Laboratorio II (1° modulo) – Elettromagnetismo ed Ottica

ESPERIENZA n° 2

Misure in corrente continua

Anno Accademico 2018/2019

Relatori:
Lorenzo Bartolozzi,
Luca Pacioselli,
Giuseppe Prudente.

Introduzione:

L'esperienza n° 2 di laboratorio si divide in tre punti:

I. Determinare il valore di una resistenza incognita con il ponte di Wheatstone;
II. Verificare la validità delle leggi di Kirchhoff;
III. Verificare la validità del teorema di Thévenin.

Strumenti a disposizione:

Un alimentatore analogico, Alpha AL862 CC stabilizzato (con doppia uscita):

- stabilità della tensione in uscita migliore dello 0,1%;
- 2 modalità per la tensione in uscita: da 0V a 10V o da 0V a 30V, entrambi variabili con continuità;
- corrente in uscita da 0V a 3A.

Due multimetri analogici ICE 680:

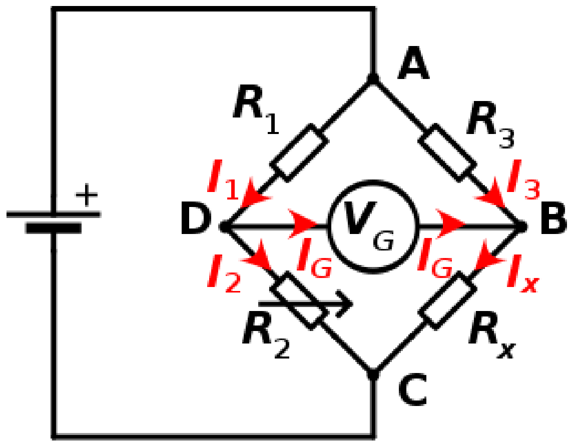
- portata voltmetro in corrente continua: da 100mV a 1000V;
- portata amperometro in corrente continua: da 50μA a 5A;
- fattori moltiplicativi ohmmetro: Ωx1, Ωx10, Ωx100, Ωx1000;
- sensibilità per voltmetro e amperometro in CC: 1% rispetto al fondo scala.

Due basette sperimentali.

Resistori vari.
Un potenziometro, variabile da 0Ω a 999Ω.

Si noti che la resistenza interna dell'alimentatore è stata considerata trascurabile rispetto a quelle utilizzate durante l'esperienza.

Punto 1



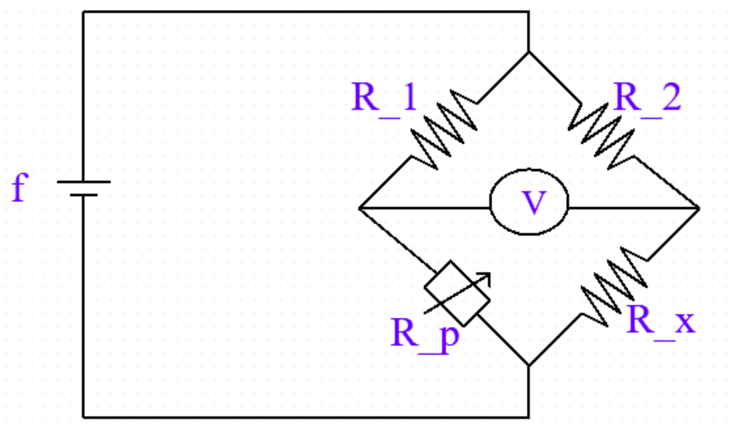
(*schema elettrico ponte di Wheatstone*)

Obiettivo:

Riprodurre lo schema elettrico del ponte di Wheatstone e ricavare il valore di una resistenza mediante esso.

Procedura:

Si scelgano tre resistenze fisse, tenendo conto dei limiti di portata del potenziometro, e considerarne una come quella incognita. I valori delle resistenze sono stati misurati con il multimetro analogico a fondo scala x100Ω; si è deciso di utilizzare, come incertezza sulle misure lette, l'errore di sensibilità che è pari a 100Ω per le resistenze usate nel nostro caso.



