

## **ESPERIENZA n° 6**

*Misura della focale di una lente convergente*

Anno Accademico 2018/2019

### **Relatori:**

Lorenzo Bartolozzi,

Luca Pacioselli,

Giuseppe Prudente.

### **Introduzione:**

L'esperienza n° 6 di laboratorio consiste di un punto fondamentale:

- I. Determinare la focale di una lente convergente biconvessa, mediante differenti metodi sperimentali.

### **Strumenti a disposizione:**

Sorgenti luminose: laser, lampadina a incandescenza, LED.

Lente convergente biconvessa: distanza focale nominale 20 cm.

Schermo.

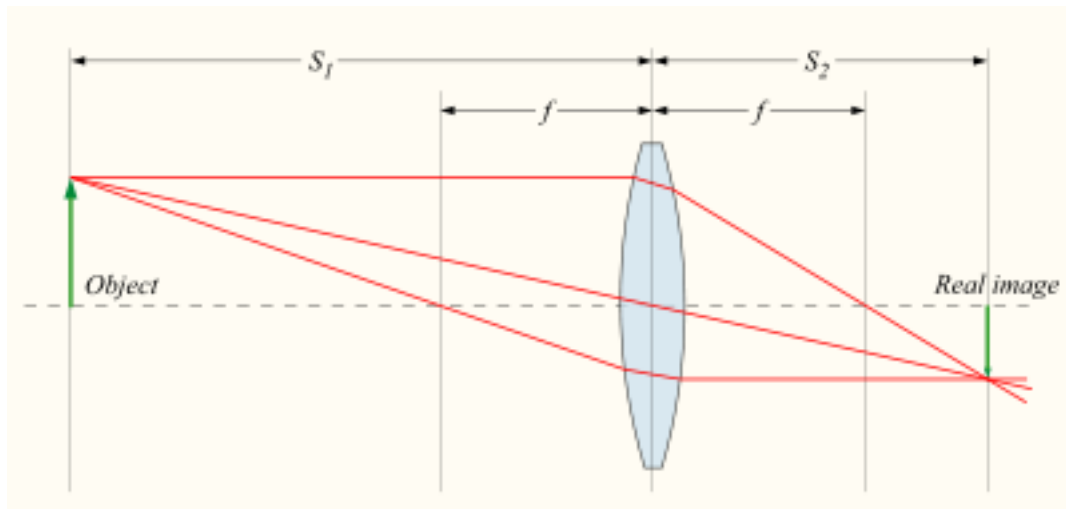
Banco ottico.

Metro a nastro: portata=300 cm, risoluzione di fondo scala=0,1 cm.

Supporti vari.

I valori utilizzati per le formule non sono stati approssimati su foglio elettronico; nel riportarli nella relazione sono stati approssimati coerentemente con l'errore. Si è fatta attenzione per tutta l'esperienza all'alimentazione delle varie sorgenti luminose, per non danneggiarle.

## Metodi sperimentali:



La determinazione della focale di una lente si basa sulla sua relativa equazione dei punti coniugati. Si può dimostrare che l'equazione dei punti coniugati di una lente convergente biconvessa è:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} ,$$

o equivalentemente, se si fissa la distanza  $s=p+q$ :

$$f = p \cdot \left(1 - \frac{p}{s}\right) \qquad f = q \cdot \left(1 - \frac{q}{s}\right)$$

(dove con  $p$  si intende la distanza del punto oggetto, quindi la sorgente luminosa, dalla lente, con  $q$  la distanza del punto immagine, perciò lo schermo, dalla lente e con  $f$  la distanza focale della lente stessa) nel caso in cui i due mezzi materiali esterni alla lente abbiano stesso indice di rifrazione. Abbiamo utilizzato l'equazione per una lente biconvessa convergente in quanto è stato verificato, con delle misure preliminari della larghezza della lente che, per le distanze prese in considerazione durante l'esperienza, il suo spessore è trascurabile. Si è stabilito che il fascio luminoso era messo a fuoco quando sullo schermo: si vede un punto, per il laser, il LED e la lampadina con la lente lontana dalla sorgente; si vede, in modo definito, la forma del filamento, per la lampadina con la lente vicino alla sorgente. Al fine di determinare la distanza

focale della lente si sono seguiti 3 metodi differenti da utilizzare per ciascuna sorgente luminosa (salvo un'eccezione specificata in seguito):

- **METODO 1:**

Si ipotizza che il centro della lente, della sorgente luminosa, e dello schermo coincidano con il centro del supporto con il quale scorrono sul banco ottico, detto cavalierino, commettendo degli errori sistematici. Infine per le misure di  $p$  e di  $q$  che comportano la determinazione della posizione del centro della lente, dello schermo e della sorgente si considereranno i centri dei relativi supporti. Infine si calcoli, trascurando gli errori sistematici,  $f$  propagando adeguatamente gli errori.

