

Gli alieni sono fra noi

Gara di giugno del Liceo Scientifico F.Vercelli di Asti

4 giugno 2025

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \pi = 3.1416$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine della scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1: Strani avvistamenti

Nei cieli di Asti è stato avvistato un ufo con una forma un po' particolare. Il corpo centrale dell'ufo è costituito da un esagono regolare di lato 10 m. L'anello esterno è costituito da 6 quadrati costruiti sui lati dell'esagono centrale e da 6 triangoli ciascuno dei quali condivide due dei propri lati con quelli dei quadrati. Quanti metri misura il perimetro esterno dell'ufo?

2: Gli Italian brainrot

Gli alieni Rnp e $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$, per studiare gli umani, cercano i filmati dell'Italian brainrot su Tik-Tok e ne trovano 2. Insieme i due video contano esattamente 10000 visualizzazioni. Il primo ha il 94% di like (non approssimato), l'altro invece il 76% di like (non approssimato). Quale potrebbe essere il numero massimo di like totali, sapendo che ogni video ha ottenuto almeno una visualizzazione?

3: Semi e pacchi

Valutando di aver compreso i rudimenti del pensiero umano, gli alieni si preparano ad atterrare. Prima, però, occorre impacchettare il loro carico di semi. $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e Rnp , quindi, vanno nel magazzino nell'ufo, in cui sono stipati 360000 semi di zucca. Vogliono suddividerli in un certo numero di pacchi in modo che ogni pacco contenga lo stesso numero di semi. Quanti sono i possibili numeri di pacchi?

Gli alieni atterrano nel cortile del Vercelli e iniziano a scaricare alcuni pacchi di semi. Dopo aver scaricato i primi pacchi, vengono però interrotti da alcuni studenti, incuriositi dallo strano veicolo appena atterrato, che si avvicinano e iniziano a familiarizzare con loro.

4: Matematici e fisici

Gli alieni intendono effettuare alcuni esperimenti sugli studenti. Li dispongono quindi in fila indiana e iniziano ad interrogarli. Uno per volta, partendo dal terzo nella fila, ciascuno studente ripete la frase «dei due studenti davanti a me uno è un matematico e l'altro è un fisico». È risaputo che i matematici sono persone oneste: dicono sempre la verità. È parimenti noto che non ci si può fidare di un fisico: mentono sempre. Sapendo che il Vercelli conta 860 studenti, quanti sono, al massimo, i fisici? Quanti al minimo? Dare come risposte la somma dei due risultati.

5: L'equazione di Monticone

Rnp è sorpreso dal gran numero di matematici fra gli studenti. Per testarne l'effettiva preparazione sottopone a uno di questi un problema: «quante sono le soluzioni intere (x, y) dell'equazione $xy + 10x + 6y + 8 = 0$?» Cosa deve rispondere Monticone per non essere bollato di essere un fisico?

6: Otto dita

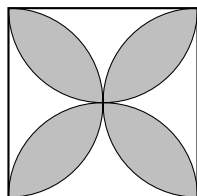
Corsini, incuriosita dal colorito arancione degli alieni, inizia ad osservare $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ con occhio clinico. Rivolgendosi a $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ chiede: «noi siamo soliti contare fino a 10, voi fino a quanto contate?» «8 naturalmente!» risponde $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$. «Ad esempio, questo potrebbe essere un numero di 4 cifre».

$\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ provvede a scrivere un numero di 4 cifre in cui compare 7 come cifra massima. Quanti sono i possibili numeri che ha scritto $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$?

Nota: nel sistema numerico degli alieni un numero di quattro cifre può anche iniziare con la cifra 0. Ad esempio, un numero di quattro cifre può essere 0073.

7: La piastrella a fiore

$\prod a \sum qu\sqrt{-1}$, guardando per terra, vede che il cortile è piastrellato con piastrelle quadrate. «Avete proprio delle piastrelle noiose qui. Noi usiamo piastrelle con forme molto più interessanti. Ad esempio, le piastrelle del mio bagno sono fatte così.» $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ provvede a disegnare la piastrella costituita da un quadrato di lato 10 cm suddivisa da 4 semicerchi che delineano un fiore grigio. Quanti mm^2 misura l'area di uno dei quattro petali?



8: Un nuovo nome

Rnp intanto osserva la scritta VERCELLI sul muro all'ingresso. «Che nome strano che avete. Perché ci sono due L attaccate?» Infatti nella lingua degli alieni non esistono le doppie. «Non sarebbe più facile chiamarlo VLEREILC, oppure LCRELIEV? Comunque qualcosa senza lettere uguali consecutive?» Rnp provvede a staccare e riattaccare le lettere sul muro in modo più «alieno». In quanti modi può averle riordinate?