(*dove* $R_1=300\Omega$, $R_2=500\Omega$, $(R_x)_{ohmmetro}=1000\Omega$)

All'errore di sensibilità sulle resistenze è stata divisa la radice di dodici, in quanto ripetendo le misure i valori delle resistenze non presentavano oscillazioni casuali. La formula per ricavare R_x quando il ponte è in equilibrio, cioè quando non passa corrente nell'amperometro, "V", è:

$$R_x=\frac{R_p\cdot R_2}{R_1} \quad [1.1]$$

Si ricavi teoricamente il valore R_p per cui si annulla I_g e si porti il potenziometro a tale valore, verificando con un amperometro che la corrente che circola sul ramo diagonale sia effettivamente consistente con 0A. Infine, allo scopo di trovare un modo alternativo per utilizzare il ponte di Wheatstone considerando il potenziometro come una serie di resistenze discrete, si è ipotizzato che in un certo intervallo di valori di resistenze, centrato nella resistenza per cui la corrente nell'amperometro si annulla, la relazione fra I_g e R_p sia lineare; anche se globalmente questa condizione di linearità non risulta verificata. Perciò partendo da un certo valore di R_p per cui la corrente risulti negativa (o positiva) si va a prendere valori di resistenza sempre più grandi (o più piccoli), rilevando le correnti corrispondenti, fino ad arrivare a valori per cui la corrente risulti positiva (o negativa); poi si interpolano i punti così trovati con un fit dei dati, dal quale si può verificare l'ipotesi di linearità nell'intervallo considerato, grazie al coefficiente di correlazione lineare. Infine si ricavi R_x dalla [1.1].

Raccolta dati:

Il valore teorico della R_p, $(R_p)_{teorico}$, per cui I_g si annulla è:

$$(R_p)_{teorico}=\frac{R_1\cdot (R_x)_{ohmmetro}}{R_2}=600\,\Omega \quad [1.2]$$

con errore dato da:

$$\delta(R_p)_{teorico}=(R_p)_{teorico}\cdot\sqrt{\left(\frac{\delta R_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{\delta R_2}{R_2}\right)^2+\left(\frac{\delta(R_x)_{ohmmetro}}{(R_x)_{ohmmetro}}\right)^2}=70\Omega$$

Si è andati quindi a costruire il circuito e a far arrivare il potenziometro ad un valore, letto dall'apposito indicatore sullo strumento e indicativamente verificato con l'ohmmetro, consistente con [1.2], infatti:

$$(R_p)_{misurato}=(548{,}0\pm 0{,}2)\Omega \qquad [1.3]$$

e lo scarto è pari a:

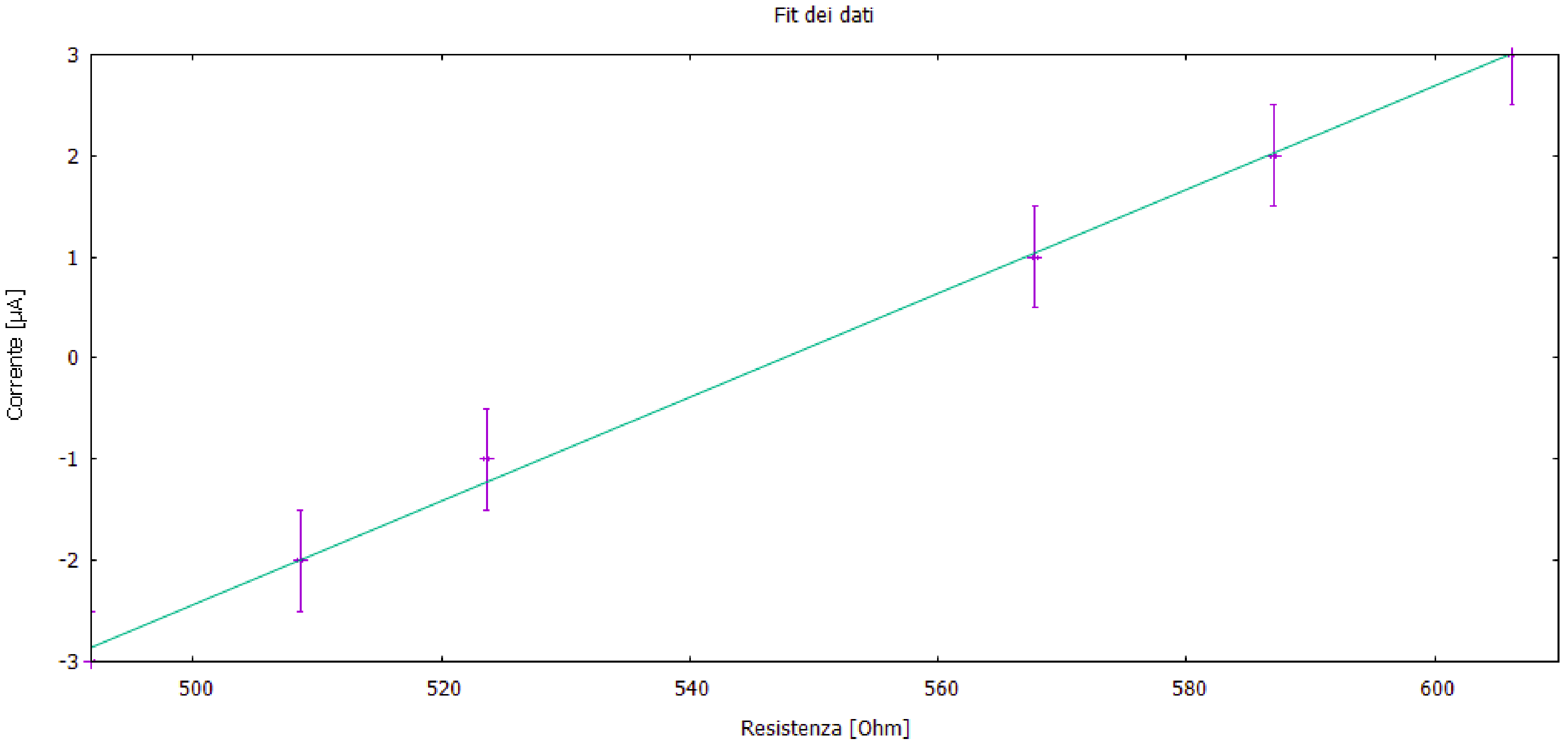
$$\Delta R_p=\left|(R_p)_{teorico}-(R_p)_{misurato}\right|=52\Omega \qquad [1.4]$$

$$\sigma_{\Delta R_p}=\sqrt{(\delta(R_p)_{teorico})^2+(\delta(R_p)_{misurato})^2}=70\,\Omega \qquad [1.5]$$

Quindi assumiamo come scarto (50±70)Ω.
Andando a rilevare il valore della corrente corrispondente a [1.3] si ha che la corrente che fluisce nell'amperometro è proprio $I_g=(0{,}0\pm 0{,}5)\mu A$. Le coppie di dati, resistenze/amperaggi, nella tabella seguente, sono state prese con il criterio scritto nella procedura. Per poter scegliere un intervallo adeguato, in cui valga approssimativamente la linearità ipotizzata in precedenza, sono state fatte delle misure preliminari; si è andati a controllare il rapporto fra correnti rilevate e resistenze impostate con il potenziometro finché la variazione fra i valori così trovati non fosse quasi nulla.

