



Università degli Studi di Perugia

DIPARTIMENTO DI FISICA E GEOLOGIA

Corso di Laurea triennale in Fisica

Analisi della divergenza della serie perturbativa in QED

Candidato:

Luca Pacioselli

Relatore:

Prof. Simone Pacetti

*Ai miei nonni:
Carlo, Enzo,
Graziella e Malvina.*

Indice

I	Introduzione	4
I.1	L'argomento di Dyson	4
I.2	Teoria delle serie asintotiche	5
II	Metodi matematici	7
II.1	Metodo della fase stazionaria	7
II.2	Metodo di Laplace	7
II.3	Lemma di Watson	8
II.4	Trasformata di Mellin e di Mellin-Barnes	9
II.5	Metodo del punto a sella	9
III	Risomma alla Borel	13
III.1	Metodo di somma alla Borel	13
IV	Applicazione in QED	16
IV.1	Modello di anarmonicità	16
IV.2	Azione effettiva di Euler-Heisenberg-Schwinger	19
V	Conclusioni e discussioni	22
VI	Ringraziamenti	23

Sommario

L'oggetto di studio della tesi è la divergenza della serie perturbativa in QED, nota al mondo della fisica già dal 1952 con l'articolo di Freeman J. Dyson [1], che verrà presentato all'inizio del manoscritto. Si illustrerà poi la teoria delle serie perturbative, dalle definizioni ad esse associate, alla stima superasintotica fino ad arrivare alle serie iperasintotiche. A tal fine si studieranno diverse tecniche matematiche utilizzate per ricavare informazioni utili dalle serie divergenti, come il metodo del punto a sella e la risomma alla Borel, parlando anche di altri lemmi e teoremi ad esse spesso collegati nell'ambito dell'analisi perturbativa. Ci si concentrerà poi nel trattare alcuni esempi fisicamente rilevanti in QED che mostrino la divergenza della serie perturbativa e l'utilizzo di alcuni metodi matematici illustrati in precedenza: l'oscillatore anarmonico [6] e l'azione effettiva di Euler-Heisenberg-Schwinger [2]. Infine si proporranno delle considerazioni finali sul controsenso che affligge la QED, che è al tempo stesso "il gioiello della fisica", ma anche una teoria basata su delle serie divergenti che sono "l'invenzione del diavolo".

Introduzione

L'argomento di Dyson

Per fare delle predizioni in QED è necessaria una tecnica che permetta di calcolare le osservabili fisiche; quella più diffusa al momento è senza dubbio la *teoria delle perturbazioni*. Questa teoria si basa sull'ipotesi perturbativa, cioè che una qualunque osservabile fisica A abbia uno sviluppo in serie di Taylor-MacLaurin, ovvero sia una funzione analitica rispetto ad una variabile α , che nel caso delle teorie di campo locali è la costante d'accoppiamento della teoria, per l'elettrodinamica quantistica è la costante di struttura fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ (sistema delle unità naturali), in un intorno di $\alpha = 0$:

$$A(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \alpha^k. \quad (1)$$

Se tale serie convergesse, la sua somma sarebbe una misura della grandezza fisica associata. Nel caso in cui la serie non dovesse convergere, non si può definire la quantità che dovrebbe essere rappresentata dalla serie.

Nel 1952 in un articolo scientifico, Freeman J. Dyson [1] espone con un'argomentazione semplice, anche se non rigorosa da un punto di vista matematico, che in QED le serie perturbative ottenute integrando le equazioni del moto, in un intervallo finito o infinito di tempo, dopo la rinormalizzazione di massa e carica sono inevitabilmente divergenti. L'argomento è il seguente: se la serie perturbativa convergesse in un punto del piano complesso α_0 , allora, essendo una serie di potenze, per il teorema di Abel dovrebbe convergere per tutte le circonferenze di raggio:

$$|\alpha| < \alpha_0.$$

Nel caso in cui $\alpha_0 \neq 0$, si ha che la serie deve essere analitica e convergente anche per piccoli valori negativi di α . Per valori negativi della costante di struttura fine, $\alpha = \frac{-e^2}{4\pi}$ si può fare un'interpretazione di carattere fisico, infatti tali valori della costante d'accoppiamento fanno parte di un mondo fittizio in cui il segno delle interazioni fra sistemi fisici carichi elettricamente è opposto rispetto a quello del mondo reale: cariche uguali si attraggono e quelle opposte si respingono. In un tale mondo il vuoto non può essere considerato lo stato di minima energia né tanto meno uno stato stabile, ma diventerebbe uno stato metastabile. Questa affermazione è facilmente comprensibile se si considera una rappresentazione grafica dell'argomento di Dyson, data dallo spettro di energie di una particella quantistica in un potenziale di oscillatore anarmonico unidimensionale:

$$U(x) = x^2 + gx^4; \quad (2)$$

quando $g > 0$ il sistema ha livelli energetici ben definiti, mentre quando $g < 0$ la particella ha una probabilità finita di ritrovarsi all'infinito per l'effetto tunnel.

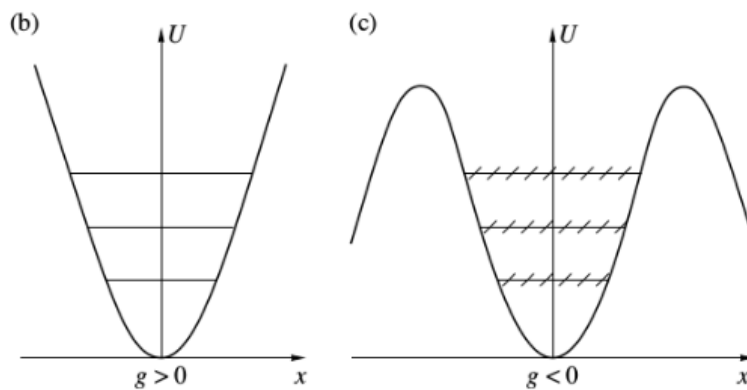


Fig. 1. Graphic illustration of Dyson's argument.

Più in generale creando un gran numero di coppie elettroni-positroni, con i primi in una regione dello spazio e i secondi in un'altra, si ha uno stato patologico in cui l'energia potenziale negativa di Coulomb domina sull'energia totale restante delle particelle. Una tale condizione si può verificare anche ipotizzando di avere, nel mondo fittizio, un generico sistema fisico in uno stato ordinario con poche particelle, che ha quindi un'alta barriera di potenziale a separarlo da stati patologici a energia equivalente. Per effetto tunnel ci sarà sempre una probabilità finita che il sistema si ritrovi in questi stati patologici, che per definizione non sono stabili; ci sarà quindi una rapida creazione di particelle e conseguentemente una spontanea polarizzazione del vuoto fino allo stato patologico di cui si è parlato in precedenza.

Per questo motivo $A(\alpha)$ non può essere una funzione analitica per valori negativi di α e di conseguenza la serie perturbativa 1 ha necessariamente raggio di convergenza nullo ed è pertanto divergente.

La divergenza nel mondo reale è associata a processi virtuali in cui sono coinvolte molte particelle, pertanto sarà apprezzabile solo quando vengono considerati termini di grande ordine nell'espansione. Facendo una brutale stima quantitativa si è notato che i termini dell'espansione decrescono fino ad un minimo per poi esplodere senza un limite; l'indice del termine minimo è stato stimato essere circa di ordine di grandezza 137. Uno dei primi calcoli di questi coefficienti è stato fatto per la serie perturbativa, con variabile g , del potenziale di oscillatore anarmonico unidimensionale 2; il calcolo dei primi 150 coefficienti è stato una delle prime dimostrazioni di questa divergenza.

Nonostante ciò, i risultati ottenuti in QED da queste serie perturbative sono quelli più in accordo con i dati sperimentali di tutta la storia della fisica, difatti la divergenza della serie perturbativa non esclude la possibilità di fare calcoli pratici.

