Equations différentielles ordinaires

Luca Nenna

7 octobre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Les notions de base et le théorème de Cauchy-Peano-Arzela

Contents

1.1 Équations du premier ordre

Nous allons aborder dans ce premier chapitre les équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires du premier ordre.

Définition 1 (équation différentielle ordinaire)**.** Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation qui a pour inconnue une fonction, elle s'écrit de la forme suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \in I, \tag{1.1}$$

où I est une intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et la fonction f continue sur $I \times U$, avec U intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 (Solution locale et globale)**.** On dit que le couple (J, y), constitué d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, est une solution de (1.1) lorsque

— pour tout $t \in J$, on a $y(t) \in U$;

— pour tout $t \in J$, on a $y'(t) = f(t, y(t))$.

On dit que (J, y) est une **solution globale** de (1.1) lorsque $J = I$.

En pratique, on est souvent intéressé par une équation différentielle avec condition initiale, qu'on appelle alors **problème de Cauchy**, qui s'écrit :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème de Cauchy en t_0 (1.2) c'est trouver toutes les solutions (J, y) de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ telles que $t_0 \in J$ et $y(t_0) = y_0$. Se posent alors les questions naturelles suivantes :

1. Existence des solutions : locale, globale ?
2. Unicité de la solution ?
3. Stabilité de la solution ?

1.1.1 Équations linéaires

On s'intéresse ici au cas **linéaire** : on choisit $f(t, y(t)) = a(t)y(t) + b(t)$ où les fonctions a et b sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$; à t donné, la fonction $y \mapsto f(t, y(t))$ est donc linéaire. L'équation devient alors :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I. \tag{1.3}$$

Dans un premier temps nous allons résoudre **l'equation homogène** associée à (1.3), c.à.d. l'équation (1.3) avec $b(t) = 0$ pour tout t. Soit l'équation homogène associée à (1.3)

$$y'(t) = a(t)y(t). \tag{1.4}$$

On considère d'abord le cas où $a(t)$ est une fonction constante sur l'intervalle I : on doit trouver toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I)$ telles que

$$\forall t \in I,\ y'(t) - a(t)y(t) = 0.$$

Remarque 1 (Équation autonome). Si la fonction f ne dépend pas de t, on dit que l'équation (1.1) est autonome.

Il se trouve que lorsque $y \in \mathcal{C}^1(I)$,

$$(e^{-at}y(t))' = e^{-at}(-ay(t) + y'(t)).$$

Donc (1.4) équivaut à

$$\forall t \in I, \quad (e^{-at}y(t))' = 0.$$

D'où

$$(1.4) \iff \exists C \in \mathbb{R},\ e^{-at}y(t) = C \iff \exists C \in \mathbb{R},\ y(t) = Ce^{at}.$$

Autrement dit on a prouvé que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y'(t) = ay$, où $a \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle ouvert I est

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto Ce^{at},\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Passons au cas général où $a(t)$ n'est pas forcément constante sur I. On procède de la même manière, c.à.d. trouver une fonction $A(t)$ telle que

$$\forall t \in I,\ y'(t) - a(t)y(t) = 0 \iff \forall t \in I,\ (e^{-A(t)}y(t))' = 0.$$

On voit qu'il suffit de prendre pour A n'importe quelle primitive de la fonction a (puisque a est continue sur I elle admet des primitives sur cet intervalle).

On a alors que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)$, où $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, sur l'intervalle ouvert I est

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto Ce^{A(t)},\ C \in \mathbb{R}\},$$

où $A : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de a sur I.
On revient maintenant à l'équation (1.3)

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

où a et b sont deux fonctions continues sur l'intervalle $I = (\alpha, \beta)$. On a la proposition suivante

Proposition 1. *L'ensemble des solutions de l'équation* (1.3) *sur* I *est*

$$\mathcal{S} := \Big\{t \mapsto e^{A(t)}\Big(C + \int_\alpha^t e^{-A(s)}b(s)ds\Big),\ C \in \mathbb{R}\Big\},$$

Démonstration. Soit A une primitive de a sur I et supposons que $y : I \mapsto \mathbb{R}$ soit une solution de (1.3). On pose, pour tout $t \in I$, $w(t) = e^{-A(t)}y(t)$ on a

$$\begin{aligned} w'(t) &= -a(t)e^{-A(t)}y(t) + e^{-A(t)}y'(t) \\ &= -a(t)e^{-A(t)}y(t) + e^{-A(t)}(a(t)y(t) + b(t)) \\ &= e^{-A(t)}b(t). \end{aligned}$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$w(t) = \int_\alpha^t e^{-A(s)}b(s)ds + C,$$

Et

$$y(t) = e^{A(t)}w(t) = e^{A(t)}\Big(\int_\alpha^t e^{-A(s)}b(s)ds + C\Big).$$

Réciproquement, on vérifie que toutes les fonctions $y : t \mapsto e^{A(t)}\Big(\int_\alpha^t e^{-A(s)}b(s)ds + C\Big)$ sont des solutions de (1.3) sur I. □

1.1.1.1 Résolution par la méthode de variation de la constante

On donne ici un autre preuve de la proposition 1 en utilisant un procédé bien connu pour les équations linéaires d'ordre 1 : **la méthode de variation de la constante**. On verra plus tard que cette méthode marche aussi pour les équations d'ordre 2 et les systèmes linéaires.

On considère l'équation

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont continues.

Remarque 2. On peut noter que une équation linéaire d'ordre 1 peut s'écrire aussi sous la forme

$$p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t),$$

où $p, q, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues et on assume que $p(t) \neq 0$ sur un intervalle $J \subset I$ telle qu'on peut réécrire l'edo sous la forme (1.3). On cherchera alors une solution sur l'intervalle J.

On sait que les solutions de l'équation homogène associée

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

Sont les fonctions de la forme $y_h(t) = Ce^{A(t)}$, où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ sur I. L'idée est la suivante : on cherche une solution **particulière** y_p de l'équation sous la forme

$$y_p(t) = c(t)e^{A(t)},$$

où $c(t)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ à déterminer. On dit que l'on fait varier la constante c qui apparait dans l'expression de la solution de l'équation homogène. Pour que y_p soit une solution, il faut et il suffit que

$$c'(t)e^{A(t)} + a(t)c(t)e^{A(t)} = y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$c'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

et il suffit donc de prendre pour $c(t)$ une primitive de $b(t)e^{-A(t)}$

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds,$$

où $t_0 \in I$ est un point quelconque. La solution de l'équation est enfin donnée par

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

et on retrouve bien l'ensemble des solutions introduite dans la proposition 1

1.1.2 Stabilité

On considère maintenant le problème de Cauchy où l'EDO est linéaire, homogène et $a \in \mathbb{R}$. On peut par exemple se poser la question de la stabilité par rapport à la condition initiale : on ajoute un petit terme ε, qu'on appelle **perturbation**, à celle-ci et on se demande quel est le comportement de la solution lorsque ε tend vers 0. La solution sera dite stable par rapport à la donnée initiale, si elle tends (en un sens à définir) vers la solution du problème sans perturbation. Soit $t_0 \in I = \mathbb{R}$, le problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Le problème de Cauchy avec donnée initiale perturbée s'écrit, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \\ y(t_0) = y_0 + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.6}$$

Les solution respectives de (1.5) et (1.6) sont

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)} \text{ et } y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) e^{a(t-t_0)}.$$

On a donc

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = \varepsilon e^{a(t-t_0)}.$$

La solution est donc stable par rapport à la donnée initiale car

$$\forall t \in I, \lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t) - y(t) = 0.$$

Par contre, si $a > 0$ la solution n'est pas **uniformément stable** car

$$\forall \varepsilon > 0 \sup_{t \in I} |y_\varepsilon(t) - y(t)| = +\infty.$$

Si $a \leq 0$, la solution est **uniformément stable**, c'est-à-dire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in I} |y_\varepsilon(t) - y(t)| = 0.$$

1.1.3 Équations non linéaires

On considère le cas où $f \in \mathcal{C}(I \times U, \mathbb{R})$ est non linéaire et on essaye de comprendre mieux la notion de solution.