X	Y
R(Ω)	I(μA)
491.8	-3.0
508.6	-2.0
523.6	-1.0
567.8	1.0
587.0	2.0
606.2	3.0

Analisi dati:



(Coefficiente angolare b=0,051±0,001, quota a=-28,1±0,7)

Dato che il coefficiente di correlazione è r=0,998678, che è molto prossimo ad 1, si può confermare l'ipotesi di linearità che si era fatta a priori. Si ricavi il valore della resistenza del potenziometro dai parametri della retta, ponendo I=0A:

$$(R_p)_{Wheatstone} = \frac{-a}{b} = 547{,}5\,\Omega$$

$$\delta(R_p)_{Wheatstone} = (R_p)_{Wheatstone} \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2} = 20\,\Omega$$

Quindi assumiamo come valore (550±20)Ω.

Confrontando ora il valore della resistenza del potenziometro ricavato con il ponte di Wheatstone e quello misurato con l'ohmmetro si ottiene, tramite formule analoghe alle [1.4], [1.5], uno scarto di: (0±20)Ω. Ora utilizzando il valore di R_p letto dal potenziometro nella formula [1.1] si ottiene:

$$(R_x)_{Wheatstone}=\frac{(R_p)_{misurato}\cdot R_2}{R_1}=913{,}3333\,\Omega$$

$$\delta(R_X)_{Wheatstone}=(R_x)_{Wheatstone}\cdot\sqrt{\left(\frac{\delta R_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{\delta R_2}{R_2}\right)^2+\left(\frac{\delta(R_p)_{misurato}}{(R_p)_{misurato}}\right)^2}=110\,\Omega$$

Quindi assumiamo come valore (900±110)Ω.
Valutando lo scarto con il valore letto dall'ohmmetro, tramite formule analoghe alle [1.4], [1.5], si ottiene: (100±110)Ω, perciò risultano consistenti tra loro.

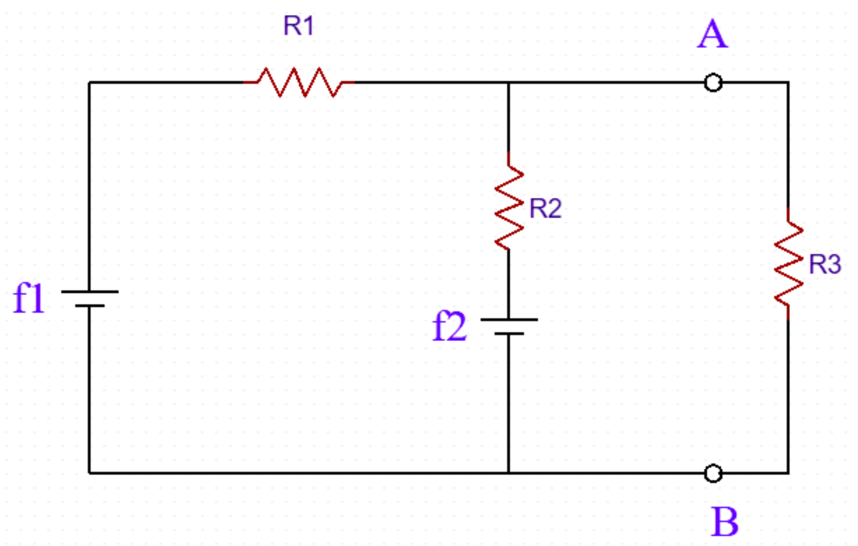
PUNTO 2

Obiettivo:

Verificare la validità delle leggi di Kirchhoff.

