

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA



DIPARTIMENTO DI FISICA E GEOLOGIA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA

VINCOLI SULLE INTERAZIONI
EFFICACI A QUATTRO FERMIONI DI
TIPO NJL DAL DOPPIO
DECADIMENTO BETA SENZA
NEUTRINI

Relatore

Prof. Orlando PANELLA

Correlatore

Dott. Matteo PRESILLA

Candidato

Luca PACIOSELLI

328173

Anno Accademico 2020–2021

*Alla mia famiglia e al mio
nipotino Pietro Maria.*

Sommario

L'argomento di questo lavoro di tesi è lo studio di una teoria efficace oltre il Modello Standard (BSM, Beyond the Standard Model) di tipo Nambu-Jona-Lasinio (NJL) nell'ambito del doppio decadimento beta senza neutrini ($0\nu\beta\beta$). Questo decadimento nucleare raro viola il numero leptonico totale di due unità ed è intrinsecamente collegato all'esistenza di neutrini di Majorana. Ad oggi non è stato ancora osservato e quindi gli esperimenti di ricerca dello $0\nu\beta\beta$ forniscono solo limiti inferiori sul tempo di dimezzamento, o emivita, del decadimento. Per sfruttare questi limiti sperimentali, sono state calcolate le emivite teoriche dovute a interazioni efficaci, indotte da quelle a 4 fermioni tipiche dei modelli di tipo NJL, e caratterizzate da 3 parametri: Λ la scala energetica di nuova fisica del modello, M_N la scala di massa di un neutrino sterile e \mathcal{G}_R^W la costante efficace di accoppiamento del bosone W . Questo studio, relativo allo $0\nu\beta\beta$, per il modello BSM considerato, costituisce il contributo originale della tesi. Sommando i contributi delle interazioni di gauge, di quelle di contatto e dei loro termini misti all'emivita teorica ed imponendo il limite inferiore dell'emivita sperimentale si ottiene una disuguaglianza sui tre parametri del modello BSM. Questo è il risultato principale della tesi, ovvero un vincolo sullo spazio dei parametri (M_N , Λ , \mathcal{G}_R^W). Assumendo dei valori di riferimento, suggeriti dal modello, per la scala energetica di nuova fisica Λ , il vincolo tridimensionale si traduce in un limite superiore sulla costante efficace \mathcal{G}_R^W in funzione della massa del neutrino pesante M_N . I vincoli ottenuti per \mathcal{G}_R^W sono compatibili con quelli presenti in letteratura, mostrando l'elevato grado di complementarità di questo studio fenomenologico dello $0\nu\beta\beta$ per il modello considerato in confronto ad altri esperimenti ed analisi.

Indice

1	Introduzione	4
2	Neutrini massivi	7
2.1	Il Modello Standard	7
2.1.1	Meccanismo di Higgs	8
2.2	Neutrini di Dirac	11
2.2.1	Mixing	12
2.2.2	Numero leptonico	14
2.3	Neutrini di Majorana	15
2.3.1	Mixing	18
2.3.2	Numero leptonico	18
2.4	Mix Dirac-Majorana	19
2.4.1	Mixing fra stati attivi e sterili	21
3	Teorie di campo efficaci	23
3.1	Caratteristiche generali	23
3.1.1	Teorema di disaccoppiamento	23
3.1.2	Esempio: Teoria di Fermi	25
3.1.3	Limiti di una EFT	26
3.2	\mathcal{L}_{eff} per Nuova Fisica	26
3.2.1	SM come EFT	28
3.2.2	Generazione massa di Majorana	29
3.3	Meccanismo seesaw	30
3.3.1	Tipo I	30
3.3.2	Tipo II	31
3.3.3	Tipo III	31
4	Neutrinoless double beta decay	32
4.1	Oscillazione di sapore dei neutrini	32
4.2	Caratteristiche dello $0\nu\beta\beta$	33
4.2.1	Necessità di neutrini massivi di Majorana	35
4.2.2	Vincoli dalla non osservazione	37
4.3	Programma sperimentale	38
4.3.1	Isotopi e background	38
4.3.2	Stato dell'arte dei principali esperimenti	39

4.3.3	Esperimenti futuri	40
5	Modello BSM di tipo NJL	42
5.1	Operatori BSM a quattro fermioni	42
5.1.1	Condensato $\langle \bar{t}^a t_a \rangle$	43
5.1.2	Higgs composito	45
5.1.3	Rottura di simmetria esplicita	46
5.2	Rottura di simmetria PQ spontanea	47
5.2.1	Condensato $\langle \bar{\nu}_R^{fC} \nu_R^f \rangle$	47
5.3	Interazioni per il decadimento $0\nu\beta\beta$	48
5.3.1	Interazione di gauge $V+A$	49
5.3.2	Interazione di contatto quark-leptoni	50
6	Calcolo delle emivite	51
6.1	Interazioni di gauge	51
6.1.1	Calcoli preliminari	52
6.1.2	Elementi di matrice nucleare	56
6.1.3	Emivita $(T_{1/2}^{0\nu})_{GI}$	62
6.2	Interazioni di contatto	64
6.2.1	Calcoli preliminari	64
6.2.2	Elementi di matrice nucleare	67
6.2.3	Emivita $(T_{1/2}^{0\nu})_{CI}$	72
6.3	Interazioni mixed	75
6.3.1	Elementi di matrice nucleare	77
6.3.2	Emivita $(T_{1/2}^{0\nu})_{MIX}$	79
7	Conclusioni	81
A	NME: Trasformate di Fourier-Bessel	90
A.1	Dettagli calcolo NME: \mathcal{M}_F e \mathcal{M}_{GT}^{PP}	90
A.2	Dettagli calcolo NME: \mathcal{M}_T^{PP}	91

Capitolo 1

Introduzione

Il Modello Standard (SM, Standard Model) delle interazioni fondamentali è la teoria di gauge, sperimentalmente confermata [1–6], che ha portato ai risultati più precisi nella storia della Fisica. Tuttavia lo SM non riesce a spiegare da solo molti problemi proposti da evidenze sperimentali: l'esistenza della materia oscura, la relatività generale, l'asimmetria barionica, la gerarchia delle masse dei fermioni, ecc... Per trovare una descrizione di questi fenomeni è necessario considerare nuova fisica oltre lo SM (BSM, Beyond the Standard Model). Per questa ragione, ad oggi, esiste una moltitudine di modelli BSM in attesa di conferma, o smentita, dalla ricerca sperimentale, a titolo esemplificativo si possono citare le ricerche di interazioni di contatto a 4 fermioni ad LHC [7, 8] e di violazione del numero leptonico totale (LNV, Lepton Number Violation) [9–11].

Il processo fisico più interessante per ricercare segnali di LNV è il doppio decadimento beta senza neutrini ($0\nu\beta\beta$) [12], strettamente vietato dallo SM e che per il teorema di Schechter-Valle implicherebbe necessariamente la natura di Majorana per i neutrini che mediano la transizione [13]. Il programma sperimentale per l'osservazione di un decadimento $0\nu\beta\beta$ è in sviluppo fin dalla metà degli anni '60 [14, 15] e gli esperimenti futuri sono molto promettenti [16–19]. Proprio perché ad oggi non è stato mai osservato un decadimento $0\nu\beta\beta$, da questi esperimenti si ricavano dei limiti inferiori per l'emivita, o tempo di dimezzamento, dell'isotopo. Questi limiti sono comunque, in linea generale, molto importanti perché possono essere utilizzati per vincolare altri parametri di modelli BSM ad oggi non noti, ad esempio la massa efficace di Majorana (per neutrini *left* dello SM) o la scala energetica di nuova fisica [20, 21].

Gli esperimenti predisposti per osservare effetti di fisica BSM studiano processi fisici ad una scala energetica molto inferiore rispetto a quella attesa di nuova fisica, in cerca di deviazione dalle predizioni dello SM. Questa è proprio l'idea dietro alle teorie di campo efficaci (EFT, Effective Field Theory) [22–24]. Gli effetti BSM di una teoria UV sconosciuta sono parametrizzati in operatori a dimensione $d > 4$, quindi non rinormalizzabili, che descrivono processi in una regione a bassa energia, nella quale la teoria UV completa non può manifestarsi. Un'interessante possibilità è che lo SM possa essere una teoria efficace, limite a bassa energia di una teoria BSM che spieghi almeno qualche mistero della fisica odier-

na. Purtroppo, come ci si potrebbe aspettare, le EFT soffrono di diversi limiti: valgono, in generale, in un intervallo energetico non molto ampio e il numero di operatori a dimensione > 4 che possono essere inseriti nella lagrangiana efficace sono tipicamente molti, in numero crescente con la dimensione. Per esempio se si considera lo SM come una EFT esiste un solo operatore a dimensione 5, ma ne esistono 80 già solo per $d = 6$ [25].

L'EFT considerata in questo lavoro di tesi è un modello BSM del tipo di Nambu e Jona-Lasinio [26, 27] (NJL in breve) [28]. Ciò significa che nella lagrangiana efficace si hanno operatori a 4 fermioni ($d = 6$), responsabili, attraverso la dinamica della rottura spontanea di simmetria (RSS), della generazione della massa del quark top [29] e del neutrino sterile di Majorana più pesante. Una caratteristica di questo modello è che il bosone di Higgs è una particella composta, uno stato legato $\bar{t}t$. Ciononostante nella regione di bassa energia dello SM, è fenomenologicamente equivalente al modello in cui l'Higgs è elementare e la generazione delle masse dei fermioni avviene tramite meccanismo di Higgs [3]. Alcune interazioni di questo modello BSM di tipo NJL permettono il decadimento $0\nu\beta\beta$.

Il risultato originale di questo lavoro di tesi è calcolare i contributi di queste interazioni efficaci al tempo di dimezzamento di un isotopo attraverso una transizione nucleare $0\nu\beta\beta$, nell'ipotesi in cui i neutrini di Majorana in gioco siano pesanti rispetto al momento medio trasferito nel processo. Una volta ottenuta la formula generale per l'emivita si utilizzeranno i limiti inferiori sperimentali più recenti per vincolare lo spazio dei parametri di nuova fisica (M_N , Λ , \mathcal{G}_R^W) del modello NJL; dove M_N è la massa del neutrino pesante di Majorana, Λ la scala energetica di nuova fisica e \mathcal{G}_R^W la costante d'accoppiamento efficace tra l'elettrone *right* dello SM, il neutrino pesante di Majorana e il bosone di gauge W .

La tesi sarà strutturata nel seguente modo:

- nel *Capitolo 2* sarà presentata la teoria dei neutrini massivi, nel caso siano particelle di Dirac, Majorana o un mix dei due, considerando le diverse famiglie di sapore e il possibile mixing fra di esse. Sarà posta particolare attenzione sui neutrini di Majorana, che è la situazione più interessante per la fisica BSM e nello specifico l'unico scenario in cui è accettabile il decadimento doppio beta senza neutrini;
- nel *Capitolo 3* sarà illustrata la teoria delle EFT, dalle caratteristiche generali ai limiti. Si spiegherà come possano essere utilizzate le lagrangiane efficaci per sondare fenomeni BSM, come ad esempio la generazione di massa di Majorana per i neutrini, strettamente legata al ben noto meccanismo see-saw;
- nel *Capitolo 4* si presenterà il fenomeno fisico di riferimento per la tesi, lo $0\nu\beta\beta$. Si spiegherà perché non sono sufficienti le oscillazioni di sapore dei neutrini, già osservate sperimentalmente, per determinarne la loro natura, mentre lo $0\nu\beta\beta$ potrebbe riuscirci. Allo scopo del lavoro di tesi si porrà attenzione all'importanza della non osservazione di questo evento raro e si

illustrerà il programma di ricerca presente e futuro, specificando i limiti inferiori sull'emivita;

- il *Capitolo 5* contiene le basi del modello BSM di tipo NJL considerato per il calcolo dell'emivita. Si è puntualizzato da dove derivino gli operatori efficaci a 4 fermioni e come questi comportino i condensati del top e del terzo neutrino sterile di Majorana. Infine sono state esplicitate le interazioni efficaci del modello che contribuiscono al decadimento $0\nu\beta\beta$;
- dal *Capitolo 6* cominciano i contributi originali del presente lavoro di tesi. Sono presentati nel dettaglio i calcoli dell'emivita per i tre tipi di contributi allo $0\nu\beta\beta$ che si hanno con questo modello: di gauge (V+A), di contatto (quark-leptoni) e mix fra i due;
- nelle *Conclusioni*, poi, si traducono le formule ottenute in un vincolo per lo spazio dei parametri $(M_N, \Lambda, \mathcal{G}_R^W)$, con il relativo grafico 3D per gli isotopi ^{76}Ge e ^{136}Xe . Infine si fissano dei valori di Λ interessanti per il modello NJL considerato, cosicché il limite 3D ottenuto si riduca al vincolo della costante efficace \mathcal{G}_R^W in funzione della massa del neutrino pesante di Majorana M_N .

Capitolo 2

Neutrini massivi

Il fatto che i neutrini abbiano una massa [30], di svariati ordini di grandezza inferiore a quelle degli altri fermioni dello SM, è un forte vincolo che i modelli di nuova fisica devono soddisfare. Anche il processo sperimentale di riferimento per questa tesi, lo $0\nu\beta\beta$, ha luogo esclusivamente se i neutrini sono particelle di Majorana massive [13]. Per questo si ritiene importante illustrare la teoria generale dei neutrini massivi prima di addentrarsi nel lavoro di tesi vero e proprio.

2.1 Il Modello Standard

In questa prima sezione si presenta brevemente lo SM, con il suo meccanismo di generazione delle masse, nella sua prima formulazione, nella quale i neutrini erano considerati senza massa.

Lo SM delle interazioni fondamentali [1] è una teoria di gauge locale che riunisce la cromodinamica quantistica (QCD) con la teoria elettrodebole (EW). La teoria risulta invariante per le trasformazioni del gruppo di simmetria $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

- $SU(3)_C$, il gruppo di gauge della QCD, è collegato all'interazione forte di colore ed è confinato e preservato;
- $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, il gruppo della teoria EW, è collegato all'isospin e all'iper carica deboli ed è rotto spontaneamente dal potenziale di Higgs.

Le particelle considerate elementari dal modello sono:

- **fermioni a spin 1/2**: quark (3 up-type e 3 down-type) e leptoni (3 carichi e 3 neutri), che costituiscono la materia ordinaria, suddivisi in 3 famiglie (o sapori) che condividono proprietà dinamiche simili e differiscono solo per la massa;
- **bosoni di gauge a spin 1**: γ , g , $W^{+, -}$ e Z mediatori, rispettivamente, delle interazioni elettromagnetica, forte e debole;
- **almeno un bosone a spin 0**: H, scalare di Higgs, residuo del meccanismo di Higgs.

L'input che diede origine al Modello Standard fu il tentativo di descrivere l'interazione debole attraverso una teoria di gauge *rinormalizzabile*. La prima formulazione del modello di Glashow, Weinberg e Salam [31–33], che non comprendeva la QCD, fu costruita a partire da osservazioni fenomenologiche, tra le quali vi è l'esperimento di Madame Wu [2], in cui venne dimostrata la violazione massimale di parità nelle interazioni di corrente debole carica. La conseguenza è che i fermioni che partecipano all'interazione debole di corrente-carica (CC) sono solo i fermioni autostati della matrice di Dirac γ_5 , con autovalore negativo, ovvero quelli a chiralità negativa (*left*). Affinché la teoria fosse rinormalizzabile e in accordo con queste evidenze sperimentali, i fermioni e i bosoni di gauge vennero presi a massa nulla così da avere chiralità definita, e organizzati secondo doppietti e singoletti di $SU(2)_L$ (isospin debole):

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} I_{W_3} = 1/2 \\ I_{W_3} = -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$

$$\nu_{eR}, e_R \leftarrow I_{W_3} = 0 \rightarrow u_R, d_R$$

per la prima famiglia di sapore. Analogamente per le antiparticelle, tenendo conto che i numeri quantici vanno presi di segno opposto. Per riconciliare questa teoria alla realtà fu teorizzato un nuovo campo bosonico, doppietto di isospin debole, che fornisce massa sia ai bosoni di gauge che ai fermioni grazie al meccanismo di Higgs [3] (rottura spontanea di simmetria EW + gauge), il quale non rovina la rinormalizzabilità della teoria:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

in cui $\phi^+(x)$ e $\phi^0(x)$ sono, rispettivamente, un campo scalare complesso carico ($Q = +1$) e uno neutro ($Q = 0$).

2.1.1 Meccanismo di Higgs

Si descrive ora il rinomato meccanismo di Higgs che genera le masse dei bosoni e dei fermioni dello SM, almeno per quelli che si sa dagli esperimenti essere massivi. Per la massa dei bosoni di gauge viene introdotto un termine di Lagrangiana relativo all'Higgs:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu^{(2)}\Phi)^\dagger (D^{(2)\mu}\Phi) - m^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad (2.2)$$

dove $D_\mu^{(2)} = 1_{2 \times 2}(\partial_\mu + ig_1 a_\mu) + \frac{ig_2}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\mu$, con $\vec{b} \otimes a_\mu$ campi di gauge puri del gruppo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, $\lambda > 0$ affinché il potenziale sia limitato inferiormente ed il coefficiente $m^2 < 0$ in modo da innescare la *rottura spontanea della simmetria* (RSS)

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{e.m.} \quad . \quad (2.3)$$

Il minimo del potenziale di Higgs si ottiene per $\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2}$ e, come noto in teoria quantistica dei campi (QFT), questo minimo corrisponde al vuoto. Per essere in accordo con la fenomenologia, il vuoto è elettricamente neutro, il valore di aspettazione del vuoto (VEV) dei campi di Higgs dev'essere dovuto a ϕ^0 :

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

dove $v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$.

Sapendo che il doppietto di Higgs trasforma sotto $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ in questo modo

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-\frac{i\vec{\sigma} \cdot \vec{\rho}(x)}{2} - \frac{i\eta(x)}{2}} \Phi, \quad (2.5)$$

è conveniente scrivere il doppietto di Higgs come

$$\Phi(x) = e^{\frac{i\vec{\sigma} \cdot \vec{\rho}(x)}{2} \frac{v}{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

dove $\vec{\rho}(x) = (\rho_1(x), \rho_2(x), \rho_3(x))$ e $H(x)$ sono quattro campi scalari reali ($H(x)$ è il bosone di Higgs fisico, nato dall'eccitazione dell'Higgs neutro sopra il vuoto). I campi $\vec{\rho}(x)$ non fisici saranno riassorbiti da una rotazione in $SU(2)_L$.

Questa trasformazione definisce la *gauge fisica o unitaria*, chiamata così perché gli stati fisici compaiono esplicitamente e il campo di Higgs sarà semplicemente

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

La Lagrangiana di Higgs in questa gauge diventerà:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} = & \frac{1}{2} ((\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - 2|m^2|H^2) \\ & + \left(\frac{g_2 v}{2\sqrt{2}} \right)^2 (|W_\mu^+|^2 + |W_\mu^-|^2) \\ & + \left(\frac{v\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{2\sqrt{2}} \right)^2 Z_\mu Z^\mu + \dots, \end{aligned} \quad (2.8)$$

che ci dà i valori delle masse dei bosoni di gauge $M_\gamma = 0$, $M_{W^{+/-}} = \frac{g_2 v}{2}$ e $M_Z = \frac{v\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{2} = \frac{vg_2}{2\cos\theta_W}$ e del bosone di Higgs $M_H = \sqrt{2|m^2|}$. Quest'ultima massa non è specificata dalla teoria ed è stata ricavata sperimentalmente [4, 5]. Come ci si aspettava dalle osservazioni sperimentali, il fotone ed il gluone rimangono senza massa, come ci si aspetta dalle osservazioni sperimentali.

Per generare le masse dei fermioni, invece, va introdotto un altro termine alla Lagrangiana EW (termine di Yukawa), invariante per trasformazioni di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, che descriva l'accoppiamento tra i campi fermionici e il doppietto di Higgs:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\frac{\sqrt{2}}{v} \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=e,\mu,\tau} M_{k\ell}^{lep} (\bar{L}'_{kL} \Phi) \ell'_R \quad (2.9)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{v} \sum_{k=1}^3 \sum_{D=d,s,b} M_{kD}^{down} (\bar{Q}'_{kL} \Phi) D'_R \quad (2.10)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{v} \sum_{k=1}^3 \sum_{U=u,c,t} M_{kU}^{up} (\bar{Q}'_{kL} \tilde{\Phi}) U'_R + c.h. \quad (2.11)$$

con $\tilde{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} (\phi^0(x))^* \\ -(\phi^+(x))^* \end{pmatrix} \xrightarrow{RSS} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ coniugato in carica di $\Phi(x)$. Per il primo termine

$$\mathcal{L}_Y^{lep} \xrightarrow{RSS} -\sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell}'_{kL} M_{k\ell}^{lep} \ell'_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) + c.h. \quad (2.12)$$

in forma matriciale e trascurando $\mathcal{O}(\frac{H}{v})$:

$$\mathcal{L}_{Y(RSS)}^{lep} = -\bar{\Lambda}'_L M^{lep} \Lambda'_R + c.h. \quad \Lambda'_{L,R} = \begin{pmatrix} e'_{L,R} \\ \mu'_{L,R} \\ \tau'_{L,R} \end{pmatrix} = U_{L,R} \Lambda_{L,R} \quad (2.13)$$

Passando dagli autostati di sapore a quelli della massa e facendo una diagonalizzazione biunitaria $U_L^\dagger M^{lep} U_R = m^{lep} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$:

$$\mathcal{L}_{Y(RSS)}^{lep} = -\bar{\Lambda} m^{lep} \Lambda \quad \Lambda = \Lambda_L + \Lambda_R. \quad (2.14)$$

Analogamente per i quark down-type

$$\mathcal{L}_{Y(RSS)}^{down} = -\bar{\mathcal{D}}'_L M^{down} \mathcal{D}'_R + c.h. \quad (2.15)$$

$$\mathcal{D}'_{L,R} = V_{L,R}^{down\dagger} \mathcal{D}_{L,R} = \begin{pmatrix} d'_{L,R} \\ s'_{L,R} \\ b'_{L,R} \end{pmatrix} \quad V_L^{down\dagger} M^{down} V_R^{down} = m^{down} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}_{Y(RSS)}^{down} = -\bar{\mathcal{D}} m^{down} \mathcal{D} \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_L + \mathcal{D}_R \quad (2.17)$$

e per i quark up-type

$$\mathcal{L}_{Y(RSS)}^{up} = -\bar{\mathcal{U}}'_L M^{up} \mathcal{U}'_R + c.h. \quad (2.18)$$

$$\mathcal{U}'_{L,R} = V_{L,R}^{up} \mathcal{U}_{L,R} = \begin{pmatrix} u'_{L,R} \\ c'_{L,R} \\ t'_{L,R} \end{pmatrix} \quad V_L^{up\dagger} M^{up} V_R^{up} = m^{up} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}_{Y(RSS)}^{up} = -\bar{\mathcal{U}}m^{up}\mathcal{U} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_L + \mathcal{U}_R \quad . \quad (2.20)$$

Nella prima formulazione dello SM il neutrino era considerato a massa nulla. Da (2.13), (2.15) e (2.18) il termine di massa deve contenere sia il campo *left* che quello *right*. Per questo motivo si ipotizzava che il neutrino *right* non esistesse, dato che è un singoletto del gruppo di simmetria $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ e non avrebbe altro modo per interagire con le altre particelle dello SM, per questo i neutrini *right* vengono anche detti *sterili*. Ciononostante oggi si sa, da osservazione di oscillazione di sapore [30, 34], che i neutrini hanno una massa, seppur piccolissima. Rimangono però molte domande aperte: quale sia l'origine delle masse dei neutrini; quale sia il loro valore; perché sono di 6 ordini di grandezza minori di quelle degli altri fermioni; se la gerarchia delle 3 masse sia normale ($m_1 < m_2 < m_3$) o invertita ($m_3 < m_1 < m_2$); se siano particelle di Dirac o di Majorana (la cui distinzione sarà spiegata nel resto di questo capitolo). La teoria dei neutrini massivi [35] è ampiamente sviluppata in letteratura. Esistono svariati modi con cui i leptoni neutri possono acquisire una massa in una teoria di gauge e, a sua volta, il termine di lagrangiana che la descrive può avere forme diverse. Nel resto del Capitolo si mostreranno le tre possibilità: neutrini di Dirac, che hanno un termine di massa come quello che deriva dal meccanismo di Higgs; neutrini di Majorana, con un termine di massa simile a quello di Dirac nella forma ma profondamente diverso, concettualmente, da quello visto in questa sezione; un mix Dirac-Majorana, che si ha quando i neutrini acquisiscono sia un termine di massa di Dirac che di Majorana tramite meccanismi diversi.

2.2 Neutrini di Dirac

Considerare i neutrini come particelle di Dirac, che acquistano un termine di massa come quello che si genera col meccanismo di Higgs, è l'estensione più lineare dello SM per spiegare la massa dei neutrini. A tal fine è necessario introdurre componenti *right* dei campi di neutrini. Dato che sono singoletti del campo di gauge dello SM non esistono vincoli al numero di neutrini *right* che si possono aggiungere, se ne introdurranno tre ($\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$) per eliminare l'asimmetria che c'è nello SM coi leptoni carichi e i quark, tale modello è solitamente chiamato *Modello Standard minimamente esteso*.

In questo modello si aggiunge alla lagrangiana di Yukawa, di accoppiamento Higgs-leptoni (2.9), un termine per i neutrini:

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^\nu = - \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} Y_{\alpha\beta}^\nu (\bar{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi}) \nu'_{\beta R} + c.h. \quad , \quad (2.21)$$

che in forma matriciale, nella *gauge fisica* e dopo la RSS elettrodebole dà:

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^\nu = - \left(\frac{v + H}{\sqrt{2}} \right) \bar{\nu}'_L Y^\nu \nu'_R + c.h. \quad \nu'_{L,R} = \begin{pmatrix} \nu'_{eL,eR} \\ \nu'_{\mu L,\mu R} \\ \nu'_{\tau L,\tau R} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.22)$$

Si passa agli autostati di massa, con una diagonalizzazione biunitaria simile a (2.19)

$$V_L^{\nu\dagger} Y^{\nu} V_R^{\nu} = Y^{\nu} \quad \text{con } Y_{ij}^{\nu} = y_i^{\nu} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

con y_k^{ν} numeri reali e positivi, cosicch :

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{\nu} = -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right) \bar{\nu}'_L (V_L^{\nu} Y^{\nu} V_R^{\nu\dagger}) \nu'_R + c.h. \quad , \quad (2.24)$$

definendo poi i vettori dei neutrini massivi chirali

$$\mathbf{n}_{L,R} = V_{L,R}^{\nu\dagger} \nu'_{L,R} = \begin{pmatrix} \nu_{1L,1R} \\ \nu_{2L,2R} \\ \nu_{3L,3R} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

si ottiene:

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{\nu} = -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right) \bar{\mathbf{n}}_L Y^{\nu} \mathbf{n}_R + c.h. \quad (2.26)$$

$$= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right) \sum_{i=1}^3 y_i^{\nu} \bar{\nu}_{iL} \nu_{iR} + c.h. \quad (2.27)$$

$$= -\sum_{i=1}^3 \frac{v y_i^{\nu}}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_i \nu_i - \sum_{i=1}^3 \frac{y_i^{\nu}}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_i \nu_i H \quad , \quad (2.28)$$

dove nell'ultima uguaglianza si   introdotto il campo di Dirac per i neutrini $\nu_i = \nu_{iL} + \nu_{iR}$ ($i = 1, 2, 3$). Il primo termine d  la massa dei neutrini generata dal meccanismo di Higgs:

$$m_i^{\nu} = \frac{v y_i^{\nu}}{\sqrt{2}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \quad (2.29)$$

che accomunerebbe il neutrino agli altri fermioni elementari (tutte particelle di Dirac), mentre il secondo termine descrive l'accoppiamento tra i neutrini massivi di Dirac al campo di Higgs. Le masse ottenute (2.29) sono proporzionali al VEV dell'Higgs, come succede per i quark e i leptoni carichi, ma dagli esperimenti [36]   noto solo un limite superiore per le singole masse dei neutrini ($< 2, 2eV$), estremamente pi  piccolo delle masse degli altri fermioni elementari.

2.2.1 Mixing

Come succede per i quark down-type, anche per i neutrini massivi di Dirac si ha la comparsa di una matrice di mescolamento (mixing). La CC debole del settore leptonico nella base dei sapori si scrive:

$$J_{CC-\ell}^{\mu} = 2\bar{\nu}'_L \gamma^{\mu} \ell'_L = 2\bar{\mathbf{n}}_L V_L^{\nu\dagger} \gamma^{\mu} V_L^{\ell} \ell_L = 2\bar{\mathbf{n}}_L V_L^{\nu\dagger} V_L^{\ell} \gamma^{\mu} \ell_L \quad (2.30)$$

definendo la matrice di mixing per i neutrini di Dirac

$$U_{(PMNS)}^D = V_L^{\ell\dagger} V_L^{\nu} \quad (2.31)$$

si ha

$$J_{CC-\ell}^\mu = 2\bar{\mathbf{n}}_L U^{D\dagger} \gamma^\mu \ell_L \quad . \quad (2.32)$$

Si definiscono i campi di sapore dei neutrini *left* in questo modo

$$\nu_L = U^D \mathbf{n}_L = U^D V_L^{\nu\dagger} \nu'_L = V_L^{\ell\dagger} \nu'_L \quad \text{con } \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

cosicché si scriva la CC debole del settore come nello SM

$$J_{CC-\ell}^\mu = 2\bar{\nu}_L \gamma^\mu \ell_L = 2 \sum_{e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \ell_{\alpha L} \quad . \quad (2.34)$$

La matrice di mixing U^D , analogamente a quella CKM dei quark, dipende da 4 parametri fisici:

$$U^D = U^D(\theta_{23}, \theta_{13}, \theta_{12}, \delta_{13}) \quad , \quad (2.35)$$

una parametrizzazione possibile è

$$U^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

con $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, i valori degli angoli spaziano nell'intervallo $0 \leq \theta_{ij} \leq \frac{\pi}{2}$ e la fase che viola la CP $0 \leq \delta_{13} \leq 2\pi$.

La differenza principale con la matrice di mixing dei quark è essenzialmente che [6] i valori assoluti della matrice CKM sono, entro un certo grado di approssimazione, quelli della matrice identità:

$$V^{CKM} = \begin{pmatrix} 0,974 & 0,225 & 0,004 \\ 0,230 & 1,006 & 0,041 \\ 0,008 & 0,043 & 0,89 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.37)$$

suggerendo che gli adroni decadono, con maggiore probabilità, semileptonicamente nella famiglia di sapore più vicina alla propria. Mentre i valori assoluti della matrice PMNS sono:

$$U^{PMNS} = \begin{pmatrix} 0,82 & 0,55 & 0,16 \\ 0,44 & 0,65 & 0,62 \\ 0,36 & 0,52 & 0,77 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.38)$$

Gli elementi di questa matrice non somigliano a quelli dell'identità e non sono diagonali, cioè le oscillazioni di sapore dei neutrini possono avvenire in pratica da una qualsiasi famiglia ad un'altra. Questa differenza è ancora oggi senza una spiegazione valida.

2.2.2 Numero leptonico

Aggiungendo il termine di Yukawa per i neutrini (2.26) si è implicitamente andati a rovinare la conservazione del numero leptonico di sapore. Infatti scrivendolo insieme al termine di Yukawa per i leptoni carichi in questo modo:

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{lep} = -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right) \left[\bar{\ell}_L Y^\ell \ell_R + \bar{\nu}_L U^{PMNS} Y^\nu \mathbf{n}_R \right] + c.h. \quad (2.39)$$

non è più possibile trovare una trasformazione globale $U(1)$, per ogni sapore, che lasci invariata la lagrangiana totale. Sebbene la CC debole (2.34) sotto

$$\ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_{\alpha L} \quad \nu_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \nu_{\alpha L} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad , \quad (2.40)$$

con una fase diversa per ogni sapore, e la parte dei leptoni carichi in (2.39) con

$$\ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_{\alpha R} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.41)$$

rimangano invariate, non è possibile scrivere una trasformazione del genere per le componenti *right* dei neutrini che lasci invariati sia il termine cinetico che quello di Yukawa per i neutrini. Ne consegue che il numero leptonico di sapore è violato per neutrini massivi di Dirac. Ciononostante, la lagrangiana totale rimane invariata se si definisce una trasformazione globale $U(1)$

$$\ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha L} \quad \ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha R} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.42)$$

$$\nu_{iL} \rightarrow e^{i\phi} \nu_{iL} \quad \nu_{iR} \rightarrow e^{i\phi} \nu_{iR} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.43)$$

con la stessa fase per i campi dei leptoni carichi e per quelli dei neutrini chirali indipendenti. Questo implica, per il teorema di Noether, una corrente conservata, che a sua volta significa una carica conservata

$$L = \int d^3x \left[\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \ell_\alpha^\dagger(x) \ell_\alpha(x) + \sum_{i=1}^3 \nu_i^\dagger(x) \nu_i(x) \right] \quad . \quad (2.44)$$

Quantizzando i campi dei neutrini e dei leptoni carichi à la Dirac, questa carica conservata si traduce nel numero leptonico *totale*:

$$: L := \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a_{\ell_\alpha}^{(h)\dagger}(p) a_{\ell_\alpha}^{(h)}(p) - b_{\ell_\alpha}^{(h)\dagger}(p) b_{\ell_\alpha}^{(h)}(p) \right] \quad (2.45)$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a_{\nu_i}^{(h)\dagger}(p) a_{\nu_i}^{(h)}(p) - b_{\nu_i}^{(h)\dagger}(p) b_{\nu_i}^{(h)}(p) \right] \quad (2.46)$$

che assegna il valore $L = +1$ ai neutrini (definiti dall'operatore $a_{\nu_i}^h(p)$) e ai leptoni carichi negativamente ed $L = -1$ agli antineutrini (definiti dall'operatore $b_{\nu_i}^h(p)$) e ai leptoni carichi positivamente. L'importante conseguenza di questa conservazione è, oltre alle implicazioni fenomenologiche, la distinzione tra neutrini ed antineutrini nel caso che siano particelle massive di Dirac, che non potrebbe avvenire in altro modo dato che sono particelle neutre. Per le particelle di Majorana, come si vedrà a breve, questa distinzione non sussiste ed è la chiave per distinguere la natura dei neutrini.

2.3 Neutrini di Majorana

Secondo la teoria di Majorana esiste un altro modo, più semplice ed economico della prescrizione di Dirac, per descrivere un quadrispinore di un fermione massivo. Se è vero che sono sufficienti le equazioni di Weyl per trattare un fermione a massa nulla, non è vero che è necessario uno spinore a quattro componenti indipendenti per descrivere un fermione massivo. Il segreto, come suggerito da Majorana nella sua omonima teoria, sta nel prendere i due spinori del quadrispinore *non* indipendenti fra loro. Partendo da uno spinore a quattro componenti

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

nulla vieta di mettere in relazione i due spinori nel seguente modo

$$\psi_R = \xi C \bar{\psi}_L^T \quad |\xi|^2 = 1 \quad , \quad (2.48)$$

che, con un rifasamento $\psi_L \rightarrow \xi^{1/2} \psi_L$, porta all'equazione di Majorana

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m C \bar{\psi}_L^T \quad . \quad (2.49)$$

Il campo di Majorana "totale"

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + C \bar{\psi}_L^T \quad (2.50)$$

soddisfa alla relazione

$$\psi = C \bar{\psi}^T \quad (2.51)$$

che è uguale alla definizione dello spinore coniugato in carica, a meno di una fase,

$$\psi_L^C = \eta C \bar{\psi}_L^T \quad |\eta|^2 = 1 \quad (2.52)$$

ma, visto che le interazioni deboli CC violano massimamente la trasformazione in C e che i neutrini interagiscono solo per forza debole, la fase η non ha significato fisico e si può porre uguale ad 1 arbitrariamente. In questo modo il campo di Majorana si traduce in

$$\psi = \psi_L + \psi_L^C \quad (2.53)$$

e la relazione di Majorana (2.51) diventa quella ben nota

$$\psi = \psi^C \quad . \quad (2.54)$$

Per rispettare quest'ultima condizione, solo i fermioni neutri possono essere particelle di Majorana e, tra quelli conosciuti al momento, solo il neutrino è completamente neutro.