Remarque 3 (Méthode des variables séparables). Dans certains cas on peut résoudre les équations différentielles en utilisant la méthode des variables séparables. Cette méthodes consiste à mettre l'équation (1.1) sous la forme

$$h(y)y'(t) = g(t),$$

où h et g sont deux fonctions continues. En prenant une primitive de h, notée H, cette équation est équivalente à

$$(H(y))'(t) = g(t).$$

En notant G une primitive de g, ceci donne l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $H(y(t)) = G(t) + C$ pour tout $t \in I$.

Exemple 1 (Existence locale et globale). On considère l'edo avec $f(t, x) = -x^2$ et $I = \mathbb{R}$. On cherche d'abord des solutions constantes de l'edo, c.à.d. des solutions telles que $f(t, y) = 0$. Dans ce cas on trouve que la seule solution constante est $y(t) = 0 \ \forall t \in I$ d'où on a que la fonction nulle est une **solution globale** de l'edo. Si on applique la méthode des variables séparables en supposant que $y(t) \neq 0 \; \forall t$ on obtient

$$\begin{cases} y_+ : (C, +\infty) \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t-C} \end{cases} \text{et} \begin{cases} y_- : (-\infty, C) \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t-C} \end{cases}.$$

On voit que y_+ est une solution sur $(C, +\infty)$ et y_- est une solution sur $(-\infty, C)$ alors que l'équation a un sens pour tout t dans $\mathbb{R}$! On dit que y_+ et y_- sont **solutions locales** de l'edo.

Lemme 2 (Retour sur la définition de solution (forme intégrale))**.** *Une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si est seulement si*

1. *y est continue et $\forall t \in J$, $y(t) \in U$;*
2. *$\forall t \in J$ on a $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$.*

On a alors ce premier résultat d'existence d'une solution locale du problème de Cauchy

Théorème 3 (Cauchy-Peano-Arzela)**.** *Soient $f : I \times U \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ et $U = [y_0 - r, y_0 + r]$, M un majorant de la norme de f sur $I \times U$ et $c \leq \min(a, \frac{r}{M})$. Alors le problème de Cauchy* (1.2) *admet au moins une solution $y : [t_0 - c, t_0 + c] \to [y_0 - r, y_0 + r]$.*

Pour montrer ce théorème on aura besoin du résultat suivant que l'on admettra sans preuve

Théorème 4 (Ascoli)**.** *On suppose E, F deux sous-espaces compacts de $\mathbb{R}^d$. Soit $\phi_n : E \to F$ une suite d'applications $L-$lipschitziennes, où $L \geq 0$ est une constante donnée. Alors on peut extraire une sous-suite ϕ_{n_k} uniformément convergente et la limite est une application $L-$lipschitzienne.*

Le preuve de 3 sera constructive et on utilisera la méthode (numérique !!) d'Euler ci-dessous

Remarque 4 (Schéma d'Euler explicite). On cherche à construire une solution approchée de (1.2) sur un intervalle $[t_0, t_0 + c]$. On se donne pour cela une subdivision

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + c.$$

La largeur de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est appelé pas de temps h est dans ce cas tous les intervalle on la même largeur. Le schéma d'Euler explicite consiste à construire une solution approchée y_h affine par morceaux comme suit

$$y_h(t) = y_i + (t - t_i) f(t_i, y_i), \; t \in t_i, t_{i+1},$$

où, en partant de la donnée initiale y_0, on calcule le y_i par récurrence en posant

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i).$$

Démonstration. On rappelle d'abord que le module de continuité ω de f sur $C = [t_0 - c, t_0 + c] \times U$ est défini par

$$\omega(u) = \max\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\| \mid |t_1 - t_2| + |y_1 - y_2| \leq u\},$$

où $u \in [0, +\infty)$. Comme C est un compact, la fonction f est uniformément continue sur C, par conséquent

$$\lim_{u \to 0+} \omega(u) = 0.$$

On commence par montrer que une solution approchée $y_h : [t_0 - c, t_0 + c] \to U$ construite par le schéma d'Euler est telle que $|y_h'(t) - f(t, y_h(t))| \leq \varepsilon$ et en particulier l'erreur d'approximation ε tend vers 0 quand $h \to 0$. Remarquons que $y_h'(t) = f(t_i, y_i)$ et

$$|y_h(t) - y_i| = h|f(t_i, y_i)| \leq hM.$$

Par définition de ω il vient

$$|y_h'(t) - f(t, y_h(t))| = |f(t_i, y_i) - f(t, y_h(t))| \leq \omega(h(M+1)) = \varepsilon.$$

On peut aussi remarquer que la solution approchée est $M-$lipschitzienne et en utilisant le théorème de Ascoli on peut extraire de y_h une sous-suite uniformément convergente vers y. Il nous reste a montrer que cette limite est une solution exacte de (1.2). Comme $|y_h'(t) - f(t, y_h(t))| \leq \varepsilon$, il vient après intégration

$$|y_h(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y_h(s))ds| \leq \varepsilon|t - t_0|$$

et grâce à la convergence uniforme on a

$$y(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds = 0.$$

On en déduit que y est une solution exacte de (1.2), c'est-à-dire,
- $y(t_0) = y_0$;
- y est continue et $y \in U$;
- $y'(t) = f(s, y_(t))$.

□

Supposons que l'on ait déterminé une solution (J, y) de (1.1) et que ce ne soit pas une solution globale $J \neq I$. On peut se poser la question de trouver un intervalle $J' \supset J$ sur lequel la fonction, ou plus exactement son prolongement, est encore solution de (1.1).

Définition 3 (Prolongement)**.** Soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions de (1.1). On dit que (J_2, y_2) est un prolongement de (J_1, y_1) lorsque $J_2 \supset J_1$ et y_2 coïncide avec y_1 sur J_1 :

$$\forall t \in J_1,\ y_2(t) = y_1(t).$$

Définition 4 (Solution maximale)**.** On dit que (J, y) est une solution maximale de (1.1) lorsqu'elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

Soit (J, y) une solution maximale de (1.1), on appelle J l'**intervalle de vie** de la solution.