- **METODO 2:**

Sotto le stesse ipotesi del metodo 1 si eseguono le misure di  $p$  e di  $q$  e poi le si ripetono invertendo la direzione del cavalierino sul banco ottico. Infine si faccia una media fra le misure di  $p$  e fra le misure di  $q$  nel caso di cavalierino dritto e invertito, così facendo si avranno delle  $p$  e delle  $q$  non affette dall'errore sistematico della lente con le quali si può calcolare  $f$ . Tale errore sistematico si cancella in quanto se in una configurazione si sovrastima, ad esempio,  $p$  e si sottostima, quindi  $q$ , nell'altra configurazione avviene viceversa.

- **METODO 3:**

Sotto le ipotesi del metodo 1 si fissi la distanza,  $s$ , fra schermo e sorgente luminosa. Se tale distanza è maggiore di 4 volte la distanza focale della lente, allora si avranno due configurazioni in cui il fascio di luce è messo a fuoco, tali per cui  $p_1=q_2$  e  $p_2=q_1$ . Essendo le misure indipendenti si può fare una media  $\bar{p} = \frac{p_1+q_2}{2}$  ; così facendo l'errore sistematico sulla

posizione della lente si elide in quanto si avrà  $\bar{p} = \frac{(p_1 \pm \varepsilon) + (q_2 \mp \varepsilon)}{2}$  .

Misurando allora  $\bar{p}$  , che non ha più l'errore sistematico, ed  $s$  si può ottenere  $f$ , con la formula:

$$f = \bar{p} \cdot \left(1 - \frac{\bar{p}}{s}\right) .$$

Tramite un calcolo teorico si può stabilire quanto una rotazione, dell'asse ottico rispetto allo schermo, influisca sulla misura della focale. Con una rotazione della lente di  $\theta$ , indipendentemente in verso orario o in verso antiorario, si avrà che la formula per ricavare la focale, invece di essere  $f = \frac{p \cdot q}{p + q}$ , sarà

$$f = \frac{p \cdot q}{p + q \cdot \cos(\theta)}$$

. Se adesso consideriamo piccole rotazioni, si ha  $\cos(\theta) \rightarrow 1$

e si riottiene la formula di partenza. L'errore nell'applicare tale approssimazione è dato da  $\Delta = \frac{1 - \cos(\theta)}{\cos(\theta)}$ , che per  $5^\circ$  è dello 0,38%, che è trascurabile. La cosa è analoga se, invece della lente, è ruotato il fascio luminoso rispetto alla lente e allo schermo.

Infine si confrontino i tre metodi utilizzati e le diverse sorgenti luminose scelte.

## Laser

### Procedura:

Come prima cosa è necessario andare a verificare che il fascio luminoso del laser risulti collimato o meno, cioè se la larghezza della radiazione luminosa, proiettata sullo schermo senza la lente in mezzo, abbia la stessa dimensione di quella in uscita della sorgente stessa. Per fare ciò si è posizionato il laser all'estremo destro del banco ottico e si è proiettato il fascio luminoso sullo schermo all'estremo sinistro del banco ottico. Si è notato che a tale distanza la radiazione generata non perde collimazione, perciò per le misure che si andranno a prendere si è potuto considerare la sorgente luminosa posta all'infinito. Il laser a nostra disposizione è dotato di alimentatore, perciò l'abbiamo collegato alla presa di corrente senza badare ai limiti massimi di alimentazione. Successivamente sono state prese le misure di  $q$  tramite i primi 2 metodi descritti in precedenza, in quanto il terzo metodo non è applicabile data l'ipotesi di  $p$  all'infinito; non avrebbe senso la misura di  $p_1$ . Inoltre sempre per l'approssimazione di sorgente all'infinito, quindi  $1/p$  tendente a 0, si ha che l'equazione dei punti coniugati implica che le misure di  $q$  siano direttamente delle misure di  $f$ .

