

Esercizi obbligatori su serie di Fourier e Python

francesco.fuso@unipi.it

(Dated: version 9 - FF, 17 dicembre 2022)

Questa nota propone alcuni esercizi sullo sviluppo in serie di Fourier che dovete svolgere con Python, consegnando il vostro elaborato *prima* della scadenza!

I. INTRODUZIONE

Gli esercizi descritti in questa nota sono parte integrante dell'esercitazione/"relazione" obbligatoria che siete tutti tenuti a svolgere, in piccoli gruppi (la cui composizione sarà tipicamente quella di laboratorio, quindi gruppi da due), durante le vacanze di fine anno, fra una fetta di panettone e l'altra (il pandoro anche no).

Elemento comune di questi esercizi è il metodo che consente di scrivere una qualsiasi funzione *periodica* come serie troncata di seni e coseni, altrimenti chiamata, più o meno propriamente, *serie di Fourier*: i dettagli, come illustrati a lezione, sono reperibili nelle dispense. In particolare gli esercizi richiedono di conoscere e impiegare i *coefficienti di Fourier* per forme d'onda quadre e triangolari, oltre che, eventualmente, per treni di impulsi: esempi debitamente contestualizzati per quest'ultimo caso sono disponibili nella nota pubblicata per l'esperimento di ricostruzione della curva caratteristica del diodo con Arduino.

II. ESERCIZI E HINTS

I diversi esercizi devono comporre un'unica "relazione" (un unico file pdf da uploadare nella pagina di e-learning, ovviamente ne basta uno per gruppo!), nella quale inserirete, oltre ai grafici che risultano dalle ricostruzioni numeriche argomento degli esercizi, un minimo di spiegazione. Alcuni esercizi richiedono la disponibilità di dati sperimentali: in questi casi siete pregati di aggiungere una *breve* descrizione dell'esperimento e dei parametri rilevanti. Naturalmente, affinché il confronto con l'esperimento abbia un minimo di senso, è opportuno che i dati sperimentali siano decenti. Dubito che tutti ne abbiate a disposizione, vista la scarsa propensione generale a controllare cosa si fa in laboratorio mentre ci si sta. Se non avete dati sperimentali o questi dati sono davvero indecenti, ciccia, ce ne faremo una ragione. Indispensabile è che tutti completiate almeno, e per bene, le parti di pura ricostruzione numerica.

Gli esercizi dovrebbero rappresentare un divertimento che ha la finalità di replicare, o simulare (il termine non è proprio adattissimo), segnali e andamenti riscontrati in laboratorio. Per somma soddisfazione, in qualche caso potrete anche sovrapporre in un unico grafico esperimento e simulazione, in una sorta di metafora semplice semplice di quanto si fa normalmente in fisica.

In primo luogo dovrete usare il metodo della serie di Fourier per ricostruire delle forme d'onda quadre e triangolari, osservando come cambiano i risultati in funzione dei parametri di simulazione: sarà un piacere vedere come la semplice somma di (tante) funzioni armoniche porti a generare forme completamente diverse. Quindi potrete ri-ottenere le forme a "pinna di squalo" che si ottengono in uscita da un integratore RC alimentato da onda quadra e confrontarle con quelle registrate da Arduino. Ancora, potrete divertirvi a ricostruire, tramite simulazione, la curva di risposta dell'integratore RC alimentato da onda quadra, cioè la curva di guadagno $G(f)$: anche qui dovrete avere disponibili dei dati sperimentali da sovrapporre alla simulazione. Magari qualche gruppo particolarmente skilled potrebbe avere dati analoghi (acquisizioni di Arduino e curve di guadagno) ottenuti usando una forma d'onda triangolare in ingresso: potrete certamente esercitarvi anche con questo.

Inoltre, e qui di dati sperimentali dubito che ci siano (ma ci sono state sicuramente delle osservazioni all'oscilloscopio!), potrete ricostruire il *ripple* osservato mandando un treno di impulsi con duty cycle variabile all'integratore (condensatore) nell'esperimento della curva caratteristica del diodo, oppure ricostruire l'andamento di una forma d'onda quadra (a bassa frequenza) visualizzata accoppiando l'oscilloscopio in modalità AC. Magari ci sono anche altre possibilità e sta alla vostra curiosità esplorarle.

