

Equations différentielles ordinaires

Luca Nenna

19 septembre 2022

Table des matières

Table des matières	1
1 Les notions de base et le théorème de Cauchy-Peano-Arzela	2
1.1 Équations du premier ordre	2
2 Équations d'ordre n et systèmes linéaires	10
2.1 Une équation d'ordre 2	10
2.2 Équations différentielle d'ordre n et systèmes de n équations	11
2.3 Systèmes linéaires	14

Chapitre 1

Les notions de base et le théorème de Cauchy-Peano-Arzela

Contents

1.1 Équations du premier ordre	2
--	---

1.1 Équations du premier ordre

Nous allons aborder dans ce premier chapitre les équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires du premier ordre.

Définition 1 (équation différentielle ordinaire). Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation qui a pour inconnue une fonction, elle s'écrit de la forme suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \in I, \quad (1.1)$$

où I est une intervalle ouvert de \mathbb{R} et la fonction f continue sur $I \times U$, avec U intervalle ouvert de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 2 (Solution locale et globale). On dit que le couple (J, y) , constitué d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , est une solution de (1.1) lorsque

- pour tout $t \in J$, on a $y(t) \in U$;
- pour tout $t \in J$, on a $y'(t) = f(t, y(t))$.

On dit que (J, y) est une **solution globale** de (1.1) lorsque $J = I$.

En pratique, on est souvent intéressé par une équation différentielle avec condition initiale, qu'on appelle alors **problème de Cauchy**, qui s'écrit :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème de Cauchy en t_0 (1.2) c'est trouver toutes les solutions (J, y) de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ telles que $t_0 \in J$ et $y(t_0) = y_0$. Se posent alors les questions naturelles suivantes :

1. Existence des solutions : locale, globale ?
2. Unicité de la solution ?
3. Stabilité de la solution ?

1.1.1 Équations linéaires

On s'intéresse ici au cas **linéaire** : on choisit $f(t, y(t)) = a(t)y(t) + b(t)$ où les fonctions a et b sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$; à t donné, la fonction $y \mapsto f(t, y(t))$ est donc linéaire. L'équation devient alors :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I. \quad (1.3)$$

Dans un premier temps nous allons résoudre l'**équation homogène** associée à (1.3), c.à.d. l'équation (1.3) avec $b(t) = 0$ pour tout t . Soit l'équation homogène associée à (1.3)

$$y'(t) = a(t)y(t). \quad (1.4)$$

On considère d'abord le cas où $a(t)$ est une fonction constante sur l'intervalle I : on doit trouver toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I)$ telles que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) - a(t)y(t) = 0.$$

Remarque 1 (Équation autonome). Si la fonction f ne dépend pas de t , on dit que l'équation (1.1) est autonome.

Il se trouve que lorsque $y \in \mathcal{C}^1(I)$,

$$(e^{-at}y(t))' = e^{-at}(-ay(t) + y'(t)).$$

Donc (1.4) équivaut à

$$\forall t \in I, \quad (e^{-at}y(t))' = 0.$$

D'où

$$(1.4) \iff \exists C \in \mathbb{R}, \quad e^{-at}y(t) = C \iff \exists C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = Ce^{at}.$$

Autrement dit on a prouvé que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'équation $y'(t) = ay$, où $a \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle ouvert I est

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto Ce^{at}, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

Passons au cas général où $a(t)$ n'est pas forcément constante sur I . On procède de la même manière, c.à.d. trouver une fonction $A(t)$ telle que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) - a(t)y(t) = 0 \iff \forall t \in I, \quad (e^{-A(t)}y(t))' = 0.$$

On voit qu'il suffit de prendre pour A n'importe quelle primitive de la fonction a (puisque a est continue sur I elle admet des primitives sur cet intervalle).

On a alors que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)$, où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, sur l'intervalle ouvert I est

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto Ce^{A(t)}, C \in \mathbb{R}\},$$

où $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de a sur I .

On revient maintenant à l'équation (1.3)

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

où a et b sont deux fonctions continues sur l'intervalle $I = (\alpha, \beta)$. On a la proposition suivante

Proposition 1. *L'ensemble des solutions de l'équation (1.3) sur I est*

$$\mathcal{S} := \left\{ t \mapsto e^{A(t)} \left(C + \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right), C \in \mathbb{R} \right\},$$

Démonstration. Soit A une primitive de a sur I et supposons que $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (1.3). On pose, pour tout $t \in I$, $w(t) = e^{-A(t)}y(t)$ on a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -a(t)e^{-A(t)}y(t) + e^{-A(t)}y'(t) \\ &= -a(t)e^{-A(t)}y(t) + e^{-A(t)}(a(t)y(t) + b(t)) \\ &= e^{-A(t)}b(t). \end{aligned}$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$w(t) = \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds + C,$$

Et

$$y(t) = e^{A(t)}w(t) = e^{A(t)} \left(\int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds + C \right).$$

Réciproquement, on vérifie que toutes les fonctions $y : t \mapsto e^{A(t)} \left(\int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds + C \right)$ sont des solutions de (1.3) sur I . \square

1.1.1.1 Résolution par la méthode de variation de la constante

On donne ici un autre preuve de la proposition 1 en utilisant un procédé bien connu pour les équations linéaires d'ordre 1 : **la méthode de variation de la constante**. On verra plus tard que cette méthode marche aussi pour les équations d'ordre 2 et les systèmes linéaires.