## **Raccolta dati:**

### **METODO 1:**

Di seguito sono riportate le misure di  $f$  prese con la direzione del cavalierino verso lo schermo:

$f$ [cm]
$19,4 \pm 0,1$
$19,5 \pm 0,1$
$20,9 \pm 0,1$
$19,7 \pm 0,1$
$19,8 \pm 0,1$
$19,9 \pm 0,1$

### **METODO 2:**

Come misure di  $f$  per il cavalierino diretto verso lo schermo abbiamo usato quelle del metodo 1, in quanto non c'è nessuna differenza fra la presa dati, per il cavalierino diretto verso lo schermo, dei due metodi.

Di seguito sono riportate le misure di  $f$  prese con la direzione del cavalierino invertita rispetto a prima:

$f_{\text{inv.}}$ [cm]
$19,9 \pm 0,1$
$20,3 \pm 0,1$
$19,4 \pm 0,1$
$19,7 \pm 0,1$
$19,7 \pm 0,1$
$20,5 \pm 0,1$

## **Analisi dati:**

### **METODO 1:**

Trascurando gli errori sistematici si è fatta una media delle  $f$  raccolte, a cui è stata attribuita un'incertezza pari alla SDOM:

MEDIA $f$ [cm]	19,9
SDOM $\delta f$ [cm]	0,2

### **METODO 2:**

Si sono utilizzate la media e la SDOM, per il cavalierino in direzione dello schermo, dell'analisi dati del metodo 1. Non trascurando l'errore sistematico sulla determinazione della posizione dello schermo si sono sommati in quadratura tale errore sistematico, pari a 0,3 cm, e la SDOM, ottenendo un errore pari a 0,4 cm.

Si è fatta una media delle  $q$  con il cavalierino in direzione opposta a prima, a cui è stata attribuita un'incertezza pari alla SDOM:

MEDIA $f_{inv.}$ [cm]	19,9
SDOM $\delta f_{inv.}$ [cm]	0,2

Non trascurando, neanche stavolta, l'errore sistematico sulla determinazione della posizione dello schermo si sono sommati in quadratura tale errore sistematico, pari a 0,3 cm, e la SDOM, ottenendo un errore pari a 0,4 cm.

Infine si è fatta una media,  $f_R$ , fra i 2 valori di  $f$  così ottenuti, alla quale è stato attribuito un errore secondo le regole di base della propagazione degli errori:

MEDIA $f_R$ [cm]	19,9
ERRORE $\delta f_R$ [cm]	0,4

## **Lampadina a incandescenza**

## **Procedura:**

La luce emessa dalla lampadina è assimilabile a quella di una sorgente puntiforme, almeno ad una certa distanza. Non potendo determinare dove si trovi l'origine puntiforme della luce emessa dalla lampadina, in quanto tale non è il filamento interno, si è scelto di ruotare la sorgente in modo che il filamento, di forma arcuata, puntasse verso la lente e lo schermo. In tale configurazione, per le distanze a cui abbiamo tenuto la lente, la radiazione generata dal filamento è approssimativamente puntiforme, perciò abbiamo scelto la punta del filamento come origine della sorgente luminosa. La lampadina è stata alimentata attaccandola direttamente al generatore di tensione continua, mantenendo il valore di ddp al di sotto di 9V che è il massimo sopportabile dalla sorgente luminosa. Si sono poi effettuate le misure di  $p$ , di  $q$  e di  $s$  tramite i tre metodi descritti all'inizio della relazione.

## **Raccolta dati:**

La distanza fra lo schermo e la sorgente luminosa è stata fissata e misurata:  $s=(118,5\pm0,1)$  cm.

### **METODO 1:**

Di seguito sono riportate le misure di  $q$  prese con la direzione del cavalierino verso lo schermo:

<b><math>q</math> [cm]</b>
$25,4\pm0,1$
$25,3\pm0,1$
$25,4\pm0,1$
$25,4\pm0,1$
$25,2\pm0,1$
$25,3\pm0,1$

### **METODO 2:**

Come misure di  $q$  per il cavalierino diretto verso lo schermo abbiamo usato quelle del metodo 1, in quanto non c'è nessuna differenza fra la presa dati, per il cavalierino diretto verso lo schermo, dei due metodi.