Procedura:

Si costruisca il circuito con due maglie indipendenti ed almeno due generatori di tensione, in modo che la potenza dissipata in ciascun elemento passivo non superi il valore massimo tollerabile indicato dal costruttore, i resistori si scelgano in modo da poter considerare ideali il voltmetro e l'amperometro; quello scelto da noi è il seguente:



Si effettuino delle misure preliminari per resistenze, al fine di verificare che tali misure siano affette o meno da fluttuazioni casuali. Se si riveleranno tali oscillazioni si effettuerà una media, con incertezza data dalla deviazione standard della media (SDOM), che si assumerà come valore effettivo della grandezza in considerazione, altrimenti si utilizzi il valore letto sul multimetro, associando ad esso un errore dato dalla sensibilità dello strumento diviso radice di 12, poiché l'errore di sensibilità, in questo caso, conterrebbe l'errore casuale della grandezza in esame. Si misurino i valori effettivi con l'ohmmetro:

R1 (Ω)	R2 (Ω)	R3 (Ω)
2000	4000	5000
2000	4000	5000
2000	4000	5000
2000	4000	5000
2000	4000	5000

(*fattore moltiplicativo x1000Ω, quindi ciascun valore ha incertezza di 1KΩ, che è la risoluzione dello strumento, diviso radice di 12*)

Si noti che questi valori di resistenza elettrica sono tali da poter considerare ideali il voltmetro e l'amperometro, i quali, ai f.s. di 5mA e 10V che stiamo utilizzando, hanno resistenze interne rispettivamente di 64Ω e 200KΩ.
Si regolino, aiutandosi con il voltmetro che ha errore dell'1% rispetto al f.s. che è 10V, le tensioni dei due generatori ai rispettivi valori scelti:

V1 (V)	V2 (V)
10.0	5.0
10.0	5.0
10.0	5.0
10.0	5.0
10.0	5.0

(*dove $f_1=V_1$ ed $f_2=V_2$*)

Assumendo questi valori per i resistori e per le ddp dei generatori risolvere la rete con le leggi di Kirchhoff, ottenendo i valori teorici delle correnti che circolano nei vari rami del circuito e delle tensioni ai capi dei vari elementi. Si misurino le correnti e le ddp con il voltmetro e l'amperometro. Infine di confrontino tali valori con quelli teorici.

Raccolta dati:

Prima di cominciare la raccolta dati bisogna verificare, tramite le misure prese precedentemente di resistenze e ddp, che la potenza dissipata dalle resistenze non superi quella massima indicata dal costruttore, che nel nostro caso è ¼ W.

W_{R1} (W)	W_{R2} (W)	W_{R3} (W)	δW_{R1} (W)	δW_{R2} (W)	δW_{R3} (W)
0.006	0.0006	0.009	0.002	0.0003	0.002

Tutte le resistenze dissipano quindi una potenza inferiore rispetto a quella massima e si può procedere alla raccolta dati.

Si effettuino delle misure preliminari per correnti e tensioni, al fine di verificare che tali misure siano affette o meno da fluttuazioni casuali.

Misure sperimentali correnti sui rami, con f.s. a 5mA e incertezza sulle misure dell'1% del f.s., e tensioni a capi resistori:

I1 (mA)	I2 (mA)	I3 (mA)
1.50	1.20	0.30
1.50	1.20	0.30
1.50	1.20	0.30
1.50	1.20	0.30
1.50	1.20	0.30

(*dove I_1, I_2, I_3 sono le correnti che circolano rispettivamente nelle resistenze R_1, R_3 ed R_2*)

V_{R1} (V)	V_{R2} (V)	V_{R3} (V)
4.0	1.0	5.8
4.0	1.0	5.8
4.0	1.0	5.8
4.0	1.0	5.8
4.0	1.0	5.8

(*f.s. 10V ed incertezza l'1% del f.s.*)

Analisi dati:

Il sistema che si trova col metodo delle maglie è il seguente:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 - I_2 \\ f_1 - f_2 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_3 \\ f_2 = R_3 \cdot I_2 - R_2 \cdot I_3 \end{cases}$$

che risolto dà:

$$I_1 = \frac{R_3 \cdot (f_1 - f_2) + R_2 \cdot f_1}{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot (R_1 + R_3)} = 1{,}711\, mA$$

$$\delta I_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial I_1}{\partial f_1} \cdot \delta f_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_1}{\partial f_2} \cdot \delta f_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_1}{\partial R_1} \cdot \delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_1}{\partial R_2} \cdot \delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_1}{\partial R_3} \cdot \delta R_3\right)^2} = 0{,}13\, mA$$

