

Studio di segnali

LORENZO BARTOLOZZI

LUCA PACIOSELLI

GIUSEPPE PRUDENTE

Università di Perugia
A.A.2018/2019

Sommario

La presente esperienza è volta allo studio dei segnali tramite l'implementazione di un algoritmo che riconosca la forma di un'onda grazie all'analisi della sua trasformata di Fourier e di un programma che filtri due diversi set di dati, rappresentanti due onde viziate da forte rumore, riuscendo a riottenere le onde originarie.

I. INTRODUZIONE

i. Strumenti a disposizione

- oscilloscopio digitale RIGOL;
- scheda NI USB-6008;
- generatore di funzioni (alimentatore in alternata, AC) GW GFG.

ii. Cenni di teoria

Ogni segnale reale e periodico può essere espresso come sommatoria di segnali sinusoidali, o equivalentemente cosinusoidali di ampiezza, fase e frequenza determinate (*Sviluppo in serie di Fourier*):

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (1)$$

Che in forma complessa risulta:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2i\pi k f_0 t} \quad (2)$$

dove gli X_k sono i *coefficienti di Fourier* (numeri complessi):

$$X_k = A_k e^{\pm i\phi_k} \quad (3)$$

con il segno "+" che vale per i k positivi e il "-" per quelli negativi.

La frequenza f_0 , detta *frequenza fondamentale*,

è l'inverso del periodo T_0 del segnale. L'andamento di $|X_k| = A_k$ in funzione delle frequenze, detto *spettro di ampiezza*, è simmetrico rispetto a $f = 0$. Come si può vedere da (1), il segnale di partenza è formato da infiniti segnali con frequenze che sono multipli interi della frequenza fondamentale, dette *armoniche*.

Conoscendo il segnale, si possono ricavare i coefficienti di Fourier attraverso l'*equazione di analisi*:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-2i\pi k f_0 t} dt \quad (4)$$

La trattazione di segnali aperiodici, invece, può essere trattata allo stesso modo purché li si considerino segnali periodici con periodo che tende all'infinito, ma, dato che $f_0 = \frac{1}{T_0}$, se $T_0 \rightarrow \infty$ allora f_0 , che è la distanza tra due armoniche adiacenti, tenderà a 0, le armoniche tenderanno ad infittirsi e al limite varieranno con continuità. Per segnali aperiodici i coefficienti di Fourier si scrivono:

$$X(kf_0) = T_0 X_k = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-2i\pi k f_0 t} dt \quad (5)$$

che, per $T_0 \rightarrow \infty$, diventa:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt \quad (6)$$

che è la *trasformata di Fourier* del segnale.

Per l'*equazione di sintesi* si avrà:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{2i\pi k f_0 t} f_0 \quad (7)$$

che, per $f_0 \rightarrow 0$, diventa:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2i\pi f t} df \quad (8)$$

che è l'*antitrasformata di Fourier*.

Le problematiche sorgono quando si deve passare dalla teoria dei segnali ai sistemi di acquisizione (DAQ) reali poiché:

1. la sintesi dei segnali richiede che si conoscano infinite armoniche;
2. il segnale analogico, per essere elaborato, viene digitalizzato perché i DAQ campionano in maniera discreta;
3. il numero di campioni che acquisiscono i DAQ è finito.

Ognuno di questi punti ha però una soluzione, seppur con qualche compromesso.

1. Dato che la serie/integrale di Fourier converge, si può sfruttare la condizione di convergenza ($\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2i\pi k f_0 t} < \infty \Rightarrow |X_k| \rightarrow 0$ e analogamente $|X(f)| \rightarrow 0$ per segnali aperiodici) per ricavare che i contributi delle frequenze più alte diventano via via più trascurabili rispetto a quelli delle frequenze basse, quindi basterà fermarsi all'armonica che approssima il segnale in modo soddisfacente all'esigenza del momento.