Prima di procedere oltre può essere utile soffermarsi su alcuni banali consigli generali per l'implementazione pratica degli script di Python.

In primo luogo è ovvio che si ha a che fare con arrays unidimensionali, cioè vettori: la variabile indipendente (il tempo) è un array, ogni funzione armonica è un array, la funzione ottenuta sommando le armoniche è un array. Lavorare con gli arrays significa fare uso del pacchetto `numpy`. Per esempio, per creare un array (qui chiamato `t`) per la variabile indipendente t si può usare il comando `t = numpy.linspace(-2, 2, 5000)`, che genera un vettore di 5000 punti distribuiti in modo equispaziato tra -2 e 2. Un comando per creare un array nullo, sempre di 5000 punti, è `w=numpy.zeros(5000)` (`w` è il nome dell'array), se vogliamo invece un array che contenga il coseno della variabile `t` occorre scrivere `w=numpy.sin(t)`, e così via.

Quindi ognuna delle funzioni armoniche può essere definita calcolando l'appropriata funzione, per esempio `wk = numpy.cos(omegak*t)` crea una funzione coseno dell'argomento specificato. Infine le varie funzioni armoniche, debitamente moltiplicate per i propri pesi (i coef-

ficienti di Fourier), possono essere facilmente sommate tra loro come arrays. Si possono adottare diverse tecniche per istruire il software a eseguire le somme necessarie. Probabilmente la più semplice consiste nell'introdurre dei cicli nello script. Questo può per esempio essere fatto con l'istruzione `for counter in range (start, stop, step)`: (ricordate che le righe di script che appartengono al ciclo *devono essere indentate*, cioè scritte premettendo una tabulazione, e fate attenzione ai due punti a fine istruzione), dove la possibilità di introdurre lo step size può essere utile per considerare solo armoniche pari o dispari (è sufficiente porre lo step pari a 2 e regolare opportunamente lo start, per esempio far partire la somma da 1 o da 2).

Naturalmente la serie di Fourier dovrebbe, in matematica, comprendere infiniti elementi. Dal punto di vista numerico la somma sarà estesa a un numero finito, *sufficientemente grande*, di elementi. In genere, per capire se il numero di iterazioni nella somma è sufficientemente grande basta guardare il grafico che si ottiene e verificare “a occhio” se, con la risoluzione adottata (numero di punti dell'array e numero di punti della rappresentazione), la forma è quella attesa, in particolare che non compaiano “spigolosità” o altri artefatti. In alternativa si possono generare, con appositi pacchetti disponibili in Python, delle onde quadre o triangolari “modello” e verificare quantitativamente la differenza fra valori dell'onda modello e dell'onda creata per espansione di Fourier, per esempio usando la somma dei residui quadrati come indicatore della qualità di riproduzione.

III. ESERCIZIO 1: QUADRA E TRIANGOLARE

Il primo esercizio proposto è molto semplice: si tratta di ricostruire delle forme d'onda quadra e triangolare usando gli opportuni coefficienti. Ci sono due possibilità per fare un minimo di studio:

- vedere come cambia l'accuratezza di ricostruzione in funzione del numero n di elementi della somma;
- capire come cambiano le cose al cambiare del numero di punti dell'array, ovvero del numero di punti rappresentato in un grafico (che si vede sul display del computer, su un foglio di carta, su un file in formato grafico, etc.).

Come illustrato nelle dispense, troverete che riprodurre una ragionevole forma d'onda triangolare richiede relativamente poche iterazioni, cioè pochi elementi nella somma. La forma d'onda quadra è più rognosa, il che è ovvio vista la necessità di ricostruire, tramite somme di funzioni sinusoidali, andamenti molto ripidi. Gli artefatti che si generano quando n non è sufficientemente grande prendono qualche volta il nome gergale di *fenomeno di Gibbs*.