Teoria delle serie asintotiche

Definizione I.1 (serie asintotica) Sia f una funzione a variabile complessa, z , e $(\Phi_k(z))_{k=0}^{\infty}$ una successione di funzioni a valori complessi; si dice che una successione di funzioni è **asintotica** alla funzione $f(z)$ se, mantenendo fissato l'argomento $\arg(z)$, per N fissato e z sufficientemente piccolo si ha:

$$|f(z) - \sum_{k=0}^N f_k \Phi_k(z)| \sim O(\Phi_{N+1}(z)) \quad (3)$$

Tale definizione formale, dovuta a Poincaré, ci dice cosa succede nel limite di $z \rightarrow 0$ ed N fissato.

Tuttavia i casi più interessanti, come quello della serie asintotica in QED, sono per $\Phi_k(z) = z^k$, z fissato ed $N \rightarrow \infty$:

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \Phi_k(z). \quad (4)$$

Proprietà I.1 Sia $f(z)$ una funzione a valori complessi; se esiste uno sviluppo asintotico di $f(z)$ rispetto ad un insieme di funzioni complesse $\Phi_k(z)_{k=0}^{\infty}$ allora questo è unico.

Proprietà I.2 Uno sviluppo asintotico non individua univocamente una funzione.

Quest'ultima proprietà è facilmente comprensibile se si considerano funzioni il cui sviluppo in serie di potenze abbia tutti coefficienti nulli, come per la funzione $e^{-\frac{q}{z}}$, dove q è una costante positiva, che ha uno sviluppo in serie di Taylor all'origine nullo. Se si considera lo sviluppo perturbativo in serie di potenze di una funzione $f(z)$, allora questo sarà anche lo sviluppo di una funzione $g(z) = f(z) + Ae^{-\frac{q}{z}}$; i termini esponenziali vengono detti *termini non perturbativi*.

Come si è detto in precedenza i coefficienti delle serie perturbative in QED raggiungono un valore minimo per poi riprendere a crescere ed a divergere, questo è un comportamento espresso dalla regola empirica di Carrier:

Proposizione I.1 (Regola empirica di Carrier) "Le serie divergenti convergono più velocemente di quelle convergenti perché non devono convergere".

Il metodo empirico usuale per ottenere un risultato con il minor errore possibile è quello di troncare la serie, a z fissato:

Definizione I.2 Una serie asintotica "troncata ottimamente" è detta un'approssimazione **superasintotica**. L'errore è tipicamente dell'ordine di $O(e^{-\frac{q}{z}})$, dove $q > 0$ e z è il piccolo parametro perturbativo.

Coloro che introdussero il termine *approssimazione superasintotica*, Berry ed Howls, coniarono anche un altro termine per un metodo migliore di ottenere risultati con errori ancora minori:

Definizione I.3 Un'approssimazione **iperasintotica** si ottiene usando le tecniche matematiche sulla parte di serie scartata con la stima superasintotica, come se fosse una serie divergente a parte, e aggiungendo il risultato all'approssimazione superasintotica.

Metodi matematici

Nella letteratura scientifica esistono svariati metodi per ottenere espansioni asintotiche di funzioni e come è intuibile la scelta di uno di essi è determinata dal caso specifico in cui ci si trova. In questo capitolo si affronteranno dei metodi, dai più semplici ai più raffinati ed utilizzati.

Metodo della fase stazionaria

Il primo è il *metodo della fase stazionaria* che serve ad ottenere il comportamento degli integrali di Fourier generalizzati, ovvero quelli del tipo:

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) dx, \quad (5)$$

nel limite di $\lambda \rightarrow \infty$.

Consideriamo il caso quasi banale in cui $S'(x) \neq 0$; moltiplicando e dividendo l'integranda per $S'(x)$ e integrando per parti si ottiene:

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{S'(x)} S'(x) dx = e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx.$$

Per il *lemma di Riemann-Lebesgue*, sappiamo che il termine integrale va come $o(\frac{1}{\lambda})$ per $\lambda \rightarrow \infty$, mentre il termine al bordo va come $O(\frac{1}{\lambda})$ per lo stesso limite, perciò si ha che:

$$F(\lambda) \sim e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Metodo di Laplace

Il secondo *metodo* è quello di *Laplace*, che si attua, per l'appunto, sugli integrali di Laplace:

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx, \quad (6)$$

dove, senza perdita di generalità, assumiamo $\lambda > 0$. Si è interessati al comportamento asintotico dell'integrale per $\lambda \rightarrow \infty$.

Con lo stesso procedimento utilizzato per il precedente metodo della fase stazionaria, nel caso in cui $S'(x) \neq 0$ e assumendo che il termine integrale sia asintoticamente più piccolo di quello di bordo, si ha un'espansione asintotica del tipo:

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(x)} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} \Big|_a^b. \quad (7)$$

Invece nel caso in cui $S(x)$ abbia un massimo globale per $x = c$, con $c \in [a, b]$, soltanto l'intorno di tale punto fornisce il contributo dominante dell'integrale per $\lambda \rightarrow \infty$.

È possibile approssimare la funzione $F(\lambda)$ con $F(\lambda; \epsilon)$, definita come:

$$F(\lambda; \epsilon) = \begin{cases} \int_a^{a+\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx & \text{se } c = a \\ \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx & \text{se } c \in (a, b) \\ \int_{b-\epsilon}^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx & \text{se } c = b \end{cases}$$

con ϵ un numero reale piccolo a piacere.

Questa approssimazione è valida se l'andamento asintotico di $F(\lambda; \epsilon)$ per $\lambda \rightarrow \infty$ non dipende da ϵ ed è lo stesso di $F(\lambda)$. In effetti ciò è sempre vero, basti considerare il caso di $c \in (a, b)$, nel quale i termini

$$\left| \int_a^{c-\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx \right| + \left| \int_{c+\epsilon}^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx \right|$$

sono dominati da $F(\lambda)$ perché $e^{\lambda S(x)}$, in $a \leq x \leq c - \epsilon$ e in $c - \epsilon \leq x \leq b$, è esponenzialmente piccolo se confrontato con $e^{\lambda S(c)}$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, perciò passare da $F(\lambda)$ ad $F(\lambda; \epsilon)$ comporta degli errori *esponenzialmente piccoli*.

- Se $S'(c) = 0$ ed $S''(c) < 0$ (difatti stiamo parlando di un massimo globale della funzione $S(x)$), con $a \leq c \leq b$, si possono fare le seguenti approssimazioni:

$$f(x) \approx f(c)$$

$$S(x) \approx S(c) + \frac{1}{2} S''(c)(x - c)^2.$$

Si estendono gli estremi di integrazione a $-\infty$ e $+\infty$ affinché si semplifichino i calcoli; l'errore che si fa con tale sostituzione è esponenzialmente piccolo come già detto in precedenza.

Con $a < c < b$, per $\lambda \rightarrow \infty$ si ha:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\approx \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c) e^{\lambda(S(c) + \frac{1}{2} S''(c)(x-c)^2)} dx \\ &\simeq f(c) e^{\lambda S(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2} S''(c)(x-c)^2} dx \end{aligned}$$

attuando la sostituzione $y^2 = -\frac{1}{2} S''(c)(x - c)^2$, si ottiene un integrale gaussiano che è uguale a, per un noto risultato, $\sqrt{\pi}$, perciò si arriva all'espansione asintotica finale:

$$F(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2} f(c) e^{\lambda S(c)}}{\sqrt{-\lambda S''(c)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{\lambda S(c)}}{\sqrt{-\lambda S''(c)}} \quad (8)$$

Con $c = a$ e $c = b$ l'espansione asintotica è uguale a quello appena ricavato 8, moltiplicato per un fattore $\frac{1}{2}$.

- Se $S'(c) \neq 0$ e $c = a$ o $c = b$ gli andamenti asintotici si ottengono direttamente dalla formula 7 con delle piccole accortezze:

$$F(\lambda) \sim \begin{cases} e^{\lambda S(a)} \frac{-f(a)}{\lambda S'(a)} & \text{se } c = a \\ e^{\lambda S(b)} \frac{f(b)}{\lambda S'(b)} & \text{se } c = b \end{cases}$$

Lemma di Watson

Il lemma di Watson è uno strumento molto importante per l'ottenimento di espansioni asintotiche di integrali di Laplace 6 del tipo:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \Re(s) > 0$$

per valori grandi del parametro complesso, $|s| \rightarrow \infty$.