2. Definendo T come il *periodo di campionamento*, e di conseguenza $f_C = \frac{1}{T}$ come *frequenza di campionamento*, si può scrivere il segnale aperiodico a tempo discreto come una somma di impulsi:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \quad (9)$$

da cui si ricavano rispettivamente le equazioni di analisi e di sintesi:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2i\pi n f T} \quad (10)$$

$$x(nT) = T \int_{-1/2T}^{+1/2T} X_s(f) e^{2i\pi n f T} df \quad (11)$$

3. Dato che si hanno un numero N_0 finito di campioni le equazioni di analisi e di sintesi diventano infine:

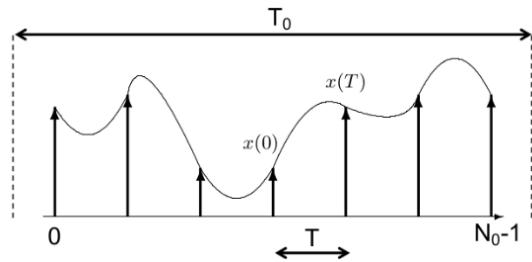
$$X_{s,k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-2i\pi n k / N_0} \quad (12)$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k} e^{2i\pi n k / N_0} \quad (13)$$

dette *trasformata e antitrasformata di Fourier discrete*, o *DFT e IDFT*.

Come al tempo di campionamento totale (massimo nel dominio del tempo), $T_0 = N_0 T$, corrisponde la frequenza fondamentale (minima nel dominio delle frequenze), $f_0 = \frac{1}{T_0}$, al tempo di campionamento (minimo nel dominio del tempo), che è la distanza temporale tra acquisizioni adiacenti, T corrisponde la frequenza di campionamento (massima nel dominio delle frequenze), $f_C = \frac{1}{T}$.

Figura 1



Infine, dato un segnale a banda limitata e sapendo che la trasformata di Fourier di una sequenza $x[n]$ campionata da un segnale continuo $x(t)$ è una periodizzazione della trasformata di $x(t)$:

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_C) \quad (14)$$

se f_C è piccola rispetto alle frequenze del segnale, la trasformata sarà distorta.

Si ha, concettualmente, la *condizione di Nyquist*:

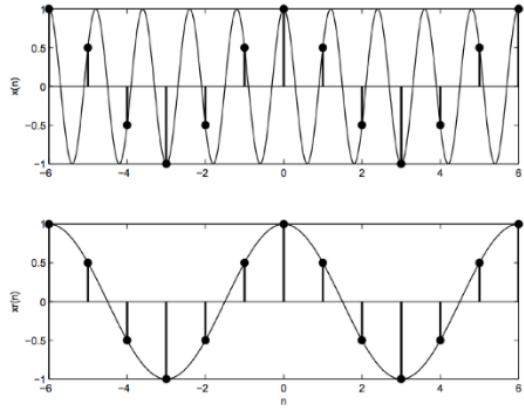
$$f_C \geq 2B \quad (15)$$

dove $2B$ è la larghezza della banda.

Quindi un segnale analogico per essere ben

rappresentato da un suo segnale campionato deve avere banda limitata e deve essere rispettata la condizione di Nyquist, sennò si avrà un segnale sintetizzato con frequenza diversa dal segnale campionato (fenomeno dell'*aliasing*).

Figura 2: Segnale originale (in alto) e segnale ricostruito (in basso)



II. PROCEDURA Sperimentale

i. Analisi di segnali

Si è implementato un VI, in Figura 25, in grado di acquisire un segnale generato dal generatore di funzioni, tramite la scheda NI USB-6008, farne la trasformata di Fourier grazie ad un algoritmo FFT e mettere su un grafico lo spettro di ampiezza del segnale in funzione della frequenza.

Per accertarci che funzionasse bene abbiamo generato, in sequenza, un segnale sinusoidale, un'onda quadra e una triangolare e abbiamo confrontato il grafico del VI con quelli teorici. Avendo in mente alcune nozioni teoriche sulle trasformate di Fourier delle onde sinusoidal, quadrate e triangolari si è aggiunto un VI che individua i picchi della FFT sopra una certa soglia e restituisce il numero di picchi trovati e le relative ampiezze. Dato che la nostra frequenza di campionamento è di 10kHz , lo spettro di ampiezza risulta simmetrico rispetto a 5kHz e il numero di picchi che il VI trova è in realtà il doppio di quelli necessari.

