

## ESPERIENZA n° 5

*Misure in corrente alternata*

Anno Accademico 2018/2019

### Relatori:

Lorenzo Bartolozzi,  
Luca Pacioselli,  
Giuseppe Prudente.

### Introduzione:

L'esperienza n° 5 di laboratorio consiste di tre punti principali:

- I. Osservare come, a seconda di dove si preleva il segnale, si comporta un circuito RC in serie;
- II. Determinare figura di sfasamento fra tensione ai capi di C e quella di R sull'oscilloscopio in modalità X-Y;
- III. Si calcoli sperimentalmente il valore di C, tramite la frequenza di taglio,  $\nu_T$ .

### Strumenti a disposizione:

Un generatore di funzioni (alimentatore in **alternata**, **AC**) GW GFG:

- range di frequenze da 0,2Hz a 2MHz, con 7 portate settabili;
- forme d'onda: onde sinusoidali, rettangolari, triangolari;
- risoluzione delle frequenze pari 50Hz nel range che va da 200Hz a 2KHz.

Un oscilloscopio analogico della famiglia GW GOS-6xx.

Due multimetri analogici ICE 680:

- portata voltmetro in corrente **continua**: da 100mV a 1000V;
- portata amperometro in corrente **continua**: da 50 $\mu$ A a 5A;
- portata voltmetro in corrente **alternata**: da 10V a 750V;
- portata amperometro in corrente **alternata**: da 250 $\mu$ A a 2,5A;

- fattori moltiplicativi ohmmetro:  $\Omega \times 1$ ,  $\Omega \times 10$ ,  $\Omega \times 100$ ,  $\Omega \times 1000$ ;
- incertezza per misure di voltmetro e amperometro in **CC**: 1% rispetto al fondo scala;
- incertezza per misure di voltmetro e amperometro in **AC**: 2% rispetto al fondo scala.
- risoluzione di f.s. per voltmetro e amperometro in **CC** ed **AC**: 2% rispetto al fondo scala.

Due basette sperimentali.

Resistori vari.

Condensatori vari.

Si noti che la resistenza interna dell'alimentatore è stata considerata trascurabile rispetto a quelle utilizzate durante l'esperienza. Inoltre i valori utilizzati per le formule non sono stati approssimati su foglio elettronico; nel riportarli nella relazione sono stati approssimati coerentemente con l'errore.

## PUNTO 1

### Obiettivo:

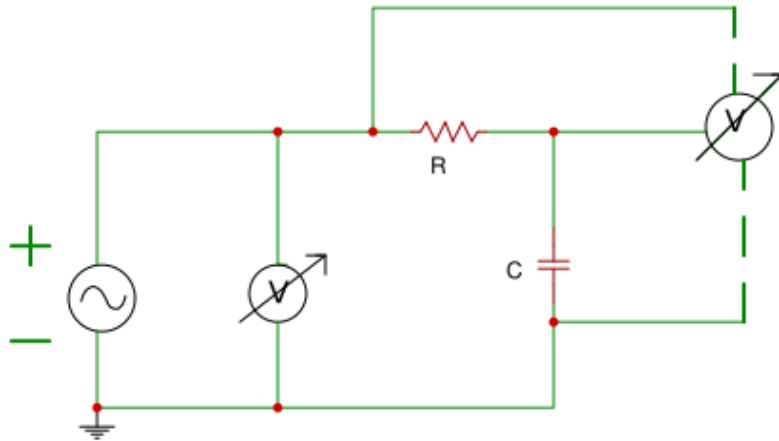
Prelevare la tensione ai capi del generatore di funzioni e, alternativamente, da R e da C, variando la frequenza,  $\nu$ ; spiegare qualitativamente il comportamento di  $V_R$  e di  $V_C$ . Fare vedere che: il circuito che preleva  $V_R$  è un filtro passa-alto, mentre quello che preleva  $V_C$  è un filtro passa-basso, tramite un fit grafico dei dati.

### Procedura:

- Analisi teorica:

Prima di procedere con la relazione è bene ricordare alcuni concetti teorici importanti ed eseguire alcuni calcoli fondamentali per la comprensione dell'esperienza.

Si analizzi, con il metodo simbolico, o dei fasori, e le leggi di Kirchhoff, il seguente circuito, il quale è proprio quello che si dovrà montare:



Supponiamo di avere un segnale  $V = V_0 \cdot \sin(2\pi \nu t)$  ; le impedenze nel circuito sono  $Z_R = R$  e  $Z_C = \frac{1}{2\pi \nu C}$  . Secondo il metodo simbolico si introducono le grandezze complesse  $\vec{V} = V_0 \cdot e^{i2\pi \nu t}$  e  $\vec{I} = (I_0 \cdot e^{i\varphi_I}) \cdot e^{i2\pi \nu t} = \vec{I}_0 \cdot e^{i2\pi \nu t}$  , correlate a quelle reali poiché  $V_0$  è l'ampiezza del segnale generato,  $I_0$  e  $\varphi_I$  sono rispettivamente l'ampiezza e la fase dell'unica corrente che circola nel circuito e  $\nu$  è la frequenza comune a entrambi. Ora, per la legge di Ohm generalizzata e per alcune proprietà del metodo simbolico quando si hanno segnali sinusoidali, ovvero  $\varphi_R = \varphi_I$  e  $\varphi_C = \varphi_I - \pi/2$ :

$$V_R = V_{0R} \cdot \sin(2\pi \nu t + \varphi_I) = I_0 \cdot R \cdot \sin(2\pi \nu t + \varphi_I) ,$$

$$V_C = V_{0C} \cdot \sin(2\pi \nu t + (\varphi_I - \frac{\pi}{2})) = \frac{I_0}{2\pi \nu C} \cdot \sin(2\pi \nu t + (\varphi_I - \frac{\pi}{2})) .$$