Théorème 5. *Soit O un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $y : J = [t_0, b) \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation $y' = f(y, y)$, où f est une fonction continue sur O. Alors $y(t)$ peut se prolonger au delà de b si et seulement si il existe un compact $K \subset U$ tel que la courbe $t \mapsto (t, y(t))$, $t \in [t_0, b)$ reste contenue dans K*

La conséquence suivante est immédiate

Remarque 5 (Critère de maximalité). Une solution $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ de $y' = f(t, y)$ est maximale si et seulement $t \mapsto (t, y(t))$ s'échappe de tout compact K de O quand $t \to a^+$ ou quand $t \to b^-$. Puisque les compact sont les parties fermées bornées, ceci signifie encore que $t \mapsto (t, y(t))$ s'approche du bord de O ou tend vers ∞, c'est-à-dire

$$|t| + |y(t)| + \frac{1}{d((t, y(t)), \partial O)} \to +\infty.$$

quand $t \to a^+$ ou $t \to b^-$.

Démonstration. La condition de prolongement est évidemment nécessaire, puisque si $y(t)$ se prolonge à $[t_0, b]$, alors l'image du compact $[t_0, b]$ par l'application continue $t \mapsto (t, y(t))$ est un compact $K \subset O$. Inversement, supposons qu'il existe un compact K de O tel que $(t, y(t)) \in K$ pour tout $t \in [t_0, b)$. Posons $M = \sup_{(t,y)\in K} \|f(t, y)\| < +\infty$ qui est fini par continuité de f et compacité de K. Ceci entraîne que $t \mapsto y(t)$ est uniformément continue et le critère de Cauchy montre que la limite $l \lim_{t\to b^-} y(t)$ existe. nous pouvons prolonger y par continuité en b en posant $y(b) = l$ et nous avons $(b, y(b)) \in K \subset O$ puisque K est fermé. De plus, on sait que y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0, b]$. Maintenant, le théorème d'existence locale des solutions implique qu'il existe une solution locale du problème de Cauchy de donné initia ;e $z(b) = l = y(b)$ sur un intervalle $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$. On obtient alors un prolongement $\tilde{y}$ de y sur $[t_0, b + \varepsilon]$ en posant $\tilde{y}(t) = z(t)$ pour $t \in [b, b + \varepsilon]$. □

On termine cette section en donnant une première version élémentaire du théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour le problème (1.2).

Théorème 6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz, version élémentaire)**.** *Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où I et U sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit aussi $t_0 \in I$ et $y_0 \in U$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times U$, alors le problème de Cauchy* (1.2) *admet une unique solution maximale (J, y).*

Chapitre 2

Équations d'ordre n et systèmes linéaires

Contents

2.1 Une équation d'ordre 2

On considère maintenant les équations linéaires d'ordre 2

Définition 5 (Équation différentielle linéaire du second ordre)**.** Une équation différentielle linéaire du second ordre s'écrit de la forme suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t),\ t \in I \tag{2.1}$$

où I est un intervalle ouvert et a, b et g sont des fonctions continues sur I. On cherche alors les fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient (2.1).

Le problème de Cauchy associé fait intervenir une condition initiale qui porte sue le couple $(y(t_0), y'(t_0)$ en un point $t_0 \in I$:

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t),\ t \in I \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où t_0, y_0 et z_0 sont donnés,

On verra plus tard que l'équation (2.1) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 et en appliquant une version plus générale du théorème de Cauchy-Lipschitz on aura existence et unicité d'une solution maximale pour (2.2). On s'intéresse à partir de maintenant à comment calculer explicitement les solution de (2.1) comme on pour l'équation (1.3).

On commence d'abord a considérer le cas de l'équation homogène à coefficient constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \tag{2.3}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche une solution de la forme $y(t) = e^{rt}$ et en réinjectant y dans (2.3) on a

$$(r^2 + ar + b)e^{rt} = 0,$$

d'où r doit être une solution de l'**équation caractéristique** de (2.3). On alors le résultat suivant

Proposition 7. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $P(r) = r^2 + ar + b$. On note $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant du polynôme P. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles de l'équation* (2.3)*. Alors*

i. Si $\Delta = 0$, notant $r_0 \in \mathbb{R}$ la racine de P

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto y_{c_1,c_2}(t),\ y_{c_1,c_2}(t) = (c_2 + c_1 t)e^{r_0 t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

ii. Si $\Delta > 0$, notant $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ les racines de P

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto y_{c_1,c_2}(t),\ y_{c_1,c_2}(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

iii. Si $\Delta < 0$, notant $\delta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\delta^2 = -\Delta$

$$\mathcal{S} := \{t \mapsto y_{c_1,c_2}(t),\ y_{c_1,c_2}(t) = (c_1 \cos(\delta t/2) + c_2 \sin(\delta t/2))e^{-at/2}.\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

2.2 Équations différentielle d'ordre n et systèmes de n équations

Jusqu'à présent on s'est préoccupé d'équations différentielles scalaires d'ordre 1. De manière générale on peut définir une équation différentielle scalaire d'ordre n :

Définition 6 (Équation d'ordre n)**.** Une équation différentielle d'ordre n s'écrit

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)), \tag{2.4}$$

où $f : I \times U \to \mathbb{R}$ continue, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que le couple (J, y), avec $J \subset I$ et $y : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, est une solution de (2.4) lorsque

— $\forall t \in J$, on a $(y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)) \in U$,

— $\forall t \in J$, on a $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t))$.

Pour énoncer des résultats théoriques, mais aussi parfois pour résoudre les équations d'ordre n, on préfère ramener une Edo d'ordre n à un **système de n équations différentielles d'ordre 1**.

On considère l'équation d'ordre 2 (2.1) : $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$. Supposons que (J, y) en soit une solution et posons

$$Y(t) : J \to \mathbb{R}^2,\ Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Puisque $y \in \mathcal{C}^2(I)$, la fonction Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire, (J, Y) est **solution** du système différentiel

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

où $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est la fonction définie par

$$F(t, X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -b(t)x_1 - a(t)x_2 + g(t) \end{bmatrix},$$

avec $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a la définition suivante

Définition 7 (Système différentiel d'ordre 1)**.** Un système différentiel d'ordre 1 s'écrit

$$Y'(t) = F(t, Y(t)). \tag{2.5}$$

où $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ On dit que le couple (J, Y), avec $J \subset I$ et $Y : J \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, est une solution de (2.10) lorsque

— $\forall t \in J$, on a $Y(t) \in U$,

— $\forall t \in J$, on a $Y'(t) = F(t, Y(t))$.

La proposition suivante permet de lier la solution d'une équation d'ordre n à celle du système associé.

Proposition 8. *Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où I est un intervalle ouvert de R et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par*

$$F(t, x_1, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix}.$$

i. Si (J, y) est une solution de l'équation différentielles d'ordre n

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)), \tag{2.6}$$

alors (J, Y), avec $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$, est une solution du système différentiel d'ordre 1 (2.10).

ii. Réciproquement, si (J, Y) est une solution de (2.10)*, avec $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$, alors $(J, y_1(t))$ est une solution de* (2.1)*.*

Exercice 1. Montrer 8.

En particulier, pour le système on démontrera le même théorème de Cauchy-Lipschitz que pour les equations scalaires

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz, version élémentaire, cas des systèmes)**.** *Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, où I est un intervalle ouvert de R et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit aussi $t_0 \in I$ et $Y_0 \in U$. Si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times U$, alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$$

Admet une unique solution maximale (J, Y).

Remarque 6. Si la fonction f en (2.1) est de classe $\mathcal{C}^1$ alors en utilisant 8 et le théorème de CL pour le système on peut prouver l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour un problème de Cauchy avec une équation différentielle d'ordre n !