In generale il contributo dominante per l'integrale è dato da un intorno di $t = 0$; ci si pone dunque l'obiettivo di sostituire l'espressione di $f(t)$, complicata a piacere, con il suo sviluppo in serie nell'intorno di cui sopra e di integrarlo termine a termine. La convergenza della serie sull'asse dei reali positivi non è garantita affatto, si pensi che ad esempio una serie di potenze con raggio di convergenza finito non soddisfa tale richiesta. Il lemma di Watson assicura l'integrabilità termine a termine della serie, dovendo tuttavia considerare la serie risultante come un'espansione asintotica e non come una serie convergente.

Lemma 1 (Watson) Siano $F: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, almeno continue in \mathbb{R}^+ , definite come:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n t^n \quad |t| < \tau$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt;$$

tali che $f(t) \sim O(e^{\alpha t})$, con $\Re(\alpha) > 0$, per $t \rightarrow \infty$.

Allora per $|s| \rightarrow \infty$ si ha:

$$F(s) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$

Trasformata di Mellin e di Mellin-Barnes

Si consideri la trasformata di Laplace bilaterale:

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} g(t) dt$$

con

$$g(t) = \begin{cases} O(e^{at}) & \text{per } t \rightarrow +\infty \\ O(e^{bt}) & \text{per } t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

La trasformata è allora analitica nella nel rettangolo di piano complesso $a < \Re(s) < b$, cosicché è assicurata la convergenza nel percorso di integrazione.

Con il cambio di variabile $z = e^{-t}$ si ha:

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_0^{+\infty} z^{s-1} g(-\ln(z)) dz$$

e definendo $f(z) = g(-\ln(z))$ che ha comportamento:

$$f(z) = \begin{cases} O(z^{-a}) & \text{per } z \rightarrow 0 \\ O(z^{-b}) & \text{per } z \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Allora si ottiene la funzione analitica nota come *trasformata di Mellin*:

$$\mathcal{M}(s) = \int_0^{+\infty} z^{s-1} f(z) dz \quad a < \Re(s) < b$$

L'antitrasformata di Mellin, o *trasformata di Mellin-Barnes* (TdMB), si ottiene dal teorema di inversione della trasformata di Laplace:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{st} \mathcal{L}[g](s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \mathcal{L}[g](s) ds$$

dove $a < c < b$ (a e b sono gli stessi parametri definiti in precedenza), per assicurarsi che l'integrale si trovi nel rettangolo di convergenza. Nell'ultimo passaggio il limite è stato omissso in favore di una scrittura formale.

Attuando di nuovo il cambio di variabile $f(z) = g(-\ln(z))$ si ha la trasformata di Mellin-Barnes:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} \mathcal{M}(s) ds \quad a < c < b.$$

La TdMB ha il vantaggio di consentire spesso l'utilizzo di noti teoremi di Analisi Complessa per calcolare il valore dell'integrale. Attraverso gli stessi teoremi si possono trovare, in certi casi, andamenti asintotici delle funzioni.

Metodo del punto a sella

Il *metodo del punto a sella* è uno strumento molto forte per ottenere i comportamenti asintotici, per grandi valori della variabile z , di una funzione $f(z)$ che sia data dalla rappresentazione integrale del tipo:

$$f(z) = \int_{\gamma} g(t) e^{z\Phi(t)} dt,$$

dove $\Phi(t)$ e $g(t)$ sono funzioni analitiche in una certa regione \mathcal{R} del piano complesso di t e $\gamma \subset \mathcal{R}$. D'ora in poi per questo paragrafo si supporrà, per semplificare la trattazione, che z sia una variabile reale a valori positivi, ciò non comporterà perdita di generalità, in quanto varrà tutto anche per valori complessi di z sostituendo, nella trattazione, $|z|$ a z e $e^{i \arg z} \Phi(t)$ a $\Phi(t)$.

Si supponga che il cammino γ passi per un punto $t = t_0 \in \mathcal{R}$ tale che, per $t \in \gamma$, in un opportuno intorno di $t = t_0$, esso sia un punto di massimo per $\Re(\Phi(t))$:

$$\Re(\Phi(t_0)) > \Re(\Phi(t)); \quad (9)$$

il punto t_0 è detto allora *punto a sella*.

Si supponga poi che in un intorno adeguato di $t = t_0$, $\Im(\Phi(t))$ sia costante:

$$\Im(\Phi(t_0)) = \Im(\Phi(t)), \quad (10)$$

cosicché la funzione $e^{z\Phi(t)}$ non oscilli nell'intorno preso in considerazione. Sotto queste ipotesi, il maggior contributo all'integrale è dato da un intorno di $t = t_0$ (facilmente estensibile al caso di cammino che passa per più di un punto a sella), che sarà tanto più piccolo quanto più grande è z . Per $z \rightarrow \infty$, perciò, si considera un intorno infinitesimo di $t = t_0$.

Si consideri, inoltre, che se il punto di massimo di $\Re(\Phi(t))$ si trovasse nella regione di analiticità \mathcal{R} , ma non nel cammino di integrazione γ , grazie al Teorema di Cauchy, ci si potrebbe sempre ricondurre al caso trattato finora, deformando la curva di integrazione originale in una che rispetti le ipotesi precedenti.

Se vale la condizione 9 allora, per proprietà note delle funzioni analitiche, si ha:

$$\left(\frac{d\Phi(t)}{dt} \right)_{t=t_0} = 0. \quad (11)$$

Ora, supposto che:

$$\left(\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} \right)_{t=t_0} \neq 0, \quad (12)$$

poiché $\Phi(t)$ è per ipotesi una funzione analitica nell'intorno di $t = t_0$, è ivi sviluppabile in serie di Taylor:

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) + \frac{1}{2} \Phi''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (13)$$

Se si integra lungo γ e $z \rightarrow \infty$, si possono trascurare i termini della serie di Taylor che non sono stati esplicitati in 13:

$$\Phi(t) - \Phi(t_0) = \frac{1}{2} \Phi''(t_0)(t - t_0)^2. \quad (14)$$

Ponendo:

$$t - t_0 = r e^{i\phi} \quad e \quad \frac{1}{2} \Phi''(t_0) = A e^{i\alpha}, \quad (15)$$

con r e ϕ variabili e A e α costanti, dalla 14 segue che:

$$\Im(\Phi(t)) - \Im(\Phi(t_0)) = r^2 A \sin(2\phi + \alpha).$$

Affinché valga 10 si deve avere:

$$2\phi + \alpha = k\pi \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (16)$$

I possibili cammini passanti per $t = t_0$ che soddisfano 10 sono le due rette ortogonali:

$$t = t_0 \pm r e^{-i \frac{\alpha}{2}} \quad (17)$$

$$t = t_0 \pm r e^{i \frac{(\pi - \alpha)}{2}} \quad (18)$$

Da 9, con le posizioni 15 si ha:

$$\Re(\Phi(t)) - \Re(\Phi(t_0)) = r^2 A \cos(2\phi + \alpha)$$

e quindi per 16 si ha che il cammino lungo cui si deve integrare per rispettare l'ipotesi 9 è 18. Tale retta si può parametrizzare come

$$t = t_0 + w e^{i\psi} \quad w \in (-\infty, +\infty) \quad \psi = \frac{\pi - \alpha}{2}, \quad (19)$$

dove ψ è la *fase stazionaria* della variabile $t - t_0$.

Questo cammino è quello di *massima discesa* dal punto a sella, infatti, il modulo della derivata direzionale di $\Phi(t)$, lungo una generica curva $\gamma \subset \mathcal{R}$, è dato da

$$\left| \frac{d\Phi}{ds} \right| = |\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \Phi| = \sqrt{(\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \Re(\Phi))^2 + (\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \Im(\Phi))^2}$$

con ds spostamento infinitesimo lungo γ e $\vec{\tau}$ il versore tangente alla curva stessa. Dato che, dato un punto $z \in \mathcal{R}$, il valore di $\left| \frac{d\Phi}{ds} \right|$ è unico, si ha che $(\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \Re(\Phi))^2$ è massimo quando $(\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \Im(\Phi))^2 = 0$, come si ha nel caso in cui $\Im(\Phi(t)) = \cos t$; in tali linee la variazione di $\Re(\Phi(t))$ è la massima possibile.