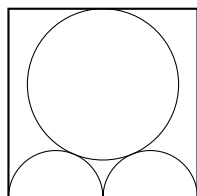
9: Un dono inusuale

Gli alieni, in segno di amicizia verso gli studenti del Vercelli, decidono di donare loro alcuni semi di zucca. Tuttavia, aperto uno dei pacchi, si rendono conto che i semi non bastano per tutti i 860 studenti del Vercelli. Decidono quindi di disporli in cerchio e di donare un seme all'ottavo, al sedicesimo, al ventiquattresimo, al trentaduesimo e così via. Si fermano solo quando raggiungono uno studente che ha già ricevuto un seme. Quanti studenti hanno ricevuto un seme in dono?

Gli studenti che hanno ricevuto un seme lo mangiano, su invito degli alieni. È molto dolce.

10: Il logo sul pacco

Calosso purtroppo non ha ricevuto il suo seme di zucca. Decide quindi di infiltrarsi sull'ufu per rubare un pacco. Raggiunto il magazzino vede che sopra i pacchi è presente il seguente logo, costituito da un quadrato di lato 60 cm, due semicerchi fra loro congruenti e un cerchio interno grande. Trova l'area del cerchio completo. Indica il risultato in cm^2 .



11: Il codice di sicurezza

Il sistema di sicurezza dell'ufu si attiva in seguito all'incursione di Calosso, che rimane intrappolato all'interno del magazzino di semi. Per sua fortuna, vicino alla porta sono illustrate le istruzioni per l'apertura. PER APRIRE INSERIRE IL VALORE $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ DOVE x_1 , x_2 E x_3 SONO LE RADICI DEL POLINOMIO $2x^3 - 6x + 3$. Che numero dovrebbe inserire a display Calosso per aprire la porta?

Purtroppo Calosso sbaglia i calcoli, facendo scattare l'allarme. $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e Rnp chiedono quindi a gran voce «chi si è permesso di entrare nella nostra navicella?» Paiono particolarmente adirati.

12: Le strade per l'ufo

Palma si accorge che Calosso manca all'appello. L'ufo si trova in posizione $(10, 6)$ mentre $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e Rnp si trovano in $(7, 2)$ e in $(4, 5)$. Palma intuisce che per salvare Calosso dovrà raggiungere l'ufo senza farsi prendere dagli alieni, che rimangono fermi. Per farlo fa solo passi di ampiezza 1 paralleli agli assi cartesiani del sistema considerato. Quanti sono i possibili percorsi di lunghezza minima con cui può raggiungere l'ufo senza essere intercettato dagli alieni?

13: Il test della verità

Le previsioni di Palma si sono rivelate sbagliate; Rnp si è mosso e l'ha catturato. «Cosa pensavi di fare?» chiede Rnp . «Nulla, nulla. Lo giuro!» promette Palma. Rnp sa bene che Palma dice la verità solo se è un matematico e decide quindi di interrogarlo:

«considera gli insiemi $\mathcal{S}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq k! : MCD(n, k!) = 1\}$. Quanto vale $\frac{|\mathcal{S}_{50}|}{|\mathcal{S}_{48}|}$? Presto, rispondi!» Palma in realtà non ha neanche capito il testo del problema, ma per sua fortuna Longo sta cucinando. In breve tempo risolve il problema di Rnp e comunica la soluzione a Palma. Cosa gli suggerisce?

Nota: dato un insieme insieme \mathcal{S} , la scrittura $|\mathcal{S}|$ indica il numero di elementi dell'insieme \mathcal{S} .

A seguito del repentino cambio di comportamento degli alieni, Ruta inizia ad insospettirsi. Quatto quatto ruba uno dei pacchi di semi scaricati dagli alieni e, cercando di non farsi vedere, la porta nel laboratorio di chimica per condurre alcuni esperimenti. Solo il giovane Boneschi si accorge dei movimenti di Ruta e decide di seguirlo.

14: L'esperimento di Ruta

Arrivato in laboratorio, Ruta prende una coltura di cellule e inizia il suo esperimento. Dopo aver polverizzato un seme, lo sparge sulle cellule e le osserva al microscopio. Alcune delle cellule reagiscono chimicamente col seme assumendo una colorazione arancione. Allarmato da questa strana reazione biochimica, Ruta ripete l'esperimento con un secondo seme, spargendolo su altre cellule della coltura. Osserva che, a seguito dell'aggiunta dell' n -esimo seme, il numero di cellule sane che si tingono di arancione è ben approssimato dalla frazione $\frac{2n^3+5n^2+2n+1}{n^2+2n}$. Ripete l'esperimento utilizzando in tutto 99 semi. Al termine dell'esperimento il numero di cellule arancioni risulta quindi ben approssimato dalla sommatoria $\sum_{n=1}^{99} \frac{2n^3+5n^2+2n+1}{n^2+2n}$. Esprimi tale valore come una frazione ridotta ai minimi termini $\frac{p}{q}$ e fornisci come risposta la somma $p + q$.