On considère l'équation

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Remarque 2. On peut noter que une équation linéaire d'ordre 1 peut s'écrire aussi sous la forme

$$p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t),$$

où $p, q, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et on assume que $p(t) \neq 0$ sur un intervalle $J \subset I$ telle qu'on peut réécrire l'EDO sous la forme (1.3). On cherchera alors une solution sur l'intervalle J .

On sait que les solutions de l'équation homogène associée

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

Sont les fonctions de la forme $y_h(t) = Ce^{A(t)}$, où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ sur I . L'idée est la suivante : on cherche une solution **particulière** y_p de l'équation sous la forme

$$y_p(t) = c(t)e^{A(t)},$$

où $c(t)$ est une fonction \mathcal{C}^1 à déterminer. On dit que l'on fait varier la constante c qui apparait dans l'expression de la solution de l'équation homogène. Pour que y_p soit une solution, il faut et il suffit que

$$c'(t)e^{A(t)} + a(t)c(t)e^{A(t)} = y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$c'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

et il suffit donc de prendre pour $c(t)$ une primitive de $b(t)e^{-A(t)}$

$$c(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds,$$

où $t_0 \in I$ est un point quelconque. La solution de l'équation est enfin donnée par

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

et on retrouve bien l'ensemble des solutions introduite dans la proposition 1

1.1.2 Stabilité

On considère maintenant le problème de Cauchy où l'EDO est linéaire, homogène et $a \in \mathbb{R}$. On peut par exemple se poser la question de la stabilité par rapport à la condition initiale : on ajoute un petit terme ε , qu'on appelle **perturbation**, à celle-ci et on se demande quel est le comportement de la solution lorsque ε tend vers 0. La solution sera dite stable par rapport à la donnée initiale, si elle tends (en un sens à définir) vers la solution du problème sans perturbation. Soit $t_0 \in I = \mathbb{R}$, le problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Le problème de Cauchy avec donnée initiale perturbée s'écrit, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \\ y(t_0) = y_0 + \varepsilon. \end{cases} \quad (1.6)$$

Les solution respectives de (1.5) et (1.6) sont

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)} \text{ et } y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) e^{a(t-t_0)}.$$

On a donc

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = \varepsilon e^{a(t-t_0)}.$$

La solution est donc stable par rapport à la donnée initiale car

$$\forall t \in I, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) - y(t) = 0.$$

Par contre, si $a > 0$ la solution n'est pas **uniformément stable** car

$$\forall \varepsilon > 0 \sup_{t \in I} |y_\varepsilon(t) - y(t)| = +\infty.$$

Si $a \leq 0$, la solution est **uniformément stable**, c'est-à-dire que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in I} |y_\varepsilon(t) - y(t)| = 0.$$

1.1.3 Équations non linéaires

On considère le cas où $f \in \mathcal{C}(I \times U, \mathbb{R})$ est non linéaire et on essaye de comprendre mieux la notion de solution.

Remarque 3 (Méthode des variables séparables). Dans certains cas on peut résoudre les équations différentielles en utilisant la méthode des variables séparables. Cette méthode consiste à mettre l'équation (1.1) sous la forme

$$h(y)y'(t) = g(t),$$

où h et g sont deux fonctions continues. En prenant une primitive de h , notée H , cette équation est équivalente à

$$(H(y))'(t) = g(t).$$

En notant G une primitive de g , ceci donne l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $H(y(t)) = G(t) + C$ pour tout $t \in I$.

Exemple 1 (Existence locale et globale). On considère l'edo avec $f(t, x) = -x^2$ et $I = \mathbb{R}$. On cherche d'abord des solutions constantes de l'edo, c.à.d. des solutions telles que $f(t, y) = 0$. Dans ce cas on trouve que la seule solution constante est $y(t) = 0 \forall t \in I$ d'où on a que la fonction

nulle est une **solution globale** de l'edo. Si on applique la méthode des variables séparables en supposant que $y(t) \neq 0 \forall t$ on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} y_+ : (C, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t-C} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} y_- : (-\infty, C) \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t-C} \end{array} \right.$$

On voit que y_+ est une solution sur $(C, +\infty)$ et y_- est une solution sur $(-\infty, C)$ alors que l'équation a un sens pour tout t dans \mathbb{R} ! On dit que y_+ et y_- sont **solutions locales** de l'edo.

Lemme 2 (Retour sur la définition de solution (forme intégrale)). *Une fonction $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si*

1. y est continue et $\forall t \in J, y(t) \in U$;
2. $\forall t \in J$ on a $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$.