Se consideriamo, visto che R e C sono in serie, la grandezza  $\vec{Z} = Z_R + i \cdot (Z_C)$  , possiamo scrivere:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} \Rightarrow \vec{I}_0 = \frac{V_0}{R + i \cdot (\frac{-1}{2\pi \nu C})} = \frac{V_0 \cdot (R + i \cdot \frac{1}{2\pi \nu C})}{R^2 + \frac{1}{(2\pi \nu C)^2}} ,$$

per le proprietà dei numeri complessi ora, considerando  $\vec{I}_0 = a + ib$  , possiamo scrivere:

$$I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi\nu C)^2}}} = \frac{V_0}{|\vec{Z}|} ,$$

$$\varphi_I = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2\pi\nu RC}\right) .$$

Perciò si avrà:

$$V_R = \frac{V_0 \cdot R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi\nu C)^2}}} \cdot \sin\left(2\pi\nu t + \arctan\left(\frac{1}{2\pi\nu RC}\right)\right) ,$$

$$V_C = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (2\pi\nu RC)^2}} \cdot \sin\left(2\pi\nu t + \left(\arctan\left(\frac{1}{2\pi\nu RC}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\right) .$$

Da questi risultati si nota subito che  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} V_R = V_0$  ,  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} V_C = 0$  ,

$\lim_{\nu \rightarrow 0} V_C = V_0$  ,  $\lim_{\nu \rightarrow 0} V_R = 0$  . Inoltre la frequenza di taglio (frequenza di separazione tra banda passante e banda oscura del filtro considerato) per cui si ha  $V_{0R} = V_{0C}$ , risulta essere  $\nu_T = \frac{1}{2\pi RC}$  ; si noti anche che a tale frequenza

$$V_{0R} = V_{0C} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} , \text{ ovvero che } \frac{V_{0R}}{V_0} = \frac{V_{0C}}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 .$$

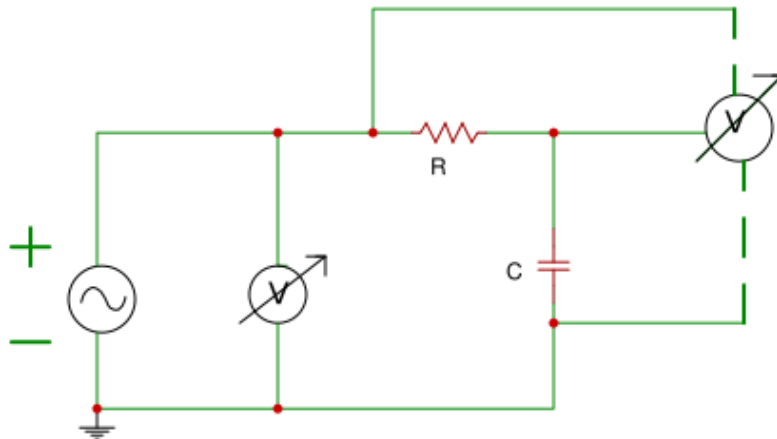
Prima di ritornare all'esperienza bisogna porre attenzione alle potenze massime dissipabili,  $P_{Rmax}$  e  $P_{Cmax}$ , dalla resistenza e dal condensatore. Le potenze dissipate da tali elementi passivi sono  $P_R = \frac{I_0 \cdot V_{0R}}{2}$  ,  $P_C = \frac{I_0 \cdot V_{0C}}{2}$  ; derivando e ponendo a 0 la derivata si ricavano, con le dovute accortezze, i valori di  $\nu$  per cui tali potenze risultano massime:  $\nu = +\infty$  per  $P_R$  e  $\nu = \nu_T = 1/(2\pi RC)$  per  $P_C$ . Andando a sostituire tali valori nelle espressioni di  $P_R$  e  $P_C$  si ottengono i seguenti risultati:

$$P_{Rmax} = \frac{V_0^2}{2R} ,$$

$$P_{Cmax} = \frac{V_0^2}{4R} .$$

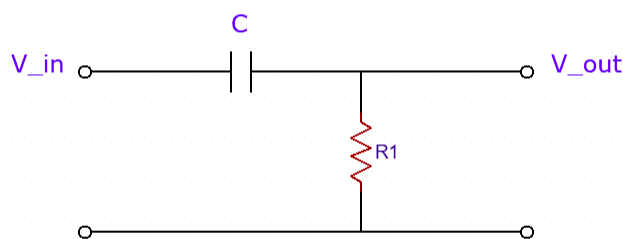
- **Metodo sperimentale:**

Alla luce di quanto detto qui sopra, si monti il circuito seguente:

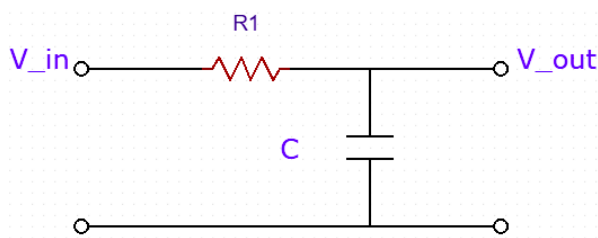


si scelgano la resistenza con valore nominale  $R_{nom}=(1800\pm5\%)\Omega$ , valore misurato con l'ohmmetro  $R_{mis}=(1800\pm30)\Omega$ , e la capacità con valore nominale  $C_{nom}=(47\pm10\%)nF$ ; così facendo le potenze massime dissipate saranno  $P_{Rmax}=0,028W$  e  $P_{Cmax}=0,0139W$ , che sono minori dei valori massimi dissipabili dagli elementi per un valore di  $V_0=10V$ , sotto al quale ci si tiene. Si imposti il segnale in uscita dal generatore di funzioni di forma sinusoidale, con offset 0 e con ampiezza pari a  $V_0=7,85V$ , settata collegando lo strumento al voltmetro in modalità AC (f.s. 10V) ed andando a modificare l'ampiezza del segnale generato finché, ricordandosi la formula:  $V_0=\frac{\pi}{2}\cdot V_{avg}$ , non si misuri un  $V_{avg}=5V$ . Si colleghi un voltmetro in AC (f.s. 10V) ai capi del generatore di funzioni e uno in AC (f.s. 10V), alternativamente, ai capi della resistenza e della capacità, variando poi la frequenza da valori bassi a valori alti, si raccolgano le coppie di dati  $V_0$  e  $V_{0R/0C}$ .

Ci si aspetta che il seguente circuito sia un filtro passa-alto:



ed il seguente, invece, sia un filtro passa-basso:



Si facciano i fit dei dati raccolti, per il primo circuito e per il secondo. Ci si aspetta, come visto nell'analisi teorica, che i filtri reali, che andremo a studiare, lascino passare un valore di ampiezza del segnale entrante compresa tra 0 e il 70,7% di  $V_0$  in banda oscura e tra il 70,7% e il 100% di  $V_0$  in banda passante.

## **Raccolta dati:**

I dati raccolti per il filtro passa-alto sono riportati nella seguente tabella:

Frequenze [Hz]	$V_{\text{avg(generator)}} [V]$	$V_{\text{avg(R)}} [V]$	$V_{\text{OR}}/V_0$
200±50	5,00±0,06	0,60±0,06	0,120±0,013
400±50	5,00±0,06	1,20±0,06	0,24±0,02
600±50	4,80±0,06	1,80±0,06	0,37±0,02
800±50	4,80±0,06	2,20±0,06	0,46±0,02
1000±50	4,80±0,06	2,60±0,06	0,54±0,02
1200±50	4,80±0,06	3,00±0,06	0,62±0,02
1300±50	4,80±0,06	3,20±0,06	0,67±0,02
1350±50	4,80±0,06	3,20±0,06	0,67±0,02
1400±50	4,80±0,06	3,20±0,06	0,67±0,02
1450±50	4,80±0,06	3,40±0,06	0,71±0,02
1500±50	4,80±0,06	3,40±0,06	0,71±0,02
1550±50	4,80±0,06	3,40±0,06	0,71±0,02
1600±50	4,80±0,06	3,40±0,06	0,71±0,02
1700±50	4,80±0,06	3,60±0,06	0,75±0,02
1800±50	4,80±0,06	3,60±0,06	0,75±0,02
1850±50	4,80±0,06	3,80±0,06	0,79±0,02
1900±50	4,80±0,06	3,80±0,06	0,79±0,02
2000±50	4,80±0,06	3,80±0,06	0,79±0,02
3500±500	4,80±0,06	4,60±0,06	0,96±0,02

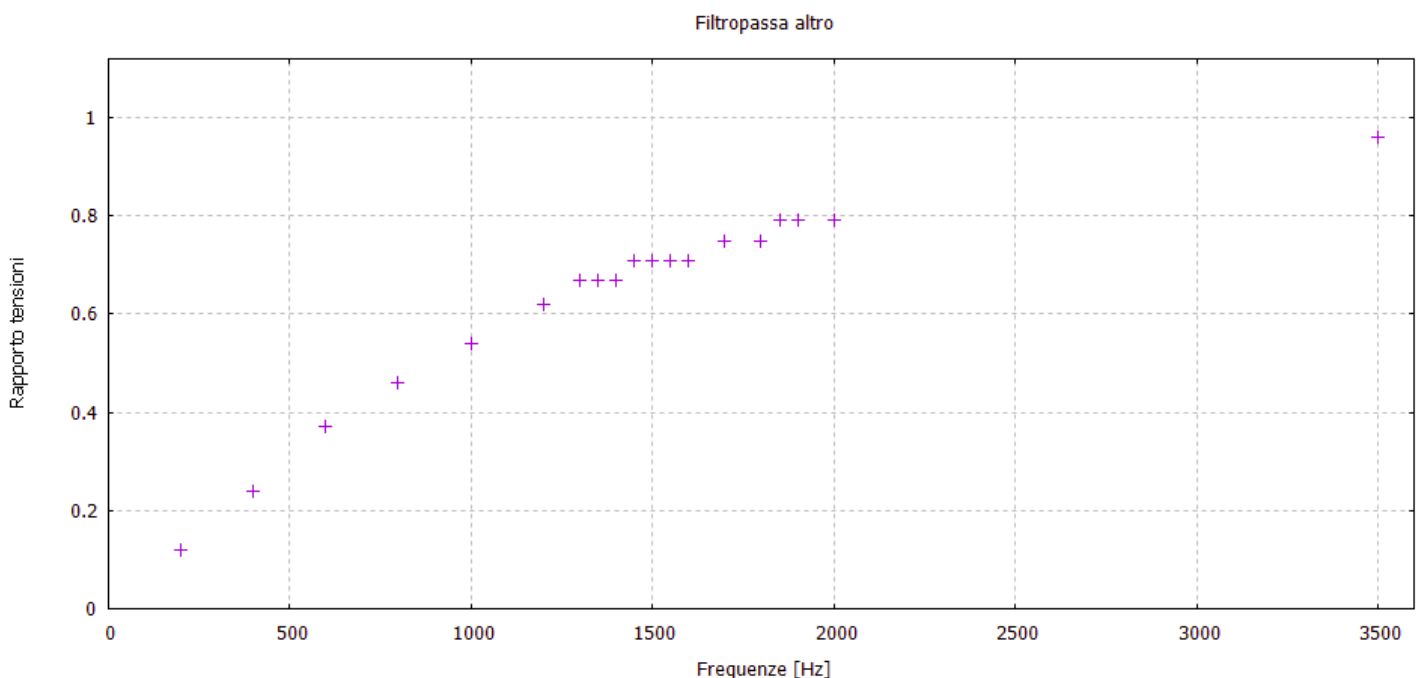
I dati raccolti per il filtro passa-basso sono riportati nella seguente tabella:

Frequenze [Hz]	$V_{\text{avg(generator)}} \text{ [V]}$	$V_{\text{avg(C)}} \text{ [V]}$	$V_{0C}/V_0$
200±50	5,00±0,06	5,00±0,06	1,00±0,02
400±50	5,00±0,06	5,00±0,06	1,00±0,02
600±50	5,00±0,06	4,80±0,06	0,96±0,02
800±50	4,80±0,06	4,60±0,06	0,96±0,02
1000±50	4,80±0,06	4,40±0,06	0,92±0,02
1200±50	4,80±0,06	4,20±0,06	0,87±0,02
1300±50	4,80±0,06	4,00±0,06	0,83±0,02
1350±50	4,80±0,06	4,00±0,06	0,83±0,02
1400±50	4,80±0,06	4,00±0,06	0,83±0,02
1450±50	4,80±0,06	3,80±0,06	0,80±0,02
1500±50	4,80±0,06	3,80±0,06	0,80±0,02
1550±50	4,80±0,06	3,80±0,06	0,80±0,02
1600±50	4,80±0,06	3,80±0,06	0,80±0,02
1700±50	4,80±0,06	3,60±0,06	0,75±0,02
1800±50	4,80±0,06	3,60±0,06	0,75±0,02
1850±50	4,80±0,06	3,40±0,06	0,71±0,02
1900±50	4,80±0,06	3,40±0,06	0,71±0,02
2000±50	4,80±0,06	3,40±0,06	0,71±0,02
3500±500	4,60±0,06	2,40±0,06	0,52±0,02
7000±500	4,60±0,06	1,40±0,06	0,30±0,02
8500±500	4,60±0,06	1,00±0,06	0,22±0,02
11000±500	4,40±0,06	0,80±0,06	0,18±0,02
15000±500	4,40±0,06	0,60±0,06	0,14±0,02
20000±500	4,40±0,06	0,24±0,06	0,050±0,014

Per le colonne riportanti i rapporti si è usata la notazione  $V_{0C/0R}/V_0$ , nonostante i valori siano stati calcolati come rapporto fra le terze colonne e le seconde, in quanto tale rapporto non differisce da quello con le ampiezze  $V_{avg(C/R)}/V_{avg(generator)}$ . Gli errori sui rapporti sono stati calcolati con le regole di base della propagazione degli errori.