2.3 Systèmes linéaires

On étend maintenant la definition de equation linéaire au cas des systèmes différentiels

Définition 8 (Système linéaire)**.** Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que le system différentiel

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

est linéaire lorsqu'il existe deux fonctions $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ continues telle que

$$F(t, X) = A(t)X + B(t).$$

Le problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

où $t_0 \in I$ et $Y_0 \in U$.

Good to know : exponentielle de matrices

Définition 9 (Exponentielle de matrice)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{ij})_{i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,n}$. On pose

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Si $t \in \mathbb{R}$ on définit le produit tA par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ (tA)_{ij} = (At)_{ij} = ta_{ij},$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

La définition a un sens grâce au résultat de convergence suivant

Lemme 10. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!} < +\infty$.*

La proposition suivante nous permet de bien définir la dérivée de l'exponentielle.

Proposition 11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors*

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}.$$

On rappelle enfin certaines propriétés :

1. e^A est inversible, d'inverse e^{-A} ;
2. si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ alors $e^A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$ et $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$;
3. si A est diagonalisable : il existe une matrice S telle que $D = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ alors on calcule d'abord $e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$ et puis on revient $e^A = Se^DS^{-1}$.

2.3.1 Système linéaire à coefficients constants : le cas homogène

On considère d'abord le système différentielle homogène associé et pour simplicité on se restreint au cas de **coefficients constants**

$$Y'(t) = AY(t). \tag{2.8}$$

De façon similaire au cas scalaire on définit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $t_0 \in I$ et $Y_0 \in U$. La proposition suivante étend le même résultat obtenu pour les equations scalaires

Proposition 12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors*

- *Il existe une unique solution maximale pour problème de Cauchy* (2.9) *;*
- *Les solutions maximales de* (2.8) *sont globales ;*
- *La solution maximale de condition initiale (t_0, Y_0) est*

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0.$$

Remarque 7. La proposition 12 vaut bien sûr aussi pour les equations linéaires.

Démonstration. On procède comme dans le cas en dimension 1. Soit Y une solution du système homogène on a

$$\Big(e^{-tA}Y(t)\Big)' = e^{-tA}\Big(Y'(t) - AY(t)\Big) = 0.$$

Comme les matrices e^{-tA} sont inversibles, il suit que Y est solution si et seulement si l'application $e^{-tA}Y(t)$ est constante d'où le résultat annoncé. □

Corollaire 13 (Dimension de l'ensemble des solutions)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \mathbb{R}^n$. L'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{t \to e^{tA}C,\ C \in \mathbb{R}^n\}$ du système linéaire homogène $Y'(t) = AY(t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de dimension n.*

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, il suffit de prendre deux solutions Y_1 et Y_2 du système et remarquer que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ est aussi une solution. On montre maintenant qu'il est de dimension n. Soit $t_0 \in I$, d'après 12, pour chaque $X_0 \in U$ le problème de Cauchy (2.9) admet une unique solution globale qu'on note (I, Y_{X_0}). L'application $\varphi : X_0 \to Y_{X_0}$ de U dans $\mathcal{S}$ est bijective :

1. elle est injective : si $Y_{X_1} = Y_{X_2}$ on a nécessairement $X_1 = X_2$;
2. elle est surjective : si $Y \in \mathcal{S}$, on a $Y = \varphi(Y(t_0))$.

On montre que φ est linéaire. Pour $X_1, X_2 \in U$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$Y_{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2} = \alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2}.$$

Puisque $Y_{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2}$ est l'unique solution Y qui vérifie $Y(t_0) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$, il suffit de montrer que $\alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2}$ est aussi une solution du même problème. Comme $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel on sait déjà que $\alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2}$ est une solution. Enfin

$$(\alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2})(t_0) = \alpha_1 Y_{X_1}(t_0) + \alpha_2 Y_{X_2}(t_0) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2.$$

L'application φ est donc un isomorphisme d'où

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(\varphi(U)) = n.$$

□

Définition 10. On appelle système fondamentale de solutions sur I de l'equation (2.8) toute base $(Y_1, \cdots, Y_n)$ de l'espace des solutions $\mathcal{S}$ sur I de cette équation.

Proposition 14. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(Y_1, \cdots, Y_n)$ une famille de n solutions de l'equation* (2.8) *alors $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est un système fondamentale de solutions si et seulement si $w(t) = \det([Y_1(t)| \cdots |Y_n(t)]) \neq 0 \ \forall t \in I$.*

La fonction $w(t) = \det([Y_1(t)| \cdots |Y_n(t)]) \neq 0 \ \forall t \in I$ est appelée **wronskien** des fonctions $(Y_1, \cdots, Y_n)$.

Si on considère le cas d'une matrice A diagonalisable (il existe une matrice S telle que chaque colonne de S est un vecteur propre de A et $D = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$) on voit bien que

$$\begin{aligned} Y(t)' = AY(t) &\iff Y(t)' = SDS^{-1}Y(t) \iff S^{-1}Y(t)' = DS^{-1}Y(t) \\ &\iff (S^{-1}Y(t))' = D(S^{-1}Y(t)) \text{ car la matrice } S^{-1} \text{ est constante} \\ &\iff \tilde{Y}'(t) = D\tilde{Y}(t) \text{ où } \tilde{Y} = S^{-1}Y. \end{aligned}$$

Ainsi, Y est solution de l'equation homogène si est seulement si $\tilde{Y}$ est solution de l'equation $\tilde{Y}' = D\tilde{Y}$. D'après la proposition 12 on sait que toute solution de $\tilde{Y}' = D\tilde{Y}$ est de la forme

$$\tilde{Y}(t) = e^{tD}C = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \cdots, e^{t\lambda_n})C, \ C \in \mathbb{R}^n.$$

On alors que

$$Y(t) = S\tilde{Y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{t\lambda_i} V_i,$$

où c_i sont les composantes du vecteur C, λ_i sont les valeurs propres de A et V_i les vecteurs propres associés. En utilisant la proposition 14 on peut vérifier que $(e^{t\lambda_1}V_1, \cdots, e^{t\lambda_n}V_n)$ est bien un système fondamentale de solutions de $Y'(t) = AY(t)$.

2.3.2 Système linéaire à coefficients constants : le cas non homogène

On veut maintenant résoudre un système différentiel à coefficients constants mais avec un second membre

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \tag{2.10}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ continue. On sait de nouveau résoudre explicitement ces équations et l'on a encore des informations sur la structure de l'ensemble des solutions

Proposition 15. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ continue alors*
- *Il existe une unique solution maximale pour le problème de Cauchy associé à* (2.10) *;*
- *Les solutions maximales de* (2.10) *sont globales ;*
- *La solution maximale de condition initiale $(t_0, Y_0) \in I \times U$ est*

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

Démonstration. Soit $t \mapsto Y(t) \in U$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\Big(e^{-tA}Y(t)\Big)' = e^{-tA}\Big(Y'(t) - AY(t)\Big).$$

Puisque chaque matrice e^{-tA} est inversible, il suit que $Y(t)$ est solution de (2.10) si et seulement si

$$\Big(e^{-tA}Y(t)\Big)' = e^{-tA}B(t)$$

soit, intégrant entre t_0 et $t \in I$,

$$e^{-tA}Y(t) - e^{-t_0A}Y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds$$

ou encore

$$Y(t) = \underbrace{e^{(t-t_0)A}Y_0}_{\text{sol. eq. homogène}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds}_{\text{sol. particulière}}.$$