Quindi assumiamo come valore (1,70±0,13)mA.

$$I_2 = \frac{f_1}{R_3} - \frac{R_1}{R_3} \frac{(R_3 \cdot (f_1 - f_2) + R_2 \cdot f_1)}{(R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot (R_1 + R_3))} = 1{,}316\, mA$$

$$\delta I_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial I_2}{\partial f_1} \cdot \delta f_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_2}{\partial f_2} \cdot \delta f_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_2}{\partial R_1} \cdot \delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_2}{\partial R_2} \cdot \delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_2}{\partial R_3} \cdot \delta R_3\right)^2} = 0{,}08\, mA$$

Quindi assumiamo come valore (1,32±0,08)mA.

$$I_3 = \frac{R_3 \cdot (f_1 - f_2) + R_2 \cdot f_1}{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot (R_1 + R_3)} \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) - \frac{f_1}{R_3} = 0{,}395\, mA$$

$$\delta I_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial I_3}{\partial f_1} \cdot \delta f_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_3}{\partial f_2} \cdot \delta f_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_3}{\partial R_1} \cdot \delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_3}{\partial R_2} \cdot \delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_3}{\partial R_3} \cdot \delta R_3\right)^2} = 0{,}08\, mA$$

Quindi assumiamo come valore (0,40±0,08)mA.

Con gli errori dati dalle precedenti formule poiché gli errori delle variabili sono tutti indipendenti e casuali.
Le tensioni ai capi dei resistori sono date dà:

$$V_{R1}=I_1 \cdot R_1=3{,}421\,V$$

$$\delta V_{R1}=V_{R1} \cdot \left(\frac{\delta I_1}{I_1}+\frac{\delta R_1}{R_1}\right)=0{,}8\,V$$

quindi assumiamo come valore (3,4±0,8)V;

$$V_{R2}=I_3 \cdot R_2=1{,}58\,V$$

$$\delta V_{R2}=V_{R2} \cdot \left(\frac{\delta I_3}{I_3}+\frac{\delta R_2}{R_2}\right)=0{,}4\,V$$

quindi assumiamo come valore (1,6±0,4)V;

$$V_{R3}=I_2 \cdot R_3=6{,}58\,V$$

$$\delta V_{R3}=V_{R3} \cdot \left(\frac{\delta I_2}{I_2}+\frac{\delta R_3}{R_3}\right)=0{,}8\,V$$

quindi assumiamo come valore (6,6±0,8)V;

dove gli errori sono dati senza quadratura perché quelli su I_i ed R_j, con i,j=1,2,3, non sono indipendenti.
Si passa al confronto fra i valori teorici e quelli sperimentali, valutandone lo scarto, tramite formule analoghe alle [1.4], [1.5]:

I. **(I_1) → (0,20±0,14)mA**;
II. (I_2) → (0,1±0,8)mA;
III. (I_3) → (0,1±0,8)mA;
IV. (V_{R1}) → (0,6±0,8)V;
V. **(V_{R2}) → (0,6±0,4)V**;
VI. (V_{R3}) → (0,8±0,8)V.

La I. e la V. misura non risultano consistenti con lo zero ma si può calcolare di quante deviazioni standard, σ, i due valori si scostano, considerando lo scarto accettabile se lo scostamento rientra entro 2σ.

I. I due valori di I_1 si discostano di 1,43σ.

V. I due valori di V_{R2} si discostano di 1,5σ.

Risultano così confermate le leggi di Kirchhoff.