On a alors ce premier résultat d'existence d'une solution locale du problème de Cauchy

Théorème 3 (Cauchy-Peano-Arzela). *Soient $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ et $U = [y_0 - r, y_0 + r]$, M un majorant de la norme de f sur $I \times U$ et $c \leq \min(a, \frac{r}{M})$. Alors le problème de Cauchy (1.2) admet au moins une solution $y : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow [y_0 - r, y_0 + r]$.*

Pour montrer ce théorème on aura besoin du résultat suivant que l'on admettra sans preuve

Théorème 4 (Ascoli). *On suppose E, F deux sous-espaces compacts de \mathbb{R}^d . Soit $\phi_n : E \rightarrow F$ une suite d'applications L -lipschitziennes, où $L \geq 0$ est une constante donnée. Alors on peut extraire une sous-suite ϕ_{n_k} uniformément convergente et la limite est une application L -lipschitzienne.*

Le preuve de 3 sera constructive et on utilisera la méthode (numérique!!) d'Euler ci-dessous

Remarque 4 (Schéma d'Euler explicite). On cherche à construire une solution approchée de (1.2) sur un intervalle $[t_0, t_0 + c]$. On se donne pour cela une subdivision

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + c.$$

La largeur de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est appelé pas de temps h est dans ce cas tous les intervalle on la même largeur. Le schéma d'Euler explicite consiste à construire une solution approchée y_h affine par morceaux comme suit

$$y_h(t) = y_i + (t - t_i)f(t_i, y_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

où, en partant de la donnée initiale y_0 , on calcule le y_i par récurrence en posant

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

Démonstration. On rappelle d'abord que le module de continuité ω de f sur $C = [t_0 - c, t_0 + c] \times U$ est défini par

$$\omega(u) = \max\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\| \mid |t_1 - t_2| + |y_1 - y_2| \leq u\},$$

où $u \in [0, +\infty)$. Comme C est un compact, la fonction f est uniformément continue sur C , par conséquent

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \omega(u) = 0.$$

On commence par montrer que une solution approchée $y_h : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow U$ construite par le schéma d'Euler est telle que $|y'_h(t) - f(t, y_h(t))| \leq \varepsilon$ et en particulier l'erreur d'approximation ε tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$. Remarquons que $y'_h(t) = f(t_i, y_i)$ et

$$|y_h(t) - y_i| = h|f(t_i, y_i)| \leq hM.$$

Par définition de ω il vient

$$|y'_h(t) - f(t, y_h(t))| = |f(t_i, y_i) - f(t, y_h(t))| \leq \omega(h(M + 1)) = \varepsilon.$$

On peut aussi remarquer que la solution approchée est M -lipschitzienne et en utilisant le théorème de Ascoli on peut extraire de y_h une sous-suite uniformément convergente vers y . Il nous reste à montrer que cette limite est une solution exacte de (1.2). Comme $|y'_h(t) - f(t, y_h(t))| \leq \varepsilon$, il vient après intégration

$$|y_h(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_h(s))ds| \leq \varepsilon|t - t_0|$$

et grâce à la convergence uniforme on a

$$y(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds = 0.$$

On en déduit que y est une solution exacte de (1.2), c'est-à-dire,

- $y(t_0) = y_0$;
- y est continue et $y \in U$;
- $y'(t) = f(s, y(t))$.

□

Supposons que l'on ait déterminé une solution (J, y) de (1.1) et que ce ne soit pas une solution globale $J \neq I$. On peut se poser la question de trouver un intervalle $J' \supset J$ sur lequel la fonction, ou plus exactement son prolongement, est encore solution de (1.1).

Définition 3 (Prolongement). Soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions de (1.1). On dit que (J_2, y_2) est un prolongement de (J_1, y_1) lorsque $J_2 \supset J_1$ et y_2 coïncide avec y_1 sur J_1 :

$$\forall t \in J_1, y_2(t) = y_1(t).$$

Définition 4 (Solution maximale). On dit que (J, y) est une solution maximale de (1.1) lorsqu'elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

Soit (J, y) une solution maximale de (1.1), on appelle J l'**intervalle de vie** de la solution.

Théorème 5. Soit O un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $y : J = [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation $y' = f(y, y)$, où f est une fonction continue sur O . Alors $y(t)$ peut se prolonger au delà de b si et seulement si il existe un compact $K \subset U$ tel que la courbe $t \mapsto (t, y(t))$, $t \in [t_0, b)$ reste contenue dans K

La conséquence suivante est immédiate

Remarque 5 (Critère de maximalité). Une solution $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de $y' = f(t, y)$ est maximale si et seulement si $t \mapsto (t, y(t))$ s'échappe de tout compact K de O quand $t \rightarrow a^+$ ou quand $t \rightarrow b^-$. Puisque les compacts sont les parties fermées bornées, ceci signifie encore que $t \mapsto (t, y(t))$ s'approche du bord de O ou tend vers ∞ , c'est-à-dire

$$|t| + |y(t)| + \frac{1}{d((t, y(t)), \partial O)} \rightarrow +\infty.$$

quand $t \rightarrow a^+$ ou $t \rightarrow b^-$.