Più interessante è vedere cosa succede al variare del numero di punti dell'array, ovvero del numero di punti

effettivamente rappresentati nel grafico. Possono infatti uscire degli artefatti, che forse potremmo chiamare *alias* (ma il termine si riferisce propriamente a qualcosa di un po' diverso), tipici del *campionamento*. Il problema di fondo è infatti quello che una funzione, che è continua nel fatato mondo della matematica, viene sempre calcolata e/o rappresentata in modo discreto, circostanza che rende cruciali tutti quei concetti relativi al campionamento che abbiamo messo in luce parlando di Arduino, per esempio. Pensateci!

IV. ESERCIZIO 2: PINNA DI SQUALO

L'esercizio qui proposto fa riferimento all'esperienza pratica in cui si osservava l'uscita di un integratore al cui ingresso era inviata un'onda quadra: all'aumentare della frequenza l'uscita tendeva ad assomigliare sempre più a un'onda triangolare, con un vasto regime intermedio in cui il segnale assumeva le sembianze di una sorta di pinna di squalo. Questa forma d'onda dovrete averla acquisita con Arduino per varie frequenze f scelte arbitrariamente in un vasto intervallo, , compatibilmente con il rate di campionamento disponibile.

Nell'esempio mostrato in questa nota era $C = 1 \mu\text{F}$ (con tolleranza $\pm 10\%$) e $R = (3.28 \pm 0.03) \text{ kohm}$ (misurata con multimetro digitale), per cui la frequenza di taglio attesa era $f_T = (49 \pm 5) \text{ Hz}$. Arduino era regolato in modo da campionare a intervalli di durata nominale $\Delta t = 100 \mu\text{s}$ e i record contenevano 2048 coppie di punti (tempo e $V_{out}(t)$, quest'ultima lasciata in unità digitalizzate). Per poter impiegare Arduino il generatore di funzioni, impostato su onda quadra (di ampiezza $V_{in} \simeq 3.0 \text{ Vpp}$), era stato regolato in modo da introdurre un offset che rendesse sempre positivo il segnale in ingresso e in uscita. Infatti in un circuito integratore la componente continua del segnale passa da ingresso a uscita.

La Fig. 1 mostra alcuni esempi dei record acquisiti a diverse frequenze, secondo quanto indicato in legenda. Per esigenze di chiarezza, i grafici sono stati disegnati usando diverse scale per gli assi: in particolare, l'asse orizzontale si estende per 4 periodi, cioè la scala va dallo zero dei tempi (ricordiamo che l'acquisizione è sincrona, per cui lo zero corrisponde sempre, entro l'incertezza, a un fronte di discesa dell'onda quadra in ingresso) al valore $4/f$, con f frequenza impostata e letta sul frequenzimetro del generatore di funzioni. Poiché l'intervallo di campionamento nominale in questo esempio è sempre lo stesso, la “densità” dei punti rappresentati, cioè il numero di dati effettivamente riportati nei grafici, dipende dalla frequenza, come è facile osservare. Inoltre, poiché anche l'offset del generatore è stato deliberatamente lasciato inalterato, i grafici a frequenze più alte, dove la componente alternata è attenuata, non partono dallo zero dell'asse verticale.

Gli andamenti temporali osservati possono facilmente essere ricostruiti in maniera quantitativa usando il “metodo simbolico” e l'espansione di Fourier in seni e coseni.