$\square$

2.3.2.1 Variation de la constante

On cherche une solution du système (2.10) en utilisant, comme dans le cas scalaire, la méthode de variation de la constante. Soit $(Y_1, \cdots, Y_n)$ une système fondamental de solutions pour le système homogène $Y' = AY$, alors l'idée de la méthode de la variation de la constante est de chercher une solution de $Y' = AY + B(t)$ sous la forme

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) Y_i(t),$$

où les fonctions c_i sont scalaires de classe $\mathcal{C}^1$, à déterminer. On a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) Y_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) A Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) Y_i(t) + A\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(t) Y_i(t)\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) Y_i(t) + AY(t). \end{aligned}$$

D'où Y est solution si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) Y_i(t) = B(t).$$

D'autre part si on note $W(t) = [Y_1(y)|, \cdots |Y_n(t)]$ la matrice **Wronskienne**, l'équation précédente s'écrit aussi

$$W(t) C'(t) = B(t),$$

où $C(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$. Comme on a chois un système fondamental de solutions on sait que le wronskien $w(t) = \det(W(t))$ s'annule jamais pour tout $t \in I$ et on a $C'(t) = W(t)^{-1} B(t)$ et on obtient $C(t) = \tilde{C} + \int_{t_0}^{t} W(s) B(s) ds$ avec $\tilde{C} \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. Au final

$$Y(t) = W(t)\tilde{C} + W(t) \int_{t_0}^{t} W(s)^{-1} B(s) ds.$$

Remarque 8. Si la matrice A est diagonalisable, on choisit comme système fondamentale de solution la famille $Y_i(t) = e^{t\lambda_i} V_i$ où V_i est le vecteur propre associé au valeur propre λ_i.

Application au cas d'une équation d'ordre 2 On cherche à résoudre une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = g(t),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ est une application continue. En introduisant, comme en 2.2, la nouvelle fonction inconnue $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ on se ramène au système différentiel $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

Supposons connue une base (y_1, y_2) de l'espace des solutions de l'équation homogène $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ (on peut meme les calculer en utilisant 7 !), et donc une base $Y_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y_i' \end{bmatrix}$ $(i = 1, 2)$ de l'espace des solutions du système homogène. Comme on vient de le voir, la méthode de la variation de la constante consiste à cherche les solutions Y du système différentiel sous la forme

$$Y(t) = c_1(t)Y_1(t) + c_2(t)Y_2(t). \tag{2.11}$$

On revient maintenant à la fonction inconnue y. L'identité (2.11) se traduit par

$$\begin{cases} y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \\ y'(t) = c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t). \end{cases} \tag{2.12}$$

En chaque instant t, $y(t)$ et $y'(t)$ sont donc respectivement combinaisons linaires de $(y_1(t), y_2(t))$ et $(y_1'(t), y_2'(t))$ Avec les mêmes coefficients $(c_1(t), c_2(t))$. Dérivons la première ligne de (2.12). Il vient

$$y'(t) = (c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t)) + (c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t)).$$

Demander que la seconde ligne de (2.12) soit satisfaite équivaut donc à la condition

$$c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0. \tag{2.13}$$

Dérivons maintenant la seconde ligne de (2.12). Il vient

$$y''(t) = (c_1(t)y_1''(t) + c_2(t)y_2''(t)) + (c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t)). \tag{2.14}$$

Puisque y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène, il suit de (2.14) et de (2.12) que

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= c_1(t)y_1''(t) + c_2(t)y_2''(t) + c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) \\ &\quad + a(c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t)) + b(c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)) \\ &= c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t). \end{aligned}$$

Il suit alors que $y(t)$ est solution de l'edo d'ordre 2 si et seulement si

$$c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) = g(t). \tag{2.15}$$

On résume ce qu'on vient de voir en (2.13) et (2.15) : la fonction y est solution si est seulement si les fonction inconnues c_1' et c_2' satisfont, pour tout instant $t \in I$, le système

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) = g(t), \end{cases} \tag{2.16}$$

qui, en utilisant les notations de la section précédente, peut s'écrire sous la forme

$$W(t)C'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

Puisque la matrice W est inversible en chaque instant t (Y_1 et Y_2 est un système fondamentale de solutions), on obtient donc c_1' et c_2' en résolvant ce système, puis les fonctions c_1 et c_2 par quadrature.

2.3.3 Système linéaire à coefficients variables : le cas homogène

On a vu que les solutions du système linéaire à coefficients constants $Y'(t) = AY(t)$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{tA}C$ où $C \in \mathbb{R}^n$ et, dans le cas d'une matrice diagonalisable, on a calculé explicitement e^{tA}. On considère maintenant le cas générale d'un système linéaire homogène à coefficients variable, c'est-à-dire

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \tag{2.17}$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fonction continue. On admet (mais on le démontrera plus tard !) que, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{2.18}$$

admet une unique solution maximale, qui est globale. En particulier on peut démontrer que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de (2.17) est un espace vectoriel de dimension n.

Définition 11 (Résolvante)**.** On appelle résolvante de (2.17), l'application linéaire $R(t, t_0) : I \times I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui où $t \mapsto R(t, t_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t), \\ M(t_0) = \mathrm{Id}_n. \end{cases} \tag{2.19}$$

Remarque 9. $R(t, t_0)$ est l'application linéaire qui a un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ associe la valeur en t de la solution de (2.17) qui vaut X à l'instant t_0. En particulier la solution du problème de Cauchy (2.18) est donnée par $Y(t) = R(t, t_0)Y_0$.

Remarque 10 (Système à coefficients constants). Dans le cas d'un système à coefficients constants on a $(\varphi_t)^{-1} = e^{-tA}$ et le résolvante est de la forme $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

Proposition 16 (Propriétés du résolvante)**.** *Soit $R : I \times I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le résolvante de* (2.17)*. On a*

1. $\forall t \in I,\ R(t, t) = \mathrm{Id}_n$;
2. $\forall t_0, t_1, t_2 \in I,\ R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$;
3. $\forall t_0, t_1, t_2 \in I,\ \partial_t R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$.

Exercice 2. Montrer la proposition 16.

Remarque 11 (Le résolvante est une matrice inversible). 16[1-2] donnent

$$R(t, t_0)R(t_0, t) = R(t, t) = \mathrm{Id}_n = R(t_0, t)R(t, t_0),$$

donc $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$.

C'est evident que si on connait le résolvante $R(t, t_0)$ alors on a à disposition un système de n solutions de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Puisque l'espace des solutions est de dimension n, on peut se demander si les colonnes $Y_1, \cdots, Y_n$ de R forment un système fondamentale de solutions.

Théorème 17 (de Liouville)**.** *Soit $w(t) = \det([Y_1(t)| \cdots |Y_n(t)])$ le wroskien du système de n solutions $Y_1, \cdots, Y_n$ de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Alors $w(t)$ satisfait l'équation différentielle*

$$w'(t) = a(t)w(t),$$

où $a(t) = \mathrm{tr}A(t)$ est la trace de la matrice $A(t)$.