Démonstration. La condition de prolongement est évidemment nécessaire, puisque si $y(t)$ se prolonge à $[t_0, b]$, alors l'image du compact $[t_0, b]$ par l'application continue $t \mapsto (t, y(t))$ est un compact $K \subset O$. Inversement, supposons qu'il existe un compact K de O tel que $(t, y(t)) \in K$ pour tout $t \in [t_0, b)$. Posons $M = \sup_{(t, y) \in K} \|f(t, y)\| < +\infty$ qui est fini par continuité de f et compacité de K . Ceci entraîne que $t \mapsto y(t)$ est uniformément continue et le critère de Cauchy montre que la limite $l = \lim_{t \rightarrow b^-} y(t)$ existe. nous pouvons prolonger y par continuité en b en posant $y(b) = l$ et nous avons $(b, y(b)) \in K \subset O$ puisque K est fermé. De plus, on sait que y est de classe C^1 sur $[t_0, b]$. Maintenant, le théorème d'existence locale des solutions implique qu'il existe une solution locale du problème de Cauchy de donnée initiale $z(b) = l = y(b)$ sur un intervalle $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$. On obtient alors un prolongement \tilde{y} de y sur $[t_0, b + \varepsilon]$ en posant $\tilde{y}(t) = z(t)$ pour $t \in [b, b + \varepsilon]$. \square

On termine cette section en donnant une première version élémentaire du théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour le problème (1.2).

Théorème 6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz, version élémentaire). Soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où I et U sont des intervalles ouverts de \mathbb{R} . Soit aussi $t_0 \in I$ et $y_0 \in U$. Si f est de classe C^1 sur $I \times U$, alors le problème de Cauchy (1.2) admet une unique solution maximale (J, y) .

Chapitre 2

Équations d'ordre n et systèmes linéaires

Contents

2.1	Une équation d'ordre 2	10
2.2	Équations différentielle d'ordre n et systèmes de n équations	11
2.3	Systèmes linéaires	14

2.1 Une équation d'ordre 2

On considère maintenant les équations linéaires d'ordre 2

Définition 5 (Équation différentielle linéaire du second ordre). Une équation différentielle linéaire du second ordre s'écrit de la forme suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t), \quad t \in I \quad (2.1)$$

où I est un intervalle ouvert et a, b et g sont des fonctions continues sur I . On cherche alors les fonctions y de classe \mathcal{C}^2 qui vérifient (2.1).

Le problème de Cauchy associé fait intervenir une condition initiale qui porte sur le couple $(y(t_0), y'(t_0))$ en un point $t_0 \in I$:

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t), \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = z_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où t_0, y_0 et z_0 sont donnés,

On verra plus tard que l'équation (2.1) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 et en appliquant une version plus générale du théorème de Cauchy-Lipschitz on aura existence et unicité d'une solution maximale pour (2.2). On s'intéresse à partir de maintenant à comment calculer explicitement les solution de (2.1) comme on pour l'équation (1.3).

On commence d'abord à considérer le cas de l'équation homogène à coefficient constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad (2.3)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche une solution de la forme $y(t) = e^{rt}$ et en réinjectant y dans (2.3) on a

$$(r^2 + ar + b)e^{rt} = 0,$$

d'où r doit être une solution de l'équation caractéristique de (2.3). On alors le résultat suivant

Proposition 7. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $P(r) = r^2 + ar + b$. On note $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant du polynôme P . Soit \mathcal{S} l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} à valeurs réelles de l'équation (2.3). Alors

i. Si $\Delta = 0$, notant $r_0 \in \mathbb{R}$ la racine de P

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto y_{c_1, c_2}(t), y_{c_1, c_2}(t) = (c_2 + c_1 t)e^{r_0 t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

ii. Si $\Delta > 0$, notant $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ les racines de P

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto y_{c_1, c_2}(t), y_{c_1, c_2}(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

iii. Si $\Delta < 0$, notant $\delta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\delta^2 = -\Delta$

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto y_{c_1, c_2}(t), y_{c_1, c_2}(t) = (c_1 \cos(\delta t/2) + c_2 \sin(\delta t/2))e^{-at/2}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

2.2 Équations différentielle d'ordre n et systèmes de n équations

Jusqu'à présent on s'est préoccupé d'équations différentielles scalaires d'ordre 1. De manière générale on peut définir une équation différentielle scalaire d'ordre n :

Définition 6 (Équation d'ordre n). Une équation différentielle d'ordre n s'écrit

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad (2.4)$$

où $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ continue, I étant un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit que le couple (J, y) , avec $J \subset I$ et $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n , est une solution de (2.4) lorsque

- $\forall t \in J$, on a $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in U$,
- $\forall t \in J$, on a $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$.

Pour énoncer des résultats théoriques, mais aussi parfois pour résoudre les équations d'ordre n , on préfère ramener une Edo d'ordre n à un **système de n équations différentielles d'ordre 1**.