Tramite le condizioni 9, 10 e 14, per $t \in \gamma$, si ha che

$$\frac{1}{2} \Phi''(t_0)(t - t_0)^2 = \Phi(t) - \Phi(t_0) = \Re(\Phi(t)) - \Re(\Phi(t_0)) < 0$$

e si può porre dunque

$$\frac{1}{2} \Phi''(t_0)(t - t_0)^2 = -u^2 \quad (20)$$

dove u è la nuova variabile, reale, di integrazione, proporzionale a w . Ricavando subito t da 20:

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{2}{|\Phi''(t_0)|}} e^{i\psi} u$$

e facendo le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi(t_0) - u^2 \\ dt &= \frac{dt}{du} du = \sqrt{\frac{2}{|\Phi''(t_0)|}} e^{i\psi} du \end{aligned}$$

]

$$g(t) = g(t_0),$$

essendo l'ultima uguaglianza giustificata dal fatto che spesso nei calcoli pratici basta fermarsi al primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor di $g(t)$ nell'intorno di t_0 , si ottiene:

$$f(z) = \int_{\gamma} g(t) e^{z\Phi(t)} dt \simeq \sqrt{\frac{2}{|\Phi''(t_0)|}} g(t_0) e^{z\Phi(t_0) + i\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zu^2} du$$

dove l'integrale è stato esteso a tutto l'asse reale in quanto, come già detto in precedenza, si commette un errore molto piccolo nel considerare tale intervallo piuttosto che un intorno infinitesimo di $t = t_0$ ($u = 0$). Infine, dato che l'integrale è di tipo gaussiano e perciò di valutazione immediata (in questo caso darà $\sqrt{\frac{\pi}{z}}$), si ha che

$$f(z) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi''(t_0)|z}} g(t_0) e^{z\Phi(t_0) + i\psi}$$

è la versione approssimata della funzione, per grandi valori di z , se ci si ferma al primo termine dell'espansione asintotica, che è anche quello dominante.

Se si è invece interessati, come lo si è in questa circostanza, alla valutazione dell'intera espansione asintotica è sufficiente considerare al posto dell'approssimazione 14, l'intero sviluppo di Taylor 13 e definire la nuova variabile di integrazione u , in luogo dell'uguaglianza 20, con la relazione esatta

$$\Phi(t) - \Phi(t_0) = -u^2 \quad (21)$$

che in modo implicito definisce t come funzione di u .

In questo modo si ha che

$$f(z) = e^{z\Phi(t_0)} \int_{\gamma(u)} e^{-zu^2} g(t(u)) \frac{dt}{du} du. \quad (22)$$

Sostituendo a $g(t(u)) \frac{dt}{du}$ il suo sviluppo in serie di potenze di u nell'intorno $u = 0$ (ovvero il punto a sella $t = t_0$)

$$g(t(u)) \frac{dt}{du} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k, \quad (23)$$

e passando al limite per $z \rightarrow \infty$, nel quale si può cambiare la curva $\gamma(u)$ con l'asse reale nel piano di u , si ottiene

$$f(z) \sim e^{z\Phi(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k} e^{-zu^2} du, \quad (24)$$

dove sono sopravvissuti i termini pari della serie 23 poiché quelli dispari danno contributo nullo a $f(z)$ in quanto corrispondono ad integrali con integrande dispari e intervalli di integrazione simmetrici. Come conseguenza dello scambio tra sommatoria e segno di integrale la serie a secondo membro non è convergente, ma è uno sviluppo asintotico e per questo si è utilizzato il simbolo di Hurwitz " \sim ". Considerando che

$$J_k \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k} e^{-zu^2} du = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k} J_0 = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k} \left(\sqrt{\frac{\pi}{z}} \right)$$

si ha una semplice valutazione degli integrali in 24

$$J_k = \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2k-1}{2} z^{-\frac{2k+1}{2}} = \sqrt{\pi} \frac{(2k-1)!!}{2^k} z^{-k-\frac{1}{2}}.$$

In definitiva, sostituendo il risultato appena ottenuto in 24, si ha che

$$f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{z\Phi(t_0)} \left[c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k} c_{2k} z^{-k} \right] \quad (25)$$

(dove

$$c_0 = \sqrt{\frac{2}{|\Phi''(t_0)|}} g(t_0) e^{i\psi}$$

è il coefficiente che corrisponde al termine dominante della serie), è lo sviluppo asintotico formale della funzione $f(z)$ iniziale.

In linea di principio, i coefficienti c_{2k} si possono calcolare con le relazioni 21 e 23, tuttavia il calcolo esplicito risulterà, in generale, molto complesso; fortunatamente, nei conti pratici, la conoscenza del coefficiente c_0 è spesso sufficiente per una buona approssimazione di $f(z)$.

Risomma alla Borel

Metodo di somma alla Borel

La risomma alla Borel è uno strumento, per permettere di definire una somma per le serie divergenti, di fondamentale importanza in tutte le teorie quantistiche di campo, come la QED e la QCD, per chiarire bene questa affermazione si deve parlare in maniera qualitativa del metodo di Lipatov: nel 1977 egli propose questo strumento per calcolare termini di grande ordine per le serie perturbative e per fare stime quantitative per la sua divergenza. L'idea alla base del metodo (che sarà applicata agli integrali funzionali) è la seguente: data una funzione $F(g)$ che è possibile sviluppare in serie di potenze

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N,$$

allora i suoi coefficienti possono essere scritti come

$$F_N = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{F(g)}{g^{N+1}} dg$$

dove γ è un percorso che circonda il punto $g = 0$ nel piano complesso di g . Ora riscrivendo il denominatore come $e^{-(N+1)\ln g}$, per $N \rightarrow \infty$ si potrebbe applicare il metodo del punto a sella, che risulterà sempre applicabile per gli integrali funzionali.

In generale i coefficienti dell'espansione di Lipatov hanno la forma

$$F_N = c\Gamma(N+b)a^N \quad (26)$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione gamma di Euler ed a , b e c sono parametri che dipendono dallo specifico problema trattato (solitamente a è una costante universale, b è un parametro che dipende da $F(g)$ e c dai momenti).

La più importante conseguenza di questo metodo è la possibilità di trovare la funzione di Gell-Mann-Low $\beta(g)$ che determina il cosiddetto *running* della costante di accoppiamento, ovvero il fatto che tali quantità non sono realmente costanti, bensì variano in relazione alla scala di energia del problema considerato; la funzione $\beta(g)$ determina l'andamento della costante d'accoppiamento $g(L)$ in funzione della scala di lunghezza (semplicemente inversa a quella dell'energia):

$$-\frac{dg}{d\ln L^2} = \beta(g),$$

che, nelle teorie relativistiche per piccoli valori di g , si può scrivere come

$$g(L) = \frac{g_0}{1 - \beta_2 g_0 \ln\left(\frac{L^2}{L_0^2}\right)}$$

con g_0 il valore di $g(L)$ in una scala di lunghezze L_0 . In QED la costante β_2 è positiva, perciò $g(L)$ va all'infinito per L che decresce; la costante d'accoppiamento diventerà infinita per un valore finito della lunghezza L_C (detto polo di Landau), per questo sorge il problema della trattazione dei problemi di QED ad alte energie.

Tornando a concentrarsi sul metodo di Lipatov, si ha che questo, nato per trattare le teorie scalari, è stato esteso alle teorie di pratico interesse come la QED e la QCD, per cui le serie perturbative risultano divergenti in quanto hanno coefficienti dati da 26. Dunque sorge spontaneo l'utilizzo del metodo di risomma alla Borel: esso è applicabile, a differenza del metodo di somma di Euler, di cui è una generalizzazione, anche nel caso in cui la serie abbia raggio di convergenza nulla e, inoltre, il suo procedimento permette di dare a tali serie un "contributo di convergenza fattoriale".