Si è implementato un algoritmo che, come pri-

ma cosa, ha una struttura condizionale per cui se il numero di picchi riconosciuti è minore di 3 allora restituisce il messaggio "*sinusoidale*", altrimenti calcola il rapporto fra l'ampiezza della frequenza fondamentale e quella della successiva armonica e se questo rapporto è minore di 5 allora restituisce "*quadrata*", altrimenti "*triangolare*". Quest'ultima scelta è stata fatta perché, dalla teoria, il rapporto fra l'ampiezza della frequenza fondamentale e quella dell'armonica successiva, per un'onda quadra è pari a 3, mentre per una triangolare è molto maggiore di 3, in quanto i contributi delle sue armoniche decrescono molto più rapidamente rispetto a quelli di un'onda quadra.

ii. Sintesi di segnali

Partendo da due onde, una quadrata e una triangolare, con una componente di rumore rilevante già campionate che ci sono state fornite, si è implementato un VI, in Figura 26, che crea il grafico delle onde originarie e delle loro FFT e filtra in modalità passa-basso i due segnali originari, con un filtro di Butterworth del primo ordine, e le FFT dei segnali originari con un filtro passa-basso ideale (che manda a 0 tutte le frequenze da quella del rumore in poi), sintetizzando poi le onde filtrate con una FFT inversa e poi fa i grafici di tutte le onde filtrate, e delle loro FFT, e li confronta con quelli delle onde originarie, e delle loro FFT.

III. ANALISI DATI

i. Analisi di segnali

Per poter definire completamente l'algoritmo che abbiamo scritto si è determinato un range di frequenze e di ampiezze dei segnali entranti per cui il VI risulti corretto.

Nonostante teoricamente il VI dovrebbe avere un range di frequenze che va da 1Hz a 10kHz (nostra frequenza di campionamento), abbiamo riscontrato un problema a basse frequenze (da 1Hz a 1210Hz , dati che sono stati presi con l'oscilloscopio), ovvero si genera un picco a 1Hz di ampiezza confrontabile se non mag-

giore a quelli principali delle onde che dobbiamo considerare e come conseguenza il VI non funziona correttamente. Inoltre si è notato che il segnale sinusoidale del generatore di funzioni risulta affetto da un picco di rumore che va ad aumentare, e a diventare confrontabile con il picco principale del seno, insieme alla frequenza e all'ampiezza del segnale in ingresso. A causa di questi problemi ci siamo dovuti limitare, affinché il VI funzionasse in maniera corretta, ad un range di frequenze che va da $(1210 \pm 10)\text{Hz}$ a $(4950 \pm 10)\text{Hz}$ e ad un range di ampiezze che va da $(280 \pm 40)\text{mV}$ a $(1,1 \pm 0,1)\text{V}$ (dati presi con l'oscilloscopio). Di seguito si riportano le foto del front-end del VI che riconosce i tre tipi di onde:

Figura 3: FFT dell'onda sinusoidale

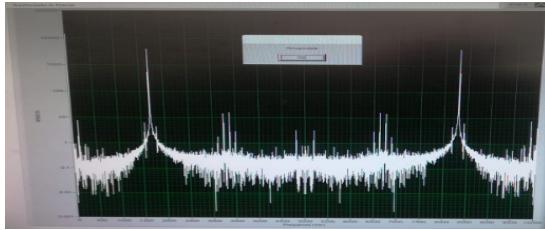


Figura 4: FFT dell'onda triangolare

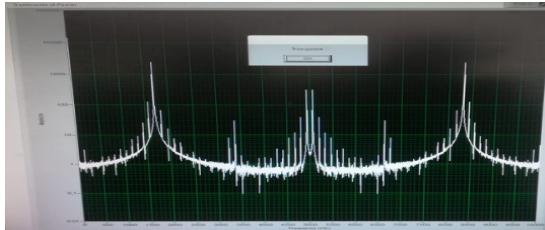
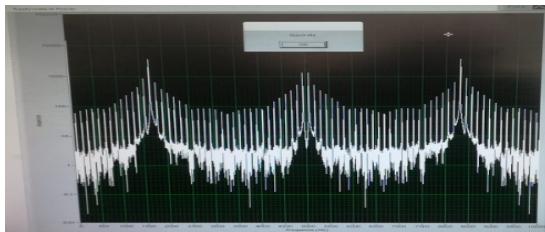


Figura 5: FFT dell'onda quadra



ii. Sintesi di segnali

I segnali originari, con le loro FFT, risultano essere:

Figura 6: Onda quadra originaria

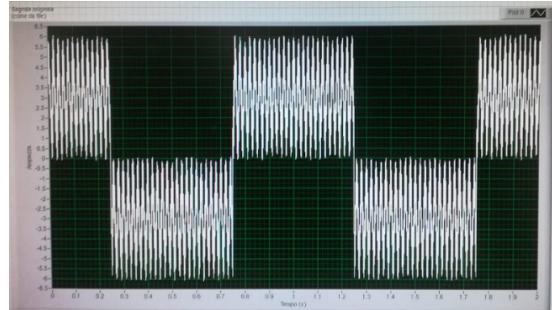


Figura 7: FFT onda quadra originaria

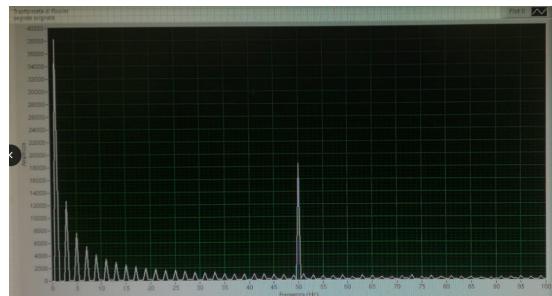


Figura 8: Onda triangolare originaria

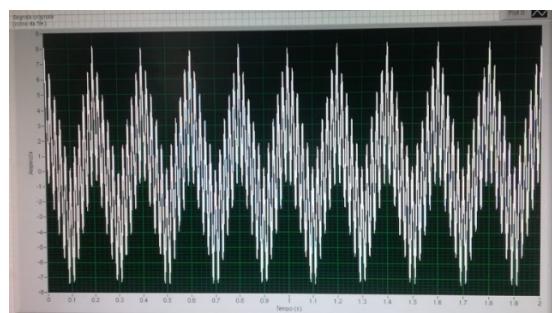


Figura 9: FFT onda triangolare originaria

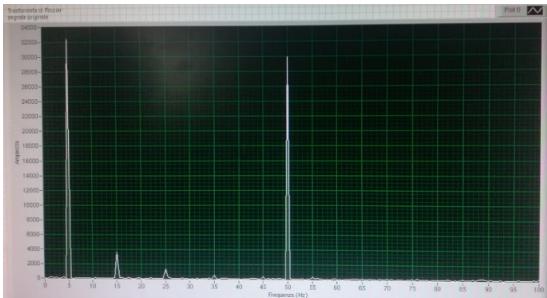
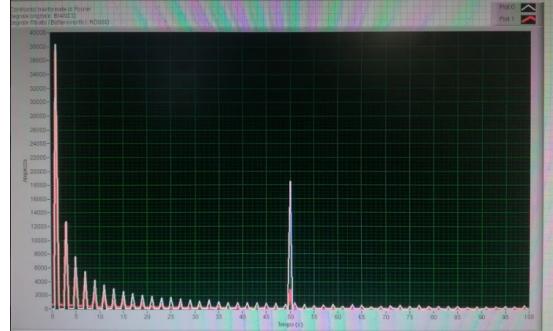


Figura 11: Confronto trasformate di Fourier onda originaria (BIANCO) e filtrata (ROSSO) a 8Hz



Si nota dunque, oltre al fatto che i contributi delle armoniche dell'onda triangolare diventano trascurabili già prima di 50Hz mentre quelli dell'onda quadrata lo sono circa da 100Hz in poi, che le trasformate di Fourier delle onde hanno un picco ben marcato dovuto al rumore a 50Hz; si suppone quindi che il rumore sia un'onda sinusoidale con frequenza 50Hz.
Alla luce di queste osservazioni si sono applicati all'onda quadra due filtri di Butterworth del primo ordine in modalità passa-basso, con frequenza di taglio a 8Hz e a 15Hz e un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio a 50Hz (compreso), con risultati:

Figura 10: Onda quadra filtrata, con Butterworth passa-basso cut-off a 8Hz

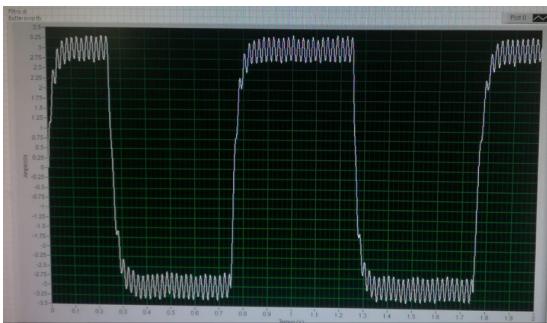


Figura 12: Confronto segnali originario (BIANCO) e filtrato (ROSSO) a 8Hz

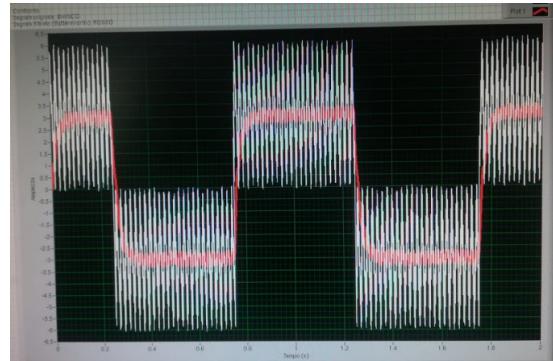


Figura 13: Onda quadra filtrata, con Butterworth passa-basso cut-off a 15Hz

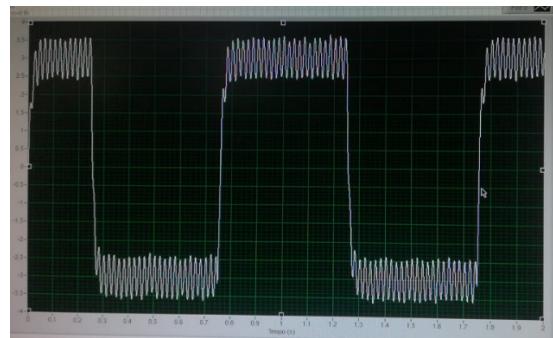


Figura 14: Confronto trasformate di Fourier onda originaria (BIANCO) e filtrata (ROSSO) a 15Hz

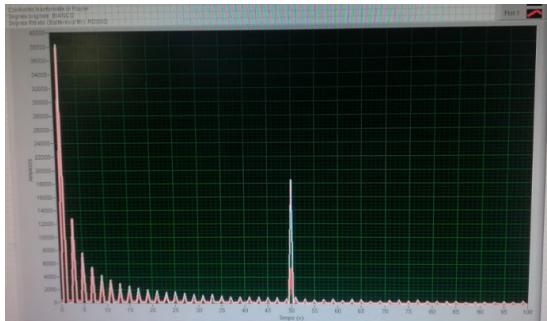


Figura 15: Confronto segnale originario (BIANCO) e filtrato (ROSSO) a 15Hz

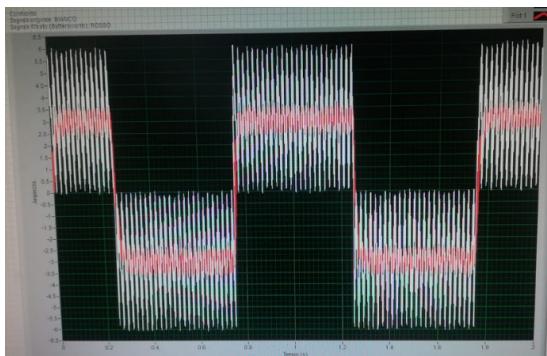


Figura 16: Onda quadra filtrata, con filtro passa-basso ideale a 50Hz

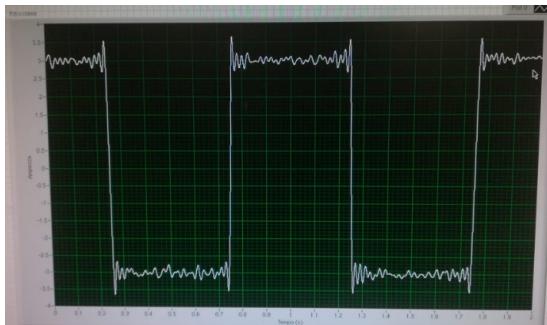


Figura 17: Confronto trasformata di Fourier onda originaria (BIANCO) e filtrata (ROSSO) passa-basso ideale a 50Hz

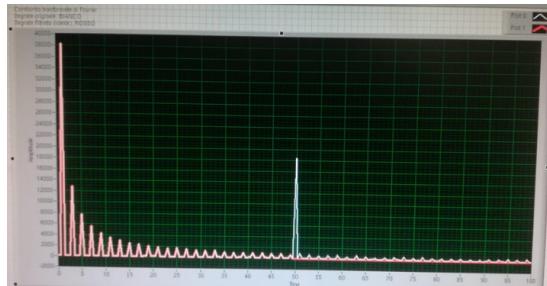
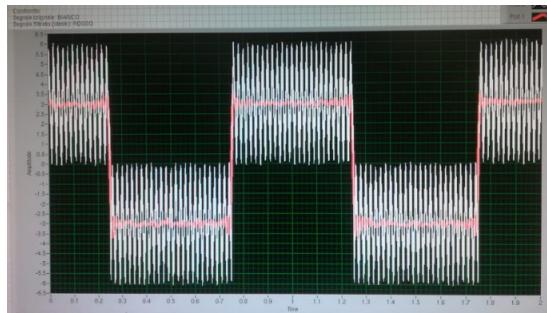