On considère l'équation d'ordre 2 (2.1) : $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$. Supposons que (J, y) en soit une solution et posons

$$Y(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^2, Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Puisque $y \in \mathcal{C}^2(I)$, la fonction Y est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire, (J, Y) est **solution** du système différentiel

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

où $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la fonction définie par

$$F(t, X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -b(t)x_1 - a(t)x_2 + g(t) \end{bmatrix},$$

avec $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a la définition suivante

Définition 7 (Système différentiel d'ordre 1). Un système différentiel d'ordre 1 s'écrit

$$Y'(t) = F(t, Y(t)). \quad (2.5)$$

où $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, I étant un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit que le couple (J, Y) , avec $J \subset I$ et $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 , est une solution de (2.10) lorsque

- $\forall t \in J$, on a $Y(t) \in U$,
- $\forall t \in J$, on a $Y'(t) = F(t, Y(t))$.

La proposition suivante permet de lier la solution d'une équation d'ordre n à celle du système associé.

Proposition 8. Soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^n . On note $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

i. Si (J, y) est une solution de l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad (2.6)$$

alors (J, Y) , avec $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$, est une solution du système différentiel d'ordre n (2.10).

ii. Réciproquement, si (J, Y) est une solution de (2.10), avec $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$, alors $(J, y_1(t))$ est une solution de (2.1).

Exercice 1. Montrer 8.

En particulier, pour le système on démontrera le même théorème de Cauchy-Lipschitz que pour les équations scalaires

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz, version élémentaire, cas des systèmes). Soit $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit aussi $t_0 \in I$ et $Y_0 \in U$. Si F est de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times U$, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$$

Admet une unique solution maximale (J, Y) .

Remarque 6. Si la fonction f en (2.1) est de classe \mathcal{C}^1 alors en utilisant 8 et le théorème de CL pour le système on peut prouver l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour un problème de Cauchy avec une équation différentielle d'ordre n !

2.3 Systèmes linéaires

On étend maintenant la définition de equation linéaire au cas des systèmes différentiels

Définition 8 (Système linéaire). Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On dit que le system différentiel

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

est linéaire lorsqu'il existe deux fonctions $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues telle que

$$F(t, X) = A(t)X + B(t).$$

Le problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où $t_0 \in I$ et $Y_0 \in U$.

Good to know : exponentielle de matrices

Définition 9 (Exponentielle de matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$. On pose

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Si $t \in \mathbb{R}$ on définit le produit tA par

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (tA)_{ij} = (At)_{ij} = ta_{ij},$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} = e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

La définition a un sens grâce au résultat de convergence suivant

Lemme 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} < +\infty$.

La proposition suivante nous permet de bien définir la dérivée de l'exponentielle.

Proposition 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}.$$

On rappelle enfin certaines propriétés :

1. e^A est inversible, d'inverse e^{-A} ;
2. si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ et $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$;
3. si A est diagonalisable : il existe une matrice S telle que $D = S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors on calcule d'abord $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ et puis on revient $e^A = Se^DS^{-1}$.

2.3.1 Système linéaire à coefficients constants : le cas homogène

On considère d'abord le système différentielle homogène associé et pour simplicité on se restreint au cas de **coefficients constants**

$$Y'(t) = AY(t). \quad (2.8)$$

De façon similaire au cas scalaire on définit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

où $t_0 \in I$ et $Y_0 \in U$. La proposition suivante étend le même résultat obtenu pour les equations scalaires

Proposition 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

- Il existe une unique solution maximale pour problème de Cauchy (2.9) ;
- Les solutions maximales de (2.8) sont globales ;
- La solution maximale de condition initiale (t_0, Y_0) est

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0.$$

Remarque 7. La proposition 12 vaut bien sûr aussi pour les equations linéaires.

Démonstration. On procède comme dans le cas en dimension 1. Soit Y une solution du système homogène on a

$$\left(e^{-tA}Y(t)\right)' = e^{-tA}\left(Y'(t) - AY(t)\right) = 0.$$

Comme les matrices e^{-tA} sont inversibles, il suit que Y est solution si et seulement si l'application $e^{-tA}Y(t)$ est constante d'où le résultat annoncé. \square

Corollaire 13 (Dimension de l'ensemble des solutions). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \mathbb{R}^n$. L'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{t \rightarrow e^{tA}C, C \in \mathbb{R}^n\}$ du système linéaire homogène $Y'(t) = AY(t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de dimension n .

Démonstration. Pour montrer que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, il suffit de prendre deux solutions Y_1 et Y_2 du système et remarquer que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ est aussi une solution. On montre maintenant qu'il est de dimension n . Soit $t_0 \in I$, d'après 12, pour chaque $X_0 \in U$ le problème de Cauchy (2.9) admet une unique solution globale qu'on note (I, Y_{X_0}) . L'application $\varphi : X_0 \rightarrow Y_{X_0}$ de U dans \mathcal{S} est bijective :

1. elle est injective : si $Y_{X_1} = Y_{X_2}$ on a nécessairement $X_1 = X_2$;
2. elle est surjective : si $Y \in \mathcal{S}$, on a $Y = \varphi(Y(t_0))$.