## **Analisi dati:**

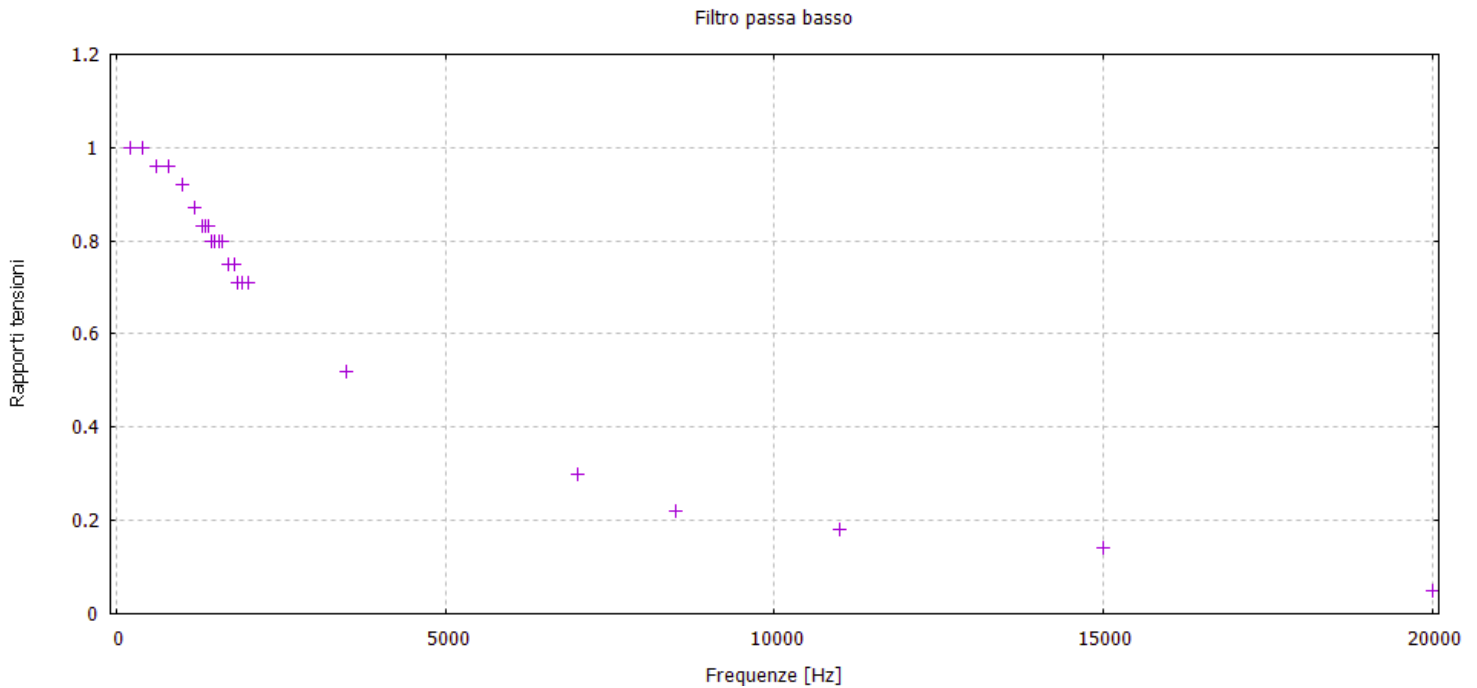
Si noti come, per basse frequenze, il segnale prelevato ai capi della resistenza abbia ampiezza molto minore rispetto a quello in entrata. Infatti, valutando il rapporto  $V_{0R}/V_0$ , questo risulta prossimo allo zero. Al contrario, per alte frequenze, questo stesso si avvicina ad 1. Tale comportamento è caratteristico di un filtro passa-alto. Come anticipato nella procedura, costruendo un circuito RC in corrente alternata e collegando un voltmetro in parallelo alla resistenza, si notano proprio gli effetti di un tale filtro passivo. Come ulteriore conferma di questo aspetto, si può vedere che il grafico ottenuto facendo un fit dei dati misurati è proprio quello tipico di un filtro passa-alto reale: la curva che descrive l'andamento dei rapporti  $V_{0R}/V_0$  in funzione delle frequenze è crescente, parte da zero e dopo la frequenza di taglio (per cui  $V_{0R}/V_0 \approx 0,707$ ) si assesta intorno al valore asintotico 1:



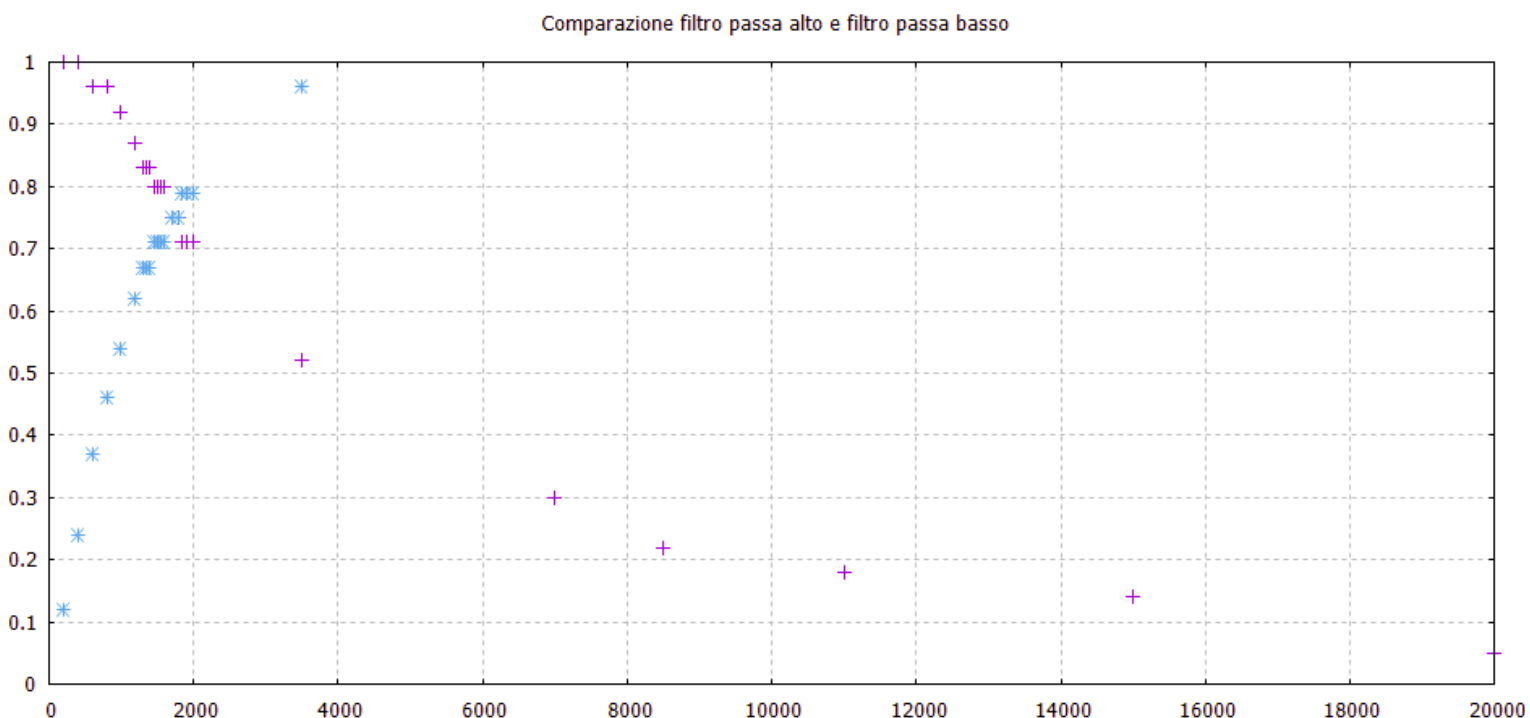
Prelevando invece il segnale ai capi del capacitore, si osserva un comportamento inverso, con un grafico che mostra una curva decrescente che