Figura 18: Confronto onda originaria (BIANCO) e filtrata (ROSSO) passa-basso ideale a 50Hz



Invece all'onda triangolare sono stati applicati un filtro di Butterworth del primo ordine in modalità passa-basso con frequenza di taglio a 8Hz e un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio a 50Hz, con i seguenti risultati:

Figura 19: Onda triangolare filtrata, con Butterworth passa-basso cut-off a 8Hz

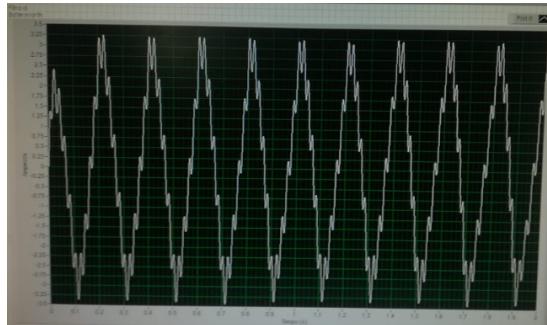


Figura 20: Confronto trasformata di Fourier onda originaria (BIANCO) e filtrata (ROSSO) a 8Hz

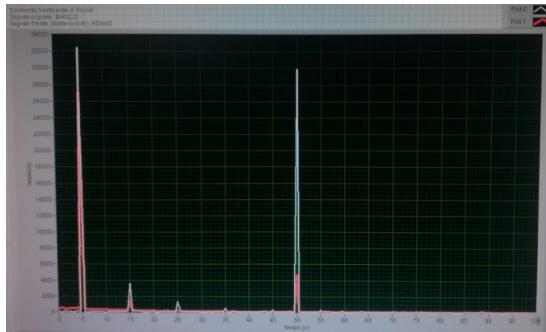


Figura 21: Confronto segnale originario (BIANCO) e filtrato (ROSSO) a 8Hz

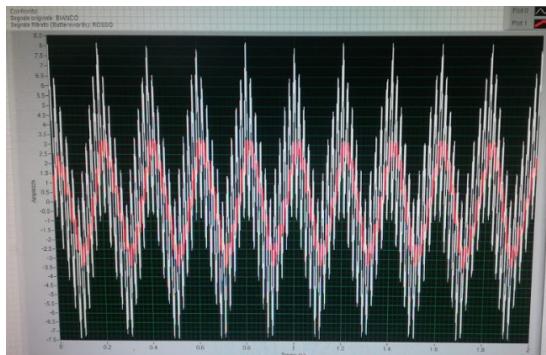


Figura 22: Onda triangolare filtrata, con filtro passa-basso ideale a 50Hz

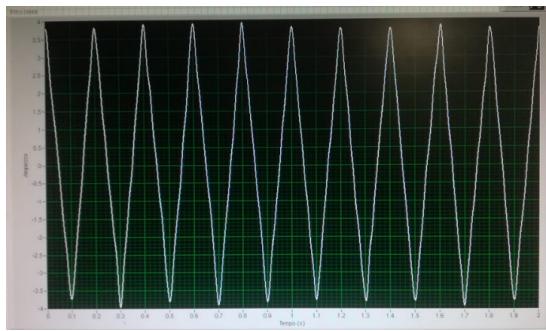


Figura 23: Confronto trasformata di Fourier onda originaria (BIANCO) e filtrata (ROSSO) passa-basso ideale a 50Hz