On montre que φ est linéaire. Pour $X_1, X_2 \in U$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$Y_{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2} = \alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2}.$$

Puisque $Y_{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2}$ est l'unique solution Y qui vérifie $Y(t_0) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$, il suffit de montrer que $\alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2}$ est aussi une solution du même problème. Comme \mathcal{S} est un espace vectoriel on sait déjà que $\alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2}$ est une solution. Enfin

$$(\alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2})(t_0) = \alpha_1 Y_{X_1}(t_0) + \alpha_2 Y_{X_2}(t_0) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2.$$

L'application φ est donc un isomorphisme d'où

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(\varphi(U)) = n.$$

□

Définition 10. On appelle système fondamentale de solutions sur I de l'équation (2.8) toute base (Y_1, \dots, Y_n) de l'espace des solutions \mathcal{S} sur I de cette équation.

Proposition 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et (Y_1, \dots, Y_n) une famille de n solutions de l'équation (2.8) alors (Y_1, \dots, Y_n) est un système fondamentale de solutions si et seulement si $w(t) = \det([Y_1(t) | \dots | Y_n(t)]) \neq 0 \forall t \in I$.

La fonction $w(t) = \det([Y_1(t) | \dots | Y_n(t)]) \neq 0 \forall t \in I$ est appelée **wronskien** des fonctions (Y_1, \dots, Y_n) .

Si on considère le cas d'une matrice A diagonalisable (il existe une matrice S telle que chaque colonne de S est un vecteur propre de A et $D = S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$) on voit bien que

$$\begin{aligned} Y(t)' = AY(t) &\iff Y(t)' = SDS^{-1}Y(t) \iff S^{-1}Y(t)' = DS^{-1}Y(t) \\ &\iff (S^{-1}Y(t))' = D(S^{-1}Y(t)) \text{ car la matrice } S^{-1} \text{ est constante} \\ &\iff \tilde{Y}'(t) = D\tilde{Y}(t) \text{ où } \tilde{Y} = S^{-1}Y. \end{aligned}$$

Ainsi, Y est solution de l'équation homogène si et seulement si \tilde{Y} est solution de l'équation $\tilde{Y}' = D\tilde{Y}$. D'après la proposition 12 on sait que toute solution de $\tilde{Y}' = D\tilde{Y}$ est de la forme

$$\tilde{Y}(t) = e^{tD}C = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})C, \quad C \in \mathbb{R}^n.$$

On alors que

$$Y(t) = S\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n c_i e^{t\lambda_i} V_i,$$

où c_i sont les composantes du vecteur C , λ_i sont les valeurs propres de A et V_i les vecteurs propres associés. En utilisant la proposition 14 on peut vérifier que $(e^{t\lambda_1} V_1, \dots, e^{t\lambda_n} V_n)$ est bien un système fondamentale de solutions de $Y'(t) = AY(t)$.

2.3.2 Système linéaire à coefficients constants : le cas non homogène

On veut maintenant résoudre un système différentiel à coefficients constants mais avec un second membre

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \quad (2.10)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On sait de nouveau résoudre explicitement ces équations et l'on a encore des informations sur la structure de l'ensemble des solutions

Proposition 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue alors

- Il existe une unique solution maximale pour le problème de Cauchy associé à (2.10) ;
- Les solutions maximales de (2.10) sont globales ;
- La solution maximale de condition initiale $(t_0, Y_0) \in I \times U$ est

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

Démonstration. Soit $t \mapsto Y(t) \in U$ une application de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$\left(e^{-tA} Y(t) \right)' = e^{-tA} \left(Y'(t) - AY(t) \right).$$

Puisque chaque matrice e^{-tA} est inversible, il suit que $Y(t)$ est solution de (2.10) si et seulement si

$$\left(e^{-tA} Y(t) \right)' = e^{-tA} B(t)$$

soit, intégrant entre t_0 et $t \in I$,

$$e^{-tA} Y(t) - e^{-t_0 A} Y(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds$$

ou encore

$$Y(t) = \underbrace{e^{(t-t_0)A} Y_0}_{\text{sol. eq. homogène}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds}_{\text{sol. particulière}}.$$

□

2.3.2.1 Variation de la constante

On cherche une solution du système (2.10) en utilisant, comme dans le cas scalaire, la méthode de variation de la constante. Soit (Y_1, \dots, Y_n) un système fondamental de solutions pour le système homogène $Y' = AY$, alors l'idée de la méthode de la variation de la constante est de chercher une solution de $Y' = AY + B(t)$ sous la forme

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) Y_i(t),$$

où les fonctions c_i sont scalaires de classe \mathcal{C}^1 , à déterminer. On a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \sum_{i=1}^n c'_i(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t) Y'_i(t) = \sum_{i=1}^n c'_i(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t) A Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n c'_i(t) Y_i(t) + A \left(\sum_{i=1}^n c_i(t) Y_i(t) \right) = \sum_{i=1}^n c'_i(t) Y_i(t) + A Y(t). \end{aligned}$$

D'où Y est solution si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) Y_i(t) = B(t).$$