parte da 1 e si assesta intorno allo zero dopo aver superato la frequenza di taglio (per cui  $V_{0C}/V_0 \approx 0,707$ ). Tale comportamento è tipico di un filtro passa-basso reale, il quale lascia pressoché inalterata l'ampiezza del segnale se questo è a basse frequenze, mentre la abbatte in caso contrario. Il grafico seguente è quello dei dati relativi al filtro passa-basso:



Per vedere qualitativamente i diversi comportamenti dei due filtri si riporta il seguente grafico:



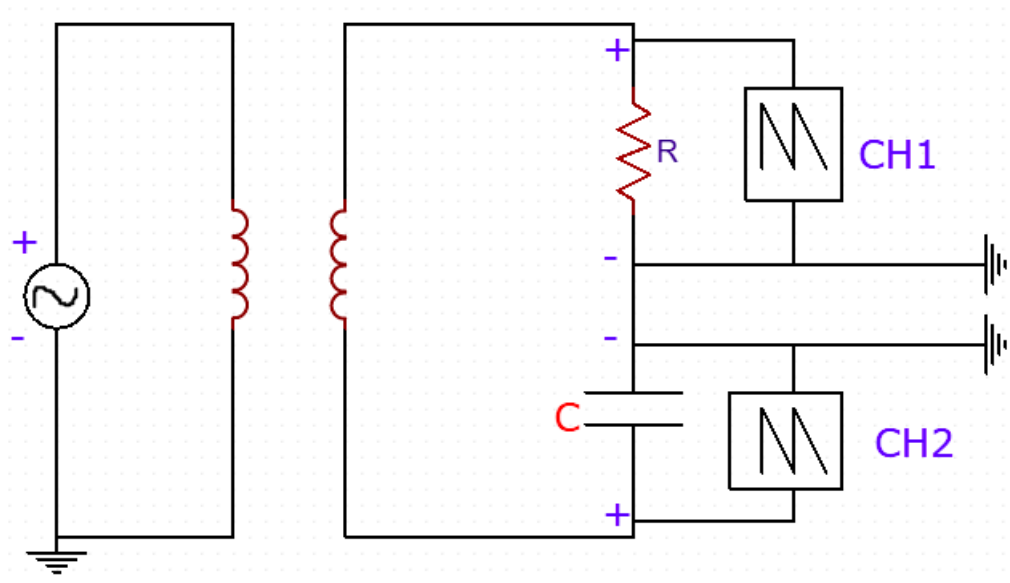
## PUNTO 2

### Obiettivo:

Visualizzare  $V_C$  su y e  $V_R$  su x, per vedere la figura di Lissajous in modalità X-Y dell'oscilloscopio.

### Procedura:

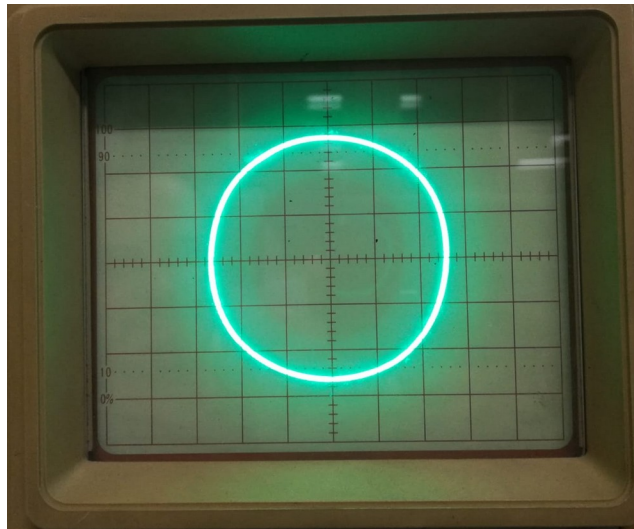
Per evitare cortocircuiti dovuti alle messe a terra dei canali dell'oscilloscopio e del generatore di funzioni, si è deciso di montare un circuito come il seguente:



così facendo si è reso il segnale in ingresso flottante e le messe a terra dell'oscilloscopio in modo da non cortocircuitare nessun canale.