Il metodo di risomma alla Borel è basato sulla continuazione analitica alla Borel, per assegnare un significato alla somma di una serie di potenze, anche al di fuori del proprio dominio di convergenza. Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

la scrittura formale di una serie divergente ovunque, salvo che nell'origine; la si moltiplichi per 1, scritto come $\frac{n!}{n!}$ e si utilizzi, per il fattoriale a numeratore, la rappresentazione integrale del secondo tipo della gamma di Eulero:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt,$$

si scambi ora la sommatoria con il segno di integrazione

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (zt)^n \right) dt$$

dove il termine tra parentesi tonde è detto *trasformata di Borel*, $\Phi(zt)$, della funzione $f(z)$. La serie di potenze definita dalla trasformata di Borel ha una convergenza migliorata fattorialmente rispetto a quella originale (per tale motivo il metodo di risomma alla Borel è visto come una procedura naturale per sommare le serie divergenti fattorialmente), inoltre l'integrale ottenuto

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \Phi(zt) dt$$

rappresenta una continuazione analitica di $f(z)$ all'asse dei reali positivi e pertanto viene definito come la *somma alla Borel* della serie divergente di partenza.

In moltissime applicazioni in fisica, come nell'esempio dell'azione effettiva di Euler-Heisenberg-Schwinger che si andrà a trattare nel capitolo successivo, si è trovato che la teoria perturbativa conduce a una serie divergente con i coefficienti dell'espansione a_n che hanno un comportamento per grandi ordini della forma

$$a_n \sim (-1)^n \lambda^n \Gamma(\beta n + \gamma) \quad n \rightarrow \infty \quad (27)$$

dove λ, β, γ sono costanti reali e $\beta > 0$. Quando anche $\lambda > 0$, i coefficienti perturbativi a_n sono a segni alterni e divergono fattorialmente e la risomma alla Borel risulta essere direttamente applicabile. Si consideri ad esempio una serie asintotica con $a_n = (-1)^n \lambda^n n!$ e $\lambda > 0$; tale serie è banalmente divergente per qualunque valore del parametro perturbativo g (noi consideriamo piccoli valori di g , o meglio $g \rightarrow 0^+$). Applicando il metodo di Borel a tale serie divergente si ottiene che la trasformata di Borel è

$$\Phi(gt) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda gt)^n$$

che per piccoli valori di g può essere vista come la serie geometrica e quindi sostituita alla sua somma

$$\frac{1}{1 + \lambda gt},$$

perciò l'integrale di Borel che si ottiene è

$$f(g) \sim \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{1 + \lambda gt} dt$$

che, dopo la sostituzione $\lambda gt = s$, diventa

$$f(g) \sim \frac{1}{\lambda g} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\lambda g}} \frac{1}{1 + s} ds. \quad (28)$$

Applicando il metodo di Laplace a questo integrale si riottiene effettivamente la serie perturbativa di partenza.

Come già detto questa rappresentazione integrale è una continuazione analitica di $f(g)$ per ogni valore di $g > 0$, ma è possibile andare anche oltre, infatti tale integrale è continuabile analiticamente in tutto il piano complesso di g tagliato lungo l'asse dei reali negativi: $\arg(g) = \pi$. Perciò è possibile calcolare, tramite una relazione di Kramers-Kronig semplice

$$f(g) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\Im(f(x'))}{x' - g} dx', \quad (29)$$

la parte immaginaria di $f(g)$ per valori negativi del parametro perturbativo: $\Im(f(-g))$. Applicando la sostituzione $x = \frac{g}{s}$ nell'integrale 28 ottenendo

$$f(g) \sim \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{\lambda x}}}{g+x} \cdot \frac{dx}{x},$$

la sostituzione $x' = -x$ nella relazione di dispersione semplice 29 e confrontando le due integrande (cambiando x con g), si ha che

$$\Im(f(-g)) \sim \frac{\pi}{\lambda g} e^{-\frac{1}{\lambda g}}. \quad (30)$$

Se i coefficienti perturbativi a_n fossero a segni non alterni con $g > 0$ il metodo di Borel porterebbe a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n n! g^n \sim \frac{1}{\lambda g} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\lambda g}} \frac{1}{1-s} ds,$$

che presenta un polo nel cammino di integrazione. Un'integrazione in valore principale fornisce una parte immaginaria in accordo con quella ricavata 30, infatti si noti che una serie a segni alterni con $g < 0$ è equivalente ad una a segni non alterni con $g > 0$.

La trattazione fatta precedentemente per $a_n = (-1)^n \lambda^n n!$ è generalizzata per il caso $a_n = (-1)^n \lambda^n \Gamma(\beta n + \gamma)$, del tipo 27, con le seguenti formule che verranno riprese in seguito

$$f(g) \sim \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{1}{1+s} \left(\frac{s}{\delta g} \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} e^{-\left(\frac{s}{\delta g} \right)^{\frac{1}{\beta}}} \frac{ds}{s}, \quad (31)$$

$$\Im(f(-g)) \sim \frac{\pi}{\beta} \left(\frac{1}{\lambda g} \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} e^{-\left(\frac{1}{\lambda g} \right)^{\frac{1}{\beta}}}. \quad (32)$$

Applicazione in QED

Dopo aver trattato alcune tecniche per ottenere espansioni asintotiche di certi tipi di funzioni e un metodo importantissimo in teoria quantistica dei campi qual è la risomma alla Borel, ci si accinge ora ad esaminare alcuni utili esempi fisici in grado di portare alla luce quanto detto finora.

Modello di anarmonicità

In fisica è ben nota ed ampiamente utilizzata l'approssimazione di oscillatore armonico, basti pensare al semplice caso del pendolo per piccole oscillazioni o al più avanzato dei fononi e fotoni, che rende, in generale, più semplice ed analitica la soluzione dei problemi che si incontrano; quando però compaiono fenomeni di anarmonicità (semplicemente deviazioni dall'armonicità) si ha la necessità di andare oltre tale approssimazione. A tal fine si andrà ad analizzare un basilare *toy model* unidimensionale che permette di avere un primo confronto con la divergenza della serie perturbativa in QED e con l'argomento di Dyson, ma anche di vedere in azione alcuni metodi matematici citati per ottenere espansioni asintotiche: l'*oscillatore anarmonico unidimensionale*.

L'equazione di Schroedinger stazionaria, semplificata, che si prenderà come punto di partenza è

$$-\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + (x^2 + \alpha x^4)\Psi(x) = E\Psi(x),$$

dove α è la costante perturbativa. Come spesso si fa in teoria quantistica dei campi, grazie al nuovo metodo di rinormalizzazione che Dyson cita nel suo articolo del 1952, si va a considerare l'azione effettiva associata al nostro toy model:

$$\mathcal{Z}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - \alpha x^4} dx, \quad (33)$$

si separa la parte relativa all'energia cinetica da quella potenziale e si espande asintoticamente quest'ultima parte. Nel caso in cui $\alpha < 0$ si è già visto graficamente, nell'introduzione, che ci si ritrova nel caso patologico dell'argomento di Dyson e per $\alpha = 0$ si ha il risultato banale

$$\mathcal{Z}(0) = \sqrt{\pi}.$$

Essendo un modello semplificato è possibile trovare una soluzione non perturbativa esatta con l'utilizzo di un ambiente di calcolo simbolico e numerico, ad esempio *Mathematica*, che dà

$$\mathcal{Z}(\alpha) = \frac{e^{\frac{1}{8\alpha}} K_{1/4}(\frac{1}{8\alpha})}{2\sqrt{\alpha}} \quad (34)$$

dove $K_n(x)$ è la funzione modificata di Bessel del secondo tipo; grazie a questa soluzione esatta si potrà andare ad analizzare la versione calcolata perturbativamente facendo dei confronti con essa.