D'autre part si on note $W(t) = [Y_1(t) | \dots | Y_n(t)]$ la matrice **Wronskienne**, l'équation précédente s'écrit aussi

$$W(t) C'(t) = B(t),$$

où $C(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$. Comme on a choisi un système fondamental de solutions on sait que le wronskien $w(t) = \det(W(t))$ s'annule jamais pour tout $t \in I$ et on a $C'(t) = W(t)^{-1} B(t)$ et on obtient $C(t) = \tilde{C} + \int_{t_0}^t W(s) B(s) ds$ avec $\tilde{C} \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. Au final

$$Y(t) = W(t) \tilde{C} + W(t) \int_{t_0}^t W(s)^{-1} B(s) ds.$$

Remarque 8. Si la matrice A est diagonalisable, on choisit comme système fondamentale de solution la famille $Y_i(t) = e^{t\lambda_i} V_i$ où V_i est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

Application au cas d'une équation d'ordre 2 On cherche à résoudre une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue. En introduisant, comme en 2.2, la nouvelle fonction inconnue $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ on se ramène au système différentiel $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

Supposons connue une base (y_1, y_2) de l'espace des solutions de l'équation homogène $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ (on peut même les calculer en utilisant 7!), et donc une base $Y_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y'_i \end{bmatrix}$ ($i = 1, 2$) de l'espace des solutions du système homogène. Comme on vient de le voir, la méthode de la variation de la constante consiste à chercher les solutions Y du système différentiel sous la forme

$$Y(t) = c_1(t)Y_1(t) + c_2(t)Y_2(t). \quad (2.11)$$

On revient maintenant à la fonction inconnue y . L'identité (2.11) se traduit par

$$\begin{cases} y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \\ y'(t) = c_1(t)y'_1(t) + c_2(t)y'_2(t). \end{cases} \quad (2.12)$$

En chaque instant t , $y(t)$ et $y'(t)$ sont donc respectivement combinaisons linéaires de $(y_1(t), y_2(t))$ et $(y'_1(t), y'_2(t))$. Avec les mêmes coefficients $(c_1(t), c_2(t))$. Dérivons la première ligne de (2.12). Il vient

$$y'(t) = (c_1(t)y'_1(t) + c_2(t)y'_2(t)) + (c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t)).$$

Demander que la seconde ligne de (2.12) soit satisfaite équivaut donc à la condition

$$c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) = 0. \quad (2.13)$$

Dérivons maintenant la seconde ligne de (2.12). Il vient

$$y''(t) = (c_1(t)y''_1(t) + c_2(t)y''_2(t)) + (c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t)). \quad (2.14)$$

Puisque y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène, il suit de (2.14) et de (2.12) que

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= c_1(t)y''_1(t) + c_2(t)y''_2(t) + c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) \\ &\quad + a(c_1(t)y'_1(t) + c_2(t)y'_2(t)) + b(c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)) \\ &= c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t). \end{aligned}$$

Il suit alors que $y(t)$ est solution de l'edo d'ordre 2 si et seulement si

$$c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) = g(t). \quad (2.15)$$

On résume ce qu'on vient de voir en (2.13) et (2.15) : la fonction y est solution si et seulement si les fonctions inconnues c'_1 et c'_2 satisfont, pour tout instant $t \in I$, le système

$$\begin{cases} c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) = 0 \\ c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) = g(t), \end{cases} \quad (2.16)$$

qui, en utilisant les notations de la section précédente, peut s'écrire sous la forme

$$W(t)C'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

Puisque la matrice W est inversible en chaque instant t (Y_1 et Y_2 est un système fondamentale de solutions), on obtient donc c'_1 et c'_2 en résolvant ce système, puis les fonctions c_1 et c_2 par quadrature.

2.3.3 Système linéaire à coefficients variables : le cas homogène

On a vu que les solutions du système linéaire à coefficients constants $Y'(t) = AY(t)$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{tA}C$ où $C \in \mathbb{R}^n$ et, dans le cas d'une matrice diagonalisable, on a calculé explicitement e^{tA} . On considère maintenant le cas générale d'un système linéaire homogène à coefficients variable, c'est-à-dire

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad (2.17)$$

où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fonction continue. On admet (mais on le démontrera plus tard !) que, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \quad (2.18)$$

admet une unique solution maximale, qui est globale. En particulier on peut démontrer que l'ensemble des solutions \mathcal{S} de (2.17) est un espace vectoriel de dimension n .

Définition 11 (Résolvante). On appelle résolvante de (2.17), l'application linéaire $R(t, t_0) : I \times I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui où $t \mapsto R(t, t_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t), \\ M(t_0) = \text{Id}_n. \end{cases} \quad (2.19)$$

Remarque 9. $R(t, t_0)$ est l'application linéaire qui à un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ associe la valeur en t de la solution de (2.17) qui vaut X à l'instant t_0 . En particulier la solution du problème de Cauchy (2.18) est donnée par $Y(t) = R(t, t_0)Y_0$.