### Raccolta ed analisi dati:

La figura ottenuta è la seguente:



Le immagini che si visualizzano sull'oscilloscopio in modalità X-Y dipendono dal rapporto tra le frequenze dei segnali sugli assi, dal loro sfasamento e dalle ampiezze relative. Tra la tensione prelevata ai capi della resistenza e quella ai capi del capacitore non c'è variazione di frequenza, i filtri passivi, infatti, abbattano solamente le ampiezze, c'è però uno sfasamento di  $\pi/2$ , in accordo con le previsioni teoriche. Per questo motivo ci si aspetta una figura di Lissajous, in particolare un'ellisse. Questo può degenerare in una circonferenza, come è successo nel nostro caso, impostando come frequenza quella di taglio, per cui si ottengono uguali ampiezze dei due segnali prelevati.

## PUNTO 3

### **Obiettivo:**

Si calcoli il valore di C, sperimentalmente, supponendo nota R e sfruttando le nozioni teoriche sulla frequenza di taglio; confrontare con il valore nominale.

### **Procedura:**

Supponendo  $R_{\text{mis}} = (1800 \pm 30) \Omega$ , come valore noto della resistenza, si è deciso di ricavare un valore approssimativo della frequenza di taglio tramite la formula

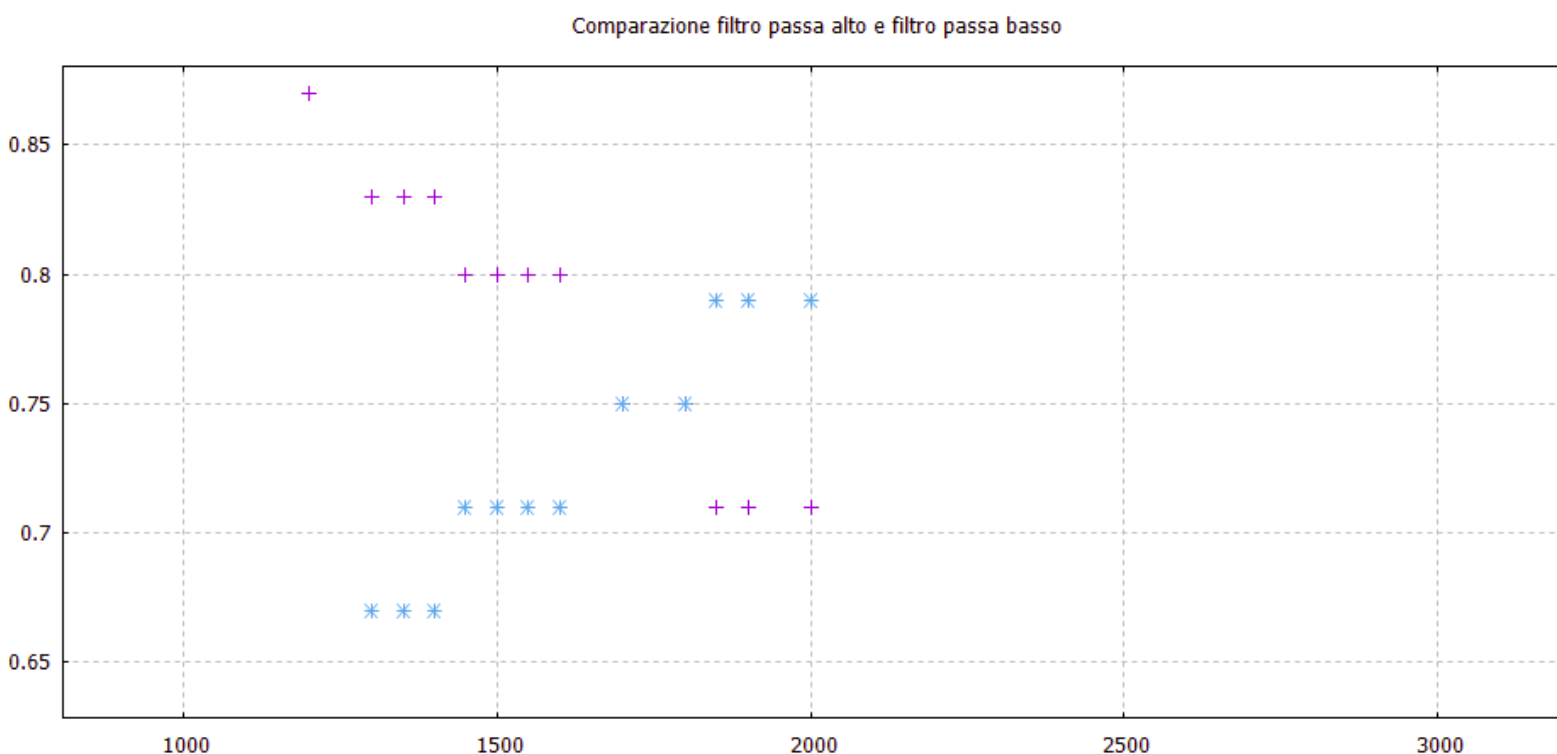
$\nu_T = \frac{1}{2\pi RC}$  , utilizzando per  $C_{nom}$  il valore nominale del punto 1. Per calcolare il valore sperimentale della capacità, tramite la formula inversa:

$$C = \frac{1}{2\pi \nu_T R} ,$$

si è andati a prendere, con un circuito filtro passa-alto, le coppie di misure del rapporto  $V_{0R}/V_0$ , per il voltaggio del generatore si è utilizzato un voltmetro in AC con f.s. 10V (che misura quindi una  $V_{avg}$ ) e per il voltaggio ai capi della resistenza si è utilizzato l'oscilloscopio con f.s. 8V e risoluzione 0,4V (che misura quindi una  $V_{0-P}$ ), e della frequenza, in un intervallo opportunamente piccolo centrato nella frequenza di taglio. In queste circostanze, ricordandosi anche i grafici del punto 1, si può ipotizzare una relazione di linearità fra le coppie di dati raccolte e quindi utilizzare il metodo dei minimi quadrati, la variante con errori anche sulla  $x$ ; l'ipotesi di fluttuazioni casuali per i valori delle  $y$  non è stata verificata, si può ipotizzare che tali oscillazioni siano di almeno un ordine di grandezza inferiore alle sensibilità utilizzate per le misurazioni e quindi non sono state rilevate, se il coefficiente di correlazione sarà accettabile allora l'ipotesi di fluttuazioni casuali e quella di linearità fatte in precedenza saranno verificate. Dalla formula analitica della retta così ricavata si calcoli la frequenza di taglio. Si è deciso di fare un'analisi, del tipo descritto sopra, solo per il filtro passa-alto in quanto non ci aspettiamo differenze con il filtro passa-basso, salvo per la quota e la pendenza della retta di regressione che risulteranno di segno invertito.

## **Raccolta dati:**

Il valore approssimativo della frequenza di taglio è  $\nu_T = (1,8 \pm 0,2) \text{ KHz}$ , per gli errori si è usata la formula con le derivate parziali. Per avere un'idea più chiara del valore approssimativo intorno al quale dobbiamo prendere le misure, si è fatto un confronto fra i due grafici del punto 1:



Si nota che la frequenza di taglio è più o meno intorno a 1800Hz, in accordo con quanto visto prima. Le coppie di dati raccolte sono riportate nella seguente tabella:

Frequenze [Hz]	$V_{\text{generatore}}=V_0$ [V]	$V_{\text{resistenza}}=V_{0R}$ [V]	$V_{0R}/V_0$
1750±50	7,85±0,09	5,20±0,12	0,66±0,02
1800±50	7,85±0,09	5,20±0,12	0,66±0,02
1850±50	7,85±0,09	5,20±0,12	0,66±0,02
1900±50	7,85±0,09	5,60±0,12	0,71±0,02
1950±50	7,85±0,09	5,60±0,12	0,71±0,02
2000±50	7,85±0,09	5,60±0,12	0,71±0,02

I valori della seconda colonna si sono ricavati moltiplicando: il valore letto sul voltmetro in AC, che è  $V_{\text{avg}}$ , e la risoluzione del multimetro a f.s. 10V divisa per radice di dodici, per  $\pi/2$ . I valori della terza colonna sono stati letti direttamente dall'oscilloscopio, con portata 8V e risoluzione 0,4V; l'incertezza è stata ricavata dividendo la risoluzione per radice di dodici. Riportiamo qui che

abbiamo dovuto cambiare le sonde dell'oscilloscopio, rispetto a quelle fornite sul banco di lavoro, in quanto ci siamo resi conto che, andando a controllare la  $V_0$  escludendo il resto del circuito, al variare della frequenza variava anche l'ampiezza della tensione (in particolare per grandi frequenze l'ampiezza diminuiva), facendoci concludere che le sonde fornite presentano una capacità parassita. Cambiando sonde con altre di altro tipo non si sono riscontrati più variazioni dell'ampiezza con la frequenza. Per gli errori sull'ultima colonna si è usata le regole base della propagazione degli errori.

## **Analisi dati:**

La retta di regressione risultante dai dati è quindi:

$$V_{0R}/V_0 = B \cdot \nu + A = (0,00020 \pm 0,00012) \cdot \nu + (0,2 \pm 0,2) ,$$

il coefficiente di correlazione è pari a  $r=0,87831$ , che, per le 6 misure prese, ci dà una probabilità di linearità, tabulata, di circa 98,6%. Quindi ora andando a sostituire, all'equazione della retta ricavata,  $\nu_T$ , si avrà un valore del rapporto  $V_{0R}/V_0$  pari a 0,707. Ora è possibile invertire la formula e ricavare il valore della frequenza di taglio che risulta  $\nu_T = (2 \pm 1) \text{ KHz}$ , con l'errore dato dalla regola generale della propagazione degli errori, cioè quella con le derivate parziali sommate in quadratura. L'errore relativo di tale misura risulta molto grande, in quanto la risoluzione degli strumenti da noi utilizzati è molto bassa rispetto alle variazioni che avremmo dovuto rilevare sulle misure, e questa problematica si è ripercossa su tutte le misure da noi prese, anche quelle del metodo dei minimi

quadrati. Adesso, tramite  $C = \frac{1}{2\pi \nu_T R}$ , calcoliamo la capacità sperimentale

$C = (45 \pm 20) \text{ nF}$  (che presenta il solito errore relativo grande, per le motivazioni precedenti), con l'errore dato dalla regola generale della propagazione degli errori, cioè quella con le derivate parziali sommate in quadratura. Ricordando, infine, il valore nominale della capacità  $C_{\text{nom}} = (47 \pm 5) \text{ nF}$ , si nota immediatamente che risulta consistente con il valore sperimentale.