica e $u(r) = rR(r)$ soddisfa l'equazione radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = E u(r)$$

Per r molto grandi ($kr \gg 1$) l'equazione si semplifica: il termine centrifugo diventa trascurabile e così anche il potenziale che si considera localizzato in una regione dello spazio vicina all'origine. In questa condizione quindi si ottiene l'equazione armonica che fornisce come soluzioni onde sferiche uscenti⁴.

Per valori del raggio intermedi, cioè grandi abbastanza da rendere il potenziale trascurabile, ma non abbastanza da annullare il termine centrifugo, si ottiene

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = -k^2 u \quad (15)$$

3. Il numero d'onda vale $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

4. $\frac{d^2 u}{dr^2} \approx -k^2 u$ con soluzioni del tipo $u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$. Per l'onda uscente diffusa si ha quindi $R(r) \propto \frac{e^{ikr}}{r}$

Questa equazione ha come soluzione generale una combinazione lineare delle funzioni sferiche di Bessel (indicate con j_l e n_l). Presa singolarmente nè j_l nè n_l rappresenta però un'onda uscente, ma se si passa alle funzioni sferiche di Hankel (definite come combinazione lineare a partire delle funzioni sferiche di Bessel) si trovano soluzioni che, per r grande, hanno un andamento come quello dell'onda sferica uscente e^{ikr}/r . Le funzioni sferiche di Hankel sono di due tipi, rispettivamente

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x) \quad h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x)$$

Le funzioni di tipo 1 hanno andamento a grandi r del tipo cercato, si trova quindi che la soluzione generica fuori dalla regione di scattering (dove $V(r)=0$) è del tipo

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right\}$$

dove il primo termine rappresenta l'onda piana entrante e la sommatoria la scomposizione in onde parziali sferiche dell'onda uscente. Poichè si è ipotizzato che il potenziale fosse indipendente dall'angolo ϕ solo i termini delle armoniche sferiche con $m=0$ possono esistere, poichè $Y_l^m \propto e^{im\phi}$.

$$Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

Si possono quindi ridefinire i coefficienti della sommatoria come $C_{l,0} = i^{l+1} k \sqrt{4\pi(2l+1)} a_l$ da cui

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + k \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) \right\} \quad (16)$$

a_l è chiamata l'*ampiezza dell'onda parziale*. Per r molto grande questa formula deve raccordarsi con l'equazione (13), da cui si trova che vale $(h_l^{(1)}(kr) \approx (-i)^{l+1} e^{ikr}/kr$ per $kr \gg 1$)

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta)$$

La sezione d'urto differenziale è quindi esprimibile come

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) a_l^* a_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta)$$

e di conseguenza la sezione d'urto totale è (sfruttando l'ortogonalità dei polinomi di Legendre P_l)

$$\sigma_T = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2$$

Resta ancora da esprimere l'onda piana in coordinate sferiche, nella notazione usata infatti sono state usate coordinate sferiche per l'onda uscente, ma coordinate cartesiane per l'onda piana entrante. Ovviamente l'onda piana e^{ikz} deve soddisfare l'equazione di Schrödinger per $V=0$, cioè un'equazione come l'equazione (15). Questa, come si è già visto, ha come soluzione generale le funzioni sferiche di Bessel e può essere espressa come

$$\sum_{l,m} [A_{l,m} j_l(kr) + B_{l,m} n_l(kr)] Y_l^m(\theta, \phi) = \psi(r, \theta, \phi)$$

In particolare l'onda piana (eliminando dal conteggio le funzioni che divergono nell'origine e quelle con dipendenza dall'angolo ϕ , cioè $m \neq 0$) si può scrivere come (formula di Rayleigh)

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

e la funzione d'onda completa appare nella forma finale

$$\psi(r, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left[j_l(kr) + ika_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos \theta)$$

1.2.2 Applicazioni: sfera rigida

Si mostra ora un'applicazione del metodo delle onde parziali per risolvere, nelle ipotesi della meccanica quantistica, il problema della sfera rigida, cioè, come già visto, un potenziale del tipo

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{se } r \leq R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases}$$

La condizione al contorno per l'onda è quindi

$$\psi(R, \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left[j_l(ka) + ika_l h_l^{(1)}(ka) \right] P_l(\cos \theta) = 0$$

Da cui, dovendo valere per ogni θ , si trova l'insieme di relazioni

$$a_l = -i \frac{j_l(ka)}{kh_l^{(1)}(ka)}$$

che conduce alla sezione d'urto totale

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2$$

Nel limite di basse energie, $ka \ll 1$, si può approssimare la frazione con

$$\frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \approx \frac{i}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^2 (ka)^{2l+1}$$

Riscrivendo ora la sezione d'urto totale e tenendo solo conto del primo termine (se $ka \ll 1$ i termini con l grande diventano trascurabili e domina il termine noto) si trova

$$\sigma_T \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{2^l l!}{(2l)!} \right]^4 (ka)^{4l+2} \approx 4\pi a^2$$

Che è esattamente quattro volte il risultato classico, cioè la sezione geometrica della sfera.

1.2.3 Prima approssimazione di Born

E' possibile riscrivere l'equazione di Schrödinger in forma integrale⁵

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \quad (17)$$

dove $\psi_0(\vec{r})$ è una soluzione dell'equazione per la particella libera $(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$.