Remarque 10 (Système à coefficients constants). Dans le cas d'un système à coefficients constants on a $(\varphi_t)^{-1} = e^{-tA}$ et le résolvante est de la forme $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

Proposition 16 (Propriétés du résolvante). Soit $R : I \times I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le résolvante de (2.17). On a

1. $\forall t \in I, R(t, t) = \text{Id}_n$;
2. $\forall t_0, t_1, t_2 \in I, R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$;
3. $\forall t_0, t_1, t_2 \in I, \partial_t R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$.

Exercice 2. Montrer la proposition 16.

Remarque 11 (Le résolvante est une matrice inversible). 16[1-2] donnent

$$R(t, t_0)R(t_0, t) = R(t, t) = \text{Id}_n = R(t_0, t)R(t, t_0),$$

donc $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$.

C'est évident que si on connaît le résolvante $R(t, t_0)$ alors on a à disposition un système de n solutions de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Puisque l'espace des solutions est de dimension n , on peut se demander si les colonnes Y_1, \dots, Y_n de R forment un système fondamentale de solutions.

Théorème 17 (de Liouville). *Soit $w(t) = \det([Y_1(t) | \dots | Y_n(t)])$ le wroskien du système de n solutions Y_1, \dots, Y_n de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Alors $w(t)$ satisfait l'équation différentielle*

$$w'(t) = a(t)w(t),$$

où $a(t) = \text{tr}A(t)$ est la trace de la matrice $A(t)$.

Démonstration. Soit $W(t) = [Y_1 | \dots | Y_n]$ la matrice wroskienne associée au système de solutions Y_1, \dots, Y_n alors on sait qu'elle satisfait (comme dans le cas de la remarque précédente) l'équation

$$W'(t) = A(t)W(t).$$

Or la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne

$$W(t + \tau) = W(t) + \tau W'(t) + o(\tau) = (\text{Id} + \tau A(t))W(t) + o(\tau).$$

On obtient alors

$$w(t + \tau) = \det((\text{Id} + \tau A(t))W(t)) + o(\tau) = w(t) \det(\text{Id} + \tau A(t)) + o(\tau).$$

Comme on a la relation suivante entre le déterminant et la trace de la matrice A

$$\det(\text{Id} + \tau A(t)) = 1 + \tau \text{tr}A(t) + O(\tau^2),$$

on en déduit que

$$w(t + \tau) = w(t)(1 + \tau \text{tr}A(t)) + o(\tau),$$

d'où

$$\frac{w(t + \tau) - w(t)}{\tau} = a(t)w(t) + o(1),$$

et pour $\tau \rightarrow 0$ on obtient le résultat annoncé. \square

On remarque que si le wroskien $w(t_0) \neq 0$ alors il s'annule jamais. Par conséquence la proposition (14) peut être reformulée de manière équivalente

Proposition 18. *Soit (Y_1, \dots, Y_n) une famille de n solutions de l'équation (2.8) (ou de (2.17)) alors (Y_1, \dots, Y_n) est un système fondamentale de solutions si et seulement si $\exists t_0 \in I$ tel $w(t_0) = \det([Y_1(t) | \dots | Y_n(t)]) \neq 0$.*

Corollaire 19. *Soit $R(t, t_0)$ le résolvante de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$, alors les colonnes de R forment un système fondamentale de solutions.*

Démonstration. Si on pose $w(t) = \det(R(t, t_0))$ le wroskien associé à les colonnes de R on a, grâce au théorème de Liouville, qu'il satisfait le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} w'(t) = a(t)w(t), \\ w(t_0) = 1, \end{cases}$$

où $a(t) = \text{tr}A(t)$ est la trace de la matrice $A(t)$. On connaît que la solution de ce problème est donné par

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds},$$

comme $w(t) \neq 0 \forall t \in I$ on a, en utilisant la proposition 14, que les colonnes de R forment un système fondamentale de solutions. \square

2.3.3.1 Méthode de variation de la constante

On veut trouver une solution de l'équation

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t). \quad (2.20)$$

On sait que les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent $R(t, t_0)C$, et l'on cherche une solution sous la forme

$$Y_p(t) = R(t, t_0)C(t),$$

où $C(t)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . En sachant que Y_p doit satisfaire (2.20), on obtient que

$$R(t, t_0)C'(t) = B(t),$$

comme $R(t, t_0)$ est inversible on obtient

$$C'(t) = R(t_0, t)B(t).$$

On peut donc choisir $C(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, s)B(s)ds$ et on a comme solution

$$Y_p(t) = R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s)B(s)ds.$$

Si on considère le cas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on retrouve bien q

$$Y_p(t) = e^{(t-t_0)A} \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} B(s)ds.$$

Pour resumer : la méthode de variation de la constante pour les systèmes linéaires à coefficients variables et constants

- Si on connaît le résolvante de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ alors une solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est donnée par

$$Y(t) = R(t, t_0)C + R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s)B(s)ds,$$

où $C \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$.

- Si on connaît un système fondamentale de solutions de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ alors on calcule la matrice wronskienne $W(t) = [Y_1 | \cdots | Y_n]$ et une solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est donnée par

$$Y(t) = W(t)C + W(t) \int_{t_0}^t W(s)^{-1}B(s)ds,$$

où $C \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$.