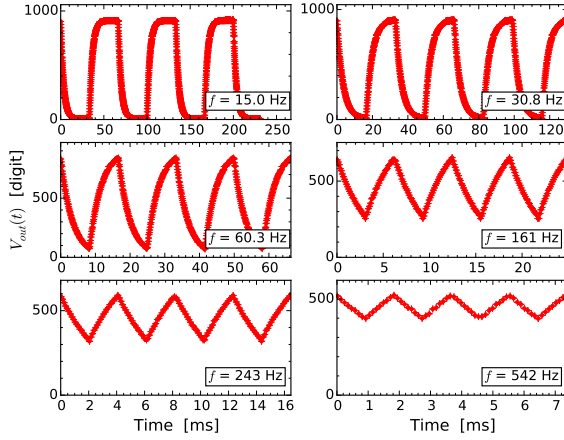


Figura 1. Dati acquisiti sperimentalmente come descritto nel testo: nei vari pannelli sono rappresentate (con punti e barre di errore “convenzionali”) i record $V_{out}(t)$ vs t registrati per diversi valori della frequenza, come indicato in legenda (per semplicità grafica, si omette l’indicazione precisa della frequenza e dell’incertezza sulla sua misura, che è più piccola dell’ultima cifra riportata). Si notino le diverse scale orizzontali e verticali.

Grazie all’applicazione del metodo simbolico, sappiamo che un integratore *alimentato con un’onda sinusoidale* di frequenza f dà luogo a:

1. un *guadagno* $G(f) = 1/\sqrt{1 + (f/f_T)^2}$;
2. uno *sfasamento* $\Delta\phi = \arctan(-f/f_T)$.

Guadagno e sfasamento agiscono indipendentemente su tutte le componenti dell’onda quadra supposta in ingresso al circuito, avendo per ogni componente $f = f_k = \omega_k/(2\pi)$. In altre parole, si può agevolmente “simulare” la forma d’onda $w(t)$ in uscita dal circuito sommando le componenti armoniche dell’onda quadra, cioè costruita con i coefficienti di Fourier dell’onda quadra, pari a $2/(\pi k)$, con k ordine dell’armonica, moltiplicando l’ampiezza di ogni componente per la dovuta attenuazione e mettendo nell’argomento delle funzioni armoniche di Fourier il dovuto sfasamento.

In altre parole avremo:

$$G_k = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_k/f_T)^2}} \quad (1)$$

$$\Delta\phi_k = \arctan(-f_k/f_T) \quad (2)$$

$$w(t) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi k} G_k \sin(2\pi f_k t + \Delta\phi_k), \quad (3)$$

con k dispari. Ci occuperemo in seguito della presenza di un offset non nullo, cioè del termine costante ($a_0/2$ nelle dispençe) pari al valore medio della forma d’onda, e del termine di fase costante, che nell’acquisizione sperimentale o è random (per acquisizioni asincrone) oppure è deter-

minato dalla strategia di sincronizzazione del generatore di funzioni con Arduino (per acquisizioni asincrone).

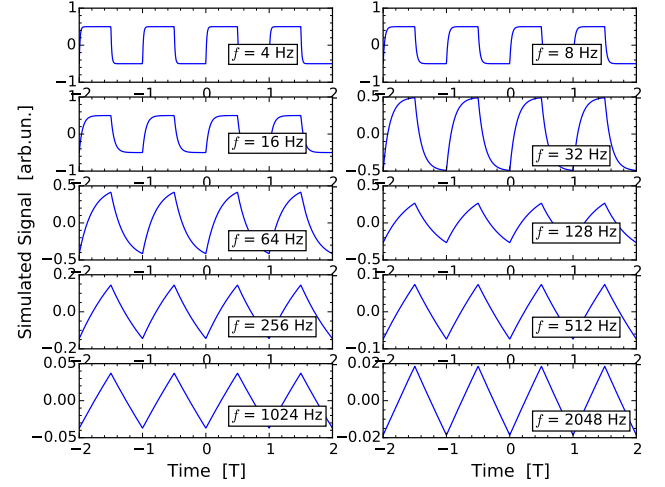


Figura 2. Simulazione dell’integratore descritto nel testo ($f_T = 48.6$ Hz) con all’ingresso un’onda quadra. I vari pannelli si riferiscono a diverse frequenze, come in legenda. Fate attenzione alla scala orizzontale, in unità di periodi $T = 1/f$, e alla scala verticale, che cambia di grafico in grafico. Gli array graficati sono composti da 1000 punti e realizzati sommando su 1000 iterazioni.