Démonstration. Soit $W(t) = [Y_1| \cdots |Y_n]$ la matrice wroskienne associée au système de solutions $Y_1, \cdots, Y_n$ alors on sait qu'elle satisfait (comme dans le cas de la remarque précédente) l'équation

$$W'(t) = A(t)W(t).$$

Or la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne

$$W(t + \tau) = W(t) + \tau W'(t) + o(\tau) = (\mathrm{Id} + \tau A(t))W(t) + o(\tau).$$

On obtient alors

$$w(t + \tau) = \det((\mathrm{Id} + \tau A(t))W(t)) + o(\tau) = w(t) \det(\mathrm{Id} + \tau A(t)) + o(\tau).$$

Comme on la relation suivante entre le determinant et la trace de la matrice A

$$\det(\mathrm{Id} + \tau A(t)) = 1 + \tau \mathrm{tr}A(t) + O(\tau^2),$$

on en déduit que

$$w(t + \tau) = w(t)(1 + \tau \mathrm{tr}A(t)) + o(\tau),$$

d'où

$$\frac{w(t + \tau) - w(t)}{\tau} = a(t)w(t) + o(1),$$

et pour $\tau \to 0$ on obtient le résultat annoncé. □

On remarque que si le wroskien $w(t_0) \neq 0$ alors il s'annule jamais. Par consequence la proposition (14) peut être reformule de manière équivalente

Proposition 18. *Soit $(Y_1, \cdots, Y_n)$ une famille de n solutions de l'equation* (2.8) *(ou de* (2.17)*) alors $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est un système fondamentale de solutions si et seulement si $\exists t_0 \in I$ tel $w(t_0) = \det([Y_1(t)| \cdots |Y_n(t)]) \neq 0$.*

Corollaire 19. *Soit $R(t, t_0)$ le résolvante de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$,alors les colonnes de R forment un système fondamentale de solutions.*

Démonstration. Si on pose $w(t) = \det(R(t, t_0))$ le wroskien associé à les colonnes de R on a, grâce au théorème de Liouville, qu'il satisfait le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} w'(t) = a(t)w(t), \\ w(t_0) = 1, \end{cases}$$

où $a(t) = \mathrm{tr}A(t)$ est la trace de la matrice $A(t)$. On connait que la solution de ce problème est donné par

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds},$$

comme $w(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ on a, en utilisant la proposition 14, que les colonnes de R forment un système fondamentale de solutions. □

2.3.3.1 Méthode de variation de la constante

On veut trouver une solution de l'équation

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t). \tag{2.20}$$

On sait que les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent $R(t,t_0)C$, et l'on cherche une solution sous la forme

$$Y_p(t) = R(t,t_0)C(t),$$

où $C(t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. En sachant que Y_p doit satisfaire (2.20) , on obtient que

$$R(t, t_0)C'(t) = B(t),$$

comme $R(t, t_0)$ est inversible on obtient

$$C'(t) = R(t_0, t)B(t).$$

On peut donc choisir $C(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)B(s)ds$ et on a comme solution

$$Y_p(t) = R(t, t_0) \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)B(s)ds.$$

Si on considère le cas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on retrouve bien q

$$Y_p(t) = e^{(t-t_0)A} \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}B(s)ds.$$

Pour resumer : la méthode de variation de la constante pour les systèmes linéaires à coefficients variables et constants

- Si on connait le résolvante de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ alors une solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est donnée par

$$Y(t) = R(t, t_0)C + R(t, t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0, s)B(s)ds,$$

  où $C \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$.
- Si on connait un système fondamentale de solutions de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ alors on calcule la matrice wronskienne $W(t) = [Y_1|\cdots|Y_n]$ et une solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est donnée par

$$Y(t) = W(t)C + W(t)\int_{t_0}^{t} W(s)^{-1}B(s)ds,$$

  où $C \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$.

Chapitre 3

Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Contents

3.1 Notions de calcul différentiel

Définition 12 (Différentiabilité)**.** Soit $f : \Omega \subset V \to W$ avec Ω ouvert. On dit que f est différentiable en $x_0 \in \Omega$ si et seulement si il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(V, W)$ telle que

$$f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(x_0) + L(h) + o(\|h\|).$$

L'application linéaire L est notée $\mathrm{d}_{x_0} f \in \mathcal{L}(V, W)$ et elle est dite différentielle de f en x_0

L'application f est alors $\mathcal{C}^1(\Omega)$ si elle est différentiable dans tout point x dans Ω et l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f : & \Omega & \to & ((V, W), \| \cdot \|_{\mathrm{op}}) \\ & x_0 & \mapsto & \mathrm{d}_{x_0} f \end{array}$$

est continue.

Définition 13 (Dérivée directionnelle)**.** Soit $f : \Omega \subset V \to W$ avec Ω ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $h \in V$. Quand elle existe, la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

est appelée dérivée directionnelle de f dans la direction

Remarque 12. Si f est différentiable en x_0 alors elle admet une dérivée directionnelle dans toute direction $h \in V$ et

$$\mathrm{d}_{x_0} f(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

La réciproque n'est pas vraie en général ! Par exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} \text{ if } x \neq 0 \\ y \text{ if } x = 0. \end{cases}$$

Définition 14 (Gradient)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz il existe un unique vecteur de V, noté $\nabla f(x_0)$ et appelé *gradient* de f en x_0, tel que

$$\mathrm{d}_{x_0} f(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle \ \forall h \in V.$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel et $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq d} \quad \text{où} \quad \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(f(x + \varepsilon e_i) - f(x)).$$

Définition 15 (Hessienne)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R})$, où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert. On appelle *hessienne* de f en $x_0 \in \Omega$ la matrice associée a la forme bilinéaire $\mathrm{d}^2_{x_0}$ dans la base canonique. En particulier

$$\mathrm{D}^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

où l'on a noté $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. et où

Définition 16 (Jacobienne)**.** Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ (on notera F_i la composante i de F) alors pour $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\mathrm{d}_{x_0}F(h) = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_{x_0}F_1(h) \\ \vdots \\ \mathrm{d}_{x_0}F_n(h) \end{bmatrix}.$$

En utilisant la définition précédente et la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on obtient

$$\mathrm{d}_{x_0}F(h) = JF(x_0)h,$$

où la matrice

$$JF(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial e_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial e_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial e_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial e_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

est appelée *Jacobienne* de F.

3.2 Retour sur les fonctions Lipschitziennes

Rapellons d'abord les notions de fonction lipschitzienne et localement lipschitzienne.

Définition 17 (fonction lipschitzienne)**.** On dit qu'une fonction $F : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est **lipschitzienne** sur U s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in U,\ \|F(x) - F(y)\| \leq C\,\|x - y\|\,.$$

Dans cette définition $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$. La définition ne dépend pas de la norme choisie car toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Exemple 2. La fonction $F(x) = \sin(x)$ est lipschitzienne avec $C = 1$

$$\|\sin(x) - \sin(y)\| = \left\|(x-y)\int_0^1 \cos(ty + (1-t)x)dt\right\| \leq \|x - y\|\,.$$

On peut introduire une notion un peu moins exigeante

Définition 18 (fonction localement lipschitzienne)**.** On dit qu'une fonction $F : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est **localement lipschitzienne** sur U lorsque, pour tout $X_0 \in U$, il existe $r_0 > 0$ et C_{X_0} tels que

$$\forall X, Y \in \bar{B}_{r_0}(X_0),\ \|F(X) - F(Y)\| \leq C_{X_0}\,\|X - Y\|\,.$$

Définition 19 (fonction localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable)**.** On dit qu'une fonction $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ est **localement lipschitzienne** par rapport à sa seconde variable lorsque, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times U$, il existe $D = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}_{r_0}(X_0)$, avec $\delta, r_0 > 0$, et C_{t_0,X_0} tel que

$$\forall (t, X), (t, Y) \in D, \ \|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq C_{t_0,X_0} \|X - Y\| .$$

Proposition 20. *Si $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ est continue et admet des dérivées partielles continues par rapport à sa seconde variable $X \in U$, alors F est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.*

3.3 Les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et d'explosion en temps fini

On rappelle qu'on cherche à démontrer l'existence et l'unicité d'une solution (au moins maximale) du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec $t_0 \in I$ et $Y_0 \in U$. Avant énoncer les deux résultats fondamentaux de ce cours on va écrire le problème (3.1) sous une forme équivalente, dite **forme intégrale**, qui s'avère souvent être plus maniable.