Come si può evincere mettendo a confronto le equazioni di Weyl con quelle di Majorana, i neutrini di Dirac e di Majorana hanno diverse conseguenze fenomenologiche solo nel caso in cui siano particelle massive. Dalle relazioni (2.48) e (2.52) si nota che per un neutrino di Majorana è possibile utilizzare ν_L^C (che è *right* come ν_R , ma trasforma come ν_L) al posto di ν_R nella lagrangiana di Dirac,

in particolare si può definire il termine di massa di Majorana per tre famiglie di sapore:

$$\mathcal{L}_{mass}^M = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \bar{\nu}'_{\alpha L} C M_{\alpha\beta}^{Maj} \nu'_{\beta L} + c.h. \quad (2.55)$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ si introduce per evitare il doppio conteggio dovuto al fatto che ν'^C_L e $\bar{\nu}'_L$ non sono indipendenti (2.52). Introducendo, come già fatto nel presente capitolo, il vettore colonna di sapore dei campi di neutrini *left*

$$\nu'_L \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

si può riscrivere in maniera compatta il termine di massa di Majorana

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu'^T_{\alpha L} C^\dagger M_{\alpha\beta}^{Maj} \nu'_{\beta L} + c.h. = \frac{1}{2} \nu'^T_L C^\dagger M^{Maj} \nu'_L + c.h. \quad (2.57)$$

Per arrivare agli autostati di massa di Majorana, si deve passare necessariamente alla diagonalizzazione della matrice 3×3 complessa M^{Maj} . Si potrebbe pensare di usare la diagonalizzazione biunitaria, come è solito farsi in questi casi, ma M^{Maj} ha una proprietà in più da poter sfruttare. Riprendendo la prima uguaglianza di (2.57) ed esplicitando le componenti matriciali degli spinori e di C^\dagger :

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu'^T_{\alpha L} C^\dagger M_{\alpha\beta}^{Maj} \nu'_{\beta L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \sum_{i, j} (\nu'^T_{\alpha L})_i (C^\dagger)_{ij} M_{\alpha\beta}^{Maj} (\nu'_{\beta L})_j \quad (2.58)$$

si scambiano le componenti fermioniche, che anticommutano, e si prende la trasposta della matrice C^\dagger

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \sum_{i, j} (\nu'_{\beta L})_j ((C^\dagger)^T)_{ji} M_{\alpha\beta}^{Maj} (\nu'^T_{\alpha L})_i \quad (2.59)$$

sapendo che $C^T = -C$ e riordinando i prodotti matriciali si ha

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \sum_{i, j} (\nu'^T_{\beta L})_j (C^\dagger)_{ji} M_{\alpha\beta}^{Maj} (\nu'_{\alpha L})_i \quad (2.60)$$

contraendo, infine, gli indici matriciali e scambiando quelli di sapore $\alpha \leftrightarrow \beta$ si ottiene

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta\alpha=e, \mu, \tau} \nu'^T_{\alpha L} C^\dagger (M_{\alpha\beta}^{Maj})^T \nu'_{\beta L} \quad , \quad (2.61)$$

perciò la matrice M^{Maj} è simmetrica

$$M_{\alpha\beta}^{Maj} = (M_{\alpha\beta}^{Maj})^T \quad . \quad (2.62)$$

È sempre possibile fare una diagonalizzazione biunitaria

$$M^{(Maj)} = W m^{(Maj)} V^\dagger \quad \text{con} \quad m^{(Maj)}_{ij} = m_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.63)$$

dove m_i sono masse reali e positive (per semplicità di notazione omettiamo l'apice *Maj* fino alla fine della trattazione). Si scrive ora il prodotto

$$MM^\dagger = WmV^\dagger VmW^\dagger = Wm^2W^\dagger \quad (2.64)$$

e si scrive la stessa cosa per la matrice $M^T = V^{\dagger T}mW^T$

$$M^T M^{T\dagger} = V^{\dagger T}mW^T W^{T\dagger}mV^T = V^{\dagger T}m^2V^T \quad (2.65)$$

sfruttando la simmetria della matrice $M^{(Maj)}$ questi due prodotti sono uguali

$$Wm^2W^\dagger = V^{\dagger T}m^2V^T \quad (2.66)$$

Moltiplicando quest'ultima uguaglianza da destra per W e da sinistra per V^T si ha

$$V^T W m^2 = m^2 V^T W \implies [V^T W, m^2] = 0 \quad (2.67)$$

definendo, poi, la matrice $S = V^T W$ che è unitaria perché prodotto di due matrici unitarie e diagonale per la relazione di commutazione con m^2 :

$$[S, m^2] = 0 \implies (S m^2 - m^2 S)_{ij} = 0 \quad (2.68)$$

$$S_{ik} m_k^2 \delta_{kj} - m_i^2 \delta_{il} S_{lj} = 0 \quad (2.69)$$

$$S_{ij} (m_j^2 - m_i^2) = 0 \quad (2.70)$$

se $m_j \neq m_i$ per $i \neq j$ allora S è diagonale. Una matrice diagonale e unitaria è necessariamente

$$S_{ij}(\alpha) = e^{i\alpha_i} \delta_{ij} \quad (2.71)$$

che si può utilizzare per modificare la diagonalizzazione biunitaria di partenza

$$M = WmV^\dagger = V^{\dagger T} V^T W m V^\dagger = V^{\dagger T} S(\alpha) m V^\dagger \quad (2.72)$$

$$= V^{\dagger T} S\left(\frac{\alpha}{2}\right) m S\left(\frac{\alpha}{2}\right) V^\dagger \equiv (U_L^{\nu\dagger})^T m U_L^{\nu\dagger} \quad (2.73)$$

Tornando alla relazione (2.57), si diagonalizza con le matrici unitarie appena trovate

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu_{\alpha L}^T C^\dagger ((U_L^{\nu\dagger})^T m^{Maj} U_L^{\nu\dagger})_{\alpha\beta} \nu'_{\beta L} + c.h. \quad (2.74)$$

si definisce il vettore colonna degli autostati di massa dei neutrini *left* di Majorana

$$\mathbf{n}_L \equiv U_L^{\nu\dagger} \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

così da riscrivere il termine di massa di Majorana in forma diagonale, nelle due scritture equivalenti:

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2} \mathbf{n}_L^T C^\dagger m^{Maj} \mathbf{n}_L + c.h. = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \nu_{iL}^T C^\dagger \nu_{iL} + c.h. \quad (2.76)$$

$$\mathcal{L}_{mass}^M = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}}_L^C m^{Maj} \mathbf{n}_L + c.h. = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_{iL}^C \nu_{iL} + c.h. \quad (2.77)$$

Infine si definiscono i campi di Majorana $\nu_i = \nu_{iL} + \nu_{iL}^C$ che soddisfano alla condizione di Majorana $\nu_i^C = \nu_i$ per riscrivere il termine di massa di Majorana a tre famiglie di sapore:

$$\mathcal{L}_{mass}^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} m^{Maj} \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \equiv \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

che si differenzia da quello di Dirac unicamente per il fattore $\frac{1}{2}$, che tiene conto del fatto che le particelle di Majorana hanno la metà dei gradi di libertà (g.d.l. in breve) di quelle di Dirac.

2.3.1 Mixing

Esattamente come nel caso di neutrini di Dirac (2.32), la CC debole leptonica si può scrivere

$$J_{CC-\ell}^\mu = 2\bar{\mathbf{n}}_L U^{M\dagger} \gamma^\mu \ell_L \quad , \quad (2.79)$$

introducendo, poi, i soliti campi di sapore di neutrini *left*

$$\nu_L = U^M \mathbf{n}_L = U^M V^{\nu\dagger} \nu'_L = V_L^{\ell\dagger} \nu'_L \quad \text{con} \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad , \quad (2.80)$$

si ha

$$J_{CC-\ell}^\mu = 2\bar{\nu}_L \gamma^\mu \ell_L = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \ell_{\alpha L} \quad . \quad (2.81)$$

A differenza del caso di neutrini di Dirac e dei quark, i neutrini massivi *left* di Majorana non possono riassorbire 2 fasi non fisiche della matrice di mixing di partenza, perciò i parametri saranno 3 angoli di mixing e 3 fasi fisiche, che violano CP

$$U^M = U^M(\theta_{23}, \theta_{13}, \theta_{12}, \delta_{13}, \alpha_2, \alpha_3) \quad (2.82)$$

che può essere scomposta nel prodotto di due matrici, una formalmente uguale a quella di Dirac (2.36) e una unitaria diagonale D^M :

$$U^M = U^D(\theta_{23}, \theta_{13}, \theta_{12}, \delta_{13}) D^M(\alpha_2, \alpha_3) \quad (2.83)$$

con

$$D^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix} \quad 0 \leq \alpha_{2,3} \leq 2\pi \quad . \quad (2.84)$$

2.3.2 Numero leptonico

La condizione di Majorana (2.54) impone un vincolo nei coefficienti dell'espansione di Fourier dei campi spinoriali $b^{(h)}(p) = a^{(h)}(p)$:

$$\nu^M(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-ip \cdot x} + a^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad . \quad (2.85)$$

Quest'unica nuova condizione implica che i campi di Majorana quantizzati hanno le stesse proprietà di quelli di Dirac, fatta eccezione per la distinzione tra particella e antiparticella, come ci si poteva aspettare. Come già visto nella sezione sui neutrini massivi di Dirac, il numero leptonico di sapore è violato per il solo fatto di avere neutrini *right*, tuttavia, mentre per i neutrini di Dirac il numero leptonico totale rimaneva conservato, questa conservazione non si presenta nel caso di Majorana se nella lagrangiana vi è un termine di massa del tipo

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2} m^{Maj} \left(\mathbf{n}_L^T C^\dagger \mathbf{n}_L + \mathbf{n}_L^\dagger C \mathbf{n}_L^* \right) , \quad (2.86)$$

infatti con le trasformazioni già viste (2.42) (2.43) questo termine di lagrangiana cambia in questo modo

$$\mathcal{L}_{mass}^{tM} = \frac{1}{2} m^{Maj} \left(e^{2i\phi} \mathbf{n}_L^T C^\dagger \mathbf{n}_L + e^{-2i\phi} \mathbf{n}_L^\dagger C \mathbf{n}_L^* \right) \quad (2.87)$$

perché come già accennato all'inizio della sezione sui neutrini di Majorana, ν_L^C è *right* come ν_R , però trasforma come ν_L . Viene naturale, dunque, chiedersi se sia possibile riottenere la conservazione del numero leptonico totale definendo una trasformazione del gruppo globale $U(1)$ per il campo di Majorana totale, invece che per i soli campi chirali

$$\mathbf{n} \rightarrow e^{i\phi} \mathbf{n} , \quad (2.88)$$

questa trasformazione, in effetti, lascia invariata la lagrangiana totale, anche il termine di massa di Majorana. Purtroppo c'è un problema nella definizione di (2.88) per neutrini di Majorana, infatti questa è incompatibile con la condizione di Majorana stessa (2.54) perché

$$\mathbf{n}^C \rightarrow e^{-i\phi} \mathbf{n}^C . \quad (2.89)$$

La non conservazione del numero leptonico totale nel caso di neutrini di Majorana poteva essere asserita euristicamente anche dalla definizione della formula (2.46), questa permette, infatti, di distinguere neutrini ($L = +1$) dagli antineutrini ($L = -1$) grazie alla presenza dei due operatori $a_{\nu_i}^{(h)}(p)$ e $b_{\nu_i}^{(h)}(p)$, ma nel caso di neutrini di Majorana si è visto che deve valere $b_{\nu_i}^{(h)}(p) = a_{\nu_i}^{(h)}(p)$, perciò non è più possibile assegnare a neutrini ed antineutrini dei valori $L = \pm 1$. La presenza di un termine di massa del tipo (2.87), implica la possibilità di transizioni che violano il numero leptonico totale di un valore $\Delta L = \pm 2$, assolutamente proibite dal Modello Standard tradizionale.

2.4 Mix Dirac-Majorana

Sapendo che esistono i neutrini chirali *left* (ν'_{eL} , $\nu'_{\mu L}$ e $\nu'_{\tau L}$ primati perché sono quelli che entrano in gioco nella corrente carica debole in base dei sapori), e che il Modello Standard non proibisce la presenza di quelli *right* (ν_{sR} con $s = s_1, \dots, s_{N_s}$ non primati perché non partecipa alle interazioni deboli CC e in numero N_s

generico), si può pensare di scrivere un termine di massa per i neutrini che sia il più generale possibile, un *mix Dirac-Majorana*:

$$\mathcal{L}_{mass}^{D-M} = \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^L + \mathcal{L}_{mass}^R \quad . \quad (2.90)$$

Nello specifico i tre addendi sono: un termine di Dirac

$$\mathcal{L}_{mass}^D = - \sum_{s=s_1, \dots, s_{N_s}} \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{sR} M_{s\alpha}^D \nu'_{\alpha L} + c.h. \quad (2.91)$$

generato dall'usuale meccanismo di Higgs e due termini di Majorana, uno per i neutrini chirali *left*

$$\mathcal{L}_{mass}^L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \sum_{\beta=e, \mu, \tau} \nu_{\alpha L}^T C^\dagger M_{\alpha\beta}^L \nu'_{\beta L} + c.h. \quad (2.92)$$

e l'altro per i neutrini *right*

$$\mathcal{L}_{mass}^R = \frac{1}{2} \sum_{s=s_1, \dots, s_{N_s}} \sum_{s'=s_1, \dots, s_{N_s}} \nu_{sR}^T C^\dagger M_{ss'}^R \nu_{s'R} + c.h. \quad . \quad (2.93)$$

È possibile riscrivere in forma compatta il termine di massa Dirac-Majorana in questo modo

$$\mathcal{L}_{mass}^{D-M} = \frac{1}{2} N_L'^T C^\dagger M^{D-M} N_L' + c.h. \quad (2.94)$$

introducendo il vettore colonna chirale $(3 + N_s \times 1)$

$$N_L' = \begin{pmatrix} \nu_L' \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{eL}' \\ \nu_{\mu L}' \\ \nu_{\tau L}' \\ \nu_{s_1 R}^C \\ \dots \\ \nu_{s_{N_s} R}^C \end{pmatrix} \quad , \quad (2.95)$$

e la matrice di massa

$$M^{D-M} = \begin{pmatrix} M^L & (M^D)^T \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

complessa quadrata $(3 + N_s) \times (3 + N_s)$, perché M^L (3×3), M^R ($N_s \times N_s$), M^D ($N_s \times 3$) sono complesse, e simmetrica per costruzione. Quest'ultima proprietà permette di diagonalizzare la nuova matrice di massa in maniera analoga a quanto fatto in (2.74):

$$\mathcal{L}_{mass}^{D-M} = \frac{1}{2} N_L'^T C^\dagger ((U_L^{\nu\dagger})^T m^{D-M} U_L^{\nu\dagger}) N_L' + c.h. \quad \text{con } m_{ij}^{D-M} = \delta_{ij} m_i^{D-M} \quad (2.97)$$

dove m_i^{D-M} sono le masse, reali e positive. Definendo, come al solito, gli autostati di massa

$$\mathbf{n}_L = U_L^{\nu\dagger} N_L' = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \dots \\ \nu_{NL} \end{pmatrix} \quad \text{con } N = 3 + N_s \quad (2.98)$$

ed introducendo poi i già noti campi massivi di Majorana

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{iL} + \mathbf{n}_{iL}^C = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \dots \\ \nu_N \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

il termine di massa mix Dirac-Majorana si scrive, infine, come

$$\mathcal{L}_{mass}^{D-M} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^{D-M} \bar{\nu}_i \nu_i = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} m^{D-M} \mathbf{n} \quad (2.100)$$

Questo risultato è di fondamentale importanza perché implica che un termine di massa \mathcal{L}_{mass}^{D-M} , mix di massa di Dirac e di Majorana, è analogo a (2.78) e quindi descrive i neutrini come particelle massive di Majorana.

2.4.1 Mixing fra stati attivi e sterili

Oltre alle dirette analogie che si possono intuire dal fatto che nel caso di un termine di massa mix Dirac-Majorana i neutrini siano particelle di Majorana, esiste un'altra importante ed originale proprietà in questo caso. Se si scrive il termine di lagrangiana che descrive l'interazione di CC debole leptonica, formalmente identico a quello per il caso di Dirac e di Majorana,

$$J_{CC-\ell}^\mu = 2\bar{\nu}_L' \gamma^\mu \ell_L' \quad (2.101)$$

$$= 2\bar{\mathbf{n}}_L U^{(D-M)\dagger} \gamma^\mu \ell_L \quad (2.102)$$

suggerisce, implicitamente, che è possibile il mixing fra gli stati *attivi* (i *left*) e gli *sterili* (i *right*) dei neutrini, infatti la nuova matrice di mixing PMNS

$$(U_{(PMNS)}^{D-M})_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'=e,\mu,\tau} (V_L^{\ell\dagger})_{\alpha\alpha'} (U_L^\nu)_{\alpha'\beta} \quad (2.103)$$

è rettangolare $3 \times N$, connette i tre stati attivi di sapore agli N neutrini massivi, attivi e sterili, e non è unitaria, perché sebbene $UU^\dagger = \mathbb{1}$, non vale il contrario $U^\dagger U \neq \mathbb{1}$. Questa non unitarietà della matrice di mixing $U_{(PMNS)}^{D-M}$ implica che la probabilità totale degli stati attivi di sapore non è conservata e quindi sono permesse oscillazioni tra stati attivi e sterili.

La relazione di mixing unitaria può essere scritta in una forma che mostri esplicitamente il mescolamento fra stati attivi e sterili:

$$N_L = \mathcal{U} \mathbf{n}_L \quad \text{dove } N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

con la matrice $N \times N$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U^{D-M} \\ U_L^\nu|_{N_S \times N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_L^{\ell\dagger}|_{3 \times 3} U_L^\nu|_{3 \times N} \\ U_L^\nu|_{N_S \times N} \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

dove $U_L^\nu|_{3 \times N}$ e $U_L^\nu|_{N_s \times N}$ sono, rispettivamente, le prime tre righe e le restanti N_s della matrice $U_L^\nu|_{N \times N}$, in questo modo:

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{i=1}^N (U^{D-M})_{\alpha i} \nu_{iL} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.106)$$

$$\nu_{sR}^C = \sum_{i=1}^N (U_L^\nu)_{si} \nu_{iL} \quad (s = s_1, \dots, s_{N_s}) \quad (2.107)$$

che mostra direttamente le già citate oscillazioni tra stati attivi e sterili, dato che questi sono combinazioni lineari degli stessi N campi massivi dei neutrini.

Capitolo 3

Teorie di campo efficaci

Come visto nel capitolo precedente, lo SM non può essere la *teoria del tutto* della Fisica. Ciononostante una possibilità è che possa essere un limite a bassa energia di una teoria più completa, cioè una teoria di campo efficace (EFT, Effective Field Theory) [1, 22, 23]. Le EFT sono estremamente utili per trattare alcuni fenomeni a bassa energia senza dover scomodare ogni volta la teoria UV più completa. Un'altra importante applicazione di queste teorie, che è anche quella che verrà considerata in questo lavoro di tesi, è quella di poter essere usate per studiare possibili nuove interazioni e/o particelle di una teoria sconosciuta, che ha una scala energetica tipica ancora non accessibile in laboratorio.

3.1 Caratteristiche generali

Una EFT è una teoria di campo quantistica (QFT, Quantum Field Theory) in cui si ha una descrizione appropriata della fisica importante in gioco. Il suo scopo è quello di ottenere una trattazione semplice di un sistema fisico utilizzando solo i gradi di libertà rilevanti per la scala energetica del problema considerato. Infatti quando si hanno parametri molto più grandi o molto più piccoli delle osservabili fisiche considerate, la descrizione più appropriata si ottiene ponendo all'infinito i primi e a 0 i secondi, trattando gli effetti finiti residui come perturbazioni; questo è l'approccio generale delle EFT. In questo modo vengono evidenziati gli effetti più importanti ad una determinata scala di energia, Λ . I gradi di libertà che sono rilevanti ad una scala energetica molto maggiore di Λ , come ad esempio una particella molto pesante $M \gg \Lambda$, non compaiono esplicitamente nella lagrangiana efficace della EFT, ma i loro effetti sono parametrizzati nelle costanti d'accoppiamento efficaci. Questo avviene attraverso il cosiddetto *Teorema di disaccoppiamento* [24].

3.1.1 Teorema di disaccoppiamento

Quando si studia un processo fisico ad una determinata energia i contributi principali all'ampiezza di probabilità vengono dalle particelle la cui massa sia minore

di quell'energia. Ciononostante è ben noto che anche i campi più massivi contribuiscono all'ampiezza di probabilità del fenomeno fisico di bassa energia, sotto forma di effetti virtuali. Questi devono essere presenti, sebbene implicitamente, nella lagrangiana efficace, in particolare nelle costanti di accoppiamento dei campi leggeri, questo procedimento è denominato *integrazione* (nel senso di integrale funzionale) dei campi massivi; si vedrà un esempio esplicativo nel corso di questa sezione. In teoria di campo il teorema di disaccoppiamento descrive, formalmente, come vadano trattate le particelle pesanti in una teoria efficace di bassa energia [24]: *se la teoria, descritta dai soli gradi di libertà leggeri è rinormalizzabile, allora tutti gli effetti delle particelle pesanti devono comparire o come fattori di rinormalizzazione delle costanti di accoppiamento o come termini della lagrangiana soppressi da potenze della massa di questi campi pesanti.*

Per gli scopi di questo lavoro di tesi ci si limiterà al livello albero delle teorie di campo efficaci. Per mostrare il processo di integrazione di particelle pesanti, a titolo esemplificativo, si consideri una teoria con un campo pesante H , di massa m_H , e un insieme di campi leggeri $\{\ell_k\}$. Questa teoria dipende solo da queste particelle attraverso un'azione efficace $W_{eff}[\ell_k]$:

$$Z[\ell_k] = e^{iW_{eff}[\ell_k]} = \int [dH] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(H(x), \ell_k(x))} \quad (3.1)$$

in cui la lagrangiana ha un termine d'accoppiamento lineare di H a una qualunque combinazione, $J(\ell_k)$, dei campi leggeri

$$\mathcal{L}(H, J) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H \partial^\mu H - m_H^2 H^2) + JH \quad (3.2)$$

dove le dipendenze sono implicite per alleggerire la notazione. Come è usuale nel formalismo dell'integrazione funzionale si completa il quadrato all'esponente in (3.1) attuando un cambiamento di campo $H' = H - D_x^{-1}J$, dove $D_x = \square_x + m_H^2$ si ottiene con un'integrazione per parti nel termine cinetico di H ,

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(H, J) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} H D_x H + JH \right) \quad (3.3)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^4x \left(H' D_x H' - J D_x^{-1} J \right) \quad (3.4)$$

Dato che il funzionale generatore $Z[J]$, l'azione efficace $W_{eff}[J]$ e la misura $\int [dH]$ rimangono invariati dopo il cambiamento di campo si ha

$$Z[J] = e^{iW_{eff}[J]} = e^{\frac{i}{2} \int d^4x J D_x^{-1} J} \int [dH'] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x H' D_x H'} \quad (3.5)$$

$$\equiv Z[0] e^{\frac{i}{2} \int d^4x J D_x^{-1} J} \quad (3.6)$$

così facendo la parte di lagrangiana dipendente dal campo pesante è stata integrata e fattorizzata dal funzionale generatore, risultando in un fattore moltiplicativo che può essere trascurato, in tal modo l'azione efficace (reintroducendo le dipendenze esplicite) si scrive

$$W_{eff}[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \quad (3.7)$$

dove $\Delta_F(x-y)$ è il propagatore di Feynman della particella pesante. Scritta come in equazione (3.7), l'azione efficace risulta essere non locale perché si ha l'integrale del propagatore per tutto lo spazio, ciononostante proprio il propagatore può essere approssimato come

$$\int d^4y \Delta_F(x-y) \approx -\frac{1}{m_H^2} \quad (3.8)$$

e quindi si può fare uno sviluppo di Taylor di $J(y)$, centrato in x , di cui si tiene il termine di ordine 0 ottenendo così un'azione locale

$$W_{eff}[J] = \int d^4x \frac{1}{2m_H^2} J(x)J(x) \quad (3.9)$$

questo risultato è il ben noto accoppiamento corrente-corrente sviluppato inizialmente da Enrico Fermi per ottenere una descrizione dell'interazione debole a bassa energia, che ora verrà mostrata in una versione esemplificativa.

3.1.2 Esempio: Teoria di Fermi

L'esempio cardine delle EFT e del teorema di disaccoppiamento lo si trova nello SM, nel ruolo che hanno i bosoni di gauge W^\pm e Z nei processi deboli a bassa energia. I decadimenti deboli al livello albero avvengono tramite lo scambio di un bosone W^\pm tra due correnti fermioniche *left*. Quando il momento trasferito, q^2 , da W^\pm è molto più piccolo della massa $M_W \approx 80$ GeV, il propagatore completo (nello spazio dei momenti) del bosone si approssima a

$$\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \xrightarrow{q^2 \ll M_W^2} \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \quad (3.10)$$

Perciò le interazioni deboli CC si riducono ad un'interazione di contatto a 4 fermioni descritta da un'hamiltoniana efficace locale

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{g^2}{8} \mathcal{J}_\mu \frac{g^{\mu\nu}}{M_W^2} \mathcal{J}_\nu^\dagger \equiv \frac{G_F}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_\mu \mathcal{J}^{\mu\dagger} \quad (3.11)$$

dove $\mathcal{J}_\mu = \bar{U} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) V^{CKM} D + \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \ell$ è la CC debole già vista nel capitolo precedente e

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (3.12)$$

è la costante di accoppiamento di Fermi. Quest'ultima non è adimensionale come quelle dello SM, ma ha dimensione $G_F \propto M_W^{-2}$, dunque il suo effetto è soppresso dalla grandezza della massa del bosone W come ci si aspetta da una teoria efficace per un termine come quello a 4 fermioni in (3.11) non rinormalizzabile. Come noto in uno spazio-tempo a 4 dimensioni i campi fermionici, ψ , e bosonici, ϕ , hanno dimensione in massa

$$[\psi]_{massa} = \frac{3}{2} \quad (3.13)$$

$$[\phi]_{massa} = 1 \quad (3.14)$$

cosicché l'azione rimanga un numero puro in unità naturali. Sapendo ciò un termine di interazione a 4 fermioni come quello in (3.11) ha dimensione in massa 6, che non è rinormalizzabile da solo, infatti la costante di accoppiamento efficace di Fermi ha dimensione in massa -2 , cosicché l'azione nel complesso rimane adimensionale.

3.1.3 Limiti di una EFT

A questo punto viene naturale chiedersi quali siano i limiti di validità delle EFT, che sono degli strumenti teorici molto potenti, tant'è che possono essere utilizzate anche per studiare effetti di interazioni e/o particelle di una teoria UV ignota. In generale l'evoluzione da una scala di energia piccola a scale via via più grandi è descritta da una sequenza di teorie di campo efficaci, ciascuna con il proprio contenuto di particelle. Il passaggio da una EFT all'altra è definito da una soglia determinata dalla massa delle particelle pesanti della teoria a scala energetica maggiore. Quando si raggiunge questa soglia devono essere definite delle condizioni, dette di *matching*, che colleghino la teoria a bassa energia e quella ad alta, così facendo vengono definiti i coefficienti del settore *pesante*; un esempio è stato già incontrato in (3.12) dove una delle costanti di accoppiamento del settore elettrodebole, g , viene messa in relazione con quella efficace di Fermi.

Una teoria di campo efficace di bassa energia diviene instabile quando viene utilizzata ad una scala energetica vicina a quella in cui viene definita la condizione di matching. Quindi la stabilità di una EFT è, in generale, garantita se vi è un'ampia separazione in energia tra il settore a bassa energia e quello ad alta, ovvero se tra le masse dei campi leggeri e quelle dei campi pesanti c'è molta differenza.

3.2 \mathcal{L}_{eff} per Nuova Fisica

Le EFT possono essere utilizzate per parametrizzare gli effetti di un settore di nuova fisica sconosciuta, nel limite di bassa energia. Ciò viene realizzato con le lagrangiane efficaci, che caratterizzano l'EFT stessa, costruite come segue

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_n c_n O_n \quad (3.15)$$

dove $\{O_n\}$ sono operatori locali, che rispettano le simmetrie e sono costruiti con gli operatori della fisica a bassa energia, e c_n sono coefficienti efficaci che contengono l'informazione dei gradi di libertà pesanti. La dimensione in massa degli operatori, d_n , non è vincolata e la lagrangiana solitamente viene organizzata come una sequenza di questi operatori secondo la loro dimensionalità in ordine crescente. Ma visto che l'azione efficace deve essere un numero puro in unità naturali, la dimensione d_n dà informazioni su quella dei relativi coefficienti:

$$[O_n]_{massa} = d_n \longrightarrow c_n \sim \frac{1}{\Lambda^{d_n-4}} \quad (3.16)$$

con Λ la scala energetica caratteristica del settore pesante sconosciuto. Viene da sé che gli operatori di dimensione grande saranno molto soppressi dalle potenze di $\frac{1}{\Lambda}$. Per energie ben al di sotto di Λ si possono distinguere tre tipi di operatori:

- *Rilevanti*: operatori con dimensione $d_n < 4$;
- *Marginali*: operatori con dimensione $d_n = 4$;
- *Irrilevanti*: operatori con dimensione $d_n > 4$.

Un coefficiente con dimensione positiva nella massa dà effetti importanti ad energie minori della scala del coefficiente stesso, per questo gli operatori con $d_n < 4$ vengono chiamati *rilevanti*. In una teoria di campo quadridimensionale il numero di operatori *rilevanti* che si possono scrivere è basso: l'operatore unità, il termine di massa bosonico e fermionico e quello di interazione bosonica cubico. I termini cinetici sono invece operatori *marginali*

$$\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \quad i\bar{\psi}\not{\partial}\psi \quad (3.17)$$

infatti i loro coefficienti $\frac{1}{2}$ ed i sono numeri puri, perciò sono ugualmente importanti a qualunque scala energetica. Altri esempi di operatori marginali sono l'interazione ϕ^4 , le interazioni della QED, della QCD e quelle di Yukawa, viste all'inizio di questo lavoro di tesi. Gli operatori *irrilevanti*, infine, sono chiamati così perché a bassa energia i loro effetti sono soppressi da potenze di $\frac{1}{\Lambda}$, però questo non significa che non siano importanti, infatti contengono molto spesso le informazioni interessanti della dinamica del settore pesante sconosciuto. In generale, quando si ha un grande gap tra la scala di energia considerata e quella della fisica ad alta energia, gli effetti indotti dagli operatori irrilevanti sono soppressi e di solito vengono trascurati, l'EFT che ne risulta, solo con operatori rilevanti e marginali, è rinormalizzabile.

Come esempio pratico si consideri l'interazione indotta dall'hamiltoniana di Fermi (3.11). Questa è soppressa dalla seconda potenza di M_W , perciò è un operatore *irrilevante*, ciononostante le interazioni di contatto a 4 fermioni sono importanti perché generano i contributi fondamentali ai processi che cambiano sapore. Se si ipotizzasse che le masse dei bosoni W^\pm e Z fossero dell'ordine di 10^{16} GeV, l'interazione debole non sarebbe stata mai osservata. Tutto ciò è intuitivo al livello albero, ma quando si considerano le correzioni quantistiche dovute ai loop ci sono casi speciali in cui gli operatori irrilevanti danno contributi importanti, che non possono essere troncati via.

Per costruire delle buone teorie quantistiche di campo solitamente si scartano tutti gli operatori irrilevanti, poiché non rinormalizzabili, infatti richiederebbero un numero infinito di controtermini per avere predizioni finite. Perciò, a prima vista, una lagrangiana efficace che contiene questi operatori sembrerebbe avere una capacità predittiva scarsa, ma il discorso è più complesso. Si consideri, per semplicità la lagrangiana fermionica

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{c}{\Lambda^2}(\bar{\psi}\psi)^2 + \dots \quad , \quad (3.18)$$

l'interazione a 4 fermioni, quindi di dimensione 6, genera un contributo quadraticamente divergente alla massa m attraverso il ben noto diagramma di auto-energia (Fig: 5.1)

$$\delta m \sim 2i \frac{c}{\Lambda^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{m}{q^2 - m^2} \quad . \quad (3.19)$$

Dato che un'EFT è valida per energie minori di Λ , si può pensare di regolarizzare l'integrale imponendo un cutoff ad alta energia, quello più naturale da usare in questo caso è proprio Λ . Perciò si avrà

$$\delta m \sim \frac{m}{\Lambda^2} \Lambda^2 = m \quad , \quad (3.20)$$

quindi l'operatore che inizialmente sembrava essere irrilevante, dopo una semplice analisi ulteriore, genera una correzione non soppressa alla massa del fermione.

3.2.1 SM come EFT

Come già accennato in precedenza una possibilità interessante è che lo SM possa essere una EFT. In questo caso si possono parametrizzare i possibili effetti di interazioni e/o particelle di un settore sconosciuto di nuova fisica, sotto forma di deviazioni dalle predizioni dello SM. Questi effetti sono contenuti in operatori efficaci di dimensione $d > 4$, non rinormalizzabili, nella lagrangiana efficace:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_5 + \frac{1}{\Lambda^2} \mathcal{L}_6 + \dots \frac{1}{\Lambda^{n-4}} \mathcal{L}_n + \dots \quad (3.21)$$

dove il generico \mathcal{L}_n è il termine non rinormalizzabile di dimensione in massa n e Λ è la scala di energia caratteristica del settore pesante sconosciuto.

Fra gli operatori che rispettano le simmetrie di gauge dello SM esistono: un singolo operatore di dimensione 5, che verrà trattato nella sezione successiva, e 80 operatori di dimensione 6 [25]. Un esempio di operatore di dimensione 6 che descrive un'interazione di contatto a 4 fermioni è quello che contribuisce al processo

$$q\bar{q} \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad (3.22)$$

$$\mathcal{L}_6(g) = \frac{g^2}{2\Lambda^2} \bar{q}\gamma_\nu P_L q \bar{\mu}\gamma^\nu P_L \mu \quad (3.23)$$

l'effetto di queste interazioni di contatto diventa più importante ad alte energie rispetto al background; processi di dimensione 6 sono cercati ad LHC alle più alte energie disponibili sperimentalmente [7, 8]. Chiaramente non tutti e 80 i possibili operatori di dimensione 6 saranno presenti in una nuova teoria, ma alcuni dovranno essere scartati in accordo con le nuove simmetrie del settore pesante.

3.2.2 Generazione massa di Majorana

L'operatore di dimensione 5, appena citato, è strettamente legato al meccanismo di generazione della massa di Majorana dei neutrini.

I neutrini *right* nello SM non si accoppiano con nessun campo disponibile, eccetto che in due modi: un termine di massa che contiene solo i ν_R (seguendo la notazione usata nel capitolo 2) e un termine di accoppiamento di Yukawa al doppietto leptonico L'_L più un bosone di Higgs ϕ

$$-g\bar{L}'_L\tilde{\phi}\nu_R - \frac{1}{2}\bar{\nu}_R^C m_M \nu_R + c.h. \quad (3.24)$$

scritto in forma matriciale. Se la massa m_M è molto grande, per il campo del neutrino *right* si può utilizzare il *teorema di disaccoppiamento*. In questo modo dal primo termine di Yukawa in (3.24), si ottiene l'interazione residua

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{\Lambda_M} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} \left(\bar{L}'_{\alpha L} \tilde{\phi}^* \right) \left(\tilde{\phi}^\dagger L'_{\beta L} \right) + c.h. \quad (3.25)$$

dove $\frac{1}{\Lambda_M} \equiv \frac{1}{2m_M}$, noto come *operatore di Weinberg*. Questa interazione è invariante sotto la trasformazione dello SM $SU(2)_L$, ma ha dimensione in massa pari a 5, infatti il coefficiente ha dimensione pari all'inverso di una massa, perciò è un termine non rinormalizzabile che non può far parte di \mathcal{L}_{SM} . Questo problema non è rilevante in una EFT, il termine aggiuntivo è permesso sebbene soppresso dalla scala di energia pesante Λ_M di nuova fisica. Quando il campo di Higgs assume la VEV v rompe la simmetria elettrodebole e la lagrangiana \mathcal{L}_5 si riduce nel termine di massa di Majorana per i neutrini *left*

$$\mathcal{L}_5 \xrightarrow{RSS} \mathcal{L}_{mass}^L = -\frac{v^2}{2\Lambda_M} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} \bar{\nu}'_{\alpha L} \nu'_{\beta L} + c.h. \quad (3.26)$$

per i quali la matrice di massa di Majorana ha elementi

$$M_{\alpha\beta}^L = \frac{v^2}{\Lambda_M} g_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.27)$$

La scala delle masse di Majorana dei neutrini *left* viene naturalmente piccola grazie alla soppressione della scala pesante, spiegando così il gap della massa dei neutrini rispetto a quella degli altri fermioni.

È importante notare come (3.25) sia l'unico operatore di dimensione 5 che si può costruire dal contenuto delle particelle dello SM che rispetti sia le simmetrie di gauge che quelle di Lorentz. È suggestivo il fatto che sia un'evidenza di fisica BSM collegata alle masse dei neutrini, piccole ma non nulle, ed infatti è il termine meno soppresso nella sequenza della lagrangiana efficace (5.16), per questa ragione lo studio delle masse dei neutrini può essere la finestra più accessibile sulla nuova fisica.

3.3 Meccanismo seesaw

In quest'ultima sezione si presenta il metodo ad oggi più interessante per spiegare perché le masse dei neutrini *left* siano di 6 ordini di grandezza minori di quelle degli altri fermioni: il meccanismo seesaw. Di quest'ultimo ne esistono 3 diversi tipi (sebbene sono possibili mix tra questi 3), ciascuno ottenuto con una particolare estensione del contenuto particellare dello SM [37].