Considerando il caso $\alpha > 0$ e sviluppando in serie di Taylor $e^{-\alpha x^4}$ si ottiene

$$\mathcal{Z}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} x^{4k} \right) dx,$$

ora si utilizza il lemma di Watson scambiando il segno di integrale con la sommatoria, ma rendendo l'espressione a secondo membro un'espansione asintotica (in quanto si sta cambiando il comportamento dell'integranda agli estremi di integrazione)

$$\mathcal{Z}(\alpha) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{4k} dx.$$

Introducendo una nuova variabile a , che si considererà pari ad 1 alla fine della manipolazione algebrica, l'espressione di $\mathcal{Z}(\alpha)$ diventa

$$\mathcal{Z}(\alpha) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2k}}{\partial a^{2k}} e^{-ax^2} \Big|_{a=1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!} \frac{\partial^{2k}}{\partial a^{2k}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Big|_{a=1};$$

ora la valutazione della derivata è semplice quanto fastidiosa, infatti si ha che

$$\left. \frac{\partial^{2k}}{\partial a^{2k}} a^{-\frac{1}{2}} \right|_{a=1} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdots}_{2k \text{ fattori}}, \quad (35)$$

se tra tutti i fattori di 35 si vanno ad inserire degli "1" adatti, è possibile trovare una relazione compatta ed elegante per la derivata:

$$\left. \frac{\partial^{2k}}{\partial a^{2k}} a^{-\frac{1}{2}} \right|_{a=1} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{3}{4} \frac{4}{4} \frac{5}{6} \frac{6}{6} \frac{7}{8} \frac{8}{8} \cdots}_{4k \text{ fattori}} = \frac{(4k)!}{2^{2k}} \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}}_{2k \text{ fattori}} = \frac{(4k)!}{2^{4k}(2k)!}.$$

In definitiva si ha lo sviluppo perturbativo

$$\mathcal{Z}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \frac{(-1)^k (4k)!}{2^{4k} (2k)! k!} \alpha^k, \quad (36)$$

che, con la *formula di Stirling* ($n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, con e numero di Nepero) per grandi valori di k , ha coefficienti con un andamento dato da

$$\frac{(4k)!}{2^{4k} (2k)! k!} \sim \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sim \frac{1}{\pi \sqrt{2}} 4^k k!,$$

dunque fattoriale, ovvero la serie perturbativa trovata 36 è divergente, nonostante in questa situazione ci aspettava di trovare, come somma, un numero positivo finito.

Come già detto in precedenza, anche se la serie perturbativa è divergente, è possibile ricavarne informazioni utili al fine di definire una quantità finita associata ad essa. Ciò è possibile andando ad utilizzare un numero finito di termini della serie, a fine esemplificativo si consideri un valore della costante d'accoppiamento α pari a $\frac{1}{50}$. Per tale scelta si ottiene, dalla soluzione esatta non perturbativa 34,

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1}{50}\right) = 1,7478812\dots,$$

per lo stesso valore di α , un numero finito di termini della serie perturbativa 36 dà

$$\mathcal{Z}_5\left(\frac{1}{50}\right) = 1,7478728\dots$$

$$\mathcal{Z}_{10}\left(\frac{1}{50}\right) = 1,7478818\dots$$

Si vede dunque che i primi termini della soluzione perturbativa sono in accordo con quella esatta con una precisione incredibile (la soluzione per $N = 5$ si discosta dello 0,00048%, quella per $N = 10$ dello 0,000034%). Il problema sorge quando si vanno a considerare grandi valori di N ; infatti è possibile vedere come, all'aumentare di N , la soluzione perturbativa passa dall'essere in quasi totale accordo con il risultato esatto al divergere inesorabilmente (comportamento già anticipato con la regola empirica di Carrier)

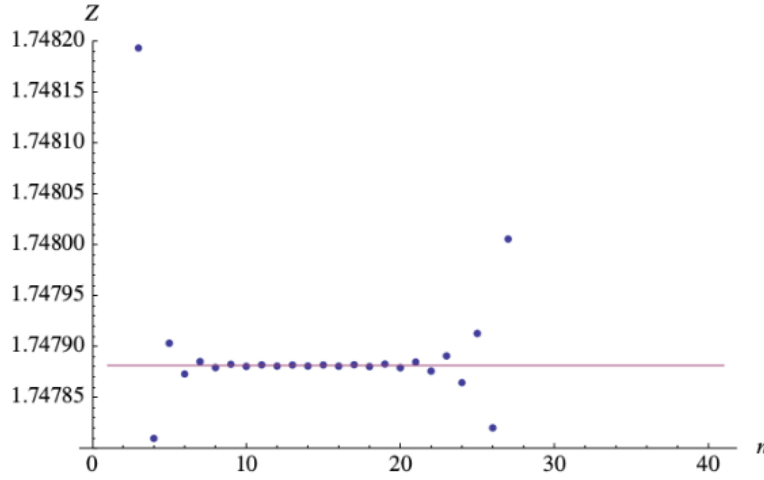


Figura 1: Valori della serie perturbativa, valutati in funzione di N

Sorgono spontanee, principalmente, due domande: fino a che ordine la soluzione perturbativa non diverge? Per quale motivo nasce questa divergenza? La prima domanda è stata fin troppo trascurata dalla comunità scientifica a causa dell'estrema precisione dei risultati che si ottengono dalle serie perturbative (come nel caso dell'elettrodinamica quantistica, anche se la fisica delle alte energie ha riaperto la questione a causa del *running* della costante di struttura fine). Come detto proprio all'inizio di questa tesi ci si può spingere fino all'ordine di grandezza $N = O(\frac{1}{\alpha})$, affermazione verificata da Bender e Wu, i quali sono arrivati a calcolare fino ai primi 150 termini proprio della serie perturbativa dell'oscillatore anarmonico unidimensionale.

Per quanto riguarda la seconda domanda, invece, si deve utilizzare un altro metodo, per ottenere l'espansione asintotica, che metta alla luce dei termini non perturbativi che sfuggono allo sviluppo in serie di Taylor, ma che per grandi ordini di N diventano dominanti. Si parte dunque dall'azione effettiva iniziale 33, nella quale si sostituisce $x^2 = \frac{u^2}{\alpha}$, ottenendo

$$\mathcal{Z}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2+u^4}{\alpha}} du.$$

Dato che l'esponente è negativo ed il suo valore assoluto cresce nel limite di piccoli α , si può utilizzare il metodo di punto a sella: il contributo dominante dell'integrale, per $\alpha \rightarrow 0$, verrà dagli intorno dei punti in cui la parte reale di $u^2 + u^4$ è massima; banalmente sono variabili reali e quindi basterà andare a cercare i punti in cui si annulla la derivata prima. I punti a sella sono quindi $u_{1,2} = 0$, con molteplicità 2, e $u_{3,4} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$, con molteplicità 1. I contributi dovuti al punto a sella $u_{1,2} = 0$ sono quelli che comportano lo sviluppo asintotico 36, trovato prima con una semplice espansione in serie di Taylor, però. grazie al metodo del punto a sella, si sono trovati due nuovi contributi negli intorno dei punti $u_{3,4}$ che hanno un comportamento, per $\alpha \rightarrow 0$, del tipo $e^{\frac{1}{4\alpha}}$, che sono invisibili per uno sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di $\alpha = 0$ poiché tutte le derivate dell'esponenziale si annullano lì.

In generale, a questo livello di approssimazione, si può dire che uno sviluppo asintotico è utile nella pratica, finché i suoi termini dominano rispetto ai contributi non perturbativi; per trovare un ordine di grandezza di N entro cui ciò succede si può analizzare velocemente quando

$$e^{-\frac{1}{4\alpha}} \approx \alpha^k$$

che si ha circa per

$$k \approx \frac{1}{\alpha}$$

come ci si aspettava di ottenere.

È necessario menzionare che è possibile andare oltre questo grado di approssimazione (che si può definire al pari della serie superasintotica) andando a trattare i contributi non perturbativi, o, di nuovo,

con il metodo del punto a sella, facendo passare il cammino di integrazione anche per i punti del tipo di $u_{3,4}$ ottenendo altre serie perturbative che si andranno a sommare a quella originale (fenomeno detto *risorgenza*, con la serie ottenuta detta, appunto, *serie risorgente*), o con altre tecniche di somma che possano aggirare il raggio nullo di convergenza della serie perturbativa, come può essere ad esempio la tecnica di *risomma alla Borel*; in entrambi i casi si raggiunge il grado di approssimazione della serie iperasintotica.