Proposition 21. *Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction continue. Alors la fonction $Y : J \to \mathbb{R}^n$ est une solution de* (3.1) *sur l'intervalle ouvert $J \subset I$ si et seulement si pour tout $t \in J$, on*

$$Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))ds.$$

Exercice 3. Démontrer la proposition 21.

Dans ce chapitre on va démontrer les deux résultats suivants

Théorème 22 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que F est continue et qu'elle est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Alors pour tout condition initiale $(t_0, Y_0) \in I \times U$ il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy.* (3.1)*.*

Pour le résultat suivant on va supposer $U = \mathbb{R}^n$.

Théorème 23 (Théorème d'explosion en temps fini). *Soit $F \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, avec $I = (a, b)$ et $a < b$, localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Soit $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ et (J, Y), avec $J = (t_-, t_+)$, l'unique solution maximale du problème de Cauchy* (3.1)*. Alors*

$$t_+ < b \implies \lim_{t \to t_+} \|Y(t)\| = +\infty.$$

De même,

$$t_- > a \implies \lim_{t \to t_-} \|Y(t)\| = +\infty.$$

Remarque 13. Le théorème d'explosion en temps fini sert souvent sous la forme suivante. Soit (J, Y) la solution maximale de (3.1). S'il existe $M > 0$ tel que $\|Y(t)\| \le M$ pour tout $t \in J$, c-à-d la solution est bornée, alors (J, Y) est une solution globale.

Proposition 24. *Soit $F \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, avec $I = (a, b)$ et $a < b$, localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Si F est bornée, alors toute solution maximale de $Y'(t) = F(t, Y(t))$ est globale.*

Démonstration. Soit (J, Y) une solution maximale. Comme F est bornée on a pour $t \in J$

$$\|Y(t)\| \le \|Y_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s)) ds \right\| \le M|t - t_0| + \|Y_0\| .$$

Si J est borné on alors que la solution Y est bornée sur tout J et d'après le théorème d'explosion en temps fini on a que $J = I$. □

Proposition 25. *Soit $F \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, avec $I = (a, b)$ et $a < b$, localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. S'il existe A, B tels que $\|F(t, X)\| \le At + B \ \forall (t, X)$, alors les solutions maximales de $Y'(t) = F(t, Y(t))$ sont globales.*

Démonstration. Soit (J, Y) une solution maximale alors comme dans la proposition précédente on obtient

$$\|Y(t)\| \le \|Y_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s)) ds \right\| \le \frac{A}{2}(t - t_0)^2 + B|t - t_0| + \|Y_0\| .$$

Si J est borné on alors que la solution Y est bornée sur tout J et d'après le théorème d'explosion en temps fini on a que $J = I$. □

Corollaire 26 (Unicité sur tout l'intervalle). *Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\bar{t} \in J$. Soit $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}^1(J; U)$ deux solutions de $Y'(t) = F(t, Y(t))$. Si $Y_1(\bar{t}) = Y_2(\bar{t})$ alors $Y_1(t) = Y_2(t) \ \forall t \in J$.*

Autrement dit, sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, les trajectoires des solutions ne se rencontrent jamais.

Étude qualitative des solutions d'une EDO On considère le cas scalaire $F(t,Y) = f(t,y) = y(1-y)$ avec condition initiale $y_0 \in (0,1)$. Il y a deux solutions d'équilibre $y_1 = 1$ et $y_2 = 0$ au sens de la definition suivante

Définition 20 (Solution d'équilibre)**.** On dit que $Y_{eq} \in U$ est une solution d'équilibre pour $Y'(t) = F(t, Y(t))$ si pour tout $t \in I$ elle vérifie $Y'_{eq}(t) = F(t, Y_{eq}(t))$ et si elle est indépendante de temps, c-à-d $F(t, Y_{eq}) = 0 \ \forall t \in I$.

La fonction constante y_1 (respectivement y_2) est donc une solution du problème de Cauchy avec comme donnée initiale $y_0 = 1$ (respectivement $y_0 = 0$). Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que la solution du problème de Cauchy avec condition initiale $y_0 \in (0,1)$ prend toujours ses valeurs strictement entre 0 et 1, puisque les trajectoires des solutions ne peuvent pas se croiser. Comme la solution est toujours bornée on a qu'elle ne peut pas tendre vers l'infini et donc la solution maximale est globale ! On peut même essayer de calculer la limite en $+\infty$ de cette solution y. En effet, y est croissante et prendre ses valeurs entre 0 et 1, il existe donc $l \in (0,1]$ tel que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = l$. Comme $y'(t) = y(t)(1-y(t))$ pour tout t, on a donc $\lim_{t\to+\infty} y(t) = l(l-1)$. Par le théorème des accroissements finis il existe $\theta_t \in (t, t+1)$ pour tout $t > 0$ tel que

$$\underbrace{y(t+1)}_{\to l} - \underbrace{y(t)}_{\to l} = \underbrace{y'(\theta_t)}_{\to l},$$

pour $t \to +\infty$. On a donc $l(1-l)$, or $l \neq 0$ donc $l = 1$.

Le trajectoires des systèmes autonomes ne se rencontrent pas

Définition 21 (Orbite, trajectoire)**.** Soit (J, Y) une solution de (3.1). On appelle $\gamma(Y)$ l'orbite de Y (ou la trajectoire de Y dans l'espace $\mathbb{R}^n$) la courbe paramétrée $t \mapsto Y(t)$:

$$\gamma(Y) = \{Y(t),\ t \in J\}.$$

On considère le cas d'un **système autonome** $Y'(t) = F(Y(t))$.

Corollaire 27. *Soit (J_1, Y_1) et (J_2, Y_2) deux solutions distinctes de* (3.1) *avec F indépendante de t. Alors les deux orbites $\gamma(Y_1)$ et $\gamma(Y_2)$ ne se coupent jamais.*

3.4 Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 22 (Suite de Cauchy)**.** Soit $(X, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé (evn) et $\{x_n\}$ suite de X. On dit que $\{x_n\}$ est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε t.q. $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq N_\varepsilon$.

Définition 23 (Espace vectoriel normé complet)**.** Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Définition 24 (Espace vectoriel normé compact)**.** Un espace métrique $(X, \|\cdot\|)$ est compact si et seulement si toute suite de points de X admet une valeur d'adhérence (c'est-à-dire contient une sous-suite convergente).