3.3.1 Tipo I

I modelli seesaw del primo tipo sono quelli per cui lo SM è esteso tramite l'aggiunta di fermioni che siano singoletti di gauge, ovvero i neutrini *right* ν_{Ri} . Facendo ciò la lagrangiana efficace estesa è realizzata nel seguente modo

$$\mathcal{L}_{eff}^I = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{2} \bar{\nu}_{Ri} (M_R)_{ij} \nu_{Rj}^C - \frac{1}{2} \nu_{L\alpha} (M_L)_{\alpha\beta} \nu_{L\beta}^C - (y_\nu)_{i\alpha} \bar{\nu}_{Ri} \tilde{\phi}^\dagger L_{L\alpha} + c.h. \quad (3.28)$$

la massa di Majorana *left* viene assunta nulla, $M_L = 0$, poiché è proibita dalle simmetrie dello SM. Una volta che il campo di Higgs assume la VEV v , la matrice di massa dei neutrini è

$$M^\nu = \begin{pmatrix} 0 & y^{\nu T} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ y^\nu \frac{v}{\sqrt{2}} & M_R \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & m_D^T \\ m_D & M_N \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

che è la matrice di massa M^{D+M} vista alla fine del capitolo 2; con M_N si è indicato la matrice di massa *right*, generata da nuova fisica, dei neutrini pesanti aggiunti, perciò i suoi elementi saranno molto più grandi di quelli di m_D . M^ν è una matrice simmetrica e si è già visto come sia diagonalizzabile a blocchi

$$M_{diag}^\nu = U_L^{\nu T} M^\nu U_L^\nu = \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

con

$$M_{light} \approx -m_D^T M_N^{-1} m_D \quad e \quad M_{heavy} \approx M_N \quad . \quad (3.31)$$

Gli autovalori di M_{light} e di M_{heavy} sono rispettivamente le masse dei neutrini leggeri (di ordine m_D) e pesanti, con i primi soppressi dal fattore $m_D^T M_N^{-1}$.

La matrice M_N può essere assunta

$$M_N = \Lambda_M \mathbb{1}_{N_s \times N_s} \quad (3.32)$$

dove Λ_M è la scala di alta energia di fisica BSM alla quale è violato il numero leptonico totale, in questo modo la matrice M_{light} si scrive:

$$M_{light} \approx -\frac{m_D^T m_D}{\Lambda_M} \quad (3.33)$$

e quindi le masse dei neutrini leggeri sono date da

$$m_k = \frac{(m_D)_k^2}{\Lambda_M} \quad (k = 1, 2, 3) \quad . \quad (3.34)$$

Questo risultato è collegato a quello in (3.27), infatti la massa di Majorana generata da \mathcal{L}_5 è proporzionale al rapporto $\frac{v^2}{\Lambda_M}$ e v , che è la scala di energie alla quale si rompe spontaneamente la simmetria elettrodebole, dà l'ordine delle masse dei fermioni di Dirac generate con il meccanismo di Higgs, dunque (3.27) si riscrive come

$$m_\alpha \delta_{\alpha\beta} \propto \frac{m_D^2}{\Lambda_M} \quad (3.35)$$

che ha la stessa struttura di (3.34) ottenuta con il meccanismo seesaw di tipo I, per cui più è pesante la massa di M_N e più sarà piccola quella dei neutrini *left*. Questa non è una coincidenza, il meccanismo seesaw è un caso particolare del più generale operatore efficace di dimensione 5, \mathcal{L}_5 .

3.3.2 Tipo II

Mentre nel meccanismo di tipo I la massa M_L viene assunta esattamente nulla, è possibile comunque che sia piccola ma diversa da 0. È questo il caso del meccanismo seesaw del secondo tipo, in cui il contenuto dello SM viene esteso con l'aggiunta di uno scalare di spin, tripletto $SU(2)$ con ipercarica debole pari a 2:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\Delta^+}{\sqrt{2}} & \Delta^{++} \\ \Delta^0 & -\frac{\Delta^+}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \quad (3.36)$$

In questo caso alla lagrangiana dello SM viene aggiunto un termine di accoppiamento di Yukawa tra due doppietti leptonici e la particella Δ

$$\mathcal{L}_{eff}^{II} = \mathcal{L}_{SM} - (y_\Delta)_{\alpha\beta} \bar{L}_\alpha^C i\sigma_2 \Delta L_\beta + c.h. , \quad (3.37)$$

inoltre Δ ha un accoppiamento μ con due campi di Higgs, così che ottenga una VEV indotta dopo la rottura spontanea della simmetria elettrodebole $v_\Delta = \mu \frac{v^2}{2M_\Delta^2}$. La VEV del tripletto quindi induce una massa di Majorana

$$m_\nu^\Delta \equiv 2y_\Delta v_\Delta = y_\Delta \mu \frac{v^2}{M_\Delta^2} . \quad (3.38)$$

3.3.3 Tipo III

Infine il meccanismo seesaw di terzo tipo si ha aggiungendo al Modello Standard da un fermione tripletto di $SU(2)$ con ipercarica debole nulla

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} , \quad (3.39)$$

che si accoppia con un doppietto leptonico e un campo di Higgs e che ha un termine di massa di Majorana

$$\mathcal{L}_{eff}^{III} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{2} (M_\Sigma)_{ij} \text{Tr}(\bar{\Sigma}_i \Sigma_j^C) - (y_\Sigma)_{i\alpha} \tilde{\phi}^\dagger \bar{\Sigma}_i i\sigma_2 L_\alpha + c.h. \quad (3.40)$$

che induce una massa

$$m_\nu^\Sigma = \frac{v^2}{2} y_\Sigma^T M_\Sigma^{-1} y_\Sigma . \quad (3.41)$$

Capitolo 4

Neutrinoless double beta decay

In questo capitolo verrà trattato il fenomeno fisico principale di questo lavoro di tesi, il doppio decadimento beta senza neutrini ($0\nu\beta\beta$). L'attenzione di questo canale sperimentale nasce dal fatto che la sua osservazione implicherebbe necessariamente che i neutrini sono particelle di Majorana, che come già visto nel capitolo precedente è la finestra di possibile nuova fisica più accessibile, e che il numero leptonico totale non è una simmetria della Natura. Ciononostante dalla sua non osservazione è possibile trarne dei risultati interessanti, ovvero dei vincoli di quantità fisiche non note. Prima di addentrarsi nella descrizione generale del decadimento $0\nu\beta\beta$ stesso, si illustra il perché l'osservazione delle oscillazioni di sapore dei neutrini non basti a determinarne la natura di Dirac o di Majorana.

4.1 Oscillazione di sapore dei neutrini

Dato che i neutrini sono particelle massive sono soggette ad un particolare fenomeno quantistico, l'oscillazione di sapore, dovuta all'interferenza tra diversi autostati di massa. L'oscillazione di sapore dei neutrini fu formulata da Pontecorvo [38] ed osservata per la prima volta nell'esperimento Homestake [30], in cui venne misurato il flusso di neutrini elettronici del Sole. Si passa ora ad una descrizione qualitativa del processo di oscillazione di sapore.

Un neutrino di sapore α creato in un processo di interazione CC debole è descritto dallo stato di sapore

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k} |\nu_k\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (4.1)$$

combinazione lineare degli autostati di massa, dove la matrice peso U è quella di mixing, che cambia a seconda che i neutrini siano particelle di Dirac (2.35) o di Majorana (2.83), e la somma negli autostati di massa non è specificata per tenere conto degli stati sterili. È noto che gli stati dei neutrini massivi sono autostati dell'Hamiltoniana libera

$$\mathcal{H} |\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle \quad (4.2)$$

dove $E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2}$ è l'autovalore dello stato di massa k -esimo.

L'evoluzione temporale degli autostati di massa è descritta dall'equazione di Schrödinger

$$i\frac{d}{dt}|\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H}|\nu_k(t)\rangle \quad , \quad (4.3)$$

la quale implica che questi autostati evolvono nel tempo come delle onde piane

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad (4.4)$$

con $|\nu_k\rangle \equiv |\nu_k(0)\rangle$. Mettendo insieme le relazioni (4.1) e (4.4) si può descrivere l'evoluzione temporale completa di uno stato di sapore, che al tempo $t = 0$ è stato creato con un sapore definito α

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k} |\nu_k(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k} e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k} e^{-iE_k t} U_{\beta k}^* |\nu_\beta\rangle \quad (4.5)$$

avendo invertito la relazione (4.1) nell'ultima uguaglianza si è scritto un'equazione che descrive l'ampiezza di probabilità che lo stato $|\nu_\alpha(t)\rangle$, combinazione lineare degli autostati di massa, "oscilli" nello stato di sapore $|\nu_\beta\rangle$

$$\mathcal{A}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k} e^{-iE_k t} U_{\beta k}^* \quad (\alpha \neq \beta : \text{caso non banale}) \quad (4.6)$$

come una funzione del tempo.

Si è arrivati, dunque, alla dipendenza esplicita dalla massa dei neutrini, che sta in E_k , del fenomeno dell'oscillazione di sapore, però non si è ancora introdotta la possibile natura delle particelle. Se queste sono fermioni di Dirac allora la matrice di mixing è U^D (2.36), mentre se sono fermioni di Majorana la matrice è U^M (2.83). Sebbene, in generale, questo dovrebbe implicare che l'ampiezza di probabilità di oscillazione sia diversa nei due casi, si è già visto che le due matrici di mescolamento differiscono solo per due fasi pure (2.83). Di conseguenza, se si scrive l'ampiezza di probabilità nel caso di Majorana:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^M(t) &= \sum_k U_{\alpha k}^M e^{-iE_k t} U_{\beta k}^{M*} = \sum_k U_{\alpha k}^D e^{i\alpha_k} e^{-iE_k t} e^{-i\alpha_k} U_{\beta k}^{D*} \\ &= \sum_k U_{\alpha k}^D e^{-iE_k t} U_{\beta k}^{D*} = \mathcal{A}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^D(t) \end{aligned}$$

questa è uguale all'ampiezza nel caso di Dirac. Perciò le oscillazioni di sapore, che sono fenomeni cinematici, non permettono di determinare la natura dei neutrini; la strada da percorrere è quella di studiare fenomeni fisici che dipendono dalla massa dei neutrini e dalla loro natura, il decadimento $0\nu\beta\beta$ ha entrambe queste caratteristiche.

4.2 Caratteristiche dello $0\nu\beta\beta$

Lo $0\nu\beta\beta$ è un caso particolare del doppio decadimento beta ($2\nu\beta\beta$), formulato per prima da M. Goepfert-Mayer nel 1935 [39]. A sua volta il $2\nu\beta\beta$ è un evento

raro in cui due nucleoni decadono contemporaneamente:

$$\mathcal{N}(A, Z) \rightarrow \mathcal{N}(A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \quad (2\beta_{2\nu}^-) \quad (4.7)$$

$$\mathcal{N}(A, Z) \rightarrow \mathcal{N}(A, Z - 2) + 2e^+ + 2\nu_e \quad (2\beta_{2\nu}^+) \quad (4.8)$$

Il decadimento $2\nu\beta\beta$ è permesso dallo SM, infatti è generato al secondo ordine perturbativo delle interazioni CC deboli. Dato che il $2\nu\beta\beta$ generale ha nello stato finale 4 leptoni, la somma delle energie cinetiche dei due elettroni finali ha uno spettro continuo dal valore zero al Q -value del processo che, trascurando il rinculo del nucleo, è dato da

$$Q_{2\beta} = M_i - M_f - 2m_e \quad (4.9)$$

con M_i e M_f , rispettivamente, la massa del nucleo iniziale e finale, se il decadimento è fra gli stati fondamentali dei due nuclei, e m_e la massa dell'elettrone.

Le condizioni necessarie affinché un nucleo $\mathcal{N}(A, Z)$ possa decadere attraverso il $2\nu\beta\beta$ sono:

- il suo stato fondamentale ha energia maggiore di quella dello stato fondamentale di $\mathcal{N}(A, Z \pm 2)$ più due volte la massa dell'elettrone, ovvero il Q -value deve essere maggiore di 0;
- il decadimento singolo β deve essere energeticamente proibito ($Q_\beta < 0$) o fortemente soppresso, perché se un nucleo può decadere sia tramite β che 2β , quest'ultimo è praticamente non osservabile dato che la sua vita media è molto più grande di quella del singolo β .

Gli isotopi che soddisfano queste condizioni naturalmente e possono decadere tramite $2\beta^-$ sono 35, tutti questi nuclei nello stato iniziale e finale sono pari-pari, cioè hanno un numero pari di protoni e neutroni, questo perché l'energia di legame è maggiore di quella di nuclei intermedi dispari-dispari. Per lo stesso motivo i nuclei iniziali e finali dei 35 isotopi hanno uno stato fondamentale 0^+ ($Spin^{Parity}$), perciò ogni transizione tra stati fondamentali sarà del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$, nonostante non siano proibiti decadimenti in nuclei finali in stati eccitati.

È stata fatta questa introduzione al decadimento $2\nu\beta\beta$ perché, assumendo che i neutrini abbiano una massa di Majorana, un nucleo che può decadere attraverso $2\nu\beta\beta$ può farlo anche tramite un decadimento $0\nu\beta\beta$, con una vita media differente, in generale più lunga. Lo $0\nu\beta\beta$:

$$\mathcal{N}(A, Z) \rightarrow \mathcal{N}(A, Z + 2) + 2e^- \quad (2\beta_{0\nu}^-) \quad (4.10)$$

$$\mathcal{N}(A, Z) \rightarrow \mathcal{N}(A, Z - 2) + 2e^+ \quad (2\beta_{0\nu}^+) \quad (4.11)$$

fu proposto per la prima volta da W. H. Furry nel 1939 [12], ed è, a differenza del $2\nu\beta\beta$, proibito dallo SM. Dato che nello stato finale non sono presenti i neutrini, la somma delle energie cinetiche degli elettroni non sarà più uno spettro continuo da 0 al Q -value del processo, ma sarà un picco centrato su quest'ultimo valore. Sebbene la ricerca sperimentale sia all'opera per osservare un segnale del

decadimento $0\nu\beta\beta$, questo non è stato mai osservato e al momento si hanno solo dei limiti inferiori sull'emivita, cioè il cosiddetto tempo di dimezzamento dell'isotopo

$$T_{1/2}^{0\nu} = \ln 2 \cdot T^{0\nu} \quad (4.12)$$

dove $T^{0\nu}$ è la vita media dell'isotopo per il decadimento $0\nu\beta\beta$. Ad oggi, il limite inferiore più stringente per l'emivita è il recentissimo di S. Abe et al. (KamLAND-Zen Collaboration) sull'isotopo ^{136}Xe [9]:

$$T_{1/2}^{0\nu}(^{136}\text{Xe}) > 2,3 \times 10^{26} \text{ y (anni)} \quad (90\% \text{ CL}) \quad . \quad (4.13)$$

4.2.1 Necessità di neutrini massivi di Majorana

Il motivo per cui il decadimento $0\nu\beta\beta$ è proibito dallo SM, ed anche il motivo per cui è così interessante, è che viola la conservazione del numero leptonico totale di due unità

$$\Delta L = \pm 2 \quad (2\beta_{0\nu}^\mp) \quad . \quad (4.14)$$

In particolare mancano due proprietà allo SM affinché permetta questo fenomeno fisico, quest'ultimo infatti può avvenire se nel diagramma di Feynman del $2\beta_{2\nu}^-$ le due linee degli antineutrini si collegano formando un propagatore interno e quindi vengono emessi solo i due elettroni nello stato finale (Fig: 6.1).

Le due condizioni sufficienti ad avere lo $0\nu\beta\beta$ sono:

- $\bar{\nu} = \nu$: per formare una linea interna tra i due vertici è necessario che uno degli antineutrini si annichilisca con l'altro, che per definizione può annichilirsi solo con la sua antiparticella, ovvero il neutrino. Questo significa che la particella in questione debba coincidere con la sua antiparticella, e questa è la condizione delle particelle di Majorana. In questo modo il numero totale leptonico non è conservato.
- $m_\nu \neq 0$: nella teoria dei neutrini a massa nulla un antineutrino generato da un'interazione CC debole deve avere necessariamente elicità positiva, ciononostante per collegarsi all'altro antineutrino dovrebbe avere elicità negativa. Nel caso in cui i neutrini siano massivi, invece, esiste la possibilità che venga generato un antineutrino con elicità negativa da uno dei due vertici di interazione CC debole dello $0\nu\beta\beta$, con ampiezza relativa di $\frac{m_\nu}{E_\nu}$ [35].

In definitiva, per avere il decadimento $0\nu\beta\beta$ bisogna estendere lo SM richiedendo che i neutrini siano particelle massive di Majorana.

Ciononostante si potrebbe ipotizzare una moltitudine di teorie BSM con nuove interazioni e/o particelle che contribuiscono allo $0\nu\beta\beta$, ovvero, in termini più formali, che la condizione di neutrini di Majorana massivi sia sufficiente ma non necessaria affinché si abbia lo $0\nu\beta\beta$. Ad esempio se si assumesse una nuova interazione $V + A$ per le CC deboli, uno dei vertici potrebbe emettere un leptone neutro con elicità negativa senza richiedere che i neutrini debbano avere una

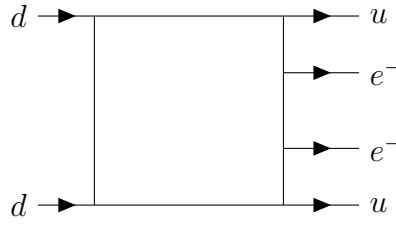


Figura 4.1: Diagramma a black-box: il quadrato centrale sottintende tutte le particelle e/o interazioni BSM che possono contribuire al decadimento $0\nu\beta\beta$.

massa non nulla. Ciascuno di questi nuovi meccanismi contribuirebbe al processo proporzionalmente ad un parametro la cui piccolezza riflette la soppressione dovuta alla manifestazione nel limite di bassa energia di fisica BSM. Questo dubbio viene dissipato dal teorema di Schechter-Valle, o *black-box*, [13] secondo cui dire che i neutrini sono particelle di Majorana massive è una condizione necessaria e sufficiente affinché avvenga il doppio decadimento beta senza neutrini. In Fig.4.1 è rappresentato il decadimento $0\nu\beta\beta$ mediato da una *black-box*, al posto di neutrini massivi di Majorana, che include tutti i possibili meccanismi di nuova fisica che permettono il decadimento a tutti gli ordini perturbativi, dal punto di vista sperimentale sono visibili solo le linee esterne dei quark e dei due elettroni emessi. È possibile, come mostrato in Fig.4.2, collegare le linee degli stati finali, tramite vertici dello SM, a un neutrino e un antineutrino per formare un diagramma di transizione $\bar{\nu}_e \rightarrow \nu_e$, perciò la *black-box* genera un contributo alla massa di Majorana del neutrino elettronico attraverso correzioni radiative, anche se a livello albero non c'è un termine di massa di Majorana. Perciò l'osservazione sperimentale del decadimento $0\nu\beta\beta$ sarebbe una prova definitiva di neutrini massivi di Majorana, che violano il numero leptonico totale, e quindi di fisica BSM.

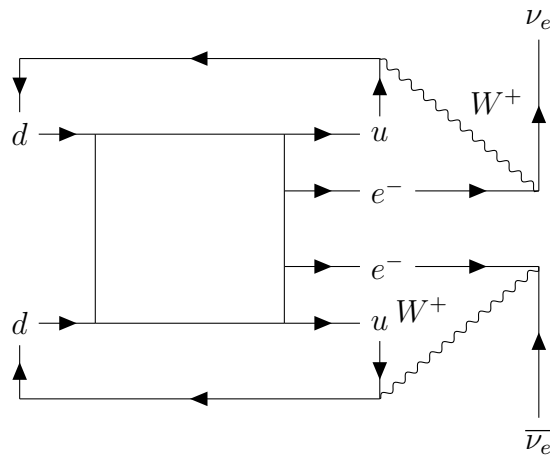


Figura 4.2: Contributo del diagramma black-box al termine di massa di Majorana dei neutrini.

4.2.2 Vincoli dalla non osservazione

Nonostante la rilevazione di un decadimento $0\nu\beta\beta$ sarebbe una prova diretta della natura di Majorana dei neutrini, la sua *non* osservazione risulta, allo stesso modo, importante per la ricerca scientifica. Per un decadimento $0\nu\beta\beta$ standard, ovvero quello in cui si ha lo scambio di un neutrino leggero di Majorana, l'emivita teorica di un nucleo \mathcal{N} può essere espressa nel seguente modo:

$$(T_{1/2}^{0\nu}(\mathcal{N}))^{-1} \propto G_{0\nu}^{\mathcal{N}} |\mathcal{M}_{0\nu}^{\mathcal{N}}|^2 |m_{2\beta}|^2 \quad (4.15)$$

dove $G_{0\nu}^{\mathcal{N}}$ è il fattore dello spazio delle fasi, $\mathcal{M}_{0\nu}^{\mathcal{N}}$ è l'elemento di matrice nucleare (che verranno trattati in seguito) ed $|m_{2\beta}| = |(U_{PMNS})_{ei}^2 m_i^{\nu}|$ è la cosiddetta massa efficace di Majorana. Gli esperimenti di che si concentrano sulla ricerca di un segnale di $0\nu\beta\beta$ forniscono solo limiti inferiori sull'emivita, ciononostante è possibile utilizzare la formula (4.15) per tradurli in vincoli sulla massa efficace di Majorana, che si vedranno nel dettaglio nella sezione successiva. Un importante utilizzo di questi limiti su $m_{2\beta}$ è quello di avere la possibilità, in futuro, di determinare se lo schema delle masse dei neutrini leggeri left sia *normale* ($m_1 < m_2 < m_3$) o *invertito* ($m_3 < m_1 < m_2$), infatti, sebbene sia noto ad oggi che i neutrini sono particelle massive, se ne conoscono solo le differenze delle masse al quadrato. Con un'analisi ulteriore della massa efficace di Majorana negli schemi qui sopra citati, per la quale si cita il capitolo XIV della referenza [35] dato che sarebbe superflua al lavoro di tesi, si arriva alla conclusione che nel caso dello schema normale (in cui il neutrino più leggero è m_1)

$$|m_{2\beta}| \lesssim 6 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad \text{per} \quad m_1 \lesssim 10^{-3} \text{ eV} \quad (4.16)$$

non è limitato inferiormente, mentre nel caso dello schema invertito (neutrino più leggero è m_3)

$$9 \times 10^{-3} \text{ eV} \lesssim |m_{2\beta}| \lesssim 5 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad \text{per} \quad m_3 \lesssim 10^{-2} \text{ eV} \quad (4.17)$$

è limitato sia da sotto che da sopra. Perciò esiste una regione di valori della massa del neutrino più leggero in cui i limiti in (4.16) e (4.17) non si sovrappongono. Se futuri esperimenti con sensibilità inferiore a $|m_{2\beta}| \simeq 9 \times 10^{-3} \text{ eV}$ non osserveranno un decadimento $0\nu\beta\beta$, lo schema invertito sarà automaticamente da scartare.

L'equazione in (4.15) viene fuori ipotizzando che i neutrini left siano particelle leggere di Majorana, ma si possono ipotizzare diversi meccanismi di fisica BSM che generino il doppio decadimento beta senza neutrini, in questo caso è possibile riscrivere, ipotizzando che solo un'interazione efficace contribuisca all'emivita $T_{1/2}^{0\nu}(\mathcal{N})$, una relazione simile [40]

$$(T_{1/2}^{0\nu}(\mathcal{N}))^{-1} \propto G_{0\nu}^{\mathcal{N}} |\mathcal{M}_i|^2 |\epsilon_i|^2 \quad (4.18)$$

dove \mathcal{M}_i è l'elemento di matrice nucleare ed ϵ_i la costante d'accoppiamento efficace dell'interazione considerata. Con lo stesso ragionamento fatto per il meccanismo standard è possibile utilizzare i limiti inferiori sperimentali sull'emivita

per vincolare i valori della costante efficace, ed ottenere delle indicazioni per gli esperimenti di ricerca di fisica BSM, in particolare del meccanismo con cui si ricava (4.18), sulle scale di energia da sondare. È proprio questo lo scopo di questo lavoro di tesi: vincolare lo spazio dei parametri di un modello BSM con un limite sperimentale sull'emivita

4.3 Programma sperimentale

La ricerca diretta di doppi decadimenti beta senza neutrini è cominciata nella seconda metà degli anni 60 [14, 15] e da allora è, ovviamente, migliorata sotto tutti i punti di vista: si è passati dall'utilizzo di pochi grammi di isotopi a quintali; sono stati raffinati i detector e la loro efficienza di rilevazione e si è ridotto di molto le sorgenti di background. Considerate queste miglurie, i limiti sulle emivite $T_{1/2}^{0\nu}$ sono stati affinati fino a valori $\gtrsim 10^{26}y$, ciononostante c'è ancora spazio per andare oltre e altri esperimenti sono in vista per il futuro. In questa sezione si menzioneranno le principali caratteristiche della ricerca sperimentale di processi $0\nu\beta\beta$ [41], considerando lo stato dell'arte degli esperimenti coinvolti e le prospettive future.

4.3.1 Isotopi e background

Dei già citati 35 isotopi che possono decadere tramite doppio decadimento beta, non tutti sono buoni candidati per ricerche dirette di $0\nu\beta\beta$. Un isotopo ideale dovrebbe avere una grande abbondanza in natura per essere utilizzato in grande quantità in esperimenti con detector ad alta risoluzione energetica. Inoltre devono essere ridotte al minimo possibile le sorgenti di background.

Molti elementi naturali radioattivi, come ^3H , ^{14}C , ^{40}K , hanno energie di decadimento minori di quelle dello $0\nu\beta\beta$ e non interferiscono con la ricerca, alcuni però, soprattutto quelli nei materiali di supporto dell'apparato sperimentale, sono sorgenti sperimentali di rumore e devono essere tenuti al minimo in fase di costruzione. Le sorgenti di background con origine lontana dal laboratorio possono essere tenute sotto controllo situando l'esperimento sottoterra. In questo modo però gli elementi radioattivi nelle pareti rocciose possono interferire con l'esperimento. La tecnica principale per ridurre gli effetti è, in generale, riparare l'apparato sperimentale con scudi passivi di piombo. Una tecnica per rigettare qualsiasi tipo di background che non sia l'irriducibile $2\nu\beta\beta$, che si sta cercando di implementare, è rilevare il nucleo prodotto dal decadimento per ogni doppio decadimento beta. L'isotopo prototipo per questa tecnica è lo ^{136}Xe [42], il quale decade attraverso doppio beta in un nucleo di Ba ionizzato e i maggiori sforzi di implementazione vengono dalle collaborazioni nEXO [43] e NEXT [16], in cui si cerca di rilevare singoli ioni di Ba con alta efficienza.

Per la ricerca di un segnale da $0\nu\beta\beta$, una sorgente di background che non si può eliminare è data dagli elettroni di decadimento del $2\nu\beta\beta$, poiché non sono distinguibili da quelli dello $0\nu\beta\beta$. Il rapporto fra segnale, S , di $0\nu\beta\beta$ e

background, B , di $2\nu\beta\beta$ è dato approssimativamente da [44]

$$\frac{S}{B} \propto \left(\frac{Q_{2\beta}}{\Delta E} \right)^6 \frac{T_{1/2}^{2\nu}}{T_{1/2}^{0\nu}} \quad (4.19)$$

con $Q_{2\beta}$ il Q -value del decadimento, che dipende dall'isotopo considerato, e ΔE la risoluzione energetica del detector. Da (4.19) risulta evidente che un buon isotopo da utilizzare nell'esperimento deve avere una grande emivita per il decadimento $2\nu\beta\beta$, oppure, per compensare un breve $T_{1/2}^{2\nu}$, il detector deve avere un'eccellente risoluzione energetica.

4.3.2 Stato dell'arte dei principali esperimenti

In questo paragrafo verranno elencati alcuni fra i più importanti esperimenti, allo stato dell'arte, di ricerca diretta del decadimento $0\nu\beta\beta$ con i relativi limiti inferiori sull'emivita, tra cui quello che verrà utilizzato in questo lavoro di tesi, e sulla massa efficace di Majorana, riassunti in tabella 4.1.

GERDA (^{76}Ge)

L'esperimento GERDA (GERmanium Detector Array), situato ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso (LNGS) a L'Aquila, Italia, si è concluso nel 2020. Come detector utilizzava semiconduttori di germanio, arricchito con l'isotopo 76, dato che la ricerca del doppio decadimento beta senza neutrini in questo esperimento è stata effettuata proprio sul ^{76}Ge . Durante la prima fase, GERDA-I, sono stati accumulati dati dal 2011 fino a metà 2013, con un'esposizione di $21,6 \text{ kg y}$; dopo un miglioramento nel rigettare background da elementi radioattivi e un aumento della massa del detector è iniziata la fase due dell'esperimento, GERDA-II, che ha raggiunto un indice di reiezione senza precedenti. Alla fine del ciclo di vita dell'esperimento, combinando i risultati di entrambe le fasi, è stato ottenuto un limite inferiore [10]

$$T_{1/2}^{0\nu} > 1,8 \times 10^{26} \text{ y} \quad (90\% \text{ C.L.}) \quad . \quad (4.20)$$

CUORE (^{130}Te)

Anche l'esperimento CUORE (Cryogenic Underground Observatory for Rare Events) è situato ai LNGS. Dato che l'isotopo su cui viene effettuata la ricerca è il ^{130}Te il detector utilizzato (bolometri, cioè calorimetri raffreddati), cristalli di TeO_2 , contiene tellurio. A differenza di GERDA però il Te non viene arricchito, perché l'abbondanza in natura dell'isotopo 130 è abbastanza grande. Combinando il limite sull'emivita dato dai primi risultati di ricerca di CUORE assieme a quelli dei precedenti esperimenti, Cuoricino e CUORE-0, si ottiene al momento, un limite inferiore [11]

$$T_{1/2}^{0\nu} > 1,5 \times 10^{25} \text{ y} \quad (90\% \text{ C.L.}) \quad . \quad (4.21)$$

La sensibilità attesa dell'esperimento CUORE dopo 5 anni di presa dati è di $9 \times 10^{25} \text{ y}$.

KamLAND-Zen (^{136}Xe)

Sfruttando l'infrastruttura KamLAND (Kamioka Liquid scintillator AntiNeutrino Detector) al Kamioka Observatory, nella prefettura di Gifu, Giappone, l'esperimento KamLAND-Zen (Zero neutrino) ricerca eventi di decadimento $0\nu\beta\beta$ nell'isotopo ^{136}Xe . Lo xenon è immerso in uno scintillatore organico contenuto in un palloncino all'interno, l'apparato sperimentale intero è circondato da un detector a luce Cherenkov cilindrico, che ha la funzione di veto per i muoni. L'esperimento ha utilizzato l'apparato KamLAND-Zen 400, con i suoi due programmi di ricerca (Phase I e Phase II), dal 2011 al 2015 ottenendo un limite finale di $T_{1/2}^{0\nu} > 1,07 \times 10^{26} \text{ y}$ (un decadimento $2\nu\beta\beta$ è stato osservato). Dal 2018 è in utilizzo il secondo apparato, KamLAND-Zen 800, migliore rispetto al predecessore per la reiezione di sorgenti di background e perché vengono usati 750 kg di Xe arricchito. A marzo 2022, recentissima pubblicazione, sono stati pubblicati i risultati combinati di KamLAND-Zen 800 con quelli precedenti di KamLAND-Zen 400 ottenendo il più stringente limite inferiore, ad oggi, sull'emivita del doppio decadimento beta senza neutrini [9]

$$T_{1/2}^{0\nu} > 2,3 \times 10^{26} \text{ y} \quad (90\% \text{ C.L.}) \quad . \quad (4.22)$$

Isotopo	$T_{1/2}^{0\nu} (\times 10^{25} \text{ y})$	$\langle m_{2\beta} \rangle \text{ (eV)}$	Esperimento
^{76}Ge	> 18	$< 0,079 - 0,180$	GERDA [10]
^{130}Te	$> 1,5$	$< 0,11 - 0,52$	CUORE [11]
^{136}Xe	> 23	$< 0,036 - 0,156$	KamLAND-Zen [9]

Tabella 4.1: Limiti sull'emivita considerando solo il meccanismo standard di scambio di neutrini leggeri e corrispondenti limiti sulla massa efficace di Majorana

4.3.3 Esperimenti futuri

Gli esperimenti futuri di ricerca diretta dello $0\nu\beta\beta$ puntano ad affinare i limiti sull'emivita del processo fino a valori $\gtrsim 10^{28} \text{ y}$. Si elencano di seguito alcuni fra i più promettenti progetti sperimentali per l'osservazione di un segnale di doppio beta senza neutrini.

LEGEND (^{76}Ge)

La collaborazione LEGEND [17] (Large Enriched Germanium Experiment for Neutrinoless double-beta Decay) è nata di recente dalla fusione dei gruppi degli esperimenti GERDA e Majorana Demonstrator (MJD) per la ricerca del decadimento $0\nu\beta\beta$ nel ^{76}Ge . Il progetto, non ancora iniziato, mira a combinare i punti di forza dei due esperimenti: l'ottima reiezione del background di GERDA e i materiali ultra puri di MJD, con l'obiettivo di raggiungere una sensibilità sull'emivita $\gtrsim 10^{28} \text{ y}$. LEGEND si dividerà in due fasi: LEGEND-200, che

sarà installato dove prima c'era GERDA, utilizzerà 200 *kg* di detector con ^{76}Ge arricchito per ottenere un limite inferiore su $T_{1/2}^{0\nu}$ di $\sim 10^{27}$ *y*; LEGEND-1000 aumenterà la massa fino a 1000 *kg* e ridurrà l'indice di background per puntare alla sensibilità ultima di $\sim 10^{28}$ *y*.

nEXO (^{136}Xe)

L'esperimento nEXO [18] (Enriched Xenon Observatory) è pianificato per ricercare eventi di decadimento $0\nu\beta\beta$ in una camera a proiezione temporale (TPC) con 5 tonnellate di ^{136}Xe . Con l'intento di raggiungere una sensibilità per $T_{1/2}^{0\nu}$, approssimativamente, $\gtrsim 10^{28}$ *y* e una risoluzione energetica del 2,4%, al *Q-value*, il background da $2\nu\beta\beta$ è praticamente trascurabile. Uno degli obiettivi che nEXO, così come altri progetti futuri, vuole raggiungere grazie a queste caratteristiche è quello di studiare completamente lo schema delle masse invertito su $m_{2\beta}$, che, come già detto in precedenza in questo lavoro di tesi, potrebbe determinare lo schema che la Natura ha scelto per le masse dei neutrini.

KamLAND2-Zen (^{136}Xe)

La KamLAND-Zen collaboration ha in progetto di costruire un nuovo apparato: KamLAND2-Zen [19]. Verrà utilizzata più di una tonnellata di Xenon arricchito e si migliorerà la risoluzione del detector, così da ridurre il background da $2\nu\beta\beta$. Se l'esperimento riuscirà nei suoi intenti di aumento della risoluzione energetica di un fattore 2, KamLAND2-Zen dovrebbe raggiungere una sensibilità su $T_{1/2}^{0\nu}$ di $\sim 2 \times 10^{27}$ *y* nell'arco di 5 anni di vita.

Capitolo 5

Modello BSM di tipo NJL

In questo capitolo verranno illustrati i principi fondamentali del modello BSM di tipo NJL utilizzato nel presente lavoro di tesi [28]. In questo modello il bosone di Higgs è una particella composita a causa del meccanismo di Nambu e Jona-Lasinio [26, 27], che contiene operatori efficaci a quattro fermioni. Nel limite di bassa energia questo modello descrive lo SM, con la RSS elettrodebole, equivalentemente a come lo descrive un modello con l'Higgs elementare. Per spiegare la comparsa degli operatori efficaci fermionici di dimensione 6 nel framework dello SM una possibilità è che derivino da una teoria UV di gravità quantistica, che fornisce naturalmente un cutoff ad alta energia, Λ_{cut} (la scala di Planck).

5.1 Operatori BSM a quattro fermioni

Il modello BSM di tipo NJL [28] su cui si basano i calcoli della tesi presenta degli operatori a quattro fermioni che derivano da una lagrangiana analoga a quella *torsion-free* di Einstein-Cartan [45, 46]. Questa, considerando solo il contenuto fermionico dello SM e tre neutrini *right* sterili di Majorana, è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{EC}(e, \omega) &+ \sum_f \bar{\psi}_{L,R}^f e^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{L,R}^f + \sum_f \bar{\nu}_R^{fC} e^\mu \mathcal{D}_\mu \nu_R^{fC} \\ &+ G(J_L^\mu J_{L\mu} + J_R^\mu J_{R\mu} + 2J_L^\mu J_{R\mu}) \\ &+ G(j_L^\mu j_{L\mu} + 2J_L^\mu j_{L\mu} + 2J_R^\mu j_{L\mu}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

dove $\mathcal{L}_{EC}(e, \omega)$ è la lagrangiana gravitazionale, $e_\mu(x) = e_\mu^a \gamma_a$ è un campo tetradi-co, $\omega_\mu(x) = \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab}$ è un campo di spin connessione, $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig\omega_\mu$ è la derivata covariante e le correnti assiali dei campi fermionici a massa nulla sono

$$J_{L,R}^\mu = \sum_f \bar{\psi}_{L,R}^f \gamma^\mu \gamma^5 \psi_{L,R}^f \quad , \quad j_L^\mu = \sum_f \bar{\nu}_R^f \gamma^\mu \gamma^5 \nu_R^f \quad . \quad (5.2)$$

Tutti gli operatori fermionici di dimensione $d > 6$ sono ignorati e la costante efficace G è identica per tutti quelli a quattro fermioni ($d = 6$). Tramite le

identità di Fierz è possibile riscrivere (5.1) come

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{EC}(e, \omega) &+ \sum_f \bar{\psi}_{L,R}^f e^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{L,R}^f + \sum_f \bar{\nu}_R^{fC} e^\mu \mathcal{D}_\mu \nu_R^{fC} \\ &+ \frac{G}{2} (J_L^\mu J_{L\mu} + J_R^\mu J_{R\mu} + j_L^\mu j_{L\mu} + 2J_L^\mu j_{L\mu}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$- G \sum_{ff'} (\bar{\psi}_L^f \psi_R^{f'} \bar{\psi}_R^{f'} \psi_L^f + \bar{\nu}_R^{fC} \psi_R^{f'} \bar{\psi}_R^{f'} \nu_R^{fC}) \quad (5.4)$$

cosicché soddisfino le simmetrie di gauge dello SM. Gli operatori in (5.3) sono repulsivi mentre quelli in (5.4) sono attrattivi. I primi rimangono operatori *irrelevanti* perché soppressi dalla scala energetica $\mathcal{O}(\Lambda_{cut}^{-2})$, i secondi invece saranno *rilevanti*, per cui la lagrangiana finale del modello è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{EC}(e, \omega) &+ \sum_f \bar{\psi}_{L,R}^f e^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{L,R}^f + \sum_f \bar{\nu}_R^{fC} e^\mu \mathcal{D}_\mu \nu_R^{fC} \\ &- G \sum_{ff'} (\bar{\psi}_L^f \psi_R^{f'} \bar{\psi}_R^{f'} \psi_L^f + \bar{\nu}_R^{fC} \psi_R^{f'} \bar{\psi}_R^{f'} \nu_R^{fC}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

dove ψ_L^f e ψ_R^f (per semplicità si intende anche ν_R^f) sono campi di Weyl a due componenti, rispettivamente doppietti e singoletti della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$, $f, f' = 1, 2, 3$ sono gli indici delle famiglie fermioniche sommati rispettivamente sui tre sapori leptonici (carica $q = 0, -1$) e sui tre dei quark (carica $q = 2/3, -1/3$).