La Fig. 2 mostra l’esito della simulazione supponendo $f_T = 48.6$ Hz, cioè il valore nominale (senza incertezza) dell’integratore realizzato sperimentalmente. I vari pannelli mostrano il segnale simulato per diverse frequenze, come indicato in legenda: le frequenze scalano di un fattore due da un grafico al successivo e non corrispondono ai valori sperimentali, poiché questa figura ha lo scopo principale di illustrare l’evoluzione della forma d’onda da quadra a triangolare all’aumentare della frequenza. Fate attenzione al fatto che le scale orizzontali sono in unità di periodo $T = 1/f$ e quelle verticali sono diverse per i vari grafici.

Il risultato è in accordo con le osservazioni: a basse frequenze, $f < f_T$, la forma d’onda non viene praticamente modificata e all’uscita si ritrova il segnale inviato all’ingresso. Aumentando la frequenza si nota una deformazione della forma d’onda accompagnata da un’attenuazione dell’ampiezza e da uno sfasamento, che determinano, per $f \gg f_T$, un’uscita di forma pressoché triangolare, evidentemente sfasata di circa $|\pi/2|$ rad rispetto all’ingresso. Dal punto di vista qualitativo, già per $f \sim 10f_T$ la forma d’onda in uscita è ben approssimata da un andamento triangolare.

La Fig. 3 mostra, sovrapposti, i risultati sperimentali per tre diverse frequenze e quelli ottenuti da simulazioni. Come già sottolineato ci sono alcune differenze tra l’uscita della simulazione, realizzata come descritto sopra, e i dati acquisiti da Arduino:

1. c'è un fattore di fase costante, che vale circa $\Delta\Phi \simeq \pi$, causato dalla strategia di sincronizzazione: i dati sono infatti acquisiti a partire da un istante nel quale l'onda quadra è nel suo fronte di discesa;
2. c'è un offset dovuto alla circostanza che Arduino accetta in ingresso solo d.d.p. positive (o nulle) e che pertanto un offset era stato introdotto in ingresso;
3. c'è un fattore di scala, cioè l'onda quadra in ingresso, e di conseguenza quella in uscita, non hanno ampiezza picco-picco unitaria.

Le tre differenze possono essere facilmente sanate implementando e modificando *a mano* (e “a occhio”) alcuni parametri, cioè:

1. la forma d'onda simulata viene graficata dopo averla traslata di un semiperiodo (che corrisponde a $\Delta\Phi = \pi$), ovvero del valore necessario nel caso di acquisizioni asincrone;
2. alla forma d'onda simulata viene aggiunto un termine costante desunto dal valore medio (su un periodo) delle acquisizioni;
3. la forma d'onda simulata viene moltiplicata per un fattore che tiene conto dell'ampiezza del segnale acquisito, desunto dalle registrazioni a bassa frequenza (dove l'attenuazione è trascurabile).

Infine, è ovvio che, allo scopo di migliorare qualitativamente l'accordo tra simulazione e dati sperimentali, il valore della frequenza di taglio f_T impiegata nella simulazione può essere aggiustato all'interno dell'incertezza con cui esso è noto: le simulazioni di figura sono state calcolate ponendo $f_T = 46$ Hz, compatibile con il valore nominale atteso, basato sulla misura di R e la conoscenza di C . Naturalmente, la procedura a mano, o a occhio, potrebbe essere sostituita da un (complicato) best-fit finalizzato a individuare i valori dei parametri attraverso minimizzazione del χ^2 : tuttavia esso non è certamente necessario. Infatti, come si può facilmente osservare, la simulazione ottenuta a mano e a occhio riproduce in modo qualitativamente soddisfacente i dati sperimentali e ciò è sufficiente per i nostri scopi.