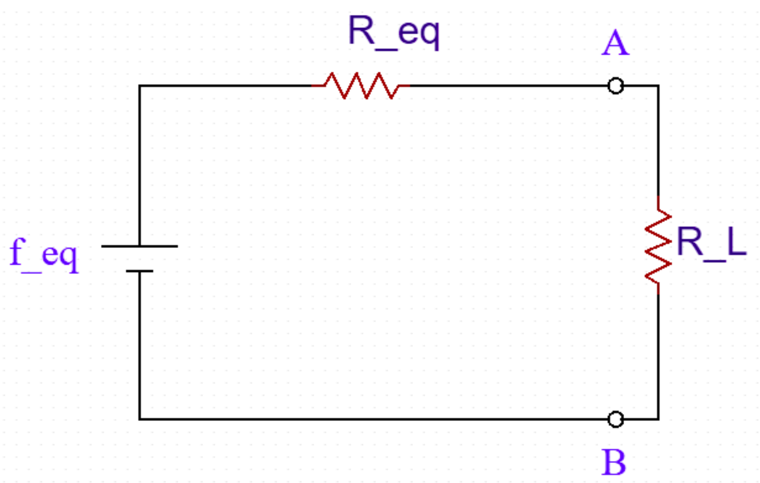
PUNTO 3

Obiettivo:

Verificare la validità del teorema di Thévenin.

Procedura:

Si scelgano due punti, A e B, arbitrariamente nel circuito del punto 2 e ad essi si colleghi una resistenza nota R_L; senza modificare in alcun modo il circuito preesistente. Per il teorema di Thévenin, non importa quanto sia complicato il circuito tra A e B, la resistenza R_L vedrà: un generatore di tensione pari alla differenza di potenziale fra A e B, in serie ad una resistenza pari alla resistenza equivalente, fra A e B, del precedente circuito se in esso sostituiamo ai generatori di tensione la loro resistenza interna, che noi stiamo considerando trascurabile. Il nuovo circuito allora sarà:



dove:

$$f_{eq}=f_2+R_2\cdot I_3=(6{,}6\pm 0{,}5)V$$

è la differenza di potenziale generata dal suddetto nuovo generatore di tensione ed

$$R_{eq}=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}=(1300\pm 300)\Omega$$

è la nuova resistenza equivalente.
Con gli errori dati dalle leggi di propagazione degli errori:

$$\delta f_{eq}=\delta f_2+R_2\cdot I_3\cdot(\frac{\delta R_2}{R_2}+\frac{\delta I_3}{I_3})$$

$$\delta R_{eq}=R_{eq}\cdot\sqrt{(\frac{\delta R_2}{R_2})^2+(\frac{\delta R_1}{R_1})^2+(\frac{(\delta R_1+\delta R_2)}{(R_1+R_2)})^2}$$

Con quest'ultimo errore dato con una somma in quadratura degli errori relativi in quanto sono indipendenti e casuali.

Si calcoli teoricamente il valore della corrente che attraversa il resistore R_L con il teorema di Thévenin e poi con un amperometro; si confrontino i due valori ottenuti.

Analisi dati:

Il valore teorico della corrente che fluisce in R_L è dato da:

$$I_{R_L}=\frac{f_{eq}}{(R_{eq}+R_L)}=0{,}904\,mA \qquad [3.3]$$

$$\delta I_{R_L} = I_{R_L} \cdot \left(\frac{\delta f_{eq}}{f_{eq}} + \frac{(\delta R_{eq} + \delta R_L)}{(R_{eq} + R_L)} \right) = 0{,}15\, mA \qquad [3.4]$$

quindi assumiamo come valore: (0,90±0,15)mA.

Si noti che il valore di R_L è tale da poter considerare ideali sia il voltmetro che l'amperometro, visto che stiamo utilizzando gli stessi f.s. del punto 2, e che la potenza dissipata sulla resistenza R_L, 0,00486 W, non supera quella massima sopportabile di ¼ W.

Non essendo riusciti, per questioni di tempo, a raccogliere i dati relativi a questo punto dell'esperienza, non possiamo procedere al confronto fra valore misurato e teorico tramite formule analoghe alle [1.4], [1.5].