5.1.1 Condensato $\langle \bar{t}^a t_a \rangle$

Essendo il più massivo fra tutti i fermioni, il quark top si accoppia fortemente al bosone di Higgs elementare e ciò potrebbe suggerire che la RSS dello SM possa essere dovuta ad una particolare dinamica del top ad alta energia. Furono Nambu e Jona-Lasinio [26, 27], ispirati dalla teoria BCS sui superconduttori, ad introdurre un meccanismo (detto NJL) di rottura dinamica delle simmetrie di gauge dello SM, senza l'Higgs elementare, strettamente collegato ad un operatore a quattro fermioni.

Attraverso la RSS di tipo NJL gli operatori a quattro fermioni in (5.5) portano a condensati leptonici e di quark rispettivamente di massa [47]

$$M_{ff'}^\ell = -\frac{G}{2} \langle \bar{\ell}^f \ell^{f'} \rangle = m_\ell \delta_{ff'} , \quad M_{ff'}^q = -\frac{G}{2N_c} \langle \bar{\psi}^f \psi^{f'} \rangle = m_q \delta_{ff'} . \quad (5.6)$$

È stato dimostrato [48] che l'unica VEV non nulla è quella del top, poiché questa soluzione porta allo stato di vuoto di minor energia. Inoltre questa soluzione genera il numero esatto di bosoni di Nambu-Goldstone (NG) che diventano le componenti longitudinali di Z e W^\pm .

Allora l'unico operatore che segue la dinamica della RSS dello SM è

$$- G (\bar{\psi}_L^{ia} t_{Ra}) (\bar{t}_R^b \psi_{Lib}) \quad (5.7)$$

dove a, b e i sono, rispettivamente, indici di colore e di sapore del top e del bottom, $\psi_L^{ia} = (t_L^a, b_L^a)$ e t_R^a sono il doppietto e il singoletto di $SU(2)_L$ dello SM. Come mostrato anche in [29], usando l'approccio dell'espansione per grandi N_c (numero di colori) il quark top acquisisce una massa "dinamica" data da

$$m_t = -\frac{G}{2N_c} \sum_a \langle \bar{t}^a t_a \rangle = -\frac{G}{2N_c} \left(-i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} S_F(p) \right) \quad (5.8)$$

perché il condensato di quark in QCD è dato dalla traccia, in sapore, colore e indice di Dirac, del propagatore. Esplicitando il propagatore nello spazio dei momenti in (5.8) si ha

$$m_t = \frac{iG}{2N_c} \left(4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m_t}{p^2 - m_t^2} \right) = 2iG \int^{\Lambda_{cut}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m_t}{p^2 - m_t^2} \quad (5.9)$$

dove il termine in \not{p} si annulla perché si ha la traccia di un numero dispari di gamma di Dirac e nell'ultima uguaglianza si è introdotto il cutoff UV, Λ_{cut} . Risolvendo l'integrale, divergente $\mathcal{O}(\Lambda_{cut}^2)$, si ottiene

$$G^{-1} = 2i \int^{\Lambda_{cut}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_t^2} \stackrel{Wick}{=} 2 \int^{\Lambda_{cut}} \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + m_t^2} \quad , \quad (5.10)$$

che passando in coordinate sferiche in 4 dimensioni dà

$$G^{-1} = \frac{2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} \int_0^{\Lambda_{cut}} dp_E \frac{p_E^3}{p_E^2 + m_t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda_{cut}} dp_E \frac{p_E}{1 + \left(\frac{m_t}{p_E}\right)^2} \quad . \quad (5.11)$$

Risolvendo l'integrale (5.11) si ha infine la massa del top in funzione dei parametri G e Λ_{cut} :

$$G^{-1} \approx \frac{1}{8\pi^2} \left[\Lambda_{cut}^2 - m_t^2 \ln \left(\frac{\Lambda_{cut}^2}{m_t^2} \right) \right] \quad . \quad (5.12)$$

La divergenza Λ_{cut}^2 è rimossa dall'equazione del gap di massa (Fig. 5.1) e si ottiene un valore della massa del top, in accordo con i dati sperimentali ($m_t \ll \Lambda_{cut}$), con un fine-tuning di G .

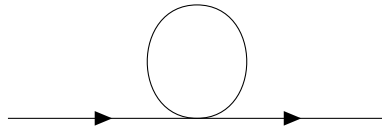


Figura 5.1: Diagramma a tadpole che corrisponde all'equazione di gap della massa nella RSS.

5.1.2 Higgs composito

Si considera ora la somma dei cosiddetti diagrammi a bolle in Fig.5.2, generati dall'equazione a quattro fermioni (5.7)

$$\Gamma_s(p^2) = -\frac{G}{2} - \left(\frac{G}{2}\right)^2 i \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle T \{ \bar{t}t(0) \bar{t}t(x) \} \rangle_{conn} + \dots \quad (5.13)$$

è possibile manipolarla [29] per portarla ad una serie geometrica, che sommmata dà

$$\Gamma_s(p^2) = -\frac{G}{2} \left[1 - 2iG \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_t^2)} - 2iG(4m_t^2 - p^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_t^2)((p^2 + k^2)^2 - m_t^2)} \right]^{-1} \quad (5.14)$$

a questo punto si nota dall'equazione del gap di massa (5.9) che il primo e il secondo termine a denominatore si annullano. Svolgendo l'integrale nel terzo termine al denominatore di (5.14) con la parametrizzazione di Feynman, si ha infine

$$\Gamma_s(p^2) = \frac{1}{2} \left[(p^2 - 4m_t^2) \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left\{ \frac{\Lambda_{cut}^2}{(m_t^2 - x(1-x)p^2)} \right\} \right]^{-1} . \quad (5.15)$$

Γ_s è il propagatore, generato dinamicamente, dello scalare composito $\bar{t}t$; questo stato legato viene considerato dal modello come il bosone di Higgs H fisico. Analogamente compaiono 3 bosoni di NG che diventano la componente longitudinale dei bosoni di gauge Z , W^\pm , i quali diventano massivi.

La lagrangiana efficace dello SM con il quark top e il bosone Higgs composito, ad una scala energetica bassa μ , è [29]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{SM} = & \mathcal{L}_{cinetico} + g_{t0}(\bar{\psi}_L t_R H + c.h.) \\ & + Z_H |\mathcal{D}_\mu H|^2 - m_H^2 H^\dagger H - \frac{\lambda_0}{2} (H^\dagger H)^2 \quad . \end{aligned} \quad (5.16)$$

dove g_{t0} è la costante d'accoppiamento di Yukawa nuda, $m_0(m_H) \sim \Lambda_{cut}$ la massa statica dell'Higgs e λ_0 è la costante dell'interazione alla scala del cutoff UV. La costante finita G per l'interazione a 4 fermioni si ricollega a queste come

$$G = \frac{g_{t0}^2}{m_0^2} \sim \frac{g_{t0}^2}{\Lambda_{cut}^2} \quad . \quad (5.17)$$

Si adotta la rinormalizzazione della funzione d'onda (fattore di forma) \tilde{Z}_H per il bosone Higgs composito, con l'usuale $Z_\psi = 1$ per i fermioni elementari,

$$\tilde{Z}_H(\mu) = \bar{g}_t^{-2}(\mu) \quad \text{con} \quad \bar{g}_t(\mu) = \frac{Z_{Yukawa}}{\sqrt{Z_H}} g_{t0} \quad (5.18)$$

$$\tilde{\lambda}(\mu) = \frac{\bar{\lambda}(\mu)}{\bar{g}_t^4(\mu)} \quad \text{con} \quad \bar{\lambda}(\mu) = \frac{Z_{4H}}{Z_H^2} \lambda_0 \quad (5.19)$$

per cui la massa del top generata via RSS è $m_t = \bar{g}_t^2(\mu) \frac{v}{\sqrt{2}}$ e il polo del propagatore dell'Higgs è $m_H^2(\mu) = 2\bar{\lambda}(\mu)v^2$, dove $v = 246$ GeV è la scala EW dello SM. Questo scenario fornisce una descrizione efficace per lo SM.

Per trovare le soluzioni delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione [28] (RG), si impongono i valori sperimentali delle masse del top, $m_t(m_t) \approx 173$ GeV, e dell'Higgs, $m_H(m_H) \approx 126$ GeV, come condizioni al contorno. In questo modo, dalle equazioni del RG, si trova che per valori di $\mu \gtrsim M_Z$, $\tilde{Z}_H(\mu) \neq 0$ e $\tilde{\lambda}(\mu) \neq 0$ sono finiti, perciò, dopo la rinormalizzazione, l'Higgs composito è uno stato fortemente legato che si comporta come una particella elementare interagente. Per scale energetiche grandi $\mu \gg M_Z$, $\tilde{Z}_H(\mu) \neq 0$ aumenta e la costante efficace $\tilde{\lambda}(\mu)$ diventa negativa ad una scala energetica $\sim 5,1$ TeV, il che potrebbe implicare nuova fisica BSM all'ordine di qualche TeV. Il significato fisico di questa scala si può capire completando il settore ad alta energia del modello. Il completamento UV nel modello [28] è, brevemente, il seguente:

- nella regione energetica in cui la costante d'accoppiamento a 4 fermioni G è forte, si formano bosoni $\Phi \propto (\bar{\psi}\psi)$ e fermioni $\Psi \propto \Phi\psi$ compositi [49], dove ψ sono i fermioni elementari dello SM;
- si ha [49] un valore critico per la costante d'accoppiamento a 4 fermioni $G_c(\Lambda)$. Questo descrive una transizione di fase del secondo ordine dalla regione di forte accoppiamento $G > G_c$ a quella di debole $G < G_c$. Quando la scala energetica μ diventa minore della scala di transizione Λ , i bosoni Φ e fermioni Ψ compositi si dissolvono nei fermioni dello SM.

La scala di possibile nuova fisica $\sim 5,1$ TeV potrebbe essere quella di transizione Λ definita dal valore critico G_c . Essendo molto più piccola di Λ_{cut} , il problema del fine-tuning di G può essere risolto naturalmente con la sostituzione $\Lambda_{cut} \rightarrow \Lambda$ nell'equazione del gap di massa (5.8).



Figura 5.2: Un bosone scalare o pseudo-scalare composito può essere rappresentato dalla somma dei diagrammi a bolle.

5.1.3 Rottura di simmetria esplicita

Insieme alla costante efficace a 4 fermioni G gli altri parametri fondamentali per il modello in considerazione sono le matrici di mescolamento per quark, leptoni e quark-leptoni per qualunque combinazione di chiralità [47]. Queste infatti giocano un ruolo fondamentale nella generazione delle masse di Dirac dei fermioni dello SM, salvo il top. Come mostrato nel dettaglio in referenza [47] le masse di Dirac degli altri fermioni dello SM vengono generate dalla rottura di simmetria

esplicita (ESB) indotta dalla massa del top, generata via SSB, attraverso tutte le possibili matrici di mixing e l'accoppiamento, tramite vertici 1PI con costante d'accoppiamento \mathcal{G}_R^W , con un bosone W (5.27) alla scala energetica Λ . Le equazioni di Dyson-Schwinger (DS) per l'auto-energia dei fermioni dello SM sono accoppiate fra tutte le famiglie dello SM:

$$m_{ij}^D = \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{K}_{ij}(p) \frac{m_{ij}^D}{p^2 - (m_{ij}^D)^2} + \mathcal{M}_{ij}^D[m_t^D, (U)_{L,R}^\dagger U_{L,R}] \quad , \quad (5.20)$$

dove $\mathcal{M}_{ij}^D[m_t^D, (U)_{L,R}^\dagger U_{L,R}]$ è un termine disomogeneo e $\mathcal{K}_{ij}(p)$ il kernel delle interazioni a 4 fermioni e/o delle interazioni di gauge dello SM. Una volta che la massa del top m_t^D è spontaneamente generata, grazie ai termini disomogenei $\mathcal{M}_{ij}^D[m_t^D, (U)_{L,R}^\dagger U_{L,R}]$ le equazioni di DS ammettono soluzioni non nulle. Questa generazione delle masse di Dirac dei fermioni dello SM è attribuita alla ESB, senza generazione di bosoni NG.

5.2 Rottura di simmetria PQ spontanea

Come il canale del quark top segue la dinamica della RSS elettrodebole, il secondo termine in (5.5) la stessa dinamica per la RSS di Peccei-Quinn (PQ) [50] dei neutrini sterili. Infatti, fra gli operatori di dimensione 6 in (5.5), il termine che ha esclusivamente i tre neutrini *right*

$$- G(\bar{\nu}_R^{\ell C} \nu_R^\ell)(\bar{\nu}_R^\ell \nu_R^{\ell C}) \quad (5.21)$$

conserva il numero leptonico di neutrini sterili $U(1)_{lepton}$, che può essere identificato con la simmetria dell'ipercarica debole del neutrino sterile $U(1)_{Y_R^\nu}$, ma viola il numero leptonico della famiglia ℓ di due unità. L'ipercarica Y_R^ν è proporzionale alla differenza $B - L$ tra il numero barionico e leptonico. Si identifica la simmetria globale $U(1)_{lepton}$ come quella di PQ $U_{lepton}^{PQ}(1)$, cosicché solo i neutrini sterili portino carica PQ: α_{PQ} . La rottura spontanea della simmetria PQ porta alla generazione della massa di Majorana dei neutrini sterili, di un assione (come bosone NG) e di un bosone scalare massivo. Inoltre, dato che la RSS porta a un termine di massa di Majorana $\bar{\nu}_R^C \nu_R$, è necessario che $Y_R^\nu = 0$, perciò $Y_L = -1$ e si riottiene che i neutrini dello SM ν_L^ℓ hanno carica elettrica perfettamente nulla.

5.2.1 Condensato $\langle \bar{\nu}_R^{fC} \nu_R^f \rangle$

L'operatore del quark top (5.7) e quello del neutrino sterile (5.21) hanno la stessa struttura, perciò quest'ultimo deve seguire la dinamica della RSS $U_{lepton}^{PQ}(1)$ sviluppando un condensato $\langle \bar{\nu}_R^{fC} \nu_R^f \rangle$ e generarne la massa di Majorana. Dato che G è uguale per (5.7) e (5.21), e l'indice di famiglia f ed $N_f = 3$ possono giocare il ruolo dell'indice di colore a e del numero di colori N_c , si può usare anche in questo caso l'approccio dello sviluppo per grandi N , cosicché la simmetria chirale

$U_{lepton}^{PQ}(1)$ è spontaneamente rotta da

$$m^M = -G \sum_f \langle \bar{\nu}_R^{fC} \nu_R^f \rangle = 2iG \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m^M}{p^2 - (m^M)^2} \quad (5.22)$$

Analogamente alla generazione dinamica della massa del top, l'equazione del gap di massa (5.22) genera la massa di Majorana per il neutrino sterile più pesante N_R^3 , autostato di massa. Il motivo per il quale solo un neutrino sterile acquisisce massa via RSS è identico a quello per il condensato del top, ovvero è la soluzione energeticamente favorita per lo stato fondamentale del vuoto, infatti viene generato un solo bosone di NG: l'assione.

Infatti il teorema di Nambu-Goldstone garantisce che alla RSS $U_{lepton}^{PQ}(1)$ vengono prodotti: un bosone di NG a massa nulla sterile (assione), cioè lo stato legato pseudoscalare

$$\phi^M = i \sum_f \langle \bar{\nu}_R^{fC} \gamma_5 \nu_R^f \rangle \quad (5.23)$$

e una particella scalare massiva sterile (Higgs-like), bosone χ , ovvero lo stato legato scalare

$$\phi_H^M = \sum_f \langle \bar{\nu}_R^{fC} \nu_R^f \rangle \quad ; \quad (5.24)$$

questi stati composti sono rappresentati dai poli nella somma dei diagrammi a bolle (Fig.5.2),

$$\Pi_{s,p}(q^2) = \frac{iG}{2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \bar{\nu}_R^{fC} O_{s,p} \nu_R^f(0) \bar{\nu}_R^{fC} O_{s,p} \nu_R^f(x) \rangle_{conn} \quad (5.25)$$

dove $O_s = \mathbb{1}$ per il canale scalare e $O_p = \gamma_5$ per quello pseudoscalare. La trattazione dell'assione e del bosone χ è completamente analoga a quella dell'Higgs composto nella sezione precedente, con la differenza che in questo caso i bosoni composti portano carica di numero leptonico del neutrino sterile pari a 2 e la particella di NG, l'assione, non può essere assorbito da bosoni di gauge.

Analogamente alla generazione delle masse di Dirac in (5.20), le masse degli altri due neutrini sterili m_1^M e m_2^M sono generate per ESB. Le equazioni del gap di massa per questi due neutrini *right* sono

$$m_{1,2}^M = 2iG \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m_{1,2}^M}{p^2 - (m_{1,2}^M)^2} + \mathcal{M}_{1,2}[m_3^M, (U^\ell)_R^\dagger U_R^\nu] \quad (5.26)$$

dove il primo termine nel membro di destra è il diagramma tadpole (Fig.5.1) e il secondo è il termine disomogeneo indotto dalla massa m_3^M attraverso la matrice di mixing leptonica *right* $[(U^\ell)_R^\dagger U_R^\nu]$.

5.3 Interazioni per il decadimento $0\nu\beta\beta$

In quest'ultima sezione verranno esplicitamente messe in evidenza le interazioni con cui si faranno i calcoli per il decadimento $0\nu\beta\beta$.

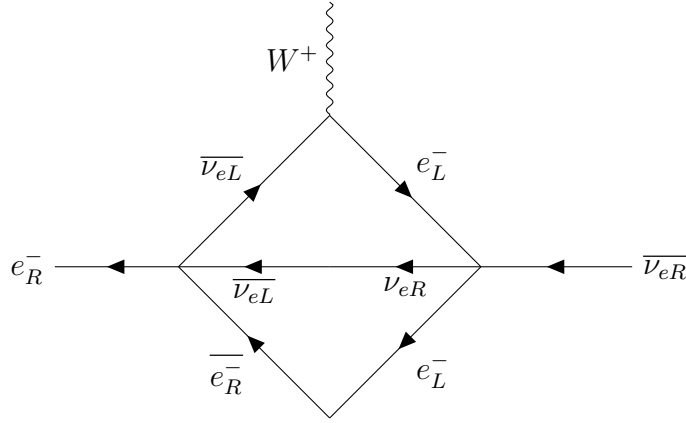


Figura 5.3: Diagramma di Feynman che collega il neutrino sterile al bosone di gauge W .

5.3.1 Interazione di gauge $V+A$

Sebbene i neutrini sterili di Majorana ν_R^ℓ non sviluppino una costante d'accoppiamento efficace EW dalla RSS di PQ, perché sono singoletti delle simmetrie dello SM, possono farlo attraverso l'operatore in (5.5)

$$G\bar{\nu}_R^{fC}\psi_R^f\bar{\psi}_R^f\nu_R^{fC} \quad (5.27)$$

perché i campi ψ_R^f , carichi per lo SM, si accoppiano con i bosoni di gauge EW. Pensare a dei campi che hanno una costante di accoppiamento efficace con i bosoni per la cui interazione sono neutri non dovrebbe essere strano, infatti ciò è in completa analogia con il coefficiente efficace elettromagnetico che il neutrino dello SM ν_L^ℓ sviluppa per via delle interazioni efficaci di Fermi $G_F(\bar{\nu}_L^\ell\gamma^\mu\ell_L)(\bar{\ell}_L\gamma_\mu\nu_L^\ell)$ e $G_F(\bar{\nu}_L^\ell\gamma^\mu\nu_L^\ell)(\bar{\ell}_L\gamma_\mu\ell_L)$.

L'interazione a quattro fermioni (5.27) induce vertici one-particle irreducible (1PI) di neutrini sterili ν_R^ℓ che interagiscono con i bosoni di gauge dello SM; fra questi vertici, quello dato dal diagramma sunset in Fig. 5.3 sarà di riferimento per il primo calcolo del prossimo capitolo. Questo è l'accoppiamento, *right-handed*, tra il neutrino sterile e il bosone W

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{\ell}_R \gamma^\mu \nu_R^\ell W_\mu^- + h.c. \quad (5.28)$$

dove \mathcal{G}_R^W è la costante d'accoppiamento efficace *right*, che dipende dalla G delle interazioni a quattro fermioni, g_w è la costante di gauge di $SU(2)_L$, collegata a quella di Fermi da $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8M_W^2}$, e (ν_R^ℓ, ℓ_R) sono gli autostati di gauge. Ora si manipola (5.28) per portarla nella forma desiderata per il calcolo dell'emivita dello $0\nu\beta\beta$ nel caso di interazioni di gauge

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) [(U_R^\ell)^\dagger U_R^\nu]^{ll'} \bar{l} \gamma^\mu P_R N^l W_\mu^- + h.c. \quad (5.29)$$

con (N_R^l, l_R) i leptoni nella base delle masse, U_R^ν e U_R^ℓ matrici unitarie 3×3 ($\ell = e, \mu, \tau$). Si noti che $[(U_R^\ell)^\dagger U_R^\nu]$ è ignota, non è la matrice di mixing PMNS per

i leptoni *left*. Per questa ragione verrà trascurata nel lavoro di tesi considerando gli elementi diagonali pari all'unità $[(U_R^e)^\dagger U_R^e] = 1$. Perciò, per la prima famiglia leptonica, si ha

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right) \bar{e} \gamma^\mu P_R N^e W_\mu^- + h.c. \quad . \quad (5.30)$$

5.3.2 Interazione di contatto quark-leptoni

Nella lagrangiana (5.5) non sono presenti termini di interazione quark-leptoni, eppure dovrebbero essere previsti nel framework della teoria di Einstein-Cartan [51]. Per questo motivo si considerano anche le seguenti interazioni, che rispettano le simmetrie dello SM, a quattro fermioni

$$\mathcal{L}_{q-\ell} = -G \sum_{ff'} \left[(\bar{\ell}_L^{if} e_R^{f'}) (\bar{d}_R^{af'} \psi_{Lia}^f) + (\bar{\ell}_L^{if} \nu_{eR}^{f'}) (\bar{u}_R^{af'} \psi_{Lia}^f) \right] + h.c. \quad . \quad (5.31)$$

Da queste derivano le interazioni di contatto che contribuiscono al decadimento $n \rightarrow p + N + e$ nella forma vista in [52]

$$\mathcal{L}_{q-\ell} \supset G (\bar{l}_L^i N_R^e) (\bar{u}_R^a \psi_{Lia}) + h.c. \quad (5.32)$$

con $l_L^i = (\nu_L^e, e_L)$ ed e_R doppietto e singoletto di $SU(2)_L$, N_R^e neutrino di Majorana *right* per i leptoni e $\psi_{Lia} = (u_{La}, d_{La})$, u_{Ra} e d_{Ra} per i quark; gli indici a di colore e i di isospin debole sono sommati. Analogamente alle considerazioni fatte per il mixing e sugli autostati di massa per arrivare a (5.30) si arriva alla forma con cui verranno svolti i calcoli dell'emivita nel caso di interazioni di contatto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q-\ell} &\supset G (\bar{e}_L N_R^e) (\bar{u}_R^a d_{La}) + h.c. \\ &= G (\bar{e} P_R N^e) (\bar{u}^a P_L d_a) + h.c. \quad . \end{aligned} \quad (5.33)$$

Capitolo 6

Calcolo delle emivite

In questo capitolo verrà illustrato il contributo originale della tesi, ovvero il calcolo dell'emivita per il decadimento $0\nu\beta\beta$ per una classe di modelli BSM con interazioni a quattro fermioni di tipo NJL (5.5). I diagrammi rilevanti per lo $0\nu\beta\beta$ con scambio di neutrino pesante sono quattro: quello con solo interazioni di gauge Fig.6.1, con solo interazioni di contatto Fig.6.2 e gli ultimi due con interazioni mixed, una di gauge e una di contatto, Fig.6.3 e Fig.6.4.

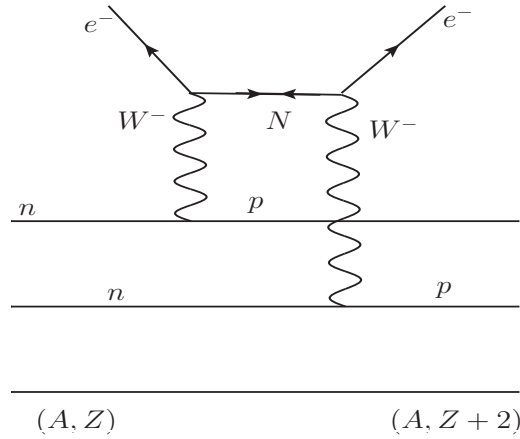


Figura 6.1: Diagramma di Feynman del decadimento $0\nu\beta\beta$ per interazioni puramente di gauge

6.1 Interazioni di gauge

In una transizione $0\nu\beta\beta$ in cui contribuiscono solo interazioni di gauge, due neutroni n decadono, emettendo un bosone W^- , in due protoni p attraverso un vertice dello SM

$$\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C J_\mu^h(x) W^{+\mu}(x) \quad (6.1)$$

dove g_w è la costante d'accoppiamento di $SU(2)_L$, θ_C è l'angolo di mixing di Cabibbo ($\cos \theta_C \approx 0,974$) e $J_\mu^h(x) = (\bar{u}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)d)(x)$ è la corrente debole

adronica, definita portando fuori il fattore $\frac{1}{2}$ dal proiettore di chiralità per rifarsi alla letteratura sugli elementi di matrice nucleare. Successivamente i bosoni di gauge decadono attraverso la transizione BSM (5.30) in una coppia elettrone *right* e_R e neutrino pesante di Majorana elettronico N_R^e .

Riassumendo, si può scrivere la lagrangiana utile per l'interazione di gauge come

$$\mathcal{L}_{GI}(x) = \frac{g_w}{\sqrt{2}} \left[\mathcal{G}_R^W (\bar{e} \gamma^\mu P_R N^e W_\mu^-)(x) + \frac{1}{2} \cos \theta_C (J_\mu^h W^{+\mu})(x) \right] + c.h. \quad (6.2)$$

con $P_{L,R} = \frac{1-\gamma^5}{2}$ proiettori di chiralità, rispettivamente, *left* e *right*.

6.1.1 Calcoli preliminari

L'elemento della matrice di transizione (S-matrix) non banale, per il decadimento $0\nu\beta\beta$, è

$$\langle e_{p_1} e_{p_2} 0_F^+ | \frac{i^2}{2} \int d^4x d^4y {}''T\{\mathcal{L}_{GI}(x)\mathcal{L}_{GI}(y)\}'' | 0_I^+ \rangle \equiv T_{GI} \quad (6.3)$$

dove si considerano solo transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$ fra il nucleo iniziale e finale ed il virgolettato $''\cdot''$ indica che si considera solo il termine che restituisce il diagramma di Feynman connesso desiderato (Fig.6.1). Chiamando la parte leptonica di (5.30) $\bar{e} \gamma^\mu P_R N^e \equiv j_R^\mu$ si ha

$$\begin{aligned} T_{GI} = & - (\mathcal{G}_R^W)^2 \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^4 \frac{(\cos \theta_C)^2}{8} \int d^4x d^4y \left(\frac{1-P_{12}}{\sqrt{2}} \right) (-i\delta_\mu^\lambda) (-i\delta_\nu^\rho) \times \\ & \times \frac{\langle e_{p_1} e_{p_2} 0_F^+ | T\{j_R^\mu(x) J_\lambda^h(y) J_\rho^h(x) j_R^\nu(y)\} | 0_I^+ \rangle}{((q+p_1)^2 - M_W^2 + i\epsilon)((q-p_2)^2 - M_W^2 + i\epsilon)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

dove M_W è la massa del bosone di gauge W e $\frac{1-P_{12}}{\sqrt{2}}$ è l'operatore di antisimmetrizzazione sui leptoni carichi identici nello stato finale, inserito per considerarne la natura fermionica.

Manipolando la posizione dei campi nel prodotto T ordinato si ottiene, come intuibile dal diagramma di Feynman, il propagatore del neutrino di Majorana da

$$\langle e_{p_1} e_{p_2} | T\{j_R^\mu(x) j_R^\nu(y)\} | 0 \rangle \equiv \langle e_{p_1} e_{p_2} | T\{\bar{e}(x) \gamma^\mu P_R N^e(x) \bar{e}(y) \gamma^\nu P_R N^e(y)\} | 0 \rangle. \quad (6.5)$$

Infatti $j_R^\nu(y)$ è simmetrico e posso prenderne il trasposto $N^{eT}(y) P_R^T \gamma^{\nu T} \bar{e}^T(y)$, cosicché si abbia

$$e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \langle 0 | T\{N^e(x) N^{eT}(y)\} | 0 \rangle P_R^T \gamma^{\nu T} \bar{e}_{p_2}^T. \quad (6.6)$$

Dato che il neutrino considerato è una particella di Majorana $N = N^C = C \bar{N}^T$ e dalla proprietà della matrice di coniugazione in carica $C^T = C^{-1}$ si ha

$$N^{eT} = (N^{eC})^T = \bar{N}^e C^T = \bar{N}^e C^{-1} \quad (6.7)$$

e (6.6) si riscrive come

$$- e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \langle 0 | T \{ N^e(x) \bar{N}^e(y) \} | 0 \rangle C P_R^T \gamma^{\nu T} \bar{e}_{p_2}^T, \quad (6.8)$$

dove il propagatore del neutrino compare esplicitamente.

Utilizzando (6.8), T_{GI} in (6.4) si scrive

$$\begin{aligned} T_{GI} = & - (\mathcal{G}_R^W)^2 \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^4 \frac{(\cos \theta_C)^2}{8} \left(\frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \right) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 x d^4 y e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \times \\ & \times e^{-iq \cdot (x-y)} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \frac{i(\not{q} + M_N)}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} C^{-1} P_R^T \gamma^{\nu T} \bar{e}_{p_2}^T \times \\ & \times \frac{(-i\delta_\mu^\lambda)(-i\delta_\nu^\rho) \langle 0_F^+ | T \{ J_\lambda^h(y) J_\rho^h(x) \} | 0_I^+ \rangle}{((q + p_1)^2 - M_W^2 + i\epsilon)((q - p_2)^2 - M_W^2 + i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

dove $e_{p_{1,2}}$ sono le funzioni d'onda degli elettroni finali, di 4-momento p_1 e p_2 , q è il 4-momento del neutrino di Majorana, quindi quello scambiato del processo. A questo punto si lavora per riportare (6.9) in una forma che espliciti la conservazione del 4-momento totale:

- dato che $g_w^2 = \frac{8M_W^2 G_F}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_R^W)^2 \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^4 \frac{(\cos \theta_C)^2}{8} &= (\mathcal{G}_R^W)^2 \frac{1}{4} \left(\frac{8M_W^2 G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{(\cos \theta_C)^2}{8} \\ &= M_W^4 (\mathcal{G}_R^W)^2 G_F^2 (\cos \theta_C)^2 = M_W^4 G_{eff}^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

dove si è definita la costante ausiliaria $G_{eff} \equiv \mathcal{G}_R G_F \cos \theta_C$;

- si utilizzano le proprietà della matrice di coniugazione in carica $C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C$ e delle matrici gamma di Dirac $C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu$, $C\gamma^5 C^{-1} = +\gamma^5$ per riscrivere

$$\begin{aligned} C^{-1} P_R^T \gamma^{\nu T} \bar{e}_{p_2}^T &= C^{-1} P_R^T C C^{-1} \gamma^{\nu T} C C^{-1} \bar{e}_{p_2}^T \\ &= -P_R \gamma^\nu C^{-1} \bar{e}_{p_2}^T = P_R \gamma^\nu e_{p_2}^C; \end{aligned} \quad (6.11)$$

- si fa l'*ansatz* che le correnti adroniche siano date dalla somma delle singole correnti nucleoniche

$$J_\mu^h(x) = \sum_i J_\mu^{(i)}(x) \quad (6.12)$$

con l'indice i che scorre su tutti i nucleoni dell'isotopo che decade tramite $0\nu\beta\beta$. In questo modo si può sfruttare la traslazione del 4-momento

$$J_\mu^h(x) = e^{i\hat{P}x} J_\mu^h(0) e^{-i\hat{P}x} \quad (6.13)$$

per manipolare il valore di aspettazione delle correnti deboli adroniche

$$\langle 0_F^+ | T \{ J_\rho^h(x) J_\lambda^h(y) \} | 0_I^+ \rangle = e^{i(P_F - P_I) \cdot y} \langle 0_F^+ | T \{ J_\rho^h(x - y) J_\lambda^h(0) \} | 0_I^+ \rangle \quad (6.14)$$

dove P_I e P_F sono rispettivamente i 4-momenti dei nuclei nello stato iniziale e finale;

- il termine proporzionale a $\not{q} = p_\alpha \gamma^\alpha$ nel propagatore del neutrino di Majorana è nullo

$$P_R \frac{\not{q} + M_N}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} P_R = \frac{\not{q} P_L P_R + M_N P_R^2}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} = \frac{M_N P_R}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} \quad (6.15)$$

perché

$$P_R \gamma^\alpha = \frac{\gamma^\alpha + \gamma^5 \gamma^\alpha}{2} = \frac{\gamma^\alpha - \gamma^\alpha \gamma^5}{2} = \gamma^\alpha P_L \quad (\{\gamma^5, \gamma^\alpha\} = 0) \quad (6.16)$$

e P_R essendo un proiettore è idempotente ($P_R^2 = P_R$) ed ortogonale ($P_L P_R = P_R P_L = 0$).

Riassumendo questi risultati si ha per T_{GI}

$$T_{GI} = iG_{eff}^2 M_W^4 M_N \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 x d^4 y e^{-iq \cdot (x-y)} e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} e^{i(P_F - P_I) \cdot y} \times \\ \times \frac{\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu e_{p_2}^C \langle 0_F^+ | T \{ J_\nu^h(x-y) J_\mu^h(0) \} | 0_I^+ \rangle}{(q^2 - M_N^2 + i\epsilon) ((q + p_1)^2 - M_W^2 + i\epsilon) ((q - p_2)^2 - M_W^2 + i\epsilon)} \quad , \quad (6.17)$$

che con le sostituzioni

$$\begin{cases} x = z + \frac{u}{2} \\ y = z - \frac{u}{2} \end{cases} \quad \text{con} \quad d^4 x d^4 y = d^4 u d^4 z \quad (6.18)$$

diventa

$$T_{GI} = iG_{eff}^2 M_W^4 M_N \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 u d^4 z e^{-i(q - \frac{1}{2}(p_1 - p_2 - P_F + P_I)) \cdot u} e^{i(P_F + p_1 + p_2 - P_I) \cdot z} \times \\ \times \frac{\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu e_{p_2}^C \langle 0_F^+ | T \{ J_\nu^h(u) J_\mu^h(0) \} | 0_I^+ \rangle}{(q^2 - M_N^2 + i\epsilon) ((q + p_1)^2 - M_W^2 + i\epsilon) ((q - p_2)^2 - M_W^2 + i\epsilon)} \quad (6.19)$$

e si ottiene la conservazione del 4-momento totale dall'integrale in z

$$\int d^4 z e^{i(P_F + p_1 + p_2 - P_I) \cdot z} = (2\pi)^4 \delta^4(P_F + p_1 + p_2 - P_I) \quad . \quad (6.20)$$

Allora si può definire, come di solito si fa

$$T_{GI} \equiv i(2\pi)^4 \delta^4(P_F + p_1 + p_2 - P_I) M_{GI} \quad (6.21)$$

con

$$M_{GI} = G_{eff}^2 M_W^4 M_N \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu e_{p_2}^C \times \\ \times \frac{W_{\nu\mu}(q - p_1)}{(q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon) (q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon)^2} \quad (6.22)$$

dove si sono trascurati p_1 e p_2 nei denominatori dato che tipicamente sono molto minori rispetto al 4-momento trasferito q , si sono definiti $\omega_{N(W)}^2 = (\vec{q})^2 + M_{N(W)}^2$ e la funzione

$$W_{\nu\mu}(q - p_1) \equiv \int d^4u e^{-i(q-p_1)\cdot u} \langle 0_F^+ | T \{ J_\nu^h(u) J_\mu^h(0) \} | 0_I^+ \rangle \quad . \quad (6.23)$$

Per terminare i calcoli preliminari si esplicita l'azione dell'operatore di scambio sulle funzioni d'onda spinoriali degli elettroni:

$$\frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu e_{p_2}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu e_{p_2}^C - \bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu e_{p_1}^C) \quad . \quad (6.24)$$

Manipolo il secondo termine

$$\bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu C \bar{e}_{p_1}^T \quad , \quad (6.25)$$

essendo uno scalare se ne prende il trasposto, che è uguale a sé per definizione,

$$(\bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu C \bar{e}_{p_1}^T)_{1 \times 1} \equiv [\bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu C \bar{e}_{p_1}^T]^T = \bar{e}_{p_1} C^T \gamma^{\nu T} (1 + \gamma_5^T) \gamma^{\mu T} \bar{e}_{p_2}^T \quad . \quad (6.26)$$

Non utilizzando esplicitamente nessuna rappresentazione per le matrici gamma, ci si affida alle proprietà generali della matrice di coniugazione in carica ($-C = C^T = C^{-1} = C^\dagger$) e alle relazioni $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$, $C \gamma_5 C^{-1} = +\gamma_5^T$, allora

$$\begin{aligned} & \bar{e}_{p_1} C^{-1} \gamma^{\nu T} C C^{-1} \frac{1 + \gamma_5^T}{2} C C^{-1} \gamma^{\mu T} C C^{-1} \bar{e}_{p_2}^T \\ &= \bar{e}_{p_1} (-\gamma^\nu) \frac{1 + \gamma_5}{2} (-\gamma^\mu) (-C) \bar{e}_{p_2}^T \\ &= -\bar{e}_{p_1} \gamma^\nu P_R \gamma^\mu e_{p_2}^C \end{aligned} \quad (6.27)$$

rimettendola in (6.24) si ha

$$\frac{(1 - P_{12})}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \gamma^\nu e_{p_2}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu \gamma^\nu P_L e_{p_2}^C + \bar{e}_{p_1} \gamma^\nu \gamma^\mu P_L e_{p_2}^C) \quad (6.28)$$

che tramite l'algebra di Clifford ($\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$) dà

$$\frac{2}{\sqrt{2}} g^{\mu\nu} \bar{e}_{p_1} P_L e_{p_2}^C \quad . \quad (6.29)$$

Infine tornando a (6.22), con il risultato di (6.29), si ottiene

$$M_{GI} = \frac{2G_{eff}^2}{\sqrt{2}} M_W^4 M_N \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{e}_{p_1} P_L e_{p_2}^C \frac{W_\mu^\mu(q - p_1)}{(q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon)(q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon)^2} \quad . \quad (6.30)$$

6.1.2 Elementi di matrice nucleare

In questo paragrafo si calcolerà il "termine adronico"

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{W_\mu^\mu(q - p_1)}{(q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon)(q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon)^2} \quad (6.31)$$

in (6.30), fino ad arrivare ai famigerati elementi di matrice nucleare (NME), sorgente maggiore di incertezze nel calcolo teorico dell'emivita dello $0\nu\beta\beta$.