Allarmato dall'esito dell'esperimento, Ruta prova a depositare il centesimo seme su cellule già contaminate e le osserva al microscopio. Queste iniziano a scolorirsi, diventando gialle, e tornando normali dopo alcuni minuti.

15: La corsa di Boneschi

«Corri Alberto! Devi avvisare tutti quanti!» Boneschi si lancia di corsa come un giovane Prometeo verso il cortile. L'atrio che separa il laboratorio dal cortile ha la forma di un trapezio $ABCD$. Sulla base minore CD , lunga 18m, si trova l'uscita del laboratorio, mentre il confine fra l'atrio e il cortile coincide con la base maggiore AB , lunga 45m. Sappiamo inoltre che, dividendo il lato obliquo AD in tre segmenti tra loro congruenti AE , EF , FD , l'area del triangolo BEF misura 2025m^2 . Per quanti metri deve correre come minimo Boneschi dall'uscita del laboratorio per raggiungere l'ingresso del cortile?

Boneschi, giunto in cortile, scopre con orrore che i compagni che hanno ingerito i semi si sono trasformati in alieni dalla pelle arancione. «Presto! Presto! Dovete mangiare un secondo seme per tornare normali!» grida Boneschi con un pacco di semi in mano. Alcuni degli studenti alienizzati si affrettano a mangiare un secondo seme. Altri, scettici, non si fidano di una matricola e preferiscono attendere.

Gli studenti che hanno mangiato il secondo seme iniziano a scolorirsi, diventando gialli. $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e Rnp sono nel panico: le cose non stanno andando come previsto. I video degli Italian brainrot suggerivano che sarebbe stato facile controllare gli umani. Invece questi studenti del Vercelli sembrano più svegli del previsto, tanto da aver già compreso il segreto dei semi. Come se non bastasse, qualcuno si è infiltrato sulla navicella e ora stanno per perdere il controllo degli studenti nel cortile. È necessario riprendere in mano la situazione, e anche alla svelta.

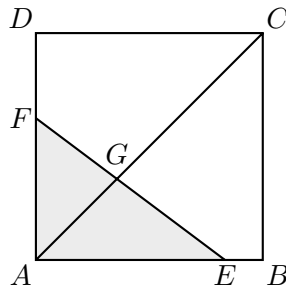
16: In fila!

«Disponetevi subito in file da 10!» grida *Rnp*. 10 studenti, fra cui Boneschi, si dispongono in fila indiana. All'interno della fila non ci sono mai più di 2 studenti consecutivi dello stesso colore (arancione, giallo o umano). In quanti modi può essere stata formata la fila?

Nota: due file sono considerate uguali se contengono la stessa sequenza di colori. Scambiare due studenti dello stesso colore non conta quindi come una fila distinta.

17: Chissà a che serve?

Nel mentre, nella navicella, Calosso cerca altri indizi per sbloccare la propria situazione, ormai in stallo. Trova uno strano simbolo costituito da un quadrato $ABCD$ in cui la diagonale AC taglia il segmento EF in due parti secondo la proporzione $FG : EG = 3 : 4$. Sul display è riportata una semplice indicazione: INSERIRE L'AREA DEL TRIANGOLO AEF , SAPENDO CHE IL SUO PERIMETRO MISURA 36. Che valore deve inserire Calosso sul display?



Questa volta Calosso ha risolto correttamente il problema. Sfortunatamente, il display attiva il pilota automatico dell'ufò, che decolla portando Calosso sul pianeta degli alieni. $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e *Rnp* sono sotto shock. Sono rimasti soli, su un pianeta a loro alieno, senza navicella e circondati da 859 studenti che hanno scoperto il loro segreto. Nel frattempo gli studenti alienizzati, mangiando secondi semi, sono tornati umani. Che fare? $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ ricorda un detto umano “se non puoi sconfiggerli, unisciti a loro”. Mangiando un seme, $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e *Rnp* accettano così di diventare umani.

18: Chi fa le domande ora?

A Banaudi rimane un'ultima domanda: “perché $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e *Rnp* erano così bravi a risolvere problemi di matematica? Era forse perché erano alieni?”. Per mettere alla prova la propria ipotesi decide di interrogare i due ex-alieni, sottoponendoli ad un ultimo quesito: «considerate tutte le coppie ordinate di primi p e q minori di 100 per cui $p^2 + 2q^2$ non è multiplo di 3. Per ciascuna di queste coppie calcolate il prodotto $p \cdot q$. Quanto misura la somma di tutti questi prodotti?» Cosa dovranno rispondere i due ex-alieni?

I due ex-alieni risolvono correttamente il problema di Banaudi, dimostrando così che anche gli umani sono capaci di risolvere problemi di matematica. $\prod a \sum qu\sqrt{-1}$ e *Rnp*, dovendo costruirsi una nuova vita fra gli umani, decidono infine di prendere dei nomi umani. Prendono così i nomi terrestri PASQUALI e RAINERO.