Se il tempo le permette e la vostra curiosità vi spinge a farlo, ci sono numerose altre osservazioni sperimentali nel dominio del tempo, cioè forme d'onda visualizzate all'oscilloscopio, che potete divertirvi a ricostruire. Per esempio, alcuni di voi hanno mostrato un certo stupore nel verificare come la forma d'onda in ingresso (la V_{in} , per usare la terminologia dell'esercitazione pratica) venisse “distorta” dalla presenza del circuito integratore. Questa distorsione è dovuta nel nostro modello al carattere reale del generatore di forme d'onda, cioè alla presenza di una resistenza interna ($r_G = 50$ ohm, nominale) non nulla e alla conseguente caduta di potenziale. Essa dipende dall'intensità di corrente, I_w nell'approccio fasoriale, che circola nella maglia costituita dalla serie RC. Quindi dovrebbe essere possibile ricostruire numericamente questa

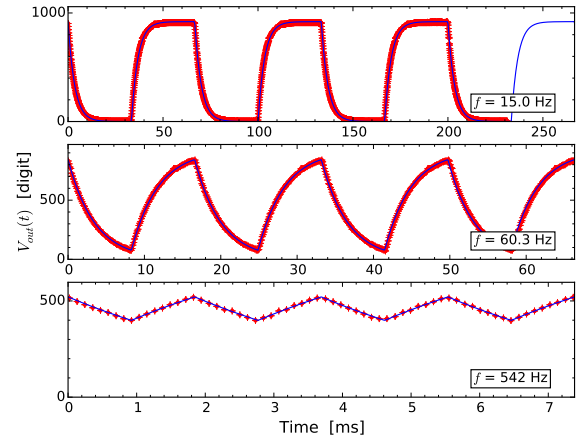


Figura 3. Dati acquisiti sperimentalmente (punti rossi con barre di errore) e simulazioni (linee continue blu) per tre diverse frequenze. Dettagli sull'acquisizione e sulla realizzazione delle simulazioni sono dati nel testo. Si noti, nel pannello superiore, la diversa durata del record sperimentale e di quello simulato.

caduta di potenziale, e di conseguenza il segnale osservato all'oscilloscopio, in funzione dei parametri di operazione. Inoltre potreste estendere questo esercizio considerando in ingresso una forma d'onda triangolare, di cui magari avete anche dei dati sperimentali, oppure esaminare un derivatore invece di un integratore, a prescindere dal fatto che abbiate, o meno, un esperimento di confronto.

V. ESERCIZIO 3: AMPIEZZA DELLA FORMA D'ONDA INTEGRATA

Questo esercizio è finalizzato a determinare l'andamento dell'ampiezza in uscita dall'integratore in funzione della frequenza f , sempre supponendo una forma d'onda quadra in ingresso. Nell'illustrazione dell'integratore studiato nel dominio del tempo abbiamo accennato alla circostanza che il segnale in uscita, in condizioni di integratore ben funzionante, può essere approssimato con il primo ordine dello sviluppo di Taylor dell'andamento esponenziale contenuto nella soluzione analitica della carica/scarica del condensatore. Tuttavia questa descrizione è necessariamente approssimativa (appunto, al primo ordine!). D'altra parte il modello dell'integratore, ovvero del filtro passa-basso, che abbiamo costruito per l'analisi nel dominio delle frequenze permette di predire facilmente tale andamento *solamente* nel caso di forme d'onda *sinusoidali*. Lo sviluppo in armoniche di Fourier può modificare questo andamento a causa della diversa attenuazione a cui sono sottoposte le varie armoniche.

Nell'esperimento svolto da me il guadagno $G(f)$ è stato misurato per l'integratore costruito come specificato in precedenza. A questo scopo è stato calcolato il rapporto tra le ampiezze picco-picco (più facili da individuare

rispetto alle ampiezze) del segnale in uscita e di quello in ingresso, entrambi monitorati con i due canali dell'oscilloscopio. Grazie all'elevata resistenza in ingresso di questo strumento è stato supposto, senza dimostrazione, che l'oscilloscopio perturbasse in maniera trascurabile il circuito. Ovviamente in sede di relazione potete anche fare un piccolo sforzo per verificare quanto questa approssimazione sia verificata e addirittura costruire un modello più raffinato, in cui tenete conto della resistenza, o impedenza, interna dell'oscilloscopio.