Azione effettiva di Euler-Heisenberg-Schwinger

Si consideri ora un'azione effettiva ben nota in QED, quella di *Euler-Heisenberg-Schwinger*. Le azioni effettive possono essere sviluppate perturbativamente in termini della costante d'accoppiamento $\alpha = e^2$ (il fattore costante $\frac{1}{4\pi}$, ovviamente, non è importante per la definizione di α), nel sistema delle unità naturali, ed anche in termine delle derivate del tensore del campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$, ma dato che l'azione effettiva di *Euler-Heisenberg-Schwinger* è corrispondente ad un campo elettromagnetico esterno uniforme nel vuoto, si potrà sviluppare solo in termini di e^2 . Prima si consideri un campo magnetico esterno uniforme B , per cui si ha la seguente azione effettiva rinormalizzata in forma di integrale del tempo proprio [7], s,

$$\mathcal{Z} = -\frac{e^2 B^2 L^3 T}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left(\coth(s) - \frac{1}{s} - \frac{s}{3} \right) e^{-\frac{m^2}{eB}s} ds \quad (37)$$

dove $L^3 T$ è il fattore di volume dello spazio-tempo, il termine $\frac{1}{s}$ è la sottrazione dell'azione effettiva per campo nullo ($B = 0$), mentre $\frac{s}{3}$ viene da un contributo logaritmico che si origina dalla rinormalizzazione della carica.

Per piccoli valori di $\frac{eB}{m^2}$ si ottiene lo sviluppo asintotico [5], [7], dell'integrale 37

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &\sim -\frac{2e^2 B^2 L^3 T}{\pi^2} \cdot \frac{e^2 B^2}{m^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_{2k+4}}{(2k+4)(2k+3)(2k+2)} \left(\frac{2eB}{m^2} \right)^{2k} \\ &= \frac{m^4 L^3 T}{\pi^2} \left[\frac{1}{360} \left(\frac{eB}{m^2} \right)^4 - \frac{1}{630} \left(\frac{eB}{m^2} \right)^6 + \frac{1}{315} \left(\frac{eB}{m^2} \right)^8 - \dots \right] \quad \left(\frac{eB}{m^2} \rightarrow 0^+ \right) \end{aligned} \quad (38)$$

dove \mathcal{B}_k sono i *numeri di Bernoulli*, i quali sono nulli per k dispari. L'espansione asintotica 38 è quella trovata da Euler e Heisenberg nell'articolo scientifico [5] per un'azione effettiva in QED in un campo magnetico uniforme B , con $E = 0$ (è stato tralasciato il termine per e^2 in quanto contribuisce alla rinormalizzazione della carica). È facilmente verificabile che lo sviluppo di Euler-Heisenberg non è una serie convergente, bensì una serie asintotica di parametro perturbativo:

$$\alpha = \left(\frac{2eB}{m^2} \right)^2$$

che è riconducibile alla costante di struttura fine.

Tramite la relazione

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} \mathcal{B}_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \quad (39)$$

valida per ogni k positivo, è possibile scrivere il coefficiente k -esimo come

$$a_k = \frac{\mathcal{B}_{2k+4}}{(2k+4)(2k+3)(2k+2)} \sim 2 \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+4}} \Gamma(2k+2), \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (40)$$

quindi si ha una serie a segni alterni che cresce fattorialmente. L'andamento trovato per i coefficienti è del tipo trattato nel capitolo della risomma alla Borel 27, con $\lambda = \frac{1}{4\pi^2}$ e $\beta = \gamma = 2$; perciò la serie perturbativa di Euler-Heisenberg è divergente ma sommabile alla Borel. Se si tiene solo l'andamento dominante 39 si può ottenere dalla formula 31, il contributo dominante dell'approssimazione di Borel alla somma della serie divergente 38

$$\mathcal{Z}_{dominante} \sim \frac{e^2 B^2 L^3 T}{4\pi^6} \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{1 + \frac{s^2}{\pi^2}} \right) e^{-\frac{m^2}{eB}s} ds, \quad \left(\frac{eB}{m^2} \rightarrow 0^+ \right) \quad (41)$$

In questo esempio specifico, in realtà, si può fare anche di meglio; è possibile definire l'esatta espressione dei coefficienti perturbativi a_k per tutti i k positivi, infatti si ha

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\mathcal{B}_{2k+4}}{(2k+4)(2k+3)(2k+2)} = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+4}} \Gamma(2k+2) \zeta(2k+4) \\ &= 2(-1)^{k+1} \Gamma(2k+2) \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^{-(2k+4)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Ancora una volta, per ogni k della serie, a_k è della forma 27, con $\lambda = \frac{1}{4\pi^2 k^2}$ e $\beta = \gamma = 2$. Si ottiene pertanto tramite la formula 31

$$\mathcal{Z} \sim \frac{e^2 B^2 L^3 T}{4\pi^6} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{k^2(k^2 + \frac{s^2}{\pi^2})} \right) e^{-\frac{m^2}{eB}s} ds; \quad \left(\frac{eB}{m^2} \rightarrow 0^+ \right) \quad (43)$$

la somma sui k dà correzioni successive all'approssimazione di Borel 41. Facendo il plot del rapporto fra la soluzione esatta³⁷ e l'approssimazione di Borel⁴¹ (dopo aver calcolato numericamente gli integrali), senza correzioni e con alcuni termini di 43, all'aumentare del parametro perturbativo α , si ottiene

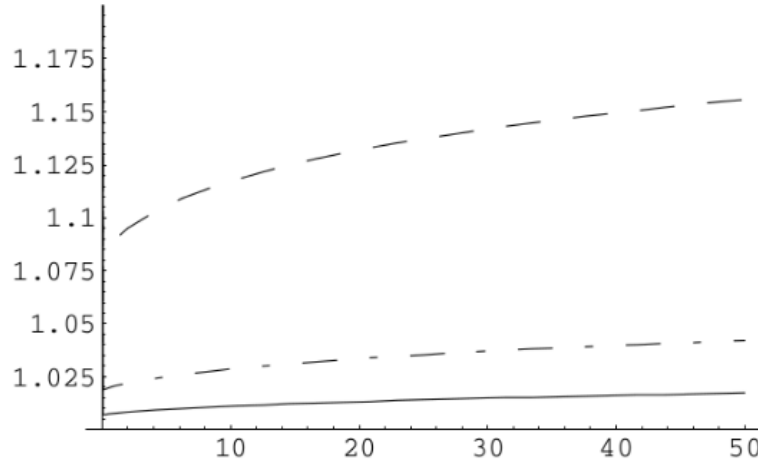


Figura 2: La linea tratteggiata rappresenta il rapporto con l'approssimazione di Borel senza correzioni 41, la linea punto-tratto il rapporto con l'approssimazione con l'aggiunta dei primi due termini correttivi dalla serie 43 e la linea continua il rapporto con l'approssimazione sommata ai primi tre termini correttivi di 43.

Per rendersi conto di quanto è importante un valore di, ad esempio, 50 per α lo si può riscrivere in questo modo

$$\alpha = 4 \left(\frac{\hbar \frac{eB}{mc}}{mc^2} \right)^2 = 4 \left(\frac{\frac{\hbar}{mc}}{\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}} \right)^4$$

dove la prima uguaglianza esprime α in funzione del quadrato del rapporto tra l'energia di ciclotrone $\hbar\omega_C$ e l'energia di riposo mc^2 e la seconda uguaglianza esprime il parametro in funzione della potenza alla quarta del rapporto tra la lunghezza d'onda di Compton $\frac{\hbar}{mc}$ e la scala della "lunghezza magnetica" $\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ determinata dal campo magnetico. Si vede dunque dal grafico 2 che, anche per un valore di α pari a 50, l'approssimazione di Borel 41 senza correzioni è in accordo con il risultato esatto del 10–15%, quella con la correzione dei primi tre termini della serie 43 si mantiene sull'1% di precisione con 37. Questi risultati sono eccezionali se si pensa che il campo magnetico per cui si ha α dell'ordine di grandezza di 1 è di $B_{critico} = \frac{1}{2} \frac{m^2 c^3}{e\hbar} \approx 10^{13} \text{ gauss}$, infatti è ben al di sopra dei valori raggiungibili in

laboratorio, che sono circa $B = 10^5 - 10^6 \text{ gauss}$, ai quali corrispondono $\alpha \approx 10^{-16} - 10^{-14}$. Tuttavia il campo magnetico critico è comparabile con la scala dei campi magnetici osservate in oggetti astrofisici quali supernovae e stelle di neutroni.