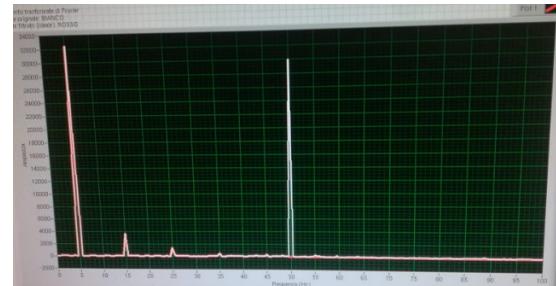
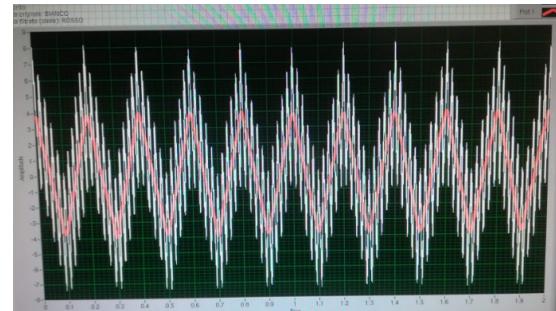


Figura 24: Confronto segnale originario (BIANCO) e filtrato (ROSSO) passa-basso ideale a 50Hz



IV. CONCLUSIONI

Per quanto riguarda l'analisi di segnali, abbiamo creato un algoritmo che distingue correttamente onde sinusoidali, quadrate e triangolari in un range di frequenze $((1210 \pm 10) \text{ Hz} \div (4950 \pm 10) \text{ Hz})$ e di ampiezze $((280 \pm 40) \text{ mV} \div (1,1 \pm 0,1) \text{ V}$, che non è un risultato ottimale, ma risulta viziato da delle problematiche dipendenti da del rumore che è originato dal generatore di funzioni utilizzato.

Per lo studio di segnali, siamo riusciti a sintetizzare bene le onde filtrate dal rumore sia con il filtro di Butterworth che con quello ideale, notando inoltre diverse cose che derivano dalla teoria che sta dietro ad ogni passaggio fatto. Si è notato che l'attenuazione dovuta al filtro di Butterworth del primo ordine risulta:

- molto buona per filtrare l'onda triangolare in quanto i contributi delle armoniche decrescono molto rapidamente e già

prima del rumore a 50Hz cominciano a diventare trascurabili, perciò si ha un'onda filtrata che non perde molta informazione ed è molto simile al segnale triangolare che ci si aspettava;

- non ottimale per filtrare l'onda quadrata (10 e 13) dato che presenta dei contributi non trascurabili per armoniche che stanno oltre i 50Hz e quindi bisogna trovare un compromesso fra eliminare in maniera soddisfacente il rumore e perdere dell'informazione, che porterà ad avere un'onda filtrata deformata. Tutto ciò è possibile vederlo dalla Figura 10 in cui il rumore è eliminato quasi del tutto, ma l'onda filtrata è deformata perché si sono attenuati anche i contributi delle armoniche non trascurabili, perdendo informazione, e dalla Figura 13 in cui la forma dell'onda quadra non è deformata ma il rumore non è stato attenuato granché.

Invece, il filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio a 50Hz è risultato migliore al filtro di Butterworth in tutti i sensi; elimina il rumore del tutto e restituisce un'onda poco deformata nel caso dell'onda quadra 16 e praticamente perfetta per quella triangolare 22. L'unica pecca si riscontra nel caso dell'onda quadrata a cui, avendo contributi non trascurabili nelle armoniche dopo i 50Hz , corrisponde una serie di Fourier troncata brutalmente e di conseguenza si riscontra, per il segnale sintetizzato, il fenomeno di Gibbs nei punti di discontinuità della funzione "onda quadra".

Figura 25: VI analisi di segnali

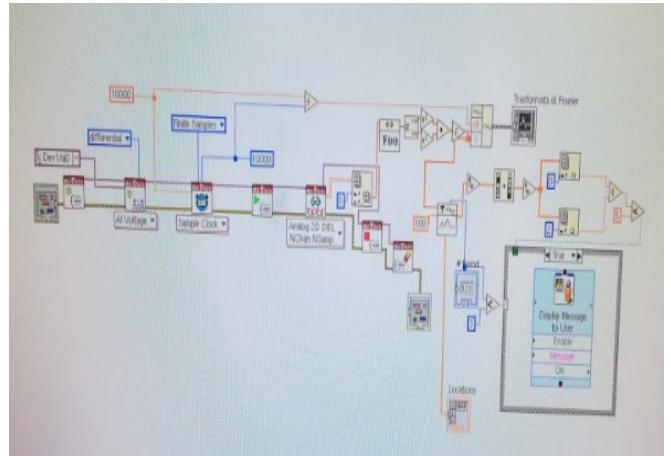


Figura 26: VI sintesi di segnali