Si inizia esplicitando le funzioni θ nel prodotto T ordinato della funzione $W_\mu^\mu(q - p_1)$

$$W_\mu^\mu(q - p_1) = \int d^4 u e^{-i(q-p_1)\cdot u} \langle 0_F^+ | [\theta(u_0) J^{h\mu}(u) J_\mu^h(0) + \theta(-u_0) J_\mu^h(0) J^{h\mu}(u)] | 0_I^+ \rangle, \quad (6.32)$$

per le quali si usano le rappresentazioni integrali

$$\theta(u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{iu_0\omega}}{\omega - i\epsilon}, \quad \theta(-u_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{iu_0\omega}}{\omega + i\epsilon} \quad (6.33)$$

che sono equivalenti fra loro perché la θ di Heaviside è una funzione reale. Essendo le trattazioni analoghe fra loro, per semplicità si esplicita solo quella per il termine proporzionale a $\theta(u_0)$:

$$\int d^3 \vec{u} e^{i\vec{u}\cdot(\vec{q}-\vec{p}_1)} \int \frac{d\omega}{2\pi i} du_0 e^{-iu_0(q_0-E_1-\omega)} \frac{\langle 0_F^+ | J^{h\mu}(u) J_\mu^h(0) | 0_I^+ \rangle}{\omega - i\epsilon}. \quad (6.34)$$

Come si è solito fare in calcoli dell'emivita di $0\nu\beta\beta$ [20], si introduce un set completo di autostati nucleari intermedi $|X\rangle$ e si fa una traslazione spazio-temporale sulla prima corrente adronica per eliminarne la dipendenza da u_0

$$-i \int d^3 \vec{u} e^{i\vec{u}\cdot(\vec{q}-\vec{p}_1)} \int \frac{d\omega}{2\pi} du_0 e^{-iu_0(q_0-E_1-E_F+E_X-\omega)} \times \\ \times \sum_{|X\rangle} \frac{\langle 0_F^+ | J^{h\mu}(\vec{u}) | X \rangle \langle X | J_\mu^h(0) | 0_I^+ \rangle}{\omega - i\epsilon}, \quad (6.35)$$

dall'integrale in u_0 si ricava una delta di Dirac

$$\int du_0 e^{-iu_0(q_0-E_1-E_F+E_X-\omega)} = (2\pi) \delta(q_0 - E_1 - E_F + E_X - \omega) \quad (6.36)$$

che si fa agire immediatamente cancellando l'integrale in ω

$$-i \int d^3 \vec{u} e^{i\vec{u}\cdot(\vec{q}-\vec{p}_1)} \sum_{|X\rangle} \frac{\langle 0_F^+ | J^{h\mu}(\vec{u}) | X \rangle \langle X | J_\mu^h(0) | 0_I^+ \rangle}{q_0 - E_1 - E_F + E_X - i\epsilon} \quad (6.37)$$

dove E_X è l'energia dello stato intermedio $|X\rangle$. Per arrivare ad una forma più pragmatica della funzione W da questo punto, si devono attuare alcune

approssimazioni. La prima è quella di chiusura: l'energia di uno stato $|X\rangle$ è $E_X = E_{CM}(\vec{P}) + \epsilon_n$, dove $E_{CM}(\vec{P})$ è l'energia traslazionale del centro di massa ed ϵ_n è quella di eccitazione, tipica dello stato $|X\rangle$ [53]. La somma degli stati intermedi contiene un'integrazione continua sul momento del centro di massa \vec{P} e una somma sulla parte discreta ($\sum_{|X\rangle} \rightarrow \int \frac{d^3\vec{P}}{(2\pi)^3} \sum_n$). Nell'approssimazione di chiusura l'energia di eccitazione viene sostituita da un valore medio $\bar{\epsilon}_n$ ($\langle E_X \rangle = E_{CM}(\langle \vec{P} \rangle) + \bar{\epsilon}_n$) e la somma discreta può essere effettuata. Per l'*ansatz* (6.12) i nucleoni sono considerati indipendenti fra loro, perciò si può separare il moto del centro di massa ($\vec{R} = \frac{1}{A} \sum_i \vec{u}_i$) cosicché [53]

$$\vec{\xi}_i = \vec{u}_i - \vec{R} \quad \sum_i \vec{\xi}_i = \vec{0} \quad (6.38)$$

dove le $\vec{\xi}_i$ sono le coordinate relative fra i nucleoni, in funzioni delle quali

$$\Psi(u_1, \dots, u_A) = e^{i\vec{P} \cdot \vec{R}} \Phi(\xi_1, \dots, \xi_{A-1}) \quad . \quad (6.39)$$

Per gli elementi di matrice degli operatori ad un corpo si ha [53] che

$$\langle 0_F^+ | J^{h\mu}(\vec{u}) | X \rangle = \sum_k \langle \langle 0_F^+ | e^{i(\vec{P} - \vec{P}_F) \cdot (\vec{u} - \vec{\xi}_k)} \tilde{J}^{(k)\mu}(\vec{P} - \vec{P}_F) | X \rangle \rangle \quad (6.40)$$

e analogo per l'altra corrente adronica, la notazione $\langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle$ indica che l'elemento di matrice è nello spazio delle $A - 1$ nuove coordinate relative.

Si integra ora nel momento del centro di massa:

$$\begin{aligned} & -i \int \frac{d^3\vec{P}}{(2\pi)^3} d^3\vec{u} e^{i(\vec{q} - \vec{p}_1 + \vec{P} - \vec{P}_F) \cdot \vec{u}} \sum_{k,\ell} \frac{e^{i(\vec{P} - \vec{P}_F) \cdot (\vec{u} - \vec{\xi}_k)} e^{i(\vec{P} - \vec{P}_I) \cdot \vec{\xi}_\ell}}{q_0 + \langle E_X \rangle - E_1 - E_F - i\epsilon} \times \\ & \times \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)\mu}(\vec{P} - \vec{P}_F) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(-\vec{P} + \vec{P}_I) | 0_I^+ \rangle \rangle \quad (6.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -i \int d^3\vec{P} \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}_1 + \vec{P} - \vec{P}_F) \sum_{k,\ell} \frac{e^{i(\vec{P} - \vec{P}_F) \cdot (\vec{u} - \vec{\xi}_k)} e^{i(\vec{P} - \vec{P}_I) \cdot \vec{\xi}_\ell}}{q_0 + \langle E_X \rangle - E_2 - E_F - i\epsilon} \times \\ & \times \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)\mu}(\vec{P} - \vec{P}_F) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(-\vec{P} + \vec{P}_I) | 0_I^+ \rangle \rangle \quad (6.42) \end{aligned}$$

$$\times \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)\mu}(\vec{P} - \vec{P}_F) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(-\vec{P} + \vec{P}_I) | 0_I^+ \rangle \rangle \quad (6.43)$$

usando la delta appena trovata

$$\vec{P} - \vec{P}_F = \vec{p}_1 - \vec{q} \quad (6.44)$$

e in combinazione con quella in (6.21)

$$-\vec{P} + \vec{P}_I = \vec{p}_2 + \vec{q} \quad . \quad (6.45)$$

Inoltre sapendo che per questo processo il valore usuale del momento scambiato è $|\vec{q}| \approx 100$ MeV e che i moduli dei momenti degli elettroni sono ~ 1 MeV, si possono riscrivere $\vec{P} - \vec{P}_F \approx -\vec{q}$ e $-\vec{P} + \vec{P}_I \approx +\vec{q}$. Si considerino i nuclei privi di rinculo, per cui $E_F \approx M_F$, $E_I \approx M_I$ ed $M_F \approx M_I$, valori che insieme a quello

tipico di $\langle E_X \rangle$ sono più grandi di $E_{1,2}$ per cui introduco la cosiddetta energia di chiusura $\Delta = \langle E_X \rangle - \frac{1}{2}(M_F + M_I) \approx 10$ MeV. Infine si ottiene

$$W^{(u_0)\mu}_{\mu}(q_0, \vec{q}) = -i \sum_{k,\ell} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)\mu}(-\vec{q}) \tilde{J}_{\mu}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle}{q_0 + (\Delta - i\epsilon)} \quad (6.46)$$

dove $\vec{\xi}_{k\ell} \equiv \vec{\xi}_k - \vec{\xi}_\ell$. Analogamente a quanto appena fatto, con le dovute accortezze, per il termine proporzionale a $\theta(-u_0)$ si ha

$$W^{(-u_0)\mu}_{\mu}(q_0, \vec{q}) = - \left(-i \sum_{k,\ell} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)\mu}(-\vec{q}) \tilde{J}_{\mu}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle}{q_0 - (\Delta - i\epsilon)} \right) \quad (6.47)$$

che sommato a $W^{(u_0)\mu}_{\mu}(q_0, \vec{q})$ dà

$$W_{\mu}^{\mu}(q_0, \vec{q}) = \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)\mu}(-\vec{q}) \tilde{J}_{\mu}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle \frac{2i\Delta}{q_0^2 - \Delta^2 + i\epsilon} \quad , \quad (6.48)$$

negli ultimi tre risultati è stata eliminata la dipendenza all'esponente da \vec{p}_1 rispetto a \vec{q} , perché, tipicamente, $|\vec{p}_{1,2}| \approx 1$ MeV ed il momento del neutrino virtuale $|\vec{q}| \sim \frac{1}{r_{NN}} \approx 100$ MeV, con $r_{NN} \approx 2$ fm la distanza media internucleone in un nucleo.

Riprendendo (6.31) con il risultato appena trovato:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)\mu}(-\vec{q}) \tilde{J}_{\mu}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle \times \\ & \times \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2 + i\epsilon)(q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon)(q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon)^2} \quad , \end{aligned} \quad (6.49)$$

si calcola l'integrale in q_0 , trascurando gli impliciti $i\epsilon$, definendo le funzioni ausiliarie

$$I(q_0^2) \equiv \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2)(q_0^2 - \omega_N^2)(q_0^2 - \omega_W^2)^2} \quad (6.50)$$

$$J(q_0^2) \equiv \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2)(q_0^2 - \omega_N^2)(q_0^2 - \omega_W^2)} \quad (6.51)$$

che sono collegate tra loro da

$$I(q_0^2) = \frac{\partial J(q_0^2)}{\partial \omega_W^2} = \frac{1}{2\omega_W} \frac{\partial J(q_0^2)}{\partial \omega_W} \quad . \quad (6.52)$$

Per ora ci si concentra sul calcolo di $J(q_0^2)$ iniziando da una manipolazione algebrica

$$\begin{aligned}
J(q_0^2) &= \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2)} \frac{1}{(q_0^2 - \omega_N^2)(q_0^2 - \omega_W^2)} \\
&\equiv \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2)} f(q_0^2) \\
&= - \int \frac{dq_0}{2\pi i} \left(\frac{1}{(q_0 - \Delta + i\epsilon)} - \frac{1}{(q_0 + \Delta - i\epsilon)} \right) f(q_0^2) \quad , \quad (6.53)
\end{aligned}$$

essendo J una funzione di q_0^2 , si può fare la sostituzione al primo termine $q_0 \rightarrow -q_0$ senza che la funzione cambi. Allora si ottiene

$$J(q_0^2) = 2 \int \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 + \Delta - i\epsilon)(q_0^2 - \omega_N^2)(q_0^2 - \omega_W^2)} \quad , \quad (6.54)$$

che può essere risolto con il teorema dei residui, chiudendo il percorso dell'asse reale nel semipiano complesso superiore così vengono inglobati due dei cinque poli semplici dell'integranda $q_0 = \omega_N, \omega_W$, perciò si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{2\pi i} 2\pi i \frac{1}{(\omega_N^2 - \omega_W^2)} \left[\frac{1}{2\omega_N(\omega_N + \Delta)} - \frac{1}{2\omega_W(\omega_W + \Delta)} \right] \\
&= \frac{1}{(\omega_N^2 - \omega_W^2)} \left(\frac{\omega_W(\omega_W + \Delta) - \omega_N(\omega_N + \Delta)}{\omega_N\omega_W(\omega_N + \Delta)(\omega_W + \Delta)} \right) \quad (6.55)
\end{aligned}$$

considerando che in questo lavoro di tesi si assume che il neutrino scambiato è pesante ($M_N \gg 100 \text{ MeV}$) si hanno le relazioni

$$\Delta \ll \omega_W \quad , \quad (6.56)$$

$$\Delta \ll \omega_N \quad , \quad (6.57)$$

si trascura Δ ovunque, cosicché (6.55) diventi

$$J(q_0^2) \approx \frac{1}{(\omega_N^2 - \omega_W^2)} \left(\frac{\omega_W^2 - \omega_N^2}{\omega_N^2\omega_W^2} \right) = -\frac{1}{\omega_N^2\omega_W^2} \quad . \quad (6.58)$$

A questo punto si riprende la relazione (6.52)

$$I(q_0^2) \approx \frac{1}{2\omega_W} \frac{\partial}{\partial \omega_W} \left(-\frac{1}{\omega_N^2\omega_W^2} \right) = \frac{1}{\omega_N^2\omega_W^4} \approx \frac{1}{M_N^2 M_W^4} \quad (6.59)$$

dove nell'ultima approssimazione si sono considerati i momenti del neutrino di Majorana e del bosone W trascurabili rispetto alle loro masse.

Arrivati a questo punto si passa al calcolo per arrivare ai NME veri e propri. Il calcolo del valore numerico dei NME è complicato perché necessita di conoscere le funzioni d'onda nucleari degli stati iniziale e finale, che è un problema a molti

corpi e quindi non ha soluzione esatta. Esistono diversi approcci per determinare questi valori numerici, che variano anche di un fattore ~ 3 a seconda del metodo. Quello utilizzato in questo lavoro di tesi è il modello a bosoni interagenti (IBM), che tratta coppie di nucleoni come se fossero bosoni, con i loro numeri quantici, e non usa l'intero spazio di Hilbert degli stati nucleonici, ma lo riduce al sottospazio delle *shell* vicine alla superficie di Fermi [54]. La descrizione che ne deriva è più fenomenologica di altri metodi, perché aggiusta i parametri del modello in modo che vengano siano in accordo con le osservazioni sperimentali.

Per le correnti nucleoniche vettoriali si utilizza l'approssimazione d'impulso e, fra le molte formulazioni disponibili in letteratura, si sceglie l'espansione non relativistica in $\frac{|\vec{q}|}{m_p}$ della referenza [55]

$$\tilde{J}_0^{(k)}(\vec{q}) = \tau_k^+ \left(F_V(\vec{q}^2) \mathbb{1}_{2 \times 2} + \frac{F_{P'}(\vec{q}^2)}{4m_p^2} q_0 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q}) + \dots \right) \quad (6.60)$$

$$\tilde{J}_i^{(k)}(\vec{q}) = \tau_k^+ \left(F_A(\vec{q}^2) (\vec{\sigma}_k)_i + \frac{F_V(\vec{q}^2) + F_W(\vec{q}^2)}{2m_p} i (\vec{\sigma}_k \times \vec{q})_i - \frac{F_{P'}(\vec{q}^2)}{4m_p^2} q_i (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q}) + \dots \right) \quad (6.61)$$

dove m_p è la massa del protone, $\vec{\sigma}_k$ e τ_k^+ sono matrici di Pauli che agiscono rispettivamente nello spazio dello spin e dell'isospin del nucleone k -esimo. $F_V(\vec{q}^2)$, $F_A(\vec{q}^2)$, $F_W(\vec{q}^2)$ $F_{P'}(\vec{q}^2)$ sono i fattori di forma, rispettivamente, vettoriale, vettoriale assiale, di magnetismo debole e pseudo-scalare indotto:

$$F_V^2(\vec{q}^2) = \frac{g_V^2}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_V^2})^4}, \quad g_V = 1, \quad m_V = 0,84 \text{ GeV}, \quad (6.62)$$

$$F_A^2(\vec{q}^2) = \frac{g_A^2}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_A^2})^4}, \quad g_A = 1,269, \quad m_A = 1,09 \text{ GeV}, \quad (6.63)$$

$$F_W^2(\vec{q}^2) = \frac{g_W^2}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_W^2})^4}, \quad g_W = 3,70, \quad m_W = m_V \quad (6.64)$$

e nell'ipotesi di corrente assiale parzialmente conservata (PCAC) [56]

$$F_{P'}^2(\vec{q}^2) = \frac{g_{P'}^2}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_{P'}^2})^4} \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_\pi^2})^2}, \quad g_{P'} \approx 231, \quad m_{P'} = m_A, \quad m_\pi = 0,138 \text{ GeV}. \quad (6.65)$$

Considerando solo transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$ nel prodotto $\tilde{J}^{(k)\mu}(-\vec{q}) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(\vec{q})$ sopravvivono solo i termini pari in \vec{q} e/o $\vec{\sigma}_k$, perciò, al primo ordine nell'espansione non relativistica,

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{(k)\mu}(-\vec{q}) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(\vec{q}) &= \tau_k^+ \tau_\ell^+ \left(F_V^2(\vec{q}^2) \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} - F_A^2(\vec{q}^2) (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) \right. \\ &\quad + 2 \frac{F_A(\vec{q}^2) F_{P'}(\vec{q}^2)}{4m_p^2} (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{q}) + \frac{(F_V(\vec{q}^2) + F_W(\vec{q}^2))^2}{4m_p^2} \times \\ &\quad \left. \times (\vec{\sigma}_k \times \vec{q}) (\vec{\sigma}_\ell \times \vec{q}) - \frac{F_{P'}^2(\vec{q}^2)}{16m_p^4} q^2 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{q}) \right). \quad (6.66) \end{aligned}$$

Come è noto, il prodotto $(\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{q})$ si può riscrivere come $\frac{1}{3}\vec{q}^2(\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \frac{1}{3}\vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)}$ e $(\vec{\sigma}_k \times \vec{q})(\vec{\sigma}_\ell \times \vec{q})$ come $-\frac{2}{3}\vec{q}^2(\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \frac{1}{3}\vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)}$, dove $S_{k\ell}^{(q)} = 3(\vec{\sigma}_k \cdot \hat{q})(\vec{\sigma}_\ell \cdot \hat{q}) - (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell)$. Allora seguendo la notazione di [55] si definiscono le funzioni

$$h_o(\vec{q}^2) = \frac{2}{\pi m_e m_p} \tilde{h}_o(\vec{q}^2) \quad (6.67)$$

dove $\frac{2}{\pi m_e m_p}$ è il potenziale neutrinico nel caso di neutrini pesanti, il pedice per le h distinguono varie forme delle stesse. Sostituendo le giuste (6.67), si ha

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{(k)\mu}(-\vec{q}) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(\vec{q}) &= \tau_k^+ \tau_\ell^+ \left(g_V^2 \tilde{h}_{VV}(q^2) \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} - g_A^2 \tilde{h}_{AA}(q^2) (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) \right. \\ &\quad + \frac{g_A g_{P'}}{6m_p^2} (q^2 \tilde{h}_{AP'}(q^2) (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \vec{q}^2 \tilde{h}_{AP'}(q^2) S_{k\ell}^{(q)}) \\ &\quad + \frac{(g_V + g_W)^2}{12m_p^2} (-2\vec{q}^2 \tilde{h}_{VV}(q^2) (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \vec{q}^2 \tilde{h}_{VV}(q^2) S_{k\ell}^{(q)}) \\ &\quad \left. - \frac{g_{P'}^2}{48m_p^2} (\vec{q}^4 \tilde{h}_{PP}(q^2) (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \vec{q}^4 \tilde{h}_{PP}(q^2) S_{k\ell}^{(q)}) \right) \\ &\equiv \tau_k^+ \tau_\ell^+ \Omega_{k\ell}^{(3)}(q^2) \quad , \end{aligned} \quad (6.68)$$

dove si è introdotto l'operatore di transizione efficace a due corpi per correnti adroniche vettoriali, nello spazio dei momenti. Sostituendo in (6.31) i risultati ottenuti finora e seguendo le indicazioni in Appendice A, si ottiene:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M_W^4 M_N^2} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | | \tau_k^+ \tau_\ell^+ \Omega_{k\ell}^{(3)}(q^2) | | 0_I^+ \rangle \rangle \\ &= \frac{1}{M_W^4 M_N^2} \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \left[g_V^2 \mathcal{M}_F - g_A^2 \mathcal{M}_{GT}^{AA} + \frac{g_A g_{P'}}{6} (\mathcal{M}_{GT}'^{AP'} \right. \\ &\quad + \mathcal{M}_T'^{P'P'}) - \frac{(g_V + g_W)^2}{12} (2\mathcal{M}_{GT}'^{WW} - \mathcal{M}_T'^{WW}) \\ &\quad \left. - \frac{g_{P'}^2}{48} (\mathcal{M}_{GT}''^{P'P'} + \mathcal{M}_T''^{P'P'}) \right] \\ &\equiv \frac{g_A^2}{M_W^4 M_N^2} \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \left[-\mathcal{M}_{GT} + \left(\frac{g_V^2}{g_A^2} \right) \mathcal{M}_F + \mathcal{M}_T \right] \\ &\equiv \frac{1}{M_W^4 M_N^2} \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}_{0\nu} \end{aligned} \quad (6.69)$$

dove $R_0 = 1, 2A^{1/3} fm$ è il raggio medio nucleare, introdotto per rendere i NME adimensionali.

6.1.3 Emivita $(T_{1/2}^{0\nu})_{GI}$

Rimettendo insieme tutti i risultati importanti ottenuti finora ci si prepara al calcolo dell'emivita. Si inserisce in (6.30) il risultato (6.69)

$$M_{GI} = \frac{2G_{eff}^2}{\sqrt{2}M_N} \bar{e}_{p_1} P_L e_{p_2}^C \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}_{0\nu} \quad . \quad (6.70)$$

La formula per il calcolo dell'emivita è

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{GI}^{-1} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \overline{|M_{GI}|^2} (2\pi) \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \quad (6.71)$$

dove la probabilità di transizione del $0\nu\beta\beta$ sommata sugli spin degli elettroni finali è

$$\overline{|M_{GI}|^2} = \frac{G_{eff}^4}{8M_N^2} \frac{m_e^2 m_p^2}{\pi^2 R_0^2} |\mathcal{M}_{0\nu}|^2 \sum_{spin} |\bar{e}_{p_1} P_L e_{p_2}^C|^2 \quad . \quad (6.72)$$

Si calcola ora il modulo quadro sommato negli spin di $\bar{e}_{p_1} P_L e_{p_2}^C$, dove la funzione d'onda dell'elettrone può essere approssimata nel seguente modo

$$e_{p_{1,2}} = \sqrt{F_0(Z+2, E_{1,2})} u(p_{1,2}) \quad (6.73)$$

dove $F_0(Z+2, E_{1,2})$ è la funzione di Fermi, che descrive la distorsione dell'onda dell'elettrone dovuta al campo di Coulomb del nucleo [57], e $u(p_{1,2})$ è l'effettivo spinore della funzione d'onda. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k,r} |\bar{e}_{r,p_1} P_L e_{k,p_2}^C|^2 &= \sum_{k,r} F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) \times \\ &\quad \times (\bar{u}^r(p_1) P_L v^k(p_2)) (\bar{u}^r(p_1) P_L v^k(p_2))^\dagger \\ &= \sum_{k,r} F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) \times \\ &\quad \times (\bar{u}^r(p_1) P_L v^k(p_2)) (\bar{v}^k(p_2) P_R u^r(p_1)) \quad , \quad (6.74) \end{aligned}$$

si esplicitano le componenti matriciali per manipolare il prodotto, si trascurano le funzioni di Fermi fino alla fine del calcolo

$$\sum_{k,r} (\bar{u}^r(p_1))_{1 \times a} (P_L)_{a \times b} (v^k(p_2))_{b \times 1} (\bar{v}^k(p_2))_{1 \times c} (P_R)_{c \times d} (u^r(p_1))_{d \times 1} \quad (6.75)$$

e si definiscono i proiettori sulle energie positive, Λ_+ , e negative, Λ_- ,

$$\Lambda_+(k) = \sum_{\alpha=1}^2 u^\alpha(k) \otimes \bar{u}^\alpha(k) = \not{k} + m \quad (6.76)$$

$$- \Lambda_-(k) = \sum_{\alpha=1}^2 v^\alpha(k) \otimes \bar{v}^\alpha(k) = \not{k} - m \quad . \quad (6.77)$$

Da (6.75), con le definizioni precedenti, si ha

$$\begin{aligned}
& \sum_r (\bar{u}^r(p_1))_{1 \times a} (P_L)_{a \times b} (-\Lambda_-(p_2))_{b \times c} (P_R)_{c \times d} (u^r(p_1))_{d \times 1} \\
&= (\Lambda_+(p_1))_{d \times a} (P_L (-\Lambda_-(p_2)) P_R)_{a \times d} \\
&= \text{Tr} \left[\Lambda_+(p_1) P_L (-\Lambda_-(p_2)) P_R \right] \\
&= \text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m_e) P_L (\not{p}_2 - m_e) P_R \right] \quad (P_L P_R = 0) \\
&= \text{Tr} \left[\not{p}_1 + m_e P_L \not{p}_2 \right] \\
&= \text{Tr} \left[(p_{1\alpha} \gamma^\alpha + m_e) \frac{1 - \gamma^5}{2} \gamma^\beta p_{2\beta} \right] \tag{6.78}
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[p_{1\alpha} p_{2\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta - p_{1\alpha} p_{2\beta} \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\beta + m_e p_{2\beta} \gamma^\beta - m_e p_{2\beta} \gamma^5 \gamma^\beta \right] \quad . \tag{6.79}$$

Si usano le proprietà delle tracce delle matrici gamma di Dirac $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\beta) = 0$, $\text{Tr}(\gamma^\beta) = 0$, $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\beta) = 0$ e $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}$, perciò sopravvive solo il primo termine e il risultato finale è

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,r} |\bar{e}_{r,p_1} P_L e_{k,p_2}^C|^2 = F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) 2p_1 \cdot p_2 \\
&= F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \quad . \tag{6.80}
\end{aligned}$$

Si rimette questo risultato nella formula dell'emivita

$$\begin{aligned}
& (T_{1/2}^{0\nu})_{GI}^{-1} = (\mathcal{G}_R^W)^4 \frac{(G_F \cos \theta_C)^4 m_e^2 m_p^2}{(\ln 2) 8 M_N^2 \pi^2 R_0^2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} F_0(Z+2, E_1) \times \\
& \times F_0(Z+2, E_2) 2p_1 \cdot p_2 |\mathcal{M}_{0\nu}|^2 (2\pi) \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \quad . \tag{6.81}
\end{aligned}$$

Ora passando alle coordinate sferiche e considerando l'equazione mass-shell $E_{1(2)}^2 = (\vec{p}_{1(2)})^2 + m_e^2$ si ha

$$E_{1(2)} dE_{1(2)} = |\vec{p}_{1(2)}| dp_{1(2)} \Rightarrow d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2 = 8\pi^2 p_1 p_2 E_1 E_2 dE_1 dE_2 d\cos \theta_{12} \quad . \tag{6.82}$$

Adottando la notazione di [58]

$$C = \frac{(G_F \cos \theta_C)^4 m_e^2}{16\pi^5} \tag{6.83}$$

$$\begin{aligned}
G_{11}^{(0)} &= \frac{2C}{(\ln 2) 4R_0^2} \int F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) p_1 p_2 E_1 E_2 \times \\
& \times dE_1 dE_2 \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \\
&\equiv \frac{2C}{(\ln 2) 4R_0^2} \int f_{11+}^{(0)} p_1 p_2 E_1 E_2 dE_1 dE_2 \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \tag{6.84}
\end{aligned}$$

si riscrive (6.81) come

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{GI}^{-1} = (\mathcal{G}_R^W)^4 \frac{m_p^2}{M_N^2} |\mathcal{M}_{0\nu}|^2 G_{11}^{(0)} \quad , \tag{6.85}$$

risultato finale della sezione.

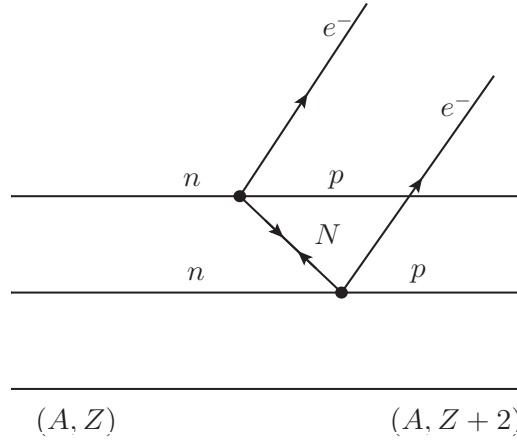


Figura 6.2: Diagramma di Feynman del decadimento $0\nu\beta\beta$ per interazioni puramente di contatto

6.2 Interazioni di contatto

Nel caso in cui il decadimento $0\nu\beta\beta$ avvenga attraverso interazioni di contatto (5.33), due neutroni decadono contemporaneamente in un protone, un elettrone e un neutrino elettronico di Majorana ciascuno, senza bosoni mediatori

$$\mathcal{L}_{CI} = G(\bar{e}P_R N^e)(\bar{u}^a P_L d_a) + c.h. \quad (6.86)$$

Questa interazione efficace quark-leptoni a doppia corrente, è di dimensione 6 nell'energia e quindi è un meccanismo BSM. Per lo scopo di questa tesi si ricorda che la costante efficace G , comune a tutti gli operatori a 4 fermioni (5.5), dipende dalla scala energetica di nuova fisica secondo

$$G \sim \frac{g_{t0}^2}{\Lambda^2} \quad (6.87)$$

dove g_{t0} è la costante di accoppiamento di Yukawa del quark top; perciò la lagrangiana con cui si calcolerà l'emivita in questo caso è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CI}(x) &= \left(\frac{g_{t0}}{\Lambda}\right)^2 (\bar{e}P_R N^e)(x)(\bar{u}^a P_L d_a)(x) + c.h. \\ &\equiv \left(\frac{g_{t0}^2}{2\Lambda^2}\right) j_R(x) J^h(x) + c.h. \quad , \end{aligned} \quad (6.88)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è fattorizzato l' $\frac{1}{2}$ dalla corrente adronica e si è adottata la notazione del caso precedente.

6.2.1 Calcoli preliminari

L'elemento della matrice di transizione (S-matrix) non banale, per il decadimento $0\nu\beta\beta$, è

$$\langle e_{p_1} e_{p_2} 0_F^+ | \frac{i^2}{2} \int d^4x d^4y {}'' T \{ \mathcal{L}_{CI}(x) \mathcal{L}_{CI}(y) \} {}'' | 0_I^+ \rangle \equiv T_{CI} \quad (6.89)$$

dove si considerano solo transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$ fra il nucleo iniziale e finale ed il virgolettato "·" indica che si considera solo il termine che restituisce il diagramma di Feynman connesso desiderato (Fig.6.2). Si ha quindi

$$T_{CI} = -\left(\frac{g_{t0}^4}{8\Lambda^4}\right) \int d^4x d^4y \frac{1-P_{12}}{\sqrt{2}} \langle e_{p_1} e_{p_2} 0_F^+ | T\{j_R(x) J^h(x) j_R(y) J^h(y)\} | 0_I^+ \rangle \quad (6.90)$$

dove $\frac{1-P_{12}}{\sqrt{2}}$ è l'operatore di antisimmetrizzazione sui leptoni carichi identici nello stato finale, inserito per considerarne la natura fermionica.

Manipolando la posizione dei campi nel prodotto T ordinato si ottiene il propagatore del neutrino di Majorana

$$\langle e_{p_1} e_{p_2} | T\{j_R(x) j_R(y)\} | 0 \rangle = \langle e_{p_1} e_{p_2} | T\{\bar{e}(x) P_R N^e(x) \bar{e}(y) P_R N^e(y)\} | 0 \rangle \quad , \quad (6.91)$$

infatti $j_R(y)$ è simmetrico e posso prenderne il trasposto $N^{eT}(y) P_R^T \bar{e}^T(y)$, cosicché si abbia

$$e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \bar{e}_{p_1} P_R \langle 0 | T\{N^e(x) N^{eT}(y)\} | 0 \rangle P_R^T \bar{e}_{p_2}^T \quad . \quad (6.92)$$

Dato che il neutrino considerato è una particella di Majorana $N = N^C = C \bar{N}^T$ e dalla proprietà della matrice di coniugazione in carica $C^T = C^{-1}$ si ha

$$N^{eT} = (N^{eC})^T = \bar{N}^e C^T = \bar{N}^e C^{-1} \quad (6.93)$$

e (6.92) si riscrive come

$$- e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \bar{e}_{p_1} P_R \langle 0 | T\{N^e(x) \bar{N}^e(y)\} | 0 \rangle C P_R^T \bar{e}_{p_2}^T \quad , \quad (6.94)$$

dove il propagatore del neutrino compare esplicitamente.

Utilizzando il risultato in (6.94), l'equazione (6.90) si riscrive come

$$T_{CI} = -\left(\frac{g_{t0}^4}{8\Lambda^4}\right) \frac{1-P_{12}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4x d^4y e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} e^{-iq \cdot (x-y)} \times \\ \times \bar{e}_{p_1} P_R \frac{i(\not{q} + M_N)}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} C^{-1} P_R^T \bar{e}_{p_2}^T \langle 0_F^+ | T\{J^h(x) J^h(y)\} | 0_I^+ \rangle \quad , \quad (6.95)$$

dove $e_{p_{1,2}}$ sono le funzioni d'onda degli elettroni finali, di 4-momento p_1 e p_2 , q è il 4-momento del neutrino di Majorana, quindi quello scambiato nel processo. A questo punto si lavora per riportare (6.95) in una forma che espliciti la conservazione del 4-momento totale:

- si utilizzano le proprietà della matrice di coniugazione in carica $C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C$ e della matrice gamma 5 di Dirac $C\gamma^5 C^{-1} = +\gamma^{5T}$ per riscrivere

$$C^{-1} P_R^T \bar{e}_{p_2}^T = C^{-1} P_R^T C C^{-1} \bar{e}_{p_2}^T = P_R C^{-1} \bar{e}_{p_2}^T = -P_R e_{p_2}^C \quad ; \quad (6.96)$$

- si fa l'*ansatz* che le correnti adroniche siano date dalla somma delle singole correnti nucleoniche

$$J^h(x) = \sum_i J^{(i)}(x) \quad (6.97)$$

con l'indice i che scorre su tutti i nucleoni dell'isotopo che decade tramite $0\nu\beta\beta$. In questo modo si può sfruttare la traslazione del 4-momento

$$J^h(x) = e^{i\hat{P}x} J^h(0) e^{-i\hat{P}x} \quad (6.98)$$

per manipolare il valore di aspettazione delle correnti deboli adroniche

$$\langle 0_F^+ | T\{J^h(x)J^h(y)\} | 0_I^+ \rangle = e^{i(P_F - P_I) \cdot y} \langle 0_F^+ | T\{J^h(x-y)J^h(0)\} | 0_I^+ \rangle \quad (6.99)$$

dove P_I e P_F sono rispettivamente i 4-momenti dei nuclei nello stato iniziale e finale;

- il termine proporzionale a $\not{q} = p_\alpha \gamma^\alpha$ nel propagatore del neutrino di Majorana è nullo

$$P_R \frac{\not{q} + M_N}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} P_R = \frac{\not{q} P_L P_R + M_N P_R^2}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} = \frac{M_N P_R}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} \quad (6.100)$$

perché

$$P_R \gamma^\alpha = \frac{\gamma^\alpha + \gamma^5 \gamma^\alpha}{2} = \frac{\gamma^\alpha - \gamma^\alpha \gamma^5}{2} = \gamma^\alpha P_L \quad (\{\gamma^5, \gamma^\alpha\} = 0) \quad (6.101)$$

e P_R essendo un proiettore è idempotente ($P_R^2 = P_R$) ed ortogonale ($P_L P_R = P_R P_L = 0$).