Di seguito sono riportate le misure di  $q$  prese con la direzione del cavalierino invertita rispetto a prima:

$q_{inv.} [cm]$
$25,8 \pm 0,1$
$25,7 \pm 0,1$
$25,8 \pm 0,1$
$25,9 \pm 0,1$
$25,9 \pm 0,1$
$25,8 \pm 0,1$

### **METODO 3:**

Come misure di  $q_2$  per il cavalierino diretto verso lo schermo abbiamo usato quelle del metodo 1, in quanto non c'è nessuna differenza fra la presa dati, per il cavalierino diretto verso lo schermo, dei due metodi.

Di seguito sono riportate le misure di  $p_1$  prese con il cavalierino nella seconda configurazione per cui si ha la radiazione luminosa messa a fuoco:

$p_1 [cm]$
$26,9 \pm 0,1$
$27,0 \pm 0,1$
$27,0 \pm 0,1$
$27,1 \pm 0,1$
$27,0 \pm 0,1$
$26,9 \pm 0,1$

### **Analisi dati:**

#### **METODO 1:**



Trascurando gli errori sistematici si è fatta una media delle  $q$  raccolte, a cui è stata attribuita un'incertezza pari alla SDOM:

MEDIA $q$ [cm]	25,33
SDOM $\delta q$ [cm]	0,03

Tramite la formula  $f = q \cdot \left(1 - \frac{q}{s}\right)$ , si ricava un valore di  $f$ , al quale è stato attribuito un'incertezza secondo le regole base di propagazione degli errori, pari a:

MEDIA $f$ [cm]	19,92
ERRORE $\delta f$ [cm]	0,05

## METODO 2:

Per il cavalierino in direzione dello schermo si sono utilizzati i dati del metodo 1, ma non si trascurino gli errori sistematici che si commettono con la determinazione dello schermo e della sorgente. Si ha, quindi, che l'errore su  $s$  sarà dato dalla somma in quadratura della sensibilità del metro a nastro e degli errori sistematici su misura della distanza fra schermo, 0,3 cm, e sorgente, 0,4 cm, cioè pari a 0,5 cm. L'errore sulla  $q$  media sarà dato invece dalla somma in quadratura della SDOM e dell'errore sistematico che si commette per determinare la posizione dello schermo, cioè 0,3 cm.

Si è fatta una media delle  $q$  con il cavalierino in direzione opposta a prima, a cui è stata attribuita un'incertezza pari alla SDOM:

MEDIA $q_{inv.}$ [cm]	25,82
SDOM $\delta q_{inv.}$ [cm]	0,03

Non trascurando, neanche stavolta, l'errore sistematico sulla determinazione della posizione dello schermo si sono sommati in quadratura tale errore sistematico, pari a 0,3 cm, e la SDOM, ottenendo un errore pari a 0,3 cm.

Poi si è fatta una media,  $q_R$ , fra i 2 valori di  $q$  così ottenuti, alla quale è stato attribuito un errore secondo le regole base della propagazione degli errori:

MEDIA $q_R$ [cm]	25,6
ERRORE $\delta q_R$ [cm]	0,3

Infine, tramite la formula  $f = q \cdot \left(1 - \frac{q}{s}\right)$ , si ricava un valore di  $f$ , al quale è stato attribuito un'incertezza secondo le regole base di propagazione degli errori, pari a:

$f$ [cm]	20,1
$\delta f$ [cm]	0,4

### METODO 3:

Per la media,  $q_{2R}$ , e la SDOM fra le  $q_2$  si è utilizzata quella del metodo 1, ma non trascurando gli errori sistematici si ha che l'errore su  $q_{2R}$  è 0,3 cm, mentre l'errore su  $s$  diventa 0,5 cm.