Si consideri ora l'azione effettiva di Euler-Heisenberg-Schwinger in un campo elettrico uniforme di intensità E , al posto di B del caso precedente, ovvero una trasformazione duale $B \rightarrow iE$ [7]. Perturbativamente cambia solo B^2 che diventa $-E^2$, che può essere visto come un cambio di segno per il parametro perturbativo, rendendo l'espansione asintotica di Euler-Heisenberg 38 una serie divergente a segni non alterni

$$\mathcal{Z} \sim -\frac{2e^2 E^2 L^3 T}{\pi^2} \cdot \frac{e^2 E^2}{m^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathcal{B}_{2k+4}}{(2k+4)(2k+3)(2k+2)} \left(\frac{2eE}{m^2}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{eE}{m^2} \rightarrow 0^+\right) \quad (44)$$

Nonostante non sia definibile l'integrale di Borel 31 in maniera non patologica per questa serie divergente, è comunque possibile ricavare informazioni di carattere fisico da essa tramite la relazione di dispersione di Borel 32; se si considerano i coefficienti approssimati 40 si ottiene

$$\Im(\mathcal{Z}_{dominante}) \sim L^3 T \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} e^{-\frac{\pi m^2}{eE}}$$

che ha un significato fisico diretto, in quanto rappresenta metà del *rate* di produzione di coppie elettrone-positrone in un campo elettrico uniforme E [7].

Infine si può affermare che questi casi osservati forniscono un'altra conferma all'argomento di Dyson [1], per cui la serie perturbativa in QED non può essere una serie convergente nella costante di struttura fine α , difatti se le serie perturbative di Euler-Heisenberg, 38 e 44, fossero convergenti allora lo scambio tra $e^2 B^2$ e $-e^2 E^2$ non produrrebbe la parte immaginaria non perturbativa nell'azione effettiva e di conseguenza non ci sarebbe la produzione di coppie elettrone-positrone caratteristica del vuoto della QED in un campo elettrico esterno, che non è una conseguenza accettabile.

Conclusioni e discussioni

Si sono viste, dunque, due conferme all'argomento di Dyson [1]: le serie perturbative (36 e 38) sviluppate nella costante di struttura fine, α , sono divergenti. Si è mostrato tuttavia che è possibile ricavare delle informazioni utili fisicamente da queste serie divergenti, o tramite il troncamento della serie, con cui si hanno dei risultati incredibilmente in accordo con i dati sperimentali, o tramite delle tecniche di somma, come la risomma alla Borel; in entrambi i casi si è messo in evidenza che ci sono dei termini che sfuggono in qualche modo ad entrambe le tecniche, detti appunto termini non perturbativi (che sono collegati in qualche modo ai numeri e alle parti immaginari), ma che comunque portano con loro un significato fisico importantissimo. Pertanto l'ipotesi perturbativa non è adeguata alla completa trattazione del problema in esame, visto che è basata su un'idea troppo semplicistica, si può dire perciò che essa funziona come una mezza teoria, ovvero una teoria efficace che è utilizzabile per calcoli pratici, ma che ha un dominio di validità ristretto (per la QED il dominio è limitato ai casi in cui il valore di α è piccolo).

Andando a fare ricerca sulla fisica delle alte energie, per la quale, a causa del *running* della costante d'accoppiamento, α diverge, l'ipotesi perturbativa non è più valida. Perciò si presentano due alternative per l'evoluzione, necessaria, della QED [1]:

- la prima è la scoperta di un nuovo metodo matematico, che non prenda in considerazione e sia migliore dell'espansione in serie di potenze nella costante d'accoppiamento. In questo caso le grandezze fisiche $A(\alpha)$ saranno calcolabili e ben definite, con lo sviluppo asintotico 1 valido come approssimazione nel limite di piccoli α . Non sono richieste, pertanto, nuove ipotesi fisiche, perciò è l'alternativa meno interessante.
- la seconda alternativa è che tutte le informazioni fisiche della QED sono contenute nei coefficienti della serie asintotica 1, dunque la quantità fisica $A(\alpha)$ non è, in linea di principio, né calcolabile matematicamente né fisicamente ben definita, nonostante le approssimazioni asintotiche diano alcune informazioni utili in domini di validità limitati. Ma in tal caso la QED è una teoria non chiusa matematicamente, ma solo una efficace ed è, quindi, necessaria una nuova teoria fisica da sviluppare.

Sperimentalmente esistono due gruppi di fenomeni fisici, uno che è incredibilmente in accordo con le predizioni della QED e un altro che non è assolutamente comprensibile tramite il suo utilizzo, ad esempio nella scala delle energie vicino al polo di Landau. Come già successo in passato, con esperimenti non compresi dalle teorie fisiche note al tempo che poi hanno portato a delle rivoluzioni sia nel mondo della fisica che nell'ideale collettivo globale (si pensi alle conseguenze della relatività generale e della meccanica quantistica), servono delle nuove idee fisiche per andare oltre questi fenomeni fisici non prevedibili dalle teorie attuali.

Ringraziamenti

Vorrei cominciare ringraziando, ovviamente, la mia famiglia che mi ha sostenuto in tutti i modi possibili, soprattutto per il periodo della triennale.

Un ringraziamento sincero al mio relatore, il professor Pacetti, che mi ha, cortesemente, supportato e sopportato nella scrittura di questo manoscritto; nella speranza di poter lavorare ancora insieme in futuro.

Ringrazio, poi, tutti i miei amici che, quelle poche volte che sono riusciti a schiodarmi da casa, mi hanno sollevato dal peso dello studio e dalle difficoltà della vita, in particolare un ringraziamento di cuore a Laura e Matteo per avere sopportato tutte le lamentele e le stupidaggini che ho generato ad ogni esame e a Francesca la cui amicizia ritrovata è stata veramente una boccata d'aria fresca in questa volata finale.

Infine un ringraziamento dovuto e sentito a tutti i colleghi con cui ho condiviso questi tre anni, nello specifico i miei compagni di piacevoli chiacchiere fisiche e non: Marco, Andrea e Nicholas; e i miei carissimi compagni di laboratorio Lorenzo e Giuseppe con cui ho superato delle prove davvero estenuanti, ma anche molto divertenti in fin dei conti.

Bibliografia

- [1] F. J. Dyson, “Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.* **85** (1952) 631.
- [2] G. V. Dunne e T. M. Hall, “Borel summation of the derivative expansion and effective actions,” *Phys. Rev. D* **60** (1999) 065002.
- [3] John P. Boyd. “The devil’s invention: Asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series,” *Acta Applicandae Mathematica*, 56(1):1–98, 1999.
- [4] I. M. Suslov, “Divergent perturbation series,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **127** (2005) 1350 [*J. Exp. Theor. Phys.* **100** (2005) 1188].
- [5] W. Heisenberg e H. Euler, “Consequences of Dirac’s theory of positrons,” *Z. Phys.* **98** (1936) no.11-12, 714.
- [6] M. Flory, R. C. Helling and C. Sluka, “How I Learned to Stop Worrying and Love QFT,” [arXiv:1201.2714](https://arxiv.org/abs/1201.2714) [math-ph].
- [7] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [8] Riccardo Finotello, relatore: Prof. Igor Pesando, “Analisi Perturbativa: Serie Risorgenti ed Iperasintotiche,” tesi triennale in Fisica (2015).
- [9] Cesare Rossetti, “Metodi matematici per la fisica,” Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella Torino, (2000).