Riassumendo questi risultati si ha per T_{CI}

$$T_{CI} = i \left(\frac{g_{t0}^4}{8\Lambda^4} \right) M_N \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 x d^4 y e^{-iq \cdot (x-y)} e^{ip_1 \cdot x} \times \\ \times e^{ip_2 \cdot y} e^{i(P_F - P_I) \cdot y} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C \frac{\langle 0_F^+ | T\{J^h(x-y)J^h(0)\} | 0_I^+ \rangle}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon}, \quad (6.102)$$

che con le sostituzioni

$$\begin{cases} x = z + \frac{u}{2} \\ y = z - \frac{u}{2} \end{cases} \quad \text{con} \quad d^4 x d^4 y = d^4 u d^4 z \quad (6.103)$$

diventa

$$T_{CI} = i \left(\frac{g_{t0}^4}{8\Lambda^4} \right) M_N \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 u d^4 z e^{-i(q - \frac{1}{2}(p_1 - p_2 - P_F + P_I)) \cdot u} \times \\ \times e^{i(P_F + p_1 + p_2 - P_I) \cdot z} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C \frac{\langle 0_F^+ | T\{J^h(u)J^h(0)\} | 0_I^+ \rangle}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} \quad (6.104)$$

e si ottiene la conservazione del 4-momento totale dall'integrale in z

$$\int d^4 z e^{i(P_F + p_1 + p_2 - P_I) \cdot z} = (2\pi)^4 \delta^4(P_F + p_1 + p_2 - P_I) \quad . \quad (6.105)$$

Allora si può definire, come di solito si fa

$$T_{CI} \equiv i(2\pi)^4 \delta^4(P_F + p_1 + p_2 - P_I) M_{CI} \quad (6.106)$$

con

$$M_{CI} = \left(\frac{g_{t0}^4}{8\Lambda^4} \right) M_N \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C \frac{W(q - p_1)}{q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon} \quad (6.107)$$

dove $\omega_N^2 \equiv (\vec{q})^2 + M_N^2$ e la funzione

$$W(q - p_1) \equiv \int d^4 u e^{-i(q-p_1) \cdot u} \langle 0_F^+ | T \{ J^h(u) J^h(0) \} | 0_I^+ \rangle \quad (6.108)$$

Prima di finire i calcoli preliminari si esplicita l'azione dell'operatore di scambio

$$\frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C - \bar{e}_{p_2} P_R e_{p_1}^C) \quad (6.109)$$

e si manipola il secondo termine

$$\bar{e}_{p_2} P_R e_{p_1}^C \quad (6.110)$$

Essendo uno scalare se ne prende il trasposto, che è uguale a sé per definizione

$$(\bar{e}_{p_2} P_R e_{p_1}^C)_{1 \times 1} \equiv [\bar{e}_{p_2} P_R e_{p_1}^C]^T = \bar{e}_{p_1} C^T (1 + \gamma_5^T) \bar{e}_{p_2}^T \quad (6.111)$$

non utilizzando esplicitamente nessuna rappresentazione per le matrici gamma si sfruttano le proprietà generali della matrice di coniugazione in carica ($-C = C^T = C^{-1} = C^\dagger$) e la relazione $C\gamma^5 C^{-1} = +\gamma^{5T}$, allora

$$\bar{e}_{p_1} C^{-1} \frac{1 + \gamma^{5T}}{2} C C^{-1} \bar{e}_{p_2}^T = \bar{e}_{p_1} \frac{1 + \gamma^5}{2} (-C) \bar{e}_{p_2}^T = -\bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C \quad (6.112)$$

rimettendola in (6.109) ho

$$\frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C = \frac{2}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C \quad (6.113)$$

Infine tornando a (6.107), con il risultato di (6.113), si ottiene

$$M_{CI} = \left(\frac{g_{t0}^4}{4\sqrt{2}\Lambda^4} \right) M_N \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C \frac{W(q - p_1)}{q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon} \quad (6.114)$$

6.2.2 Elementi di matrice nucleare

Si calcolerà ora il "termine adronico"

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{W(q - p_1)}{q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon} \quad (6.115)$$

in (6.114), per ottenere gli NME. Si esplicitano le funzioni θ nel prodotto T ordinato

$$W(q - p_1) = \int d^4u e^{-i(q-p_1) \cdot u} \langle 0_F^+ | [\theta(u_0) J^h(u) J^h(0) + \theta(-u_0) J^h(0) J^h(u)] | 0_I^+ \rangle, \quad (6.116)$$

per le quali si usano le rappresentazioni integrali

$$\theta(u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{iu_0\omega}}{\omega - i\epsilon}, \quad \theta(-u_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{iu_0\omega}}{\omega + i\epsilon}. \quad (6.117)$$

Essendo le trattazioni analoghe fra loro, per semplicità si esplicita solo quella per il termine proporzionale a $\theta(u_0)$:

$$\int d^3\vec{u} e^{i\vec{u} \cdot (\vec{q} - \vec{p}_1)} \int \frac{d\omega}{2\pi i} du_0 e^{-iu_0(q_0 - E_1 - \omega)} \frac{\langle 0_F^+ | J^h(u) J^h(0) | 0_I^+ \rangle}{\omega - i\epsilon}. \quad (6.118)$$

Come al solito si introduce un set completo di autostati nucleari intermedi $|X\rangle$ e si fa una traslazione spazio-temporale sulla prima corrente adronica per eliminarne la dipendenza da u_0

$$-i \int d^3\vec{u} e^{i\vec{u} \cdot (\vec{q} - \vec{p}_1)} \int \frac{d\omega}{2\pi} du_0 e^{-iu_0(q_0 - E_1 - E_F + E_X - \omega)} \times \\ \times \sum_{|X\rangle} \frac{\langle 0_F^+ | J^h(\vec{u}) | X \rangle \langle X | J^h(0) | 0_I^+ \rangle}{\omega - i\epsilon}, \quad (6.119)$$

dall'integrale in u_0 si ricava la delta di Dirac

$$\int du_0 e^{-iu_0(q_0 - E_1 - E_F + E_X - \omega)} = (2\pi) \delta(q_0 - E_1 - E_F + E_X - \omega) \quad (6.120)$$

che, agendo, cancella l'integrale in ω

$$-i \int d^3\vec{u} e^{i\vec{u} \cdot (\vec{q} - \vec{p}_1)} \sum_{|X\rangle} \frac{\langle 0_F^+ | J^h(\vec{u}) | X \rangle \langle X | J^h(0) | 0_I^+ \rangle}{q_0 - E_1 - E_F + E_X - i\epsilon} \quad (6.121)$$

dove E_X è l'energia dello stato intermedio $|X\rangle$. Per arrivare ad una forma più pragmatica della funzione W da questo punto, si devono attuare alcune approssimazioni. La prima è quella di chiusura: l'energia di uno stato $|X\rangle$ è $E_X = E_{CM}(\vec{P}) + \epsilon_n$, dove $E_{CM}(\vec{P})$ è l'energia traslazionale del centro di massa ed ϵ_n è quella di eccitazione, tipica dello stato $|X\rangle$ [53]. La somma degli stati intermedi contiene un'integrazione continua sul momento del centro di massa \vec{P} e una somma sulla parte discreta ($\sum_{|X\rangle} \rightarrow \int \frac{d^3\vec{P}}{(2\pi)^3} \sum_n$). Nell'approssimazione di chiusura l'energia di eccitazione viene sostituita da un valore medio $\bar{\epsilon}_n$ ($\langle E_X \rangle = E_{CM}(\langle \vec{P} \rangle) + \bar{\epsilon}_n$) e la somma discreta può essere effettuata. Per l'*ansatz*

(6.97) i nucleoni sono considerati indipendenti fra loro, perciò si può separare il moto del centro di massa ($\vec{R} = \frac{1}{A} \sum_i \vec{u}_i$) cosicché [53]

$$\vec{\xi}_i = \vec{u}_i - \vec{R} \quad \sum_i \vec{\xi}_i = \vec{0} \quad (6.122)$$

dove le $\vec{\xi}_i$ sono le coordinate relative fra i nucleoni, in funzioni delle quali

$$\Psi(u_1, \dots, u_A) = e^{i\vec{P} \cdot \vec{R}} \Phi(\xi_1, \dots, \xi_{A-1}) \quad . \quad (6.123)$$

Per gli elementi di matrice degli operatori ad un corpo si ha [53] che

$$\langle 0_F^+ | J^h(\vec{u}) | X \rangle = \sum_k \langle \langle 0_F^+ | e^{i(\vec{P} - \vec{P}_F) \cdot (\vec{u} - \vec{\xi}_k)} J^{(k)}(\vec{P} - \vec{P}_F) | X \rangle \rangle \quad (6.124)$$

e analogo per l'altra corrente adronica, la notazione $\langle \langle | \cdot | \rangle \rangle$ indica che l'elemento di matrice è nello spazio delle $A - 1$ nuove coordinate relative.

Si integra ora nel momento del centro di massa:

$$\begin{aligned} -i \int \frac{d^3 \vec{P}}{(2\pi)^3} d^3 \vec{u} e^{i(\vec{q} - \vec{p}_1 + \vec{P} - \vec{P}_F) \cdot \vec{u}} \sum_{k,\ell} \frac{e^{i(\vec{P} - \vec{P}_F) \cdot (\vec{u} - \vec{\xi}_k)} e^{i(\vec{P} - \vec{P}_I) \cdot \vec{\xi}_\ell}}{q_0 + \langle E_X \rangle - E_1 - E_F - i\epsilon} \times \\ \times \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)}(\vec{P} - \vec{P}_F) \tilde{J}^{(\ell)}(-\vec{P} + \vec{P}_I) | 0_I^+ \rangle \rangle \end{aligned} \quad (6.125)$$

$$= -i \int d^3 \vec{P} \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}_1 + \vec{P} - \vec{P}_F) \sum_{k,\ell} \frac{e^{i(\vec{P} - \vec{P}_F) \cdot (\vec{u} - \vec{\xi}_k)} e^{i(\vec{P} - \vec{P}_I) \cdot \vec{\xi}_\ell}}{q_0 + \langle E_X \rangle - E_1 - E_F - i\epsilon} \times \quad (6.126)$$

$$\times \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)}(\vec{P} - \vec{P}_F) \tilde{J}^{(\ell)}(-\vec{P} + \vec{P}_I) | 0_I^+ \rangle \rangle \quad (6.127)$$

usando la delta appena trovata

$$\vec{P} - \vec{P}_F = \vec{p}_1 - \vec{q} \quad (6.128)$$

e in combinazione con quella in (6.106)

$$-\vec{P} + \vec{P}_I = \vec{p}_2 + \vec{q} \quad . \quad (6.129)$$

Inoltre sapendo che per questo processo il valore usuale del momento scambiato è $|\vec{q}| \approx 100$ MeV e che i moduli dei momenti degli elettroni sono ~ 1 MeV, si possono riscrivere $\vec{P} - \vec{P}_F \approx -\vec{q}$ e $-\vec{P} + \vec{P}_I \approx +\vec{q}$. Si considerino i nuclei privi di rinculo, per cui $E_F \approx M_F$, $E_I \approx M_I$ ed $M_F \approx M_I$, valori che insieme a quello tipico di $\langle E_X \rangle$ sono più grandi di $E_{1,2}$ per cui introduco la cosiddetta energia di chiusura $\Delta = \langle E_X \rangle - \frac{1}{2}(M_F + M_I) \approx 10$ MeV. Infine, attraverso queste considerazioni, si ottiene

$$W^{(u_0)}(q_0, \vec{q}) = -i \sum_{k,\ell} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q}) \tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle}{q_0 + (\Delta - i\epsilon)} \quad (6.130)$$

dove $\vec{\xi}_{k\ell} \equiv \vec{\xi}_k - \vec{\xi}_\ell$. Analogamente a quanto appena fatto, con le dovute accortezze, per il termine proporzionale a $\theta(-u_0)$ si ha

$$W^{(-u_0)}(q_0, \vec{q}) = - \left(-i \sum_{k,\ell} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q}) \tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle}{q_0 - (\Delta - i\epsilon)} \right) \quad (6.131)$$

che sommato a $W^{(u_0)}(q_0, \vec{q})$ dà

$$W(q_0, \vec{q}) = \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q}) \tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle \frac{2i\Delta}{q_0^2 - \Delta^2 + i\epsilon} \quad , \quad (6.132)$$

negli ultimi tre risultati è stata eliminata la dipendenza all'esponente da \vec{p}_1 rispetto a \vec{q} , come nel caso delle interazioni di gauge.

Riprendendo (6.115) con il risultato appena trovato

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q}) \tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \rangle \times \\ & \times \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2 + i\epsilon)(q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon)} \quad , \end{aligned} \quad (6.133)$$

si calcola l'integrale in q_0 , trascurando gli impliciti $i\epsilon$, definendo la funzione ausiliaria

$$I(q_0) \equiv \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2)(q_0^2 - \omega_N^2)} \quad . \quad (6.134)$$

Si può utilizzare il teorema dei residui, chiudendo il percorso dell'asse reale nel semipiano complesso superiore così vengono inglobati due dei quattro poli dell'integranda $q_0 = \Delta, \omega_N$, perciò si ha:

$$I(q_0) = \frac{2i\Delta}{2\pi} 2\pi i \left[\frac{1}{2\Delta(\Delta + \omega_N)(\Delta - \omega_N)} - \frac{1}{2\omega_N(\Delta + \omega_N)(\Delta - \omega_N)} \right] \quad (6.135)$$

$$= -2\Delta \frac{-1}{2\Delta\omega_N(\Delta + \omega_N)} = \frac{1}{\omega_N(\Delta + \omega_N)} \approx \frac{1}{M_N^2} \quad (6.136)$$

nell'ultima uguaglianza si è espanso il denominatore in $\frac{\Delta}{\omega_N}$ tenendo solo il primo termine dello sviluppo. Inoltre si è considerata la massa del neutrino di Majorana molto maggiore sia di Δ che del $|\vec{q}|$ tipico dello $0\nu\beta\beta$.

Fino a qui il calcolo è molto simile a quello fatto per le interazioni di contatto in un modello a fermioni composti [21], ma nella trattazione degli NME si avrà la vera differenza, dato che le correnti adroniche sono scalari in questo caso. Le $\tilde{J}^{(k)}(\vec{q})$ vengono trattate non relativisticamente e come formulazioni dell'espansione, con relativa normalizzazione, si utilizzano quelle in [55]

$$\tilde{J}^{(k)}(\vec{q}) = \tau_k^+ \left(F_S(\vec{q}^2) \mathbb{1}_{2 \times 2} - \frac{F_P(\vec{q}^2)}{2m_p} (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q}) + \dots \right) \quad (6.137)$$

dove m_p è la massa del protone, $\vec{\sigma}_k$ e τ_k^+ sono matrici di Pauli che agiscono rispettivamente nello spazio dello spin e dell'isospin del nucleone k -esimo. $F_S(\vec{q}^2)$ e $F_{P'}(\vec{q}^2)$ sono i fattori di forma rispettivamente scalare e pseudo-scalare:

$$F_S^2(\vec{q}^2) = \frac{g_S^2}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_S^2})^4}, \quad g_S = g_V = 1, \quad m_S = m_V = 0,84 \text{ GeV}, \quad (6.138)$$

$$F_P^2(\vec{q}^2) = \frac{g_P^2}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_P^2})^4} \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_\pi^2})^2}, \quad g_P = 349, \quad m_P = m_V \approx m_A, \quad m_\pi = 0,138 \text{ GeV}. \quad (6.139)$$

Come suggerito in referenze [59, 60] si utilizza un valore per la cosiddetta carica pseudo-scalare $g_P = 349$, perciò il fattore di forma corrispondente non verrà trascurato nel corso dei calcoli.

Considerando solo transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$ nel prodotto $\tilde{J}^{(k)}(-\vec{q})\tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q})$ sopravvivono solo i termini con un numero pari di \vec{q} e/o $\vec{\sigma}_k$, perciò, al primo ordine nell'espansione non relativistica,

$$\tilde{J}^{(k)}(-\vec{q})\tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q}) = \tau_k^+ \tau_\ell^+ \left(F_S^2(\vec{q}^2) \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} - \frac{F_P^2(\vec{q}^2)}{4m_p^2} (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{q}) \right). \quad (6.140)$$

Come è noto, il prodotto $(\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{q})$ si può riscrivere come $\frac{1}{3}\vec{q}^2(\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \frac{1}{3}\vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)}$, dove $S_{k\ell}^q = 3(\vec{\sigma}_k \cdot \hat{q})(\vec{\sigma}_\ell \cdot \hat{q}) - (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell)$, allora si ha

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q})\tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q}) = \tau_k^+ \tau_\ell^+ & \left(g_V^2 \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_V^2})^4} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} - \frac{g_{P'}^2}{12m_p^2} \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_P^2})^4} \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_\pi^2})^2} \left[\vec{q}^2 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)} \right] \right), \quad (6.141) \end{aligned}$$

seguendo la notazione di [55] si definiscono le funzioni

$$h_o(\vec{q}^2) = \frac{2}{\pi m_e m_p} \tilde{h}_o(\vec{q}^2) \quad (6.142)$$

dove $\frac{2}{\pi m_e m_p}$ è il potenziale neutrinico nel caso di neutrini pesanti, il pedice per le h distinguono varie forme delle stesse, fra le quali

$$\tilde{h}_{VV}(\vec{q}^2) = \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_V^2})^4} \quad \text{et} \quad \tilde{h}_{PP}(\vec{q}^2) = \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_A^2})^4} \frac{1}{(1 + \frac{\vec{q}^2}{m_\pi^2})^2} \quad (6.143)$$

sono quelle utili a questo calcolo, infatti il prodotto (6.141) può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q})\tilde{J}^{(\ell)}(\vec{q}) = \tau_k^+ \tau_\ell^+ & \left(g_V^2 \tilde{h}_{VV}(\vec{q}^2) \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} - \frac{g_P^2}{12m_p^2} \tilde{h}_{PP}(\vec{q}^2) \times \right. \\ & \left. \times \left[\vec{q}^2 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)} \right] \right). \quad (6.144) \end{aligned}$$

Riprendendo (6.133) con i risultati trovati si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{M_N^2} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | | \tau_k^+ \tau_\ell^+ \left(g_V^2 \tilde{h}_{VV}(\vec{q}^2) - \frac{g_P^2}{12m_p^2} \tilde{h}_{PP}(\vec{q}^2) \times \right. \\
& \quad \left. \times \vec{q}^2 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) - \frac{g_P^2}{12m_p^2} \tilde{h}_{PP} \vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)} \right) | | 0_I^+ \rangle \rangle \\
& \equiv \frac{1}{M_N^2} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | | \tau_k^+ \tau_\ell^+ \Omega_{k\ell}(q^2) | | 0_I^+ \rangle \rangle \quad (6.145)
\end{aligned}$$

dove con $\Omega_{k\ell}(q^2)$ si è indicato il cosiddetto operatore di transizione efficace a due corpi nello spazio dei momenti. Tramite la trattazione in Appendice A, in particolare dalle formule (A.7), (A.10) e (A.25), si può riscrivere (6.145) in funzione di alcuni NME

$$\frac{1}{M_N^2} \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \left[g_V^2 \mathcal{M}_F - \frac{g_{P'}^2}{12} (\mathcal{M}_{GT}^{PP} + \mathcal{M}_T^{PP}) \right] \equiv \frac{1}{M_N^2} \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}_1 \quad , \quad (6.146)$$

seguendo la notazione per i NME in referenza [55].

6.2.3 Emivita $(T_{1/2}^{0\nu})_{CI}$

Finalmente si rimettono insieme i risultati importanti per prepararsi al calcolo dell'emivita, ad (6.114) si inserisce (6.146)

$$M_{CI} = \left(\frac{g_{t0}^4}{4\sqrt{2}\Lambda^4} \right) \frac{1}{M_N} \bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}_1 \quad . \quad (6.147)$$

La formula per il calcolo dell'emivita è

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{CI}^{-1} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \overline{|M_{CI}|^2} (2\pi) \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \quad (6.148)$$

dove la probabilità di transizione del $0\nu\beta\beta$ sommata sugli spin degli elettroni finali è

$$\overline{|M_{CI}|^2} = \left(\frac{g_{t0}}{\Lambda} \right)^8 \frac{m_e^2 m_p^2}{512\pi^2 R_0^2 M_N^2} |\mathcal{M}_1|^2 \sum_{spin} |\bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C|^2 \quad . \quad (6.149)$$

Si calcola ora il modulo quadro sommato negli spin di $\bar{e}_{p_1} P_R e_{p_2}^C$, dove la funzione d'onda dell'elettrone può essere approssimata nel seguente modo

$$e_{p_{1,2}} = \sqrt{F_0(Z+2, E_{1,2})} u(p_{1,2}) \quad (6.150)$$

dove $F_0(Z+2, E_{1,2})$ è la funzione di Fermi, che descrive la distorsione dell'onda dell'elettrone dovuta al campo di Coulomb del nucleo [57], e $u(p_{1,2})$ è l'effettivo

spinore della funzione d'onda. Allora

$$\begin{aligned}
\sum_{k,r} |\bar{e}_{r,p_1} P_R e_{k,p_2}^C|^2 &= \sum_{k,r} F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) \times \\
&\quad \times (\bar{u}^r(p_1) P_R v^k(p_2)) (\bar{u}^r(p_1) P_R v^k(p_2))^\dagger \\
&= \sum_{k,r} F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) \times \\
&\quad \times (\bar{u}^r(p_1) P_R v^k(p_2)) (\bar{v}^k(p_2) P_L u^r(p_1)) \quad , \quad (6.151)
\end{aligned}$$

si esplicitano le componenti matriciali per manipolare il prodotto, si trascurano le funzioni di Fermi fino alla fine del calcolo

$$\sum_{k,r} (\bar{u}^r(p_1))_{1 \times a} (P_R)_{a \times b} (v^k(p_2))_{b \times 1} (\bar{v}^k(p_2))_{1 \times c} (P_L)_{c \times d} (u^r(p_1))_{d \times 1} \quad (6.152)$$

e si definiscono i proiettori sulle energie positive, Λ_+ , e negative, Λ_- ,

$$\Lambda_+(k) = \sum_{\alpha=1}^2 u^\alpha(k) \otimes \bar{u}^\alpha(k) = \not{k} + m \quad (6.153)$$

$$-\Lambda_-(k) = \sum_{\alpha=1}^2 v^\alpha(k) \otimes \bar{v}^\alpha(k) = \not{k} - m \quad . \quad (6.154)$$

Da (6.152), con le definizioni precedenti, si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_r (\bar{u}^r(p_1))_{1 \times a} (P_R)_{a \times b} (-\Lambda_-(p_2))_{b \times c} (P_L)_{c \times d} (u^r(p_1))_{d \times 1} \\
&= (\Lambda_+(p_1))_{d \times a} (P_R (-\Lambda_-(p_2)) P_L)_{a \times d} \\
&= \text{Tr} [\Lambda_+(p_1) P_R (-\Lambda_-(p_2)) P_L] \\
&= \text{Tr} [\not{p}_1 + m_e P_R (\not{p}_2 - m_e) P_L] \quad (P_L P_R = 0) \\
&= \text{Tr} [\not{p}_1 + m_e P_R \not{p}_2] \\
&= \text{Tr} \left[(p_{1\alpha} \gamma^\alpha + m_e) \frac{1 + \gamma^5}{2} \gamma^\beta p_{2\beta} \right] \quad (6.155)
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[p_{1\alpha} p_{2\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta + p_{1\alpha} p_{2\beta} \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\beta + m_e p_{2\beta} \gamma^\beta + m_e p_{2\beta} \gamma^5 \gamma^\beta \right] \quad . \quad (6.156)$$

Si usano le proprietà delle tracce delle matrici gamma di Dirac $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\beta) = 0$, $\text{Tr}(\gamma^\beta) = 0$, $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\beta) = 0$ e $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}$, perciò sopravvive solo il primo termine e il risultato finale è

$$\begin{aligned}
\sum_{k,r} |\bar{e}_{r,p_1} P_R e_{k,p_2}^C|^2 &= F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) 2p_1 \cdot p_2 \\
&= F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \quad . \quad (6.157)
\end{aligned}$$

Si rimette questo risultato nella formula dell'emivita

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{CI}^{-1} = \left(\frac{g_{t0}}{\Lambda}\right)^8 \frac{m_e^2 m_p^2}{(\ln 2) 512 \pi^2 R_0^2 M_N^2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} F_0(Z+2, E_1) \times \\ \times F_0(Z+2, E_2) 2p_1 \cdot p_2 |\mathcal{M}_1|^2 (2\pi) \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \quad . \quad (6.158)$$

Ora passando alle coordinate sferiche e considerando l'equazione mass-shell $E_{1(2)}^2 = (\vec{p}_{1(2)})^2 + m_e^2$ si ha

$$E_{1(2)} dE_{1(2)} = |\vec{p}_{1(2)}| dp_{1(2)} \Rightarrow d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2 = 8\pi^2 p_1 p_2 E_1 E_2 dE_1 dE_2 d\cos\theta_{12} \quad . \quad (6.159)$$

Adottando la notazione di [58]

$$C = \frac{(G_F \cos \theta_C)^4 m_e^2}{16\pi^5} \quad (6.160)$$

$$G_{11}^{(0)} = \frac{2C}{(\ln 2) 4R_0^2} \int F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) p_1 p_2 E_1 E_2 \times \\ \times dE_1 dE_2 \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \\ \equiv \frac{2C}{(\ln 2) 4R_0^2} \int f_{11}^{(0)} p_1 p_2 E_1 E_2 dE_1 dE_2 \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \quad (6.161)$$

si riscrive (6.158) come

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{CI}^{-1} = \left(\frac{g_{t0}^8}{\Lambda^8}\right) \frac{m_p^2}{64M_N^2} |\mathcal{M}_1|^2 \frac{G_{11}^{(0)}}{(G_F \cos \theta_C)^4} \quad , \quad (6.162)$$

risultato finale della sezione.

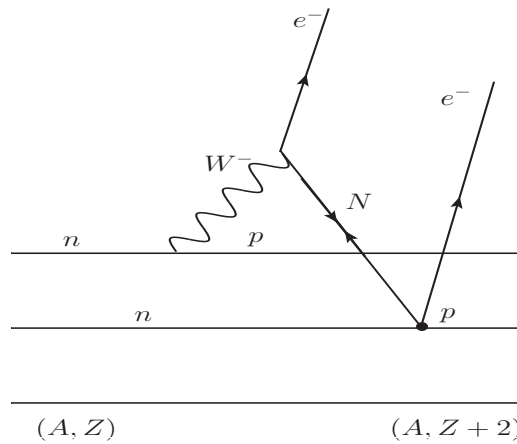


Figura 6.3: Diagramma di Feynman del decadimento $0\nu\beta\beta$ per una delle due interazioni miste

6.3 Interazioni mixed

In questa tipologia di calcoli, la parte più articolata riguarda le interazioni mixed, in cui un nucleone decade seguendo il meccanismo delle interazioni di gauge (6.2) mentre l'altro segue quello delle interazioni di contatto (6.88) e viceversa. Gli elementi di matrice di transizione (S-matrix) non banale, per $0\nu\beta\beta$, sono

$$\langle e_{p_1} e_{p_2} 0_F^+ | \frac{i^2}{2} \int d^4x d^4y {}''T\{\mathcal{L}_{GI}(x)\mathcal{L}_{CI}(y)\}'' | 0_I^+ \rangle \equiv T_{MIX}^I \quad (6.163)$$

$$\langle e_{p_1} e_{p_2} 0_F^+ | \frac{i^2}{2} \int d^4x d^4y {}''T\{\mathcal{L}_{CI}(x)\mathcal{L}_{GI}(y)\}'' | 0_I^+ \rangle \equiv T_{MIX}^{II} \quad (6.164)$$

dove si considerano solo transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$ fra il nucleo iniziale e finale ed il virgolettato $''\cdot''$ indica che si considera solo il termine che restituisce il diagramma di Feynman connesso desiderato: Fig.6.3 per (6.163) e Fig.6.4 per (6.164). Per semplicità si esplicitano i calcoli e le considerazioni solo per T_{MIX}^I , in quanto quelli per T_{MIX}^{II} sono perfettamente analoghi e ne verranno citati i risultati utili quando richiesto. Come ampiamente già visto in questo Capitolo

$$T_{MIX}^I = -\mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_{t0}}{\Lambda}\right)^2 \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{\cos\theta_C}{8} \int d^4x d^4y \frac{1-P_{12}}{\sqrt{2}} (-i\delta_\mu^\nu) \times \\ \times \frac{\langle e_{p_1} e_{p_2} 0_F^+ | T\{j_R^\mu(x) J_\nu^h(y) j_R(y) J^h(y)\} | 0_I^+ \rangle}{(q+p_1)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \quad , \quad (6.165)$$

dove nel prodotto T ordinato si ha il propagatore del neutrino di Majorana

$$\begin{aligned} \langle e_{p_1} e_{p_2} | T\{j_R^\mu(x) j_R(y)\} | 0 \rangle &= \langle e_{p_1} e_{p_2} | T\{\bar{e}(x) \gamma^\mu P_R N^e(x) N^{eT}(y) P_R^T \bar{e}^T(y)\} | 0 \rangle \\ &= e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \langle 0 | N^e(x) N^{eT}(y) | 0 \rangle P_R^T \bar{e}_{p_2}^T \\ &= e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \langle 0 | N^e(x) \bar{N}^e(y) | 0 \rangle C^{-1} P_R^T \bar{e}_{p_2}^T \\ &= -e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \langle 0 | N^e(x) \bar{N}^e(y) | 0 \rangle P_R e_{p_2}^C \quad . \end{aligned} \quad (6.166)$$

Rimettendo in (6.165) esplicitando i propagatori trovati

$$T_{MIX}^I = C_{eff} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4x d^4y e^{-iq \cdot (x-y)} e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \frac{1-P_{12}}{\sqrt{2}} \times \\ \times \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R \frac{i(\not{q} + M_N)}{q^2 - M_N^2 + i\epsilon} P_R e_{p_2}^C \frac{(-i\delta_\mu^\nu) \langle 0_F^+ | T\{J^h(x) J_\nu^h(y)\} | 0_I^+ \rangle}{(q+p_1)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \quad (6.167)$$

dove $C_{eff} \equiv \mathcal{G}_R^W \cos\theta_C \left(\frac{g_{t0}}{\Lambda}\right)^2 \frac{M_W^2 G_F}{2\sqrt{2}}$. Saltando alcuni passaggi, con le considerazioni fatte nelle sezioni precedenti e il cambiamento di variabili usuale

$$\begin{cases} x = z + \frac{u}{2} \\ y = z - \frac{u}{2} \end{cases} \quad \text{con} \quad d^4x d^4y = d^4u d^4z \quad , \quad (6.168)$$

si ottiene

$$T_{MIX}^I = C_{eff} M_N (2\pi)^4 \delta^4(P_F + p_1 + p_2 - P_I) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 u e^{-i(q-p_1) \cdot u} \times$$

$$\times \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \frac{\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C}{q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon} \frac{\langle 0_F^+ | T \{ J^h(u) J_\mu^h(0) \} | 0_I^+ \rangle}{q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon} \quad (6.169)$$

$$\equiv i(2\pi)^4 \delta^4(P_F + p_1 + p_2 - P_I) M_{MIX}^I \quad (6.170)$$

dove

$$M_{MIX}^I = -i C_{eff} M_N \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \frac{\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C}{q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon} \frac{W_\mu(q - p_1)}{q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon} \quad (6.171)$$

A questo punto si esplicita l'azione dell'operatore di scambio

$$\frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C - \bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R e_{p_1}^C) \quad (6.172)$$

Manipolo il secondo termine

$$\bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R e_{p_1}^C \quad (6.173)$$

essendo uno scalare se ne prende il trasposto, che è uguale a sé per definizione,

$$(\bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R e_{p_1}^C)_{1 \times 1} \equiv [\bar{e}_{p_2} \gamma^\mu P_R e_{p_1}^C]^T = \bar{e}_{p_1} C^T (1 + \gamma_5^T) \gamma^{\mu T} \bar{e}_{p_2}^T \quad (6.174)$$

Non utilizzando esplicitamente nessuna rappresentazione per le matrici gamma, ci si affida alle proprietà generali della matrice di coniugazione in carica ($-C = C^T = C^{-1} = C^\dagger$) e le relazioni $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$, $C \gamma^5 C^{-1} = +\gamma^{5T}$, allora

$$\bar{e}_{p_1} C^{-1} \frac{1 + \gamma^{5T}}{2} C C^{-1} \gamma^{\mu T} C C^{-1} \bar{e}_{p_2}^T \quad (6.175)$$

$$= \bar{e}_{p_1} \frac{1 + \gamma^5}{2} (-\gamma^\mu) (-C) \bar{e}_{p_2}^T \quad (6.176)$$

$$= \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_L e_{p_2}^C \quad (6.177)$$

rimettendola in (6.172) ho

$$\frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C - \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_L e_{p_2}^C) \quad (6.178)$$

Invece di addentrarsi nel calcolo degli NME e dell'emivita $(T_{1/2}^{0\nu})_{MIX}^I$ si controlla cosa viene fuori a questo stesso punto per M_{MIX}^{II} , in quanto potrebbe succedere che i due termini di interferenza si annullino fra loro.

L'altra interazione mixed che si ottiene dall'elemento di matrice di transizione non banale (6.164), intuitivamente darà gli stessi risultati di prima con la differenza che invece di avere (6.171) si otterrà

$$M_{mix}^{II} = i C_{eff} M_N \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \frac{\bar{e}_{p_1} P_R \gamma^\mu e_{p_2}^C}{q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon} \frac{W_\mu(q - p_1)}{q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon} \quad (6.179)$$

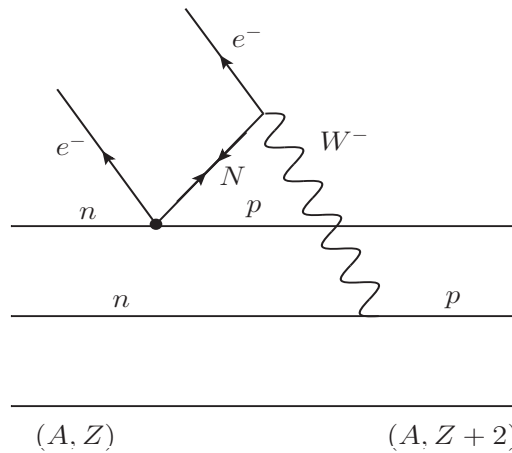


Figura 6.4: Diagramma di Feynman del decadimento $0\nu\beta\beta$ per una delle due interazioni miste

I calcoli sull'azione dell'operatore di scambio sono identici a quelli appena fatti per M_{MIX}^I e il risultato sarà

$$\frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \bar{e}_{p_1} P_R \gamma^\mu e_{p_2}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_{p_1} P_R \gamma^\mu e_{p_2}^C - \bar{e}_{p_1} P_L \gamma^\mu e_{p_2}^C) \quad , \quad (6.180)$$

che si manipola facilmente in

$$\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_L e_{p_2}^C - \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C \quad . \quad (6.181)$$

Sommando i risultati trovati per (6.171) e (6.179) si ha

$$\begin{aligned} M_{MIX}^I + M_{MIX}^{II} &= iC_{eff} \frac{M_N}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C + \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_L e_{p_2}^C \\ &\quad + \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_L e_{p_2}^C - \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu P_R e_{p_2}^C) \frac{W_\mu(q - p_1)}{(q_0^2 - \omega_N^2 + i\epsilon)(q_0^2 - \omega_W^2 + i\epsilon)} \\ &\equiv M_{MIX} \end{aligned} \quad (6.182)$$

dove il termine tra parentesi tonde dà

$$-2\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} - \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) e_{p_2}^C = -2\bar{e}_{p_1} \gamma^\mu \gamma^5 e_{p_2}^C \quad (6.183)$$

quindi non si possono escludere i contributi delle interazioni mixed al decadimento $0\nu\beta\beta$.