Se il potenziale $V(\vec{r}_0)$ è localizzato intorno a $\vec{r}_0 = 0$ e si calcola la funzione d'onda per punti lontani dal centro di scattering, allora i punti che contribuiscono all'integrale soddisfano la relazione $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$ e il modulo si può semplificare

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_0 \simeq r^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} \right) \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}_0| \simeq r - \hat{r} \cdot \vec{r}_0$$

Si indica quindi il vettore $\vec{k} = k \hat{r}$ così si ottiene

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|} \simeq e^{ikr} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0}$$

Nel caso di scattering si vuole che ψ_0 sia un'onda piana incidente (lungo z per convenzione)

$$\psi_0(\vec{r}) = A e^{ikz}$$

Nel limite a grandi r l'equazione di Schrödinger in forma integrale (17) si può esprimere come

$$\psi(\vec{r}) = A e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \quad (18)$$

Confrontando il risultato con l'equazione generale (13) si ricava la relazione per l'ampiezza di scattering

$$f(\theta, \phi) = - \frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \quad (19)$$

In approssimazione di Born si ipotizza che l'onda deviata sia sostanzialmente uguale all'onda incidente, ma con direzione diversa. Ha quindi senso scrivere, per la ψ dentro l'integrale

$$\psi(\vec{r}_0) \approx \psi_0(\vec{r}_0) = A e^{ikz_0} = A e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}_0} \quad \text{con } \vec{k}' = k \hat{z}$$

In approssimazione di Born quindi si trova

$$f(\theta, \phi) \simeq - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}_0} V(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \quad (20)$$

Se il potenziale è simmetrico e dipende quindi solo dal modulo della distanza $V(\vec{r}) = V(r)$ si ottiene una forma molto semplice per lo sviluppo in approssimazione di Born al prim'ordine. Definendo

$$\vec{\kappa} \equiv \vec{k}' - \vec{k}$$

e facendo sì che l'asse polare per l'integrale in \vec{r}_0 sia lungo $\vec{\kappa}$, così che

$$(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$$

Si sostituisce ora nell'equazione (20) e si eseguono gli integrali angolari⁶, ottenendo così

$$f(\theta) \simeq - \frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r V(r) \sin(\kappa r) dr \quad \text{con } \kappa = 2k \sin(\theta/2) \quad (21)$$

5. E' sufficiente scrivere l'equazione differenziale in forma $(\nabla^2 + k^2)\psi = Q$, con $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ e $Q = \frac{2m}{\hbar^2} V\psi$. Si cerca la funzione di Green $G(\vec{r})$ che risolve l'equazione avendo come sorgente una delta, in modo che ψ sia esprimibile come $\psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}_0) Q(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$. Per fare ciò è sufficiente passare alle trasformate di Fourier così da ottenere un'equazione algebrica per $G(\vec{r})$.

1.2.4 Applicazioni: potenziale di Yukawa

Il potenziale di Yukawa è un semplice modello per la forza di legame nel nucleo atomico.

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (22)$$

con β e μ costanti. L'approssimazione di Born per questo potenziale fornisce

$$f(\theta) \simeq -\frac{2m\beta}{\hbar^2\kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr = -\frac{2m\beta}{\hbar^2(\mu^2 + \kappa^2)}$$

da cui deriva che la sezione d'urto differenziale vale

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{4m^2\beta^2}{\hbar^4(\mu^2 + \kappa^2)^2}$$

In particolare se $\mu = 0$ e $\beta = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0$ il potenziale di Yukawa fornisce il potenziale Coulombiano, per il quale la sezione d'urto in approssimazione di Born risulta essere

$$\sigma(\theta) = \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

che è esattamente il risultato classico (equazione (12)).

1.3 Sezione d'urto per il calcolo dei raggi

Una delle applicazioni della teoria dello scattering e della sezione d'urto è il calcolo dei raggi nucleari. Tra le varie tecniche attuabili (nuclei speculari, misure a raggi X , etc...) è anche possibile studiare il raggio nucleare sfruttando i fenomeni di scattering di neutroni veloci nei nuclei.

Se un fascio di neutroni veloci incide su un bersaglio di spessore finito, il numero di neutroni che vengono sottratti al fascio a causa dell'interazione con i nuclei-bersaglio è una funzione della profondità all'interno del bersaglio. In particolare le interazioni che avvengono alla profondità x in uno strato infinitesimo di spessore dx sono

$$dN = -N(x) n \sigma dx$$

Con $N(x)$ numero di neutroni che sono giunti alla profondità x senza reagire, σ la sezione d'urto per l'interazione neutrone-nucleo, n numero di nuclei-bersaglio per unità di volume.

La soluzione è una funzione con andamento esponenziale decrescente (N_0 flusso incidente)

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{nx} \ln \left(\frac{N_0}{N(x)} \right)$$

Da considerazioni teoriche riguardante lo scattering dei neutroni si ricava che $\sigma = 2\pi R^2$ (essendo il neutrone di carica zero in prima approssimazione la sua sezione d'urto è del tipo *sfera rigida*, subisce deflessioni solo quando è così vicino al nucleo bersaglio da sentire le interazioni nucleari), da cui si può quindi ottenere il valore del raggio nucleare R . Eseguendo questa misura per diversi bersagli si può trovare la funzione del raggio nucleare in funzione del numero di massa A

$$R = r_0 A^{1/3} \quad \text{dove } r_0 \simeq (1.3) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

Il raggio r_0 è una leggera sovrastima, questo perchè, come anticipato, i neutroni non sentono il raggio *fisico* dei bersagli, ma il potenziale d'azione dell'interazione nucleare, che è leggermente più ampio.

Bibliografia

H. Goldstein, "Classical Mechanics", Pearson, 3rd edition

David J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics", Pearson, 2nd edition

Lev D. Landau, "Fisica Teorica, vol I - Meccanica", Editori Riuniti, 1st edition

Lev D. Landau, "Fisica Teorica, vol III - Meccanica quantistica", Editori Riuniti, 1st edition

P. Corvisiero, Dispense del corso di Fisica nucleare, delle particelle, astrofisica 1