Définition 25 (Espace de Banach)**.** Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 3. Voici quelques exemples d'espaces de Banach :

— Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$. L'espace $\mathcal{C}_b(U; X)$ des applications continues bornée de U à valeurs dans X est un espace de Banach muni de la norme sup

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} \|f(x)\|.$$

— L'espace $\mathcal{C}(U; X)$ des applications continues de U, evn compact, à valeurs dans X est un espace de Banach muni de la norme sup.

Le Lemme de Gronwall est un outil incontournable dans l'étude qualitative des équations différentielles : il sert notamment à estimer des solutions ou bien à comparer entre elles deux solutions.

Lemme 28 (de Gronwall)**.** *Soient k et b deux constantes, avec $k > 0$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$, on ait*

$$\|\psi'(t)\| \leq k \|\psi(t)\| + b.$$

Alors, pour tout t et t_0 dans I, on a l'estimation

$$\|\psi(t)\| \leq \|\psi(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + b\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on pourra supposer que $t_0 = 0$. L'estimation de $\|\psi(t)\|$ dans le passé, c-a-d pour tout $t < 0$ se déduira de celle dans le futur en reversant le sens du temps : poser $z(t) = \psi(-t)$ qui vérifie encore $\|z'(t)\| \leq k \|z(t)\| + b$.
Soit donc $t \in I$, avec $t \geq 0$. On commence d'abord par écrire ψ sous la forme $\psi(t) = \psi(0) + \int_0^t \psi'(s)ds$ et en utilisant l'inégalité triangulaire et puis l'hypothèse, on en déduite que

$$\|\psi(t)\| \leq \|\psi(0)\| + \int_0^t \|\psi'(s)\| \, ds \leq \|\psi(0)\| + k \int_0^t \|\psi(s)\| \, ds + bt.$$

On observe alors que, si l'on pose $y(t) = \int_0^t \|\psi(s)\|$ on a $y'(t) = \|\psi(t)\|$ et l'inégalité ci-dessus se réécrit

$$y'(t) \leq \|\psi(0)\| + ky(t) + bt \iff y'(t) - ky(t) \leq \|\psi(0)\| + bt. \tag{3.2}$$

On multiplie cette inégalité par e^{-kt} et on obtient

$$(y(t)e^{-kt}) \leq (\|\psi(0)\| + bt)e^{-kt}.$$

On intègre cette inégalité et puisque $y(0) = 0$, il vient

$$y(t)e^{-kt} \leq \|\psi(0)\| \frac{1 - e^{-kt}}{k} + b\frac{1 - (1 + kt)e^{-kt}}{k^2}.$$

Le résultat suit en utilisant cette majoration dans (3.2). □

On a aussi la version suivante

Lemme 29 (de Gronwall, version intégrale)**.** *Soit ϕ, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles, avec $g \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$. Si*

$$\forall t \in [a, b], \phi(t) \leq k + \int_a^t g(s)\phi(s)ds,$$

alors

$$\forall t \in [a, b], \phi(t) \leq k \exp\Big(\int_a^t g(s)ds\Big).$$

Pour prouver le théorème de Cauchy-Lipschitz on aura besoin de la notion de cylindre de sécurité. On remarque d'abord que puisque I et U sont ouverts et contiennent t_0 et Y_0, il existe un cylindre fermé $C_0 = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \bar{B}_{r_0}(Y_0)$ contenu dans $I \times U$.

Définition 26 (Cylindre de sécurité)**.** On dit qu'un cylindre fermé $C_\varepsilon = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}_{r_0}(Y_0) \subset C_0$, centré en (t_0, Y_0), est un cylindre de sécurité pour (**??**) lorsque toute solution éventuelle Y de (**??**) sur $J = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ vérifie

$$\forall t \in J,\ Y(t) \in \bar{B}_{r_0}(Y_0).$$

Noter que, par compacité de C_0, l'application continue F est bornée sur ce cylindre. Dans le lemme suivant, on constat qu'il est facile de construire des cylindres de sécurité.

Lemme 30. *Soient $C_0 \in I \times U$ un cylindre fermé centré en (t_0, Y_0) et $M = \sup_{C_0} \|F\|$. Si $\varepsilon \leq \min(\varepsilon_0, \frac{r_0}{M})$, alors C_ε est un cylindre de sécurité pour (**??**).*

Démonstration. On vérifie par récurrence sur n que

$$\begin{cases} Y([t_0, t_n]) \subset \bar{B}_{r_0}(Y_0) \\ \|Y(t) - Y_0\| \leq M|t - t_0|,\ \forall t \in [t_0, t_n]. \end{cases}$$

C'est trivial pour $n = 0$. Si c'est vrai pour n alors $(t_n, Y_n) \in C_\varepsilon$, avec $Y_n = Y(t_n)$, donc $\|F(t_n, Y_n)\| \leq M$ et par conséquent

$$\|Y(t) - Y(t_n)\| \leq (t - t_n) \|F(t_n, Y_n)\| \leq M(t - t_n),\ \forall t \in [t_n, t_{n+1}].$$

On alors pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$

$$\|Y(t) - Y(t_0)\| \leq \|Y(t) - Y(t_n)\| + \|Y(t_n) - Y(t_0)\| \leq M(t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M(t - t_0).$$

En particulier $\|Y(t) - Y(t_0)\| \leq M\varepsilon \leq r_0$, d'où $Y(t) \in \bar{B}_{r_0}(Y_0)$. □

Démonstration de 22. **Existence**
On commence par montrer l'existence et l'unicité de la solution sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Soit $r_0 > 0$ tel que $\bar{B}_{r_0}(Y_0) \subset U$. Soit aussi $\varepsilon \leq \frac{r_0}{M}$ tel que $C_\varepsilon = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}_{r_0}(Y_0)$ soit un cylindre de sécurité pour (**??**). On note $E = \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \bar{B}_{r_0}(Y_0))$ l'espace de fonctions continues de $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ à valeurs dans la boule fermée $\bar{B}_{r_0}(Y_0)$. En particulier E muni de la norme $\|Y\|_\infty := \sup_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|Y(t)\|$ est un espace de Banach.

Soit Y_h une suite quelconque de solutions δ_h approchées avec $\delta_h \to 0$, par exemple celles fournies par la méthode d'Euler. Alors on a, avec $k > h$

$$\begin{aligned} \|Y_h'(t) - Y_k'(t)\| &\leq \|F(t, Y_h(t)) - F(t, Y_k(t))\| + \|Y_h'(t) - F(t, Y_h(t))\| + \|Y_k'(t) - F(t, Y_k(t))\| \\ &\leq k \|Y_h(t) - Y_k(t)\| + \delta_h + \delta_k, \end{aligned}$$

où k est la constante de Lipschitz de F sur le cylindre C_ε. Le lemme de Gronwall montre que

$$\|Y_h(t) - Y_k(t)\| \leq (\delta_h + \delta_k)\frac{e^{k\varepsilon} - 1}{k} \text{ sur } [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

par conséquent Y_h est une suite de Cauchy uniforme. Comme les fonctions Y_h sont toutes à valeurs dans $\bar{B}_{r_0}(Y_0)$ qui est un espace complet, Y_h converge vers une limite Y qui est une solution exacte du problème de Cauchy.
Unicité
Si Y_1, Y_2 sont deux solutions exactes, le lemme de Gronwall avec montre que $Y_1 = Y_2$. On verra dans la suite comment on peut montrer que l'unique solution locale est maximale. □