6.3.1 Elementi di matrice nucleare

Si calcola ora il "termine adronico"

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{W_\mu(q - p_1)}{(q_0^2 - \omega_N^2)(q_0^2 - \omega_W^2)} \quad (6.184)$$

in maniera rapida, visto che è perfettamente analogo a quanto fatto finora. Con le stesse assunzioni e approssimazioni adottate durante tutto il Capitolo, infatti, si arriva a

$$W_\mu(q_0, \vec{q}) = \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | | \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q}) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \frac{2i\Delta}{q_0^2 - \Delta^2 + i\epsilon} \quad (6.185)$$

e si passa al calcolo dell'integrale in q_0 , che in questo caso è

$$I(q^2) \equiv \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{2i\Delta}{(q_0^2 - \Delta^2)(q_0^2 - \omega_N^2)(q_0^2 - \omega_W^2)} \quad (6.186)$$

trascurando gli impliciti $i\epsilon$ a denominatore. L'integrale in questione è esattamente pari alla funzione $J(q^2)$ definita per le interazioni di gauge, quindi, seguendo i passaggi già fatti in questo Capitolo, si ottiene il risultato

$$I(q^2) = -\frac{1}{\omega_W^2 \omega_N^2} \approx -\frac{1}{M_W^2 M_N^2} \quad . \quad (6.187)$$

Rimettendo insieme i risultati (6.182), (6.183), (6.185) e (6.187) si ha

$$M_{MIX} = i\mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_{t0}^2}{\Lambda^2} \right) \frac{G_F \cos \theta_C}{2M_N} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \bar{e}_{p_1} \gamma^\mu \gamma^5 e_{p_2}^C \times \\ \times \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \langle \langle 0_F^+ | | \tilde{J}^{(k)}(-\vec{q}) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(\vec{q}) | 0_I^+ \rangle \quad , \quad (6.188)$$

ora scrivendo gli sviluppi non relativistici (6.60), (6.61) e (6.137), il prodotto fra le correnti nucleoniche è

$$\tilde{J}^{(k)}(-\vec{q}) \tilde{J}_\mu^{(\ell)}(\vec{q}) = \tau_k^+ \tau_\ell^+ g_{\mu 0} \left[F_S(\vec{q}^2) F_V(\vec{q}^2) \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} \right. \\ \left. + \frac{F_P(\vec{q}^2) F_{P'}(\vec{q}^2)}{8m_p^3} q_0 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{q}) \right] \\ = \tau_k^+ \tau_\ell^+ g_{\mu 0} \left[g_S g_V \tilde{h}_{VV}(q^2) \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} + \frac{g_P g_{P'}}{24m_p^3} \tilde{h}_{PP}(q^2) \times \right. \\ \left. \times q_0 (\vec{q}^2 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)}) \right] \quad (6.189)$$

dove si sono tenuti solo i termini che contribuiscono alle transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$. Si scrivono i NME a partire da (6.188)

$$\begin{aligned}
M_{MIX} &= i\mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_{t0}^2}{\Lambda^2} \right) \frac{G_F \cos \theta_C}{2M_N} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \bar{e}_{p_1} \gamma^0 \gamma^5 e_{p_2}^C \sum_{k,\ell} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \times \\
&\quad \times \langle \langle 0_F^+ | | \tau_k^+ \tau_\ell^+ \left[g_S g_V \tilde{h}_{VV}(q^2) \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(k)} \mathbb{1}_{2 \times 2}^{(\ell)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g_P g_{P'}}{24m_p^3} \tilde{h}_{PP}(q^2) q_0 (\vec{q}^2 (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) + \vec{q}^2 S_{k\ell}^{(q)}) \right] | 0_I^+ \rangle \right. \\
&= i\mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_{t0}^2}{\Lambda^2} \right) \frac{G_F \cos \theta_C}{2M_N} \bar{e}_{p_1} \gamma^0 \gamma^5 e_{p_2}^C \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \times \\
&\quad \times \left[g_S g_V \mathcal{M}_F + \frac{g_P g_{P'}}{24} (\mathcal{M}_{GT}^{tq_0 PP'} + \mathcal{M}_T^{tq_0 PP'}) \right] \\
&\equiv i\mathcal{G}_R^W \left(\frac{g_{t0}^2}{\Lambda^2} \right) \frac{G_F \cos \theta_C}{2M_N} \bar{e}_{p_1} \gamma^0 \gamma^5 e_{p_2}^C \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}_5
\end{aligned} \tag{6.190}$$

dove, da referenza [58], $\mathcal{M}_{GT}^{tq_0 PP'} \approx 10^{-2} \mathcal{M}_{GT}^{P'P'}$ e $\mathcal{M}_T^{tq_0 PP'} \approx 10^{-2} \mathcal{M}_T^{P'P'}$.

6.3.2 Emivita $(T_{1/2}^{0\nu})_{MIX}$

La formula per il calcolo dell'emivita è

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{MIX}^{-1} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \overline{|M_{MIX}|^2} (2\pi) \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \tag{6.191}$$

dove la probabilità di transizione del $0\nu\beta\beta$ sommata sugli spin degli elettroni finali è

$$\overline{|M_{MIX}|^2} = (\mathcal{G}_R^W)^2 \left(\frac{g_{t0}}{\Lambda} \right)^4 \frac{(G_F \cos \theta_C)^2}{4M_N^2} \frac{m_e^2 m_p^2}{(4\pi R_0)^2} |\mathcal{M}_5|^2 \sum_{spin} |\bar{e}_{p_1} \gamma^0 \gamma^5 e_{p_2}^C|^2 \quad . \tag{6.192}$$

Il calcolo del modulo quadro sommato negli spin di $\bar{e}_{p_1} \gamma^0 \gamma^5 e_{p_2}^C$, dove la funzione d'onda dell'elettrone può essere approssimata come al solito da

$$e_{p_{1,2}} = \sqrt{F_0(Z+2, E_{1,2})} u(p_{1,2}) \quad , \tag{6.193}$$

è perfettamente analogo a quello delle due precedenti sezioni e il risultato è

$$\sum_{k,r} |\bar{e}_{p_1} \gamma^0 \gamma^5 e_{p_2}^C|^2 = F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) 4(E_1 E_2 + m_e^2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \quad . \tag{6.194}$$

Passando alle coordinate sferiche e considerando l'equazione mass-shell si ha:

$$E_{1(2)} dE_{1(2)} = |\vec{p}_{1(2)}| dp_{1(2)} \Rightarrow d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2 = 8\pi^2 p_1 p_2 E_1 E_2 dE_1 dE_2 d\cos \theta_{12} \tag{6.195}$$

e adottando la notazione di [58]

$$C = \frac{(G_F \cos \theta_C)^4 m_e^2}{16\pi^5} \tag{6.196}$$

$$\begin{aligned}
G_{66}^{(0)} &= \frac{2C}{(\ln 2)4R_0^2} \int F_0(Z+2, E_1) F_0(Z+2, E_2) \frac{(2E_1 E_2 + 2m_e^2)}{4E_1 E_2} \times \\
&\quad \times p_1 p_2 E_1 E_2 dE_1 dE_2 \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \\
&\equiv \frac{2C}{(\ln 2)4R_0^2} \int \frac{1}{16} f_{66}^{(0)} p_1 p_2 E_1 E_2 dE_1 dE_2 \delta(E_F + E_1 + E_2 - E_I) \quad (6.197)
\end{aligned}$$

si riscrive (6.191) come

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{MIX}^{-1} = (\mathcal{G}_R^W)^2 \left(\frac{g_{t0}^4}{\Lambda^4} \right) \frac{m_p^2}{2M_N^2} |\mathcal{M}_5|^2 \frac{G_{66}^{(0)}}{(G_F \cos \theta_C)^2} \quad , \quad (6.198)$$

risultato finale della sezione.

Capitolo 7

Conclusioni

In questo capitolo conclusivo si discutono i vincoli espliciti sullo spazio dei parametri $(M_N, \Lambda, \mathcal{G}_R^W)$ del modello BSM di tipo NJL, ottenuti tramite i risultati discussi nel capitolo precedente. Si sommano i tre contributi (6.85), (6.162) e (6.198) nell'ipotesi che questi siano dominanti per determinare l'emivita del decadimento $0\nu\beta\beta$

$$T_{1/2}^{0\nu} \equiv (T_{1/2}^{0\nu})_{GI} + (T_{1/2}^{0\nu})_{CI} + (T_{1/2}^{0\nu})_{MIX} \quad . \quad (7.1)$$

Considerando i limiti inferiori sperimentali sull'emivita $((T_{1/2}^{0\nu})_{exp})$ in Tab.4.1, la relazione (7.1) si traduce nella disuguaglianza:

$$\begin{aligned} (T_{1/2}^{0\nu})_{exp} \leq & \frac{M_N^2}{(\mathcal{G}_R^W)^4} \left(\frac{1}{m_p^2 |\mathcal{M}_{0\nu}|^2 G_{11}^{(0)}} \right) + \frac{\Lambda^4 M_N^2}{(\mathcal{G}_R^W)^2} \times \\ & \times \left(\frac{2(G_F \cos \theta_C)^2}{g_{t0}^4 m_p^2 |\mathcal{M}_5|^2 G_{66}^{(0)}} \right) + \Lambda^8 M_N^2 \left(\frac{64(G_F \cos \theta_C)^4}{g_{t0}^8 m_p^2 |\mathcal{M}_1|^2 G_{11}^{(0)}} \right) \quad , \end{aligned} \quad (7.2)$$

risultato analitico principale del lavoro di tesi. Descrive il vincolo sui parametri del modello NJL [28] imposti dalla non osservazione dell'evento raro $0\nu\beta\beta$.

Al fine di analizzare (7.2) per trarne dei vincoli nello spazio dei parametri $(M_N, \Lambda, \mathcal{G}_R^W)$, si specificano i valori numerici utilizzati per le altre quantità della disuguaglianza. Per la costante d'accoppiamento di Yukawa del quark top nel modello NJL $g_{t0} \sim \mathcal{O}(1)$ come suggerito in [28]. I valori dei NME ($\mathcal{M}_{0\nu}$, \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_5) vengono presi dalle Tabelle V e VI della referenza [58] e sono stati calcolati con il modello IBM. Dallo stesso articolo, in Tabella VII, sono presi i valori dei PSF ($G_{11}^{(0)}$, $G_{66}^{(0)}$). Dato che i limiti inferiori sperimentali più stringenti sull'emivita sono:

$$(T_{1/2}^{0\nu})_{exp} = \begin{cases} 1.8 \times 10^{26} y & (^{76}\text{Ge} [10]) \\ 2.3 \times 10^{26} y & (^{136}\text{Xe} [9]) \end{cases} \quad , \quad (7.3)$$

gli isotopi con cui verrà fatta l'analisi di (7.2) saranno quindi il ^{76}Ge e lo ^{136}Xe .

Utilizzando il programma *Mathematica* sono stati prodotti i grafici 3D generali per il Germanio (Fig.7.6) e per lo Xenon (Fig.7.7). Comparandoli si nota

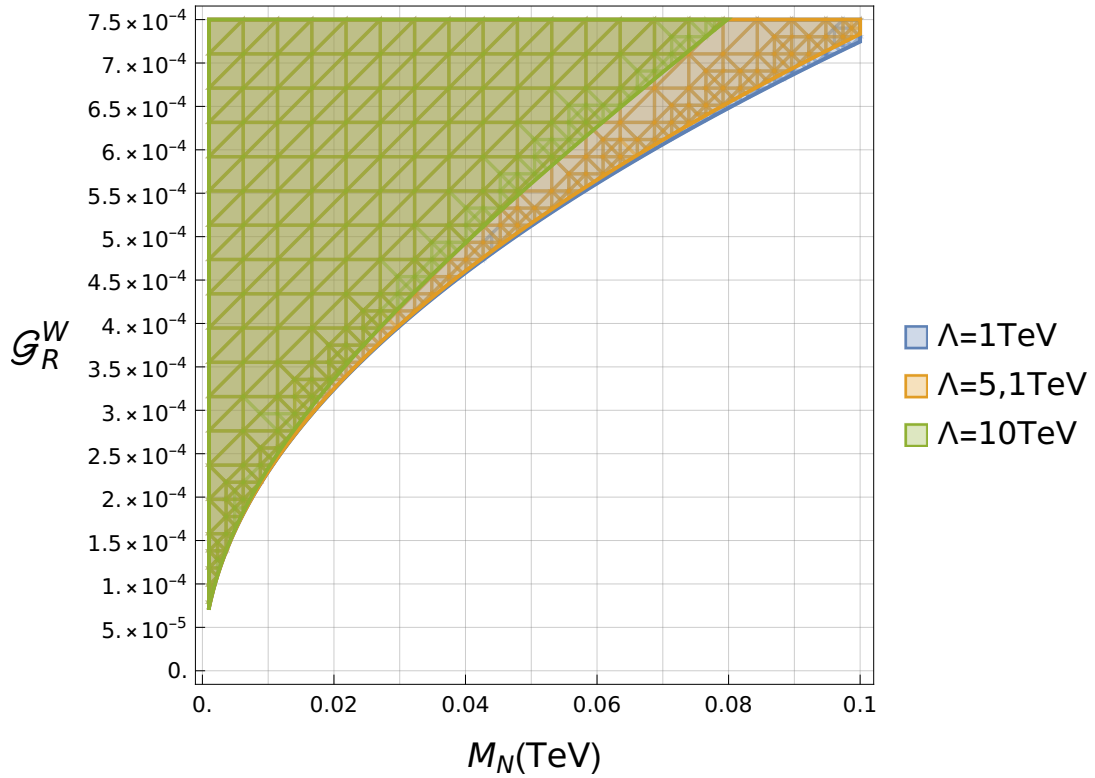


Figura 7.1: Vincoli, a Λ fissata, su \mathcal{G}_R^W in funzione della massa del neutrino M_N , in un intervallo di riferimento per il modello NJL [28]. Le regioni di esclusione sono quelle colorate.

che i vincoli che derivano dall'isotopo ^{136}Xe sono più forti di quelli dal ^{76}Ge , per questa ragione quest'ultimo verrà ignorato nel proseguo della discussione. La regione di valori dello spazio dei parametri $(M_N, \Lambda, \mathcal{G}_R^W)$ esclusa dal vincolo (7.2) in Fig. 7.7 è quella superiore alla superficie arancione. L'intervallo di M_N e Λ in Fig. 7.7 è stato scelto perché per valori maggiori della massa del neutrino e della scala energetica di nuova fisica (soprattutto per quest'ultima) la superficie che rappresenta il limite tende a valori della costante efficace \mathcal{G}_R^W molto grandi. Questo tipo di grafico 3D è utile per avere un'idea dell'andamento generale del vincolo in funzione di tutti e tre i parametri, ciononostante può risultare di difficile lettura. Per questo motivo è stata fatta un'analisi più approfondita fissando una variabile dello spazio $(M_N, \Lambda, \mathcal{G}_R^W)$.

Assegnando alla scala energetica Λ dei valori di riferimento per il modello NJL considerato [28] in questo lavoro di tesi ($\Lambda = 1 \text{ TeV}$, $\Lambda = 5, 1 \text{ TeV}$, $\Lambda = 10 \text{ TeV}$) la disuguaglianza (7.2) si traduce in vincoli sulla costante efficace \mathcal{G}_R^W in funzione della massa del neutrino pesante M_N , rappresentati in Fig. 7.2. Le regioni di grafico escluse dalla disuguaglianza (7.2) sono quelle colorate. Si nota che il vincolo determinato dalla curva verde diverge ben prima di arrivare al valore $M_N = 1 \text{ TeV}$, mentre quello ottenuto dalle curve blu e arancione per $M_N = 1 \text{ TeV}$ costringe il valore della costante efficace ad essere $\mathcal{G}_R^W \lesssim 2.5 \times 10^{-3}$. Dato che c'è una grande differenza tra la curva verde e quelle blu e arancione, si

analizzano ulteriormente queste ultime due (Fig.7.2 Sotto). La curva arancione per $M_N = 1$ TeV impone il limite $\mathcal{G}_R^W \lesssim 2.6 \times 10^{-3}$, mentre quella blu $\mathcal{G}_R^W \lesssim 2.3 \times 10^{-3}$, leggermente più forte dell'altra curva. Si analizza lo stesso grafico selezionando un intervallo di valori della massa M_N di riferimento per il modello NJL [28], $10 \text{ GeV} < M_N < 100 \text{ GeV}$, in Fig.7.1. Il vincolo che deriva dalla curva blu è, per $M_N = 100 \text{ GeV}$, $\mathcal{G}_R^W \lesssim 7.25 \times 10^{-4}$, molto vicino a quello per la curva arancione $\mathcal{G}_R^W \lesssim 7.35 \times 10^{-4}$. È interessante notare che per masse $M_N < 100 \text{ GeV}$ i vincoli sulla costante efficace per $\Lambda = 1 \text{ TeV}$ e $\Lambda = 5, 1 \text{ TeV}$ sono quasi identici. Inoltre per masse del neutrino di poche decine di GeV tutte e tre le curve sono praticamente sovrapposte. È importante ricordare, però, che questi risultati sono stati ottenuti assumendo che la massa M_N sia almeno pari a $\sim 10 \text{ GeV}$.

Si ricorda che questa analisi è stata fatta senza trascurare il fattore di forma pseudo-scalare $F_P(q^2)$, nel calcolo dei NME per le interazioni di contatto e mixed, come suggerito nelle referenze [59, 60]. Per completezza si riportano i limiti ottenuti trascurando nei NME di contatto e mixed il fattore di forma pseudo-scalare. Da Fig.7.3 si nota come, in questo caso, la dipendenza dalla scala di energia in (7.2) è estremamente accentuata e il limite sulla costante efficace \mathcal{G}_R^W è, in generale, estremamente più debole per $\Lambda = 5, 1 \text{ TeV}$. Si riporta lo stesso grafico selezionando l'intervallo di riferimento per il modello NJL: $10 \text{ GeV} < M_N < 100 \text{ GeV}$ in Fig.7.3 (Sotto). In questo grafico si nota che le curve blu e arancione sono distinte anche per valori della massa di poche decine di GeV.

Infine si è ripetuta l'analisi di questa sezione utilizzando come limite sperimentale sull'emivita la proiezione degli esperimenti di nuova generazione [17, 19]: $(T_{1/2}^{0\nu})_{exp} \approx 10^{28} \text{ y}$. In questo modo si può avere già un'idea del vincolo (7.2) ottenibile in futuro. In generale, in tutti e quattro i grafici Fig.7.4 e Fig.7.5 (fattore di forma pseudo-scalare trascurato), il limite sulla costante \mathcal{G}_R^W è più forte rispetto ai precedenti. La conseguenza più importante del miglioramento sul limite dell'emivita si nota particolarmente bene in Fig.7.5 (Sopra), ovvero la dipendenza dalla scala energetica Λ è meno influente nel vincolo di \mathcal{G}_R^W . Infatti, in questo caso, la curva arancione diverge per un valore della massa $M_N \sim 500 \text{ GeV}$, mentre in Fig.7.3 (Sopra) la divergenza della curva si ha per $M_N \sim 80 \text{ GeV}$.

Concludiamo notando come i limiti ottenuti in Fig.7.1, Fig.7.3 (Sotto) sono compatibili con quelli ricavati in referenza [61], prodotti per cercare di spiegare l'eccesso di eventi di rinculo di elettroni dell'esperimento XENON1T [62]. Inoltre tutti i limiti ottenuti in questo capitolo conclusivo sono consistenti, in generale, con quelli astrofisici ricavati sempre in [61], per essere consistenti con i dati di raffreddamento stellare [63]. Questi infatti sono molto più deboli di quelli ottenuti dai risultati originali della tesi. I limiti astrofisici per i tre tipi di neutrini sterili sono [61] ($N_R^e \rightarrow \mathcal{G}_R \lesssim 40, 83$), ($N_R^\mu \rightarrow \mathcal{G}_R \lesssim 0, 19$) e ($N_R^\tau \rightarrow \mathcal{G}_R \lesssim 1, 17 \times 10^{-2}$).

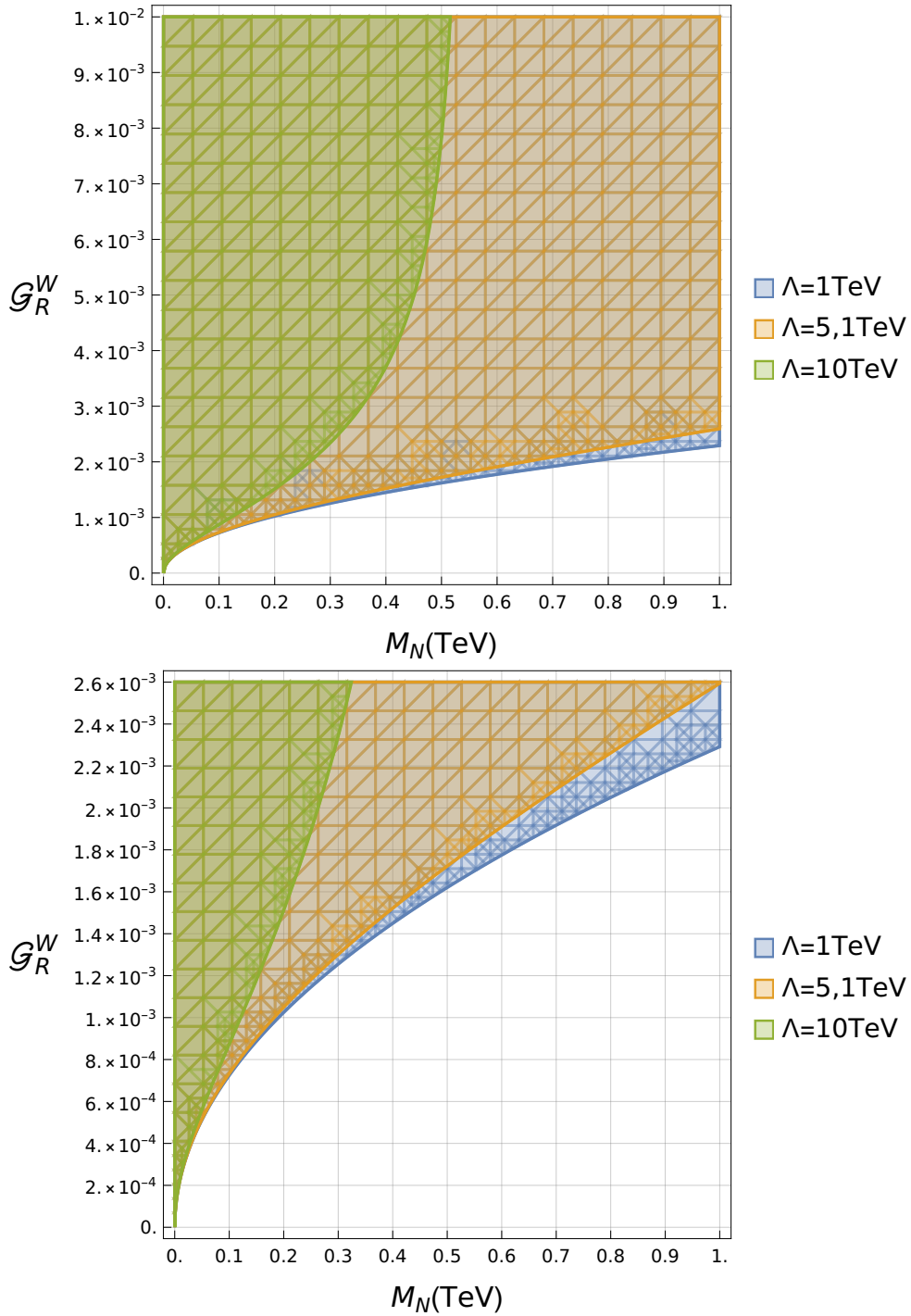


Figura 7.2: (Sopra) Vincoli su \mathcal{G}_R^W in funzione della massa del neutrino M_N , per valori fissati di Λ . Le regioni escluse dal vincolo (7.2) sono quelle, colorate, sopra le tre curve. La regione blu corrisponde al valore di $\Lambda = 1 \text{ TeV}$, quella arancione a $\Lambda = 5.1 \text{ TeV}$ e infine l'area di esclusione verde si ha per $\Lambda = 10 \text{ TeV}$. (Sotto) Ingrandimento della regione $0 < \mathcal{G}_R^W < 2.6 \times 10^{-3}$ del grafico superiore per distinguere meglio la separazione tra le regioni di esclusioni delle curve per $\Lambda = 1 \text{ TeV}$ e $\Lambda = 5.1 \text{ TeV}$.

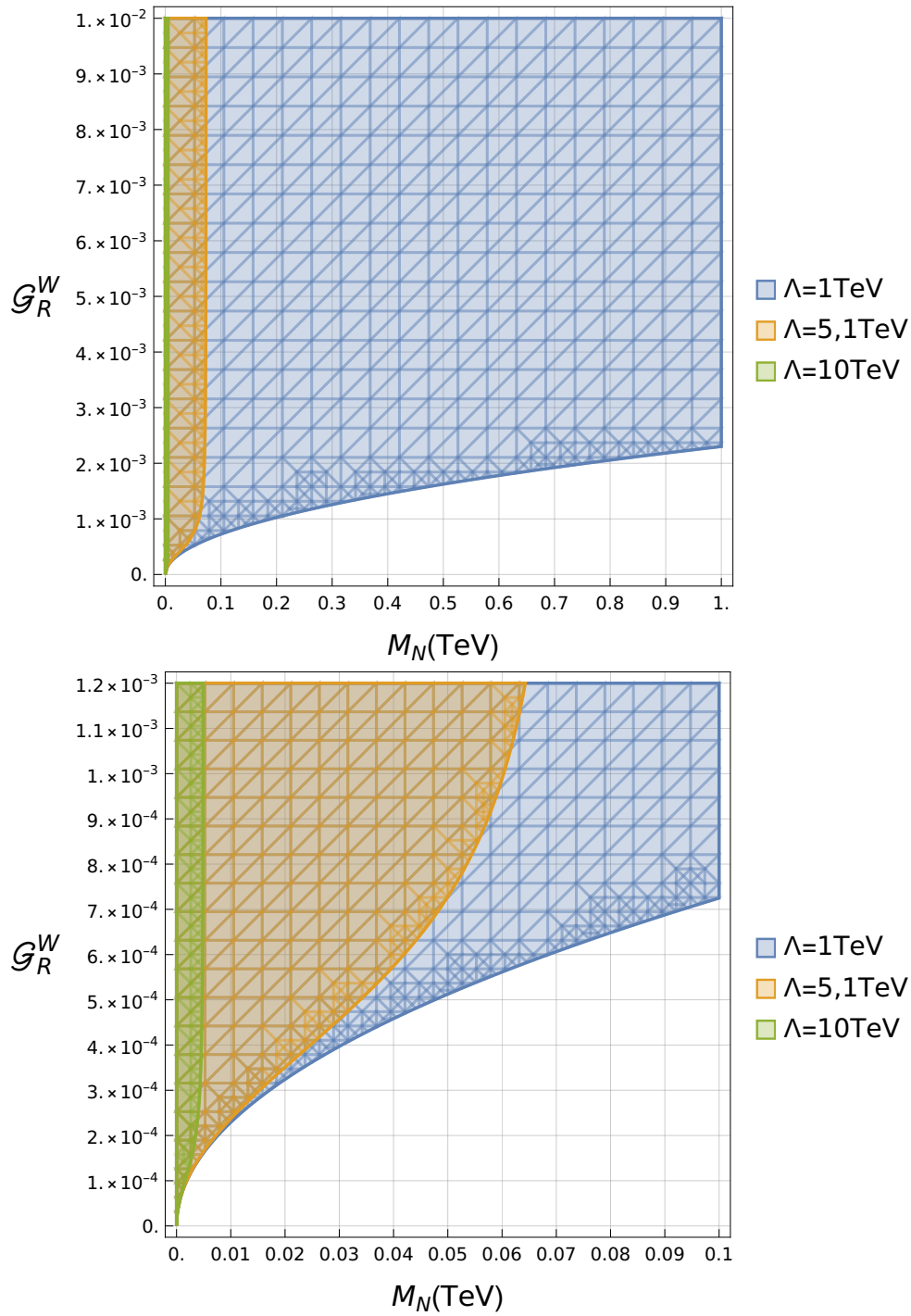


Figura 7.3: (Sopra) Vincoli su G_R^W in funzione della massa del neutrino M_N , per valori fissati di Λ e nel caso in cui il **fattore di forma pseudo-scalare** venga **trascurato**. Le regioni escluse dal vincolo (7.2) sono quelle, colorate, sopra le tre curve. La regione blu corrisponde al valore di $\Lambda = 1$ TeV, quella arancione a $\Lambda = 5,1$ TeV e infine l'area di esclusione verde si ha per $\Lambda = 10$ TeV. (Sotto) Stesso grafico del pannello superiore, ma nell'intervallo di riferimento delle masse per il modello NJL [28].

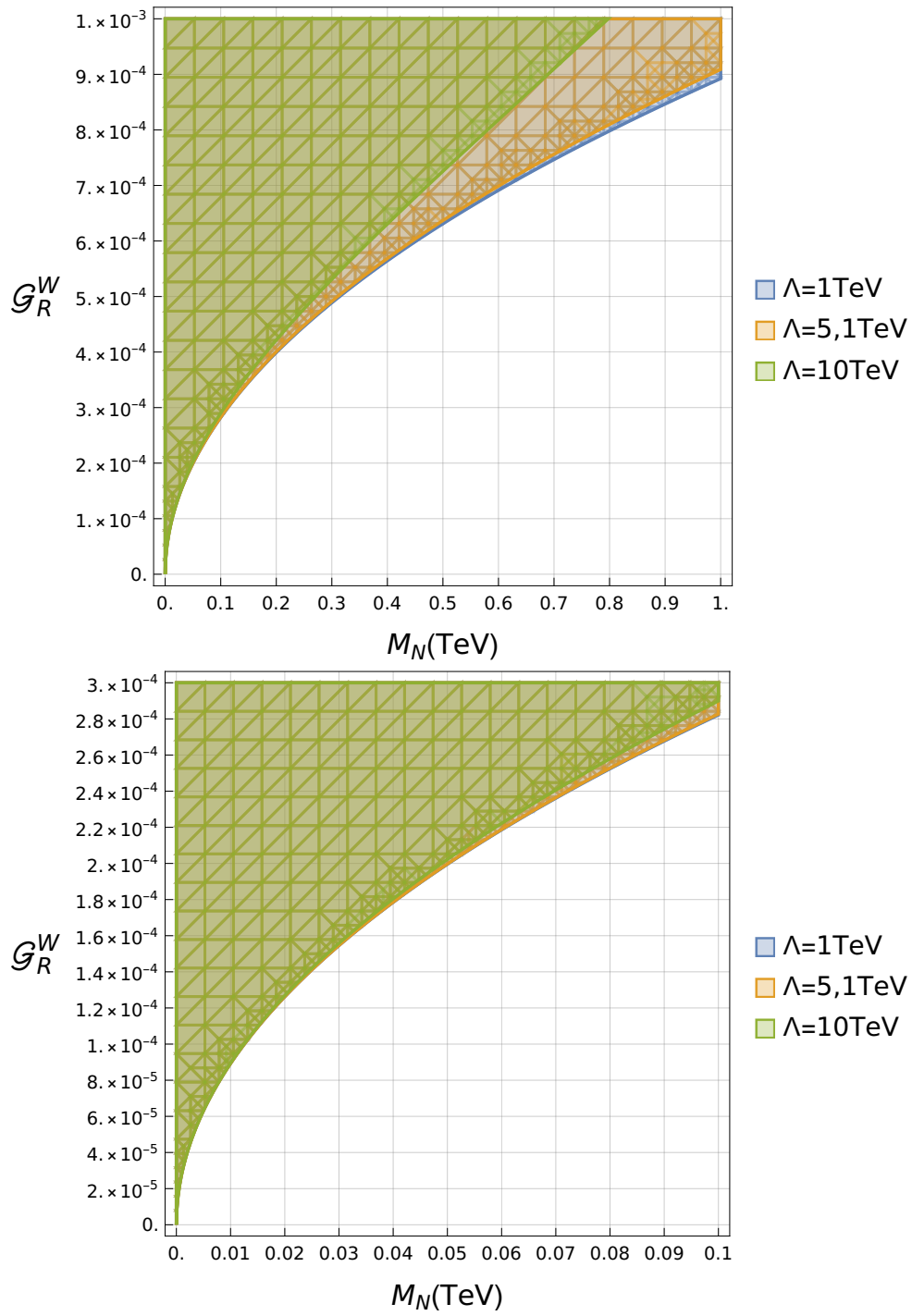


Figura 7.4: (Sopra) Vincoli su \mathcal{G}_R^W in funzione della massa del neutrino M_N , per valori fissati di Λ e utilizzando il **limite proiettato dell'emivita** ($T_{1/2}^{0\nu} \sim 10^{28}$). Le regioni escluse dal vincolo (7.2) sono quelle, colorate, sopra le tre curve. La regione blu corrisponde al valore di $\Lambda = 1$ TeV, quella arancione a $\Lambda = 5,1$ TeV e infine l'area di esclusione verde si ha per $\Lambda = 10$ TeV. (Sotto) Stesso grafico del pannello superiore, ma nell'intervallo di riferimento delle masse per il modello NJL [28].

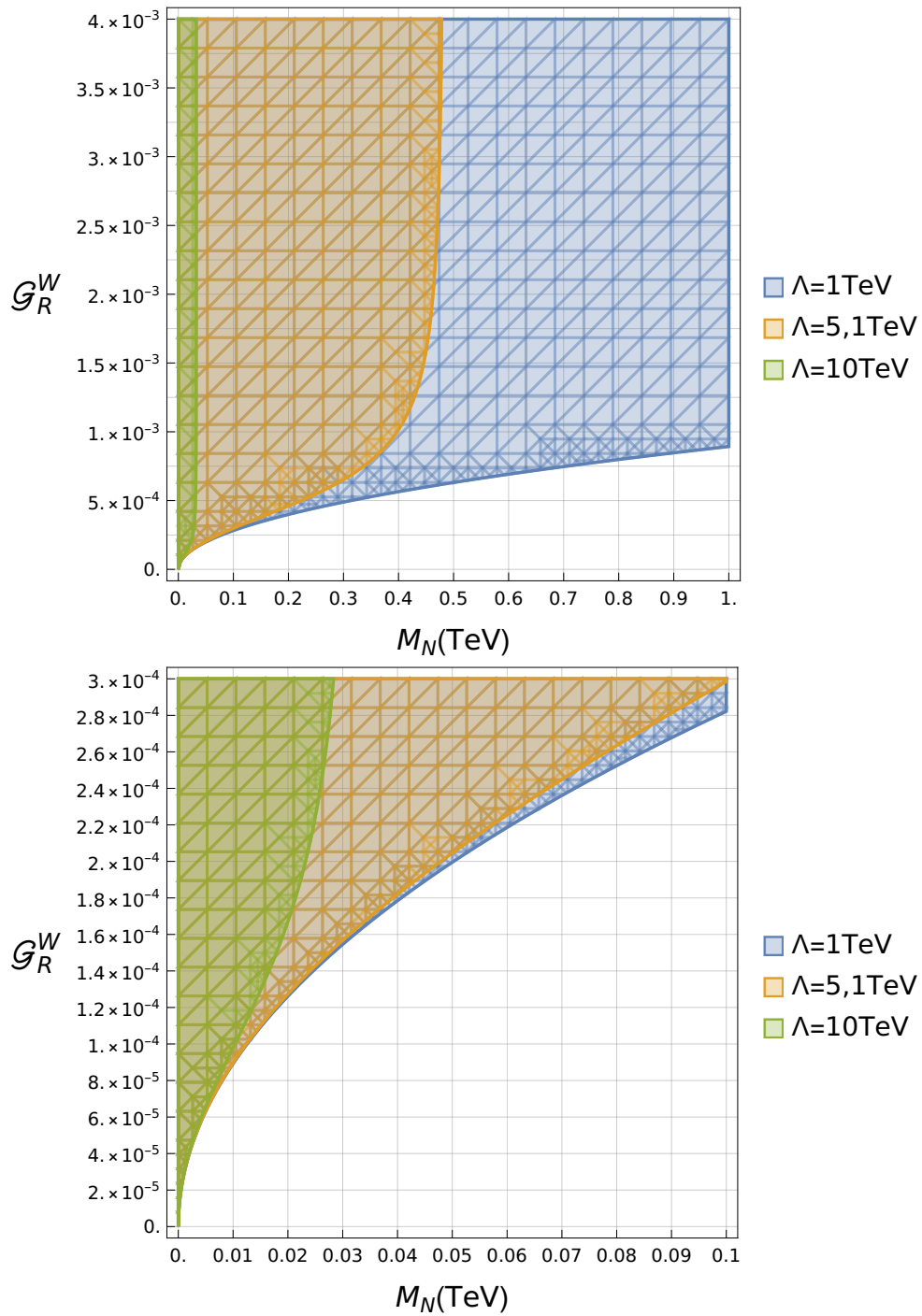


Figura 7.5: Vincoli su G_R^W in funzione della massa del neutrino M_N , per valori fissati di Λ , **trascuando il fattore di forma pseudo-scalare** e utilizzando il **limite proiettato dell'emivita** $(T_{1/2}^{0\nu}) \sim 10^{28}$. Le regioni escluse dal vincolo (7.2) sono quelle, colorate, sopra le tre curve. La regione blu corrisponde al valore di $\Lambda = 1 \text{ TeV}$, quella arancione a $\Lambda = 5, 1 \text{ TeV}$ e infine l'area di esclusione verde si ha per $\Lambda = 10 \text{ TeV}$. (Sotto) Stesso grafico del pannello superiore, ma nell'intervallo di riferimento delle masse per il modello NJL [28].