Si è fatta una media,  $p_{1R}$ , delle  $p_1$  a cui è stata attribuita un'incertezza pari alla somma in quadratura della SDOM e dell'errore sistematico, per determinare la posizione della sorgente, cioè:

MEDIA $p_{1R}$ [cm]	27,0
ERRORE $\delta p_{1R}$ [cm]	0,4

Il valore medio,  $p_{med}$ , fra  $p_{1R}$  e  $q_{2R}$ , con errore dato dalle regole base di propagazione degli errori, è:

$p_{med}$ [cm]	26,2
$\delta p_{med}$ [cm]	0,4

Infine, tramite la formula  $f = \bar{p} \cdot \left(1 - \frac{\bar{p}}{s}\right)$ , si ricava un valore di  $f$ , al quale è stato attribuito un'incertezza secondo le regole base di propagazione degli errori, pari a:

<b>f [cm]</b>	20,4
<b><math>\delta f</math> [cm]</b>	0,6

## LED

### Procedura:

Una delle principali fonti d'errore in questa esperienza è legata ad un problema di definizione. Per effettuare le misurazioni, infatti, la sorgente di luce utilizzata deve essere considerata puntiforme. Tuttavia, in molti casi, questo è complicato. Prendendo per esempio una lampadina, la luce è emessa dal filamento interno e questo fa sì che sia difficile identificare un unico punto come sorgente; in tale situazione, inoltre, non ci sarebbero nemmeno motivi particolari per scegliere un punto del filamento piuttosto che un altro. Perciò, per ripetere le misurazioni cercando di limitare questo tipo di errore, si ricorre all'uso di un'altra fonte luminosa, meglio assimilabile ad una puntiforme: un LED. Si costruisce quindi un circuito su una basetta sperimentale mettendo in serie ad un generatore di corrente continua e al led, una resistenza, di resistenza nominale  $500\Omega$ , così da ridurre la tensione ai capi del LED, in modo da mantenersi sotto l'1,5V che è il valore massimo sopportato dalla nostra sorgente luminosa, e diminuire, quindi, la potenza dissipata dallo stesso. Si posiziona poi il LED sull'apposito sostegno del banco ottico, il più possibile vicino all'asse del centro del cavalierino, e si procede con la raccolta dati secondo i tre metodi precedentemente descritti.

### Raccolta dati:

La distanza fra lo schermo e la sorgente luminosa è stata fissata e misurata:  $s = (118,5 \pm 0,1)$  cm.

### METODO 1:

Di seguito sono riportate le misure di  $q$  prese con la direzione del cavalierino verso lo schermo:

$q$ [cm]
$25,8 \pm 0,1$
$25,9 \pm 0,1$
$25,8 \pm 0,1$
$25,6 \pm 0,1$
$25,7 \pm 0,1$
$25,9 \pm 0,1$

### METODO 2:

Come misure di  $q$  per il cavalierino diretto verso lo schermo abbiamo usato quelle del metodo 1, in quanto non c'è nessuna differenza fra la presa dati, per il cavalierino diretto verso lo schermo, dei due metodi.

Di seguito sono riportate le misure di  $q$  prese con la direzione del cavalierino invertita rispetto a prima:

$q_{\text{inv.}}$ [cm]
$25,2 \pm 0,1$
$25,1 \pm 0,1$
$25,0 \pm 0,1$
$25,0 \pm 0,1$
$24,9 \pm 0,1$
$25,2 \pm 0,1$

### METODO 3:

Come misure di  $q_2$  per il cavalierino diretto verso lo schermo abbiamo usato quelle del metodo 1, in quanto non c'è nessuna differenza fra la presa dati, per il cavalierino diretto verso lo schermo, dei due metodi.

Di seguito sono riportate le misure di  $p_1$  prese con il cavalierino nella seconda configurazione per cui si ha la radiazione luminosa messa a fuoco:

$p_1$ [cm]
$24,9 \pm 0,1$
$24,9 \pm 0,1$
$24,8 \pm 0,1$
$24,8 \pm 0,1$
$25,0 \pm 0,1$
$25,0 \pm 0,1$

## **Analisi dati:**

### **METODO 1:**

Analogamente a quanto fatto per il metodo 1 dell'analisi dati della lampadina a incandescenza si ha:

MEDIA $q$ [cm]	25,78
SDOM $\delta q$ [cm]	0,05

e quindi tramite  $f = q \cdot \left(1 - \frac{q}{s}\right)$ , propagando gli errori con le regole base:

$f$ [cm]	20,17
$\delta f$ [cm]	0,08

### **METODO 2:**

Analogamente a quanto fatto per il metodo 1 dell'analisi dati della lampadina a incandescenza, con l'unica eccezione che l'errore sistematico commesso nella

determinazione della posizione della sorgente stavolta è 0,1 cm (quindi  $\delta s=0,3$  e  $\delta q=0,3$ ), si ha:

MEDIA $q_{inv.}$ [cm]	25,07
SDOM $\delta q_{inv.}$ [cm]	0,05

Non trascurando l'errore sistematico sulla determinazione della posizione dello schermo si sono sommati in quadratura tale errore sistematico, pari a 0,3 cm, e la SDOM, ottenendo un errore pari a 0,3 cm.

Facendo la media fra le due  $q$  si ottiene:

MEDIA $q_R$ [cm]	25,4
ERRORE $\delta q_R$ [cm]	0,3

Infine, tramite la formula  $f = q \cdot \left(1 - \frac{q}{s}\right)$ , si ricava un valore di  $f$ , al quale è stato attribuito un'incertezza secondo le regole base di propagazione degli errori, pari a:

$f$ [cm]	20,0
$\delta f$ [cm]	0,4

### **METODO 3:**

Analogamente a quanto fatto per il metodo 1 dell'analisi dati della lampadina a incandescenza, con l'unica eccezione che l'errore sistematico commesso nella determinazione della posizione della sorgente stavolta è 0,1 cm (quindi  $\delta s=0,3$  e  $\delta q_2=0,3$ ), si ha:

MEDIA $p_{1R}$ [cm]	24,90
SDOM $\delta p_{1R}$ [cm]	0,04

Non trascurando l'errore sistematico sulla determinazione della posizione della sorgente si sono sommati in quadratura tale errore sistematico, pari a 0,1 cm, e la SDOM, ottenendo un errore pari a 0,1 cm.

Il valore medio,  $p_{med}$ , fra  $p_{1R}$  e  $q_{2R}$ , con errore dato dalle regole base di propagazione degli errori, è:

$p_{med} [cm]$	25,3
$\delta p_{med} [cm]$	0,2

Infine, tramite la formula  $f = \bar{p} \cdot \left(1 - \frac{\bar{p}}{s}\right)$ , si ricava un valore di f, al quale è stato attribuito un'incertezza secondo le regole base di propagazione degli errori, pari a:

$f [cm]$	19,9
$\delta f [cm]$	0,3

## **CONCLUSIONI:**

Per ciascuna sorgente luminosa utilizzata, i risultati ottenuti con i metodi 2 e 3 sono consistenti, trivialmente, con il valore nominale.

Usando la lampadina e il LED con il metodo 1, la focale non risulta consistente con il valore nominale, infatti l'incertezza risulta troppo piccola; manca un contributo che è proprio quello degli errori sistematici che sono stati trascurati con quel metodo.

Cionondimeno scegliendo come sorgente luminosa il laser, il risultato del metodo 1 è consistente con il valore nominale, questo perché si aveva un intervallo non indifferente in cui il raggio luminoso risultava messo a fuoco, dato che è stato difficile determinarlo ad occhio nudo, visti i fenomeni di riflessione del fascio sullo schermo. Si noti infatti che la SDOM in questo caso risulta più grande degli altri casi, proprio perché i valori su cui è stata calcolata oscillano in un intervallo ben più grande.

Risultano dunque migliori i metodi 2 e 3 rispetto al metodo 1.

Andando a calcolare di quante deviazioni standard si discostano le  $f$  trovate, nei casi in cui risultano consistenti con il valore nominale, con le varie sorgenti luminose si può, infine asserire che:

DEV. STD.	Laser	Lampadina	LED
Metodo 1	$0,5\sigma$	/	/
Metodo 2	$0,25\sigma$	$0,25\sigma$	$0\sigma$
Metodo 3	/	$0,67\sigma$	$0,33\sigma$

- Il metodo 2 è migliore del metodo 3;
- Il led è stata la sorgente luminosa migliore per questa esperienza; anche più del laser perché come già detto prima ci sono state delle difficoltà nella definizione ad occhio nudo della messa a fuoco che hanno così falsato le misure.