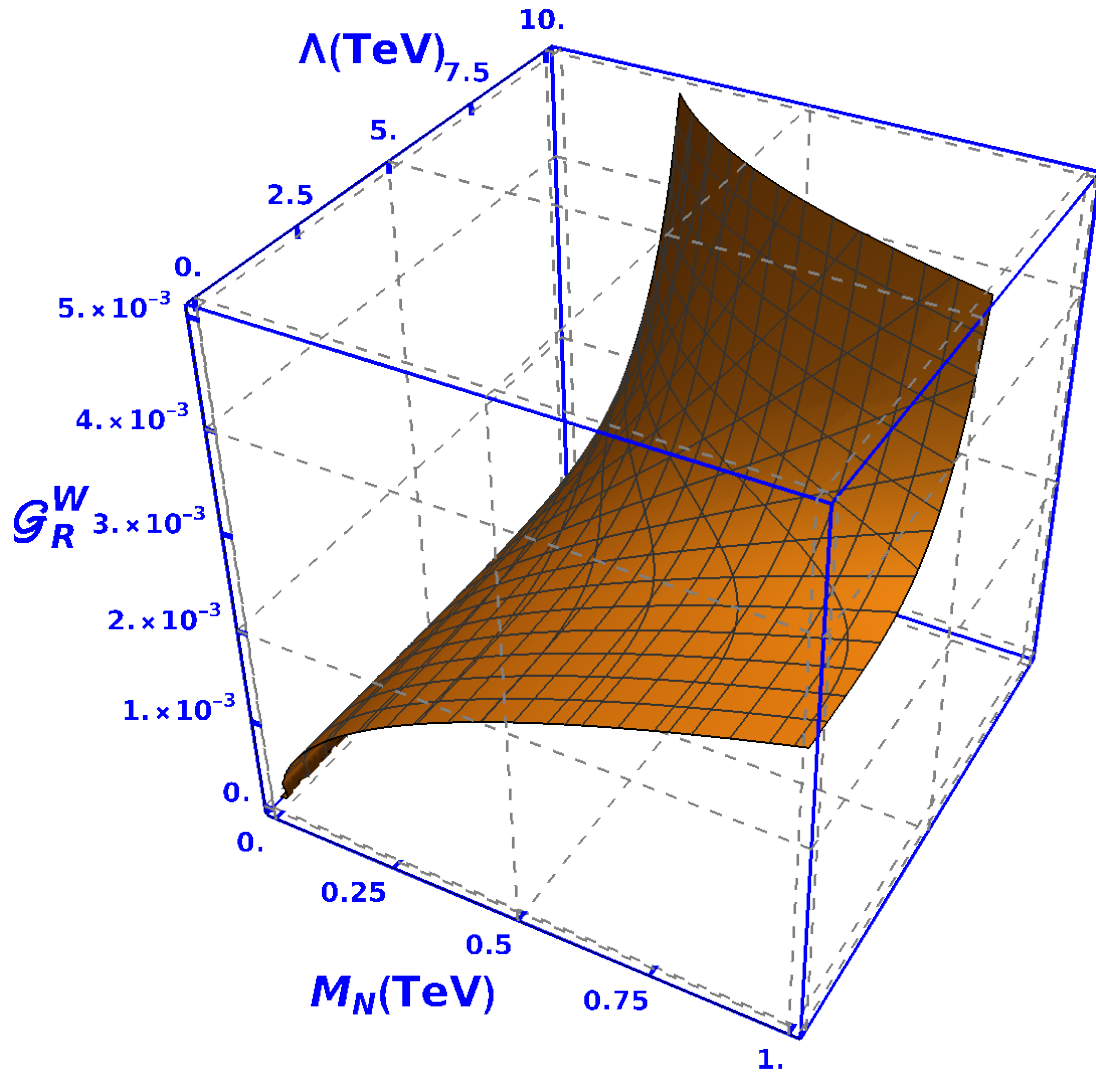


Figura 7.6: Grafico 3D relativo alla disuguaglianza (7.2) per l'isotopo ^{76}Ge . La regione del grafico esclusa dalla non osservazione del decadimento $0\nu\beta\beta$ è quella sopra la superficie arancione.

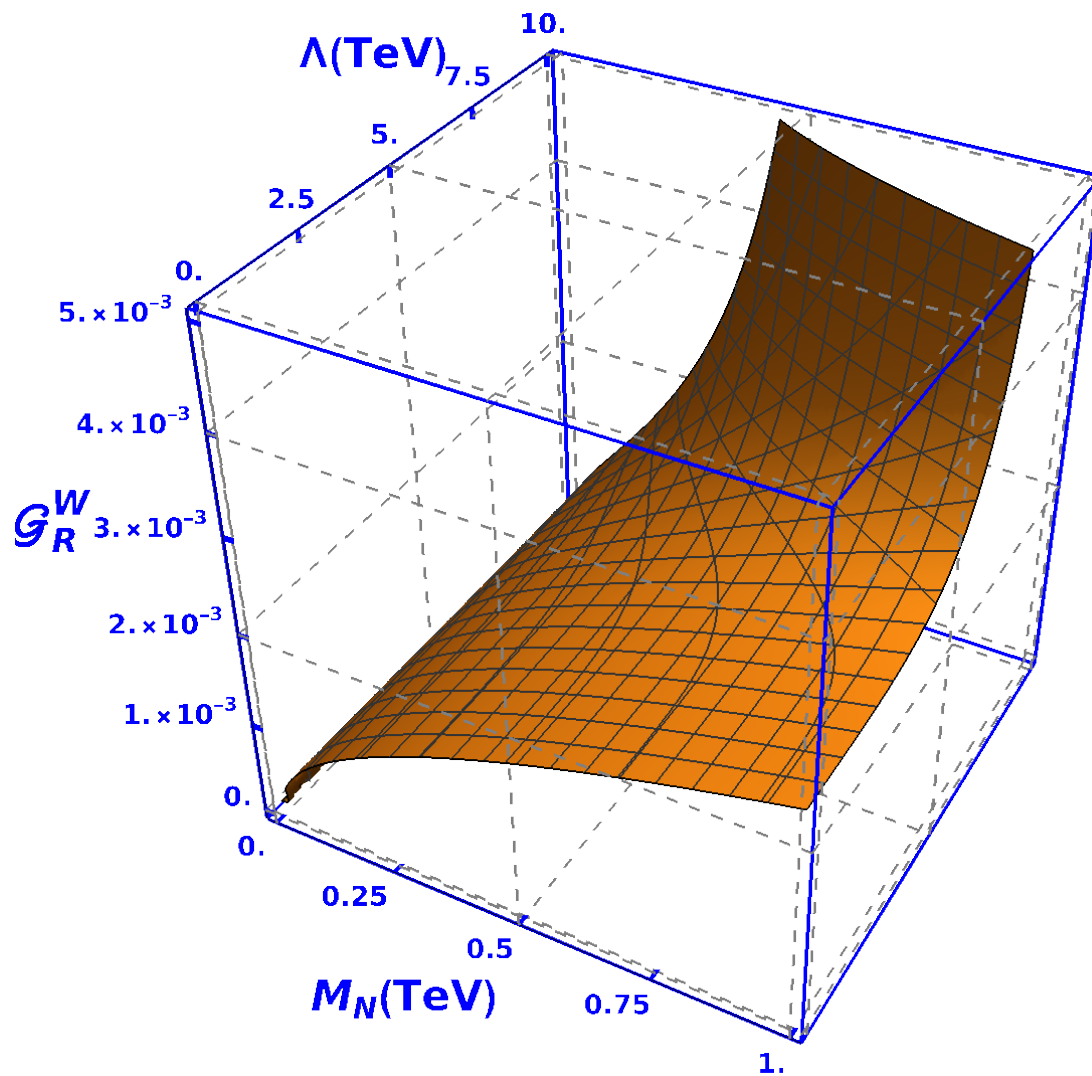


Figura 7.7: Grafico 3D relativo alla disuguaglianza (7.2) per l'isotopo ^{136}Xe . La regione del grafico esclusa dalla non osservazione del decadimento $0\nu\beta\beta$ è quella sopra la superficie arancione.

Appendice A

NME: Trasformate di Fourier-Bessel

A.1 Dettagli calcolo NME: \mathcal{M}_F e \mathcal{M}_{GT}^{PP}

Si comincia con il calcolo dell'integrale

$$\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \xi_{k\ell}} f(q^2) \quad (\text{A.1})$$

dove $f(q^2)$ è una generica funzione. Passando alle coordinate sferiche

$$\frac{2\pi}{8\pi^3} \int_0^\infty f(q^2) q^2 dq \int_{-1}^{+1} e^{iq\xi_{k\ell} \cos \theta} d(\cos \theta) \quad , \quad (\text{A.2})$$

si risolve l'integrale in $\cos \theta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{iq\xi_{k\ell}} - e^{-iq\xi_{k\ell}}}{iq\xi_{k\ell}} f(q^2) q^2 dq &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin q\xi_{k\ell}}{q\xi_{k\ell}} f(q^2) q^2 dq \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty j_0(q\xi_{k\ell}) f(q^2) q^2 dq \right) \quad , \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

dove $j_0(q\xi_{k\ell}) = \frac{\sin q\xi_{k\ell}}{q\xi_{k\ell}}$ è la prima funzione di Bessel sferica e il termine tra parentesi tonde è la trasformata di Fourier-Bessel. Per ricollegarsi al presente lavoro di tesi con la funzione generica, per questo calcolo semplice, si identifica

$$f(q^2) = g_V^2 \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ \tilde{h}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle \quad (\text{A.4})$$

perciò (A.3) diventa

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ j_0(q\xi_{k\ell}) \tilde{h}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^2 dq \right) \quad (\text{A.5})$$

che definendo il NME di Fermi

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_F &= \frac{2R_0}{\pi m_e m_p} \int_0^\infty \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ j_0(q\xi_{k\ell}) \tilde{h}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^2 dq \\ &= R_0 \int_0^\infty \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ j_0(q\xi_{k\ell}) h(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^2 dq\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

dove si è introdotto $R_0 = 1, 2A^{1/3} fm$, è il raggio medio nucleare, come normalizzazione usuale, si ha

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{\xi}_{k\ell}} g_V^2 \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ \tilde{h}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle = g_V^2 \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}_F \quad . \quad (\text{A.7})$$

Analogamente definendo il NME di Gamow-Teller con accoppiamento di due fattori di forma pseudo-scalari

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'_{GT}{}^{PP} &= \frac{\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell}{m_p^2} \frac{2R_0}{\pi m_e m_p} \int_0^\infty \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ j_0(q\xi_{k\ell}) \tilde{h}_{PP}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^4 dq \\ &= \frac{\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell}{m_p^2} R_0 \int_0^\infty \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ j_0(q\xi_{k\ell}) h_{PP}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^4 dq\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

e considerando come funzione generica

$$f(q^2) = \frac{-g_{P'}^2}{12m_p^2} q^2 \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ \tilde{h}_{PP}(q^2) \vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell | 0_I^+ \rangle \rangle \quad , \quad (\text{A.9})$$

da (A.3) si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{\xi}_{k\ell}} \frac{-g_{P'}^2}{12m_p^2} q^2 \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ \tilde{h}_{PP}(q^2) \vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell | 0_I^+ \rangle \rangle &= \\ &= \frac{-g_{P'}^2}{12} \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}'_{GT}{}^{PP} \quad .\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

A.2 Dettagli calcolo NME: $\mathcal{M}'_T{}^{PP}$

Lo scopo di questa parte di Appendice punta al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{\xi}_{k\ell}} f(q^2) S_{k\ell}^{(q)} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{\xi}_{k\ell}} [3(\vec{\sigma}_k \cdot \hat{q})(\vec{\sigma}_\ell \cdot \hat{q}) - \vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell] f(q^2) \quad (\text{A.11})$$

dove $f(q^2)$ è la solita funzione generica. Dato che l'integranda è funzione sia di q^2 che di $\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}$ e l'intervallo di integrazione, in \vec{q} , è simmetrico, il risultato del seguente integrale può avere solo una determinata forma:

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{\xi}} f(q^2) \hat{q}_i \hat{q}_j = A \delta_{ij} + B \xi_i \xi_j \quad (\text{A.12})$$

dove per semplicità si trascurano i pedici di ξ . Moltiplicando (A.12) per δ^{ij} e $\xi^i \xi^j$, si ottengono rispettivamente

$$\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}} f(q^2) = 3A + B\xi^2 \quad (\text{A.13})$$

$$\int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}} f(q^2) (\hat{q} \cdot \vec{\xi})^2 = A\xi^2 + B\xi^4 = \xi^2 (A + B\xi^2) \quad , \quad (\text{A.14})$$

il calcolo per (A.13) è stato fatto nella sezione precedente (A.3) ed il risultato dà

$$3A + B\xi^2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty j_0(q\xi) f(q^2) q^2 dq \right) \quad . \quad (\text{A.15})$$

Si calcola ora l'integrale in (A.14)

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}} f(q^2) (\hat{q} \cdot \vec{\xi})^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty f(q^2) q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) e^{iq\xi \cos \theta} (\xi \cos \theta)^2 \\ &\equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty f(q^2) q^2 dq \xi^2 \int_{-1}^{+1} dx e^{iq\xi x} x^2 \quad , \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

ci si concentra sul termine

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dx e^{iq\xi x} x^2 &= \int_{-1}^{+1} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{iq\xi x}}{iq\xi} \right) x^2 \\ &\stackrel{IPP}{=} \left[\left(\frac{e^{iq\xi x}}{iq\xi} \right) x^2 \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} dx \left(\frac{e^{iq\xi x}}{iq\xi} \right) 2x \\ &\stackrel{IPP}{=} \frac{2 \sin q\xi}{q\xi} - \frac{2}{iq\xi} \left\{ \left[\left(\frac{e^{iq\xi x}}{iq\xi} \right) x \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{e^{iq\xi x}}{iq\xi} dx \right\} \\ &= \frac{2 \sin q\xi}{q\xi} - \frac{4}{iq\xi} \left(\frac{\cos q\xi}{iq\xi} + \frac{i \sin q\xi}{(q\xi)^2} \right) \quad , \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

perciò

$$\xi^2 \int_{-1}^{+1} dx e^{iq\xi x} x^2 = 2 \left[2 \frac{\cos q\xi}{q^2} + \frac{\sin q\xi}{q\xi} \left(\xi^2 - \frac{2}{q^2} \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

e rimettendola in (A.16) si ottiene

$$A\xi^2 + B\xi^4 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 dq \left[2 \frac{\cos q\xi}{q^2} + \frac{\sin q\xi}{q\xi} \left(\xi^2 - \frac{2}{q^2} \right) \right] \right) \quad . \quad (\text{A.19})$$

Moltiplicando (A.15) per ξ^2 e sottraendogli (A.19) si può isolare la costante A

$$A = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 \left(-\frac{\cos q\xi}{(q\xi)^2} + \frac{\sin q\xi}{(q\xi)^3} \right) dq \right) \quad , \quad (\text{A.20})$$

per isolare B , invece, si moltiplica (A.15) per $\frac{\xi^2}{3}$ e la si sottrae a (A.19) ottenendo

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3}{2\xi^4} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 \left[2 \frac{\cos q\xi}{q^2} + \left(\frac{2\xi^2}{3} - \frac{2}{q^2} \right) \frac{\sin q\xi}{q\xi} \right] dq \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 \left(\frac{-1}{\xi^2} \right) \left[-3 \frac{\cos q\xi}{(q\xi)^2} + \left(\frac{3}{(q\xi)^2} - 1 \right) \frac{\sin q\xi}{q\xi} \right] dq \right) \\
&\equiv \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 \left(-\frac{1}{\xi^2} \right) j_2(q\xi) dq \right) \tag{A.21}
\end{aligned}$$

dove si è introdotta la seconda funzione sferica di Bessel $j_2(q\xi)$. Finalmente si torna al calcolo di (A.11), che si può scrivere

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} f(q^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{\xi}} 3(\sigma_k)^i (\sigma_\ell)^j \hat{q}_i \hat{q}_j - (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} f(q^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{\xi}} \\
&= (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) \left(3A - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty j_0(q\xi) f(q^2) q^2 dq \right) + 3B (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\xi}_{k\ell}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{\xi}_{k\ell}) \\
&= (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) (3A - 3A - B\xi_{k\ell}^2) + 3B (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\xi}_{k\ell}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{\xi}_{k\ell}) \\
&= \left((\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) - \frac{3}{\xi_{k\ell}^2} (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\xi}_{k\ell}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \vec{\xi}_{k\ell}) \right) \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 j_2(q\xi) dq \right) \right] \\
&= - \left(3(\vec{\sigma}_k \cdot \hat{\xi}_{k\ell}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \hat{\xi}_{k\ell}) - (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) \right) \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 j_2(q\xi) dq \right) \right] \\
&= - \left(3(\vec{\sigma}_k \cdot \hat{\xi}_{k\ell}) (\vec{\sigma}_\ell \cdot \hat{\xi}_{k\ell}) - (\vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_\ell) \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 j_2(q\xi) dq \right) \\
&\equiv -S_{k\ell} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(q^2) q^2 j_2(q\xi) dq \right) \quad . \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Definendo il NME tensoriale, per accoppiamento di due fattori di forma pseudo-scalari,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_T'^{PP} &= \frac{-1}{m_p^2} \frac{2S_{k\ell}R_0}{\pi m_e m_p} \int_0^\infty \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ j_2(q\xi_{k\ell}) \tilde{h}_{PP}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^4 dq \\
&= \frac{-1}{m_p^2} S_{k\ell} R_0 \int_0^\infty \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ j_2(q\xi_{k\ell}) h_{PP}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^4 dq \tag{A.23}
\end{aligned}$$

e identificando la funzione generica come

$$f(q^2) = \frac{-g_P^2}{12m_p^2} \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ \tilde{h}_{PP}(q^2) \vec{q}^2 | 0_I^+ \rangle \rangle \quad , \tag{A.24}$$

da (A.11) si ha

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{\xi}_{k\ell}} \frac{-g_P^2}{12m_p^2} \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ \tilde{h}_{PP}(q^2) \vec{q}^2 | 0_I^+ \rangle \rangle S_{k\ell}^{(q)} \\
&= \frac{S_{k\ell} m_e m_p}{4\pi R_0} \frac{2R_0}{\pi m_e m_p} \int_0^\infty \frac{g_P^2}{12m_p^2} \langle \langle 0_F^+ | \sum_{k,\ell} \tau_k^+ \tau_\ell^+ \tilde{h}_{PP}(q^2) | 0_I^+ \rangle \rangle q^4 j_2(q\xi) dq \\
&= -\frac{g_P^2}{12} \frac{m_e m_p}{4\pi R_0} \mathcal{M}_T'^{PP} \quad . \quad (\text{A.25})
\end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto in questa appendice, sostituendo le giuste funzioni generiche $f(q^2)$, si ottengono tutti i NME utilizzati in questo lavoro di tesi nella forme che si trovano in referenza [55].

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il prof. Panella per il supporto durante il lavoro di tesi e per avermi introdotto ad un ambito di ricerca scientifica estremamente interessante e stimolante.

Ringrazio il dott. Presilla per la disponibilità e per il continuo scambio di commenti e considerazioni sul lavoro di tesi.

Ringrazio sentitamente il dott. Xue per lo stimolante scambio di e-mail riguardo i suoi lavori, su cui si basano molte considerazioni della tesi.

Ringrazio con affetto la mia famiglia, per avermi sostenuto in ogni modo possibile e sopportato nei miei periodi più bui.

Ringrazio i miei nonni, perché il solo pensare a loro mi riporta all'infanzia alleggerendo il mio presente. Ringrazio il nuovo arrivato Pietro Maria, perché durante la fase di stesura della tesi il solo vederlo mi alleviava da ogni fatica.

Ringrazio i miei amici: Lorenzo, Giuseppe, Mattia, Nicola, Francesco; con cui mi scuso per non essere molto presente, mi impegno a liberarmi più spesso in futuro.

Ringrazio il mio professore del liceo Maurizio Brizioli, perché grazie a lui mi sono appassionato alla Fisica.

Infine ringrazio i miei animali domestici che mi hanno accompagnato fin dall'inizio del liceo e che, ahimè, oggi non sono più con me. references

Bibliografia

- [1] J. F. Donoghue, E. Golowich e Barry R. Holstein. *Dynamics of the standard model*. Vol. 2. CUP, 2014. DOI: [10.1017/CB09780511524370](#).
- [2] C. S. Wu et al. «Experimental Test of Parity Conservation in β Decay». In: *Phys. Rev.* 105 (1957), pp. 1413–1414. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1413](#).
- [3] Peter W. Higgs. «Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons». In: *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964). A cura di J. C. Taylor, pp. 508–509. DOI: [10.1103/PhysRevLett.13.508](#).
- [4] Serguei Chatrchyan et al. «Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC». In: *Phys. Lett. B* 716 (2012), pp. 30–61. DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.021](#). arXiv: [1207.7235 \[hep-ex\]](#).
- [5] Georges Aad et al. «Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC». In: *Phys. Lett. B* 716 (2012), pp. 1–29. DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.020](#). arXiv: [1207.7214 \[hep-ex\]](#).
- [6] Alessandro Bettini. *Introduction to elementary particle physics*. 2008. ISBN: 978-0-521-88021-3.
- [7] Morad Aaboud et al. «Search for new phenomena in dijet events using 37 fb⁻¹ of pp collision data collected at $\sqrt{s}=13$ TeV with the ATLAS detector». In: *Phys. Rev. D* 96.5 (2017), p. 052004. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.052004](#). arXiv: [1703.09127 \[hep-ex\]](#).
- [8] Albert M Sirunyan et al. «Search for new physics in dijet angular distributions using proton–proton collisions at $\sqrt{s}=13$ TeV and constraints on dark matter and other models». In: *Eur. Phys. J. C* 78.9 (2018), p. 789. DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-6242-x](#). arXiv: [1803.08030 \[hep-ex\]](#).
- [9] S. Abe et al. «First Search for the Majorana Nature of Neutrinos in the Inverted Mass Ordering Region with KamLAND-Zen». In: (mar. 2022). arXiv: [2203.02139 \[hep-ex\]](#).
- [10] M. Agostini et al. «Final Results of GERDA on the Search for Neutrinoless Double- β Decay». In: *Phys. Rev. Lett.* 125.25 (2020), p. 252502. DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.252502](#). arXiv: [2009.06079 \[nucl-ex\]](#).

- [11] C. Alduino et al. «First Results from CUORE: A Search for Lepton Number Violation via $0\nu\beta\beta$ Decay of ^{130}Te ». In: *Phys. Rev. Lett.* 120.13 (2018), p. 132501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.132501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.132501). arXiv: [1710.07988](https://arxiv.org/abs/1710.07988) [[nucl-ex](#)].
- [12] W. H. Furry. «On transition probabilities in double beta-disintegration». In: *Phys. Rev.* 56 (1939), pp. 1184–1193. DOI: [10.1103/PhysRev.56.1184](https://doi.org/10.1103/PhysRev.56.1184).
- [13] J. Schechter e J. W. F. Valle. «Neutrinoless Double beta Decay in SU(2) x U(1) Theories». In: *Phys. Rev. D* 25 (1982), p. 2951. DOI: [10.1103/PhysRevD.25.2951](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.25.2951).
- [14] E. der Mateosian e M. Goldhaber. «A new limit for neutrinoless double beta decay». In: *12th International Conference on High Energy Physics*. 1964.
- [15] E. Fiorini et al. «A Search for Lepton Nonconservation in Double Beta Decay With a Germanium Detector». In: *Phys. Lett. B* 25 (1967), pp. 602–603. DOI: [10.1016/0370-2693\(67\)90127-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(67)90127-X).
- [16] A. D. McDonald et al. «Demonstration of Single Barium Ion Sensitivity for Neutrinoless Double Beta Decay using Single Molecule Fluorescence Imaging». In: *Phys. Rev. Lett.* 120.13 (2018), p. 132504. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.132504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.132504). arXiv: [1711.04782](https://arxiv.org/abs/1711.04782) [[physics.ins-det](#)].
- [17] N. Abgrall et al. «The Large Enriched Germanium Experiment for Neutrinoless $\beta\beta$ Decay: LEGEND-1000 Preconceptual Design Report». In: (lug. 2021). arXiv: [2107.11462](https://arxiv.org/abs/2107.11462) [[physics.ins-det](#)].
- [18] G. Adhikari et al. «nEXO: neutrinoless double beta decay search beyond 10^{28} year half-life sensitivity». In: *J. Phys. G* 49.1 (2022), p. 015104. DOI: [10.1088/1361-6471/ac3631](https://doi.org/10.1088/1361-6471/ac3631). arXiv: [2106.16243](https://arxiv.org/abs/2106.16243) [[nucl-ex](#)].
- [19] R. Nakamura et al. «Research and development toward KamLAND2-Zen». In: *J. Phys. Conf. Ser.* 1468.1 (2020). A cura di Masayuki Nakahata, p. 012256. DOI: [10.1088/1742-6596/1468/1/012256](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1468/1/012256).
- [20] O. Panella et al. «Neutrinoless double beta decay with composite neutrinos». In: *Phys. Rev. D* 56 (1997), pp. 5766–5775. DOI: [10.1103/PhysRevD.56.5766](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.56.5766). arXiv: [hep-ph/9701251](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9701251).
- [21] S. Biondini et al. «Complementarity between neutrinoless double beta decay and collider searches for heavy neutrinos in composite-fermion models». In: (nov. 2021). arXiv: [2111.01053](https://arxiv.org/abs/2111.01053) [[hep-ph](#)].
- [22] Antonio Pich. «Effective field theory: Course». In: *Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 68: Probing the Standard Model of Particle Interactions*. Giu. 1998, pp. 949–1049. arXiv: [hep-ph/9806303](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9806303).
- [23] Matteo Presilla. «A lepton pairs and jets final state in CMS and unitarity interpretations». Tesi di dott. Padua U., 2021.

- [24] Burt A. Ovrut e Howard J. Schnitzer. «Decoupling Theorems for Effective Field Theories». In: *Phys. Rev. D* 22 (1980), p. 2518. DOI: [10.1103/PhysRevD.22.2518](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.22.2518).
- [25] W. Buchmuller e D. Wyler. «Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation». In: *Nucl. Phys. B* 268 (1986), pp. 621–653. DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90262-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90262-2).
- [26] Yoichiro Nambu e G. Jona-Lasinio. «Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.» In: *Phys. Rev.* 122 (1961). A cura di T. Eguchi, pp. 345–358. DOI: [10.1103/PhysRev.122.345](https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.345).
- [27] Yoichiro Nambu e G. Jona-Lasinio. «DYNAMICAL MODEL OF ELEMENTARY PARTICLES BASED ON AN ANALOGY WITH SUPERCONDUCTIVITY. II». In: *Phys. Rev.* 124 (1961). A cura di T. Eguchi, pp. 246–254. DOI: [10.1103/PhysRev.124.246](https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.246).
- [28] She-Sheng Xue. «Spontaneous Peccei-Quinn symmetry breaking renders sterile neutrino, axion and χ boson to be candidates for dark matter particles». In: *Nucl. Phys. B* 980 (2022), p. 115817. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2022.115817](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2022.115817). arXiv: [2012.04648](https://arxiv.org/abs/2012.04648) [hep-ph].
- [29] William A. Bardeen, Christopher T. Hill e Manfred Lindner. «Minimal Dynamical Symmetry Breaking of the Standard Model». In: *Phys. Rev. D* 41 (1990), p. 1647. DOI: [10.1103/PhysRevD.41.1647](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.41.1647).
- [30] B. T. Cleveland et al. «Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector». In: *Astrophys. J.* 496 (1998), pp. 505–526. DOI: [10.1086/305343](https://doi.org/10.1086/305343).
- [31] Steven Weinberg. «A Model of Leptons». In: *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967), pp. 1264–1266. DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1264](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1264).
- [32] S. L. Glashow. «Partial Symmetries of Weak Interactions». In: *Nucl. Phys.* 22 (1961), pp. 579–588. DOI: [10.1016/0029-5582\(61\)90469-2](https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90469-2).
- [33] Abdus Salam. «Weak and Electromagnetic Interactions». In: *Conf. Proc. C* 680519 (1968), pp. 367–377. DOI: [10.1142/9789812795915_0034](https://doi.org/10.1142/9789812795915_0034).
- [34] Y. Fukuda et al. «Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos». In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998), pp. 1562–1567. DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.1562](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.1562). arXiv: [hep-ex/9807003](https://arxiv.org/abs/hep-ex/9807003).
- [35] Carlo Giunti e Chung W. Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. 2007. ISBN: 978-0-19-850871-7.
- [36] Susanne Mertens. «Direct Neutrino Mass Experiments». In: *J. Phys. Conf. Ser.* 718.2 (2016), p. 022013. DOI: [10.1088/1742-6596/718/2/022013](https://doi.org/10.1088/1742-6596/718/2/022013). arXiv: [1605.01579](https://arxiv.org/abs/1605.01579) [nucl-ex].
- [37] Mattias Blennow et al. «Neutrinoless double beta decay in seesaw models». In: *JHEP* 07 (2010), p. 096. DOI: [10.1007/JHEP07\(2010\)096](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2010)096). arXiv: [1005.3240](https://arxiv.org/abs/1005.3240) [hep-ph].

- [38] B. Pontecorvo. «Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge». In: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 53 (1967), pp. 1717–1725.
- [39] M. Goeppert-Mayer. «Double beta-disintegration». In: *Phys. Rev.* 48 (1935), pp. 512–516. DOI: [10.1103/PhysRev.48.512](https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.512).
- [40] H. Pas et al. «A Superformula for neutrinoless double beta decay. 2. The Short range part». In: *Phys. Lett. B* 498 (2001), pp. 35–39. DOI: [10.1016/S0370-2693\(00\)01359-9](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)01359-9). arXiv: [hep-ph/0008182](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0008182).
- [41] Michelle J. Dolinski, Alan W. P. Poon e Werner Rodejohann. «Neutrinoless Double-Beta Decay: Status and Prospects». In: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 69 (2019), pp. 219–251. DOI: [10.1146/annurev-nucl-101918-023407](https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-101918-023407). arXiv: [1902.04097 \[nucl-ex\]](https://arxiv.org/abs/1902.04097).
- [42] M. K. Moe. «New approach to the detection of neutrinoless double beta decay». In: *Phys. Rev. C* 44 (1991), pp. 931–934. DOI: [10.1103/PhysRevC.44.R931](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.44.R931).
- [43] M. Green et al. «Observation of single collisionally cooled trapped ions in a buffer gas». In: *Phys. Rev. A* 76 (2007), p. 023404. DOI: [10.1103/PhysRevA.76.023404](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.023404). arXiv: [physics/0702122](https://arxiv.org/abs/physics/0702122).
- [44] Steven R. Elliott e Petr Vogel. «Double beta decay». In: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 52 (2002), pp. 115–151. DOI: [10.1146/annurev.nucl.52.050102.090641](https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.52.050102.090641). arXiv: [hep-ph/0202264](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0202264).
- [45] F. W. Hehl et al. «General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects». In: *Rev. Mod. Phys.* 48 (1976), pp. 393–416. DOI: [10.1103/RevModPhys.48.393](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.48.393).
- [46] Francisco Cabral, Francisco S. N. Lobo e Diego Rubiera-Garcia. «Einstein–Cartan–Dirac gravity with $U(1)$ symmetry breaking». In: *Eur. Phys. J. C* 79.12 (2019), p. 1023. DOI: [10.1140/epjc/s10052-019-7536-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7536-3). arXiv: [1902.02222 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1902.02222).
- [47] She-Sheng Xue. «Hierarchy spectrum of SM fermions: from top quark to electron neutrino». In: *JHEP* 11 (2016), p. 072. DOI: [10.1007/JHEP11\(2016\)072](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2016)072). arXiv: [1605.01266 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1605.01266).
- [48] She-Sheng Xue. «Why is the top quark much heavier than other fermions?» In: *Phys. Lett. B* 721 (2013), pp. 347–352. DOI: [10.1016/j.physletb.2013.03.034](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.03.034). arXiv: [1301.4254 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1301.4254).
- [49] She-Sheng Xue. «A Possible scaling region of chiral fermions on a lattice». In: *Nucl. Phys. B* 486 (1997), pp. 282–314. DOI: [10.1016/S0550-3213\(96\)00641-4](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(96)00641-4). arXiv: [hep-lat/9605005](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9605005).
- [50] R. D. Peccei e Helen R. Quinn. «CP Conservation in the Presence of Instantons». In: *Phys. Rev. Lett.* 38 (1977), pp. 1440–1443. DOI: [10.1103/PhysRevLett.38.1440](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1440).

- [51] Estia Eichten e John Preskill. «Chiral Gauge Theories on the Lattice». In: *Nucl. Phys. B* 268 (1986), pp. 179–208. DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90207-5](#).
- [52] Roberto Leonardi et al. «Phenomenology at the LHC of composite particles from strongly interacting Standard Model fermions via four-fermion operators of NJL type». In: *Eur. Phys. J. C* 80.4 (2020), p. 309. DOI: [10.1140/epjc/s10052-020-7822-0](#). arXiv: [1810.11420 \[hep-ph\]](#).
- [53] H. J. Lipkin. «On the description of collective motion by the use of superfluous co-ordinates». In: *Nuovo Cim.* 4.3suppl (1956), pp. 1147–1155. DOI: [10.1007/BF02744338](#).
- [54] J. Barea e F. Iachello. «Neutrinoless double-beta decay in the microscopic interacting boson model». In: *Phys. Rev. C* 79 (2009), p. 044301. DOI: [10.1103/PhysRevC.79.044301](#).
- [55] Jenni Kotila, Jacopo Ferretti e Francesco Iachello. «Long-range neutrinoless double beta decay mechanisms». In: (ott. 2021). arXiv: [2110.09141 \[hep-ph\]](#).
- [56] F. Simkovic et al. «Additional nucleon current contributions to neutrinoless double beta decay». In: *Phys. Rev. C* 60 (1999), p. 055502. DOI: [10.1103/PhysRevC.60.055502](#). arXiv: [hep-ph/9905509](#).
- [57] M. Doi et al. «DOUBLE BETA DECAY». In: *Prog. Theor. Phys.* 69 (1983), p. 602. DOI: [10.1143/PTP.69.602](#).
- [58] Frank F. Deppisch et al. «Analysis of light neutrino exchange and short-range mechanisms in $0\nu\beta\beta$ decay». In: *Phys. Rev. D* 102.9 (2020), p. 095016. DOI: [10.1103/PhysRevD.102.095016](#). arXiv: [2009.10119 \[hep-ph\]](#).
- [59] Martín González-Alonso e Jorge Martín Camalich. «Isospin breaking in the nucleon mass and the sensitivity of β decays to new physics». In: *Phys. Rev. Lett.* 112.4 (2014), p. 042501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.112.042501](#). arXiv: [1309.4434 \[hep-ph\]](#).
- [60] Martín González-Alonso, Oscar Naviliat-Cuncic e Nathal Severijns. «New physics searches in nuclear and neutron β decay». In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 104 (2019), pp. 165–223. DOI: [10.1016/j.pnpnp.2018.08.002](#). arXiv: [1803.08732 \[hep-ph\]](#).
- [61] Soroush Shakeri, Fazlollah Hajkarim e She-Sheng Xue. «Shedding New Light on Sterile Neutrinos from XENON1T Experiment». In: *JHEP* 12 (2020), p. 194. DOI: [10.1007/JHEP12\(2020\)194](#). arXiv: [2008.05029 \[hep-ph\]](#).
- [62] E. Aprile et al. «Excess electronic recoil events in XENON1T». In: *Phys. Rev. D* 102.7 (2020), p. 072004. DOI: [10.1103/PhysRevD.102.072004](#). arXiv: [2006.09721 \[hep-ex\]](#).

- [63] Santiago Arceo Diaz et al. «Constraint on the axion-electron coupling constant and the neutrino magnetic dipole moment by using the tip-RGB luminosity of fifty globular clusters». In: (ott. 2019). arXiv: [1910.10568 \[astro-ph.SR\]](#).
- [64] Dong-Liang Fang, Amand Faessler e Fedor Simkovic. «Partial restoration of isospin symmetry for neutrinoless double β decay in the deformed nuclear system of ^{150}Nd ». In: *Phys. Rev. C* 92.4 (2015), p. 044301. DOI: [10.1103/PhysRevC.92.044301](#). arXiv: [1508.02097 \[nucl-th\]](#).
- [65] Nathal Severijns, Marcus Beck e Oscar Naviliat-Cuncic. «Tests of the standard electroweak model in beta decay». In: *Rev. Mod. Phys.* 78 (2006), pp. 991–1040. DOI: [10.1103/RevModPhys.78.991](#). arXiv: [nucl-ex/0605029](#).
- [66] Veronique Bernard, Latifa Elouadrhiri e Ulf-G. Meissner. «Axial structure of the nucleon: Topical Review». In: *J. Phys. G* 28 (2002), R1–R35. DOI: [10.1088/0954-3899/28/1/201](#). arXiv: [hep-ph/0107088](#).
- [67] J. Kotila e F. Iachello. «Phase space factors for double- β decay». In: *Phys. Rev. C* 85 (2012), p. 034316. DOI: [10.1103/PhysRevC.85.034316](#). arXiv: [1209.5722 \[nucl-th\]](#).
- [68] M. Haghhighat et al. «Circular polarization of cosmic photons due to their interactions with Sterile neutrino dark matter». In: *Phys. Rev. D* 101.12 (2020), p. 123016. DOI: [10.1103/PhysRevD.101.123016](#). arXiv: [1909.03883 \[hep-ph\]](#).
- [69] T. Tomoda. «Double beta decay». In: *Rept. Prog. Phys.* 54 (1991), pp. 53–126. DOI: [10.1088/0034-4885/54/1/002](#).
- [70] Dusan Stefanik et al. «Reexamining the light neutrino exchange mechanism of the $0\nu\beta\beta$ decay with left- and right-handed leptonic and hadronic currents». In: *Phys. Rev. C* 92.5 (2015), p. 055502. DOI: [10.1103/PhysRevC.92.055502](#). arXiv: [1506.07145 \[hep-ph\]](#).