La simulazione è stata fatta girare per diversi valori della frequenza f dentro un intervallo di alcune decadi, grosso modo corrispondente a quello esplorato sperimentalmente. Nelle simulazioni si è supposta un'ampiezza picco-picco unitaria in ingresso, mentre quella del segnale in uscita è stata dedotta numericamente come differenza tra valore massimo e valore minimo del segnale simulato. Per ottenere previsioni affidabili si è fatto in modo che le forme d'onda simulate non presentassero spigolosità artificiose dovute a sotto-campionamento. Inoltre si è scelta $f_T = 46$ Hz sulla base dei risultati precedenti,

La Fig. 4 mostra i dati sperimentali (punti e barre di errore rossi) con sovrapposti i risultati della simulazione (linea continua blu) e l'andamento previsto per la forma d'onda sinusoidale (linea tratteggiata grigia). È evidente come il comportamento sperimentale sia diverso dalle previsioni per il caso sinusoidale e anche come esso sia qualitativamente ben riprodotto dalla simulazione.

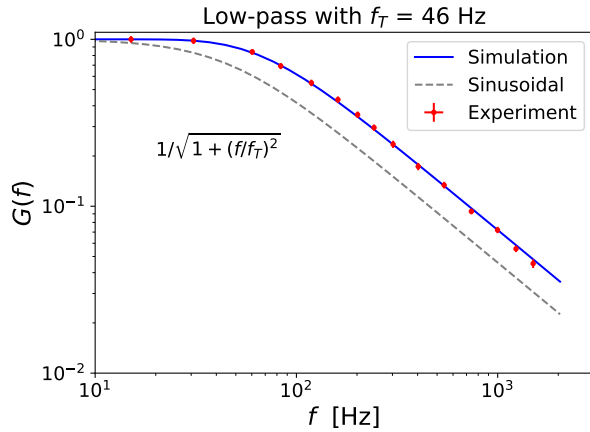


Figura 4. Guadagno G in funzione della frequenza f determinato sperimentalmente come descritto nel testo (punti e barre di errore rossi), ottenuto dalla simulazione descritta nel testo (la linea continua blu raccorda diversi punti simulati, equispaziati logaritmicamente nell'intervallo di interesse) e dalla previsione per onde sinusoidali (linea tratteggiata grigia), calcolata secondo la funzione riportata nel grafico. Per le previsioni si è supposto $f_T = 46$ Hz, compatibile con il valore sperimentale.

VI. ESERCIZIO 4: INTEGRATORE + DERIVATORE

Questo esercizio richiede di considerare il circuito composto da integratore e derivatore in cascata realizzato in laboratorio. Lo scopo è anche in questo caso quello di simulare le forme d'onda dei segnali in uscita da integratore e derivatore, rispettivamente V_A e V_B secondo la nomenclatura dell'esercitazione pratica, e di verificare il rapporto tra le loro ampiezze e l'ampiezza dell'onda quadra in ingresso, V_{in} . Quando integratore e derivatore funzionano come devono, l'uscita A avrà forma triangolare e l'uscita B quadra.

Per semplicità, in questo esercizio *non si considerano gli effetti dovuti al collegamento in cascata dei due sottocircuiti*, né quelli legati alla presenza di resistenze interne degli strumenti; naturalmente anche in questo caso nulla vieta che, in sede di relazione, costruiate un modello più raffinato. Quindi qui si suppone di avere un integratore che ha frequenza di taglio f_{TA} con in cascata un derivatore che ha frequenza di taglio f_{TB} .

Nel mio esempio ho supposto $f_{TA} = 50$ Hz e $f_{TB} = 25$ kHz; naturalmente voi siete invitati a usare i valori effettivi dei circuiti che avete montato e testato. Per determinare l'uscita in A (uscita dell'integratore) $w_A(t)$ ho impiegato in pratica le stesse relazioni di Eqs. 1-3, qui riscritte per completezza:

$$G_{A,k} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_k/f_{TA})^2}} \quad (4)$$

$$\Delta\phi_{A,k} = \arctan(-f_k/f_{TA}) \quad (5)$$

$$w_A(t) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi k} G_{A,k} \sin(2\pi f_k t + \Delta\phi_{A,k}), \quad (6)$$

Come ben sapete, l'ulteriore stadio di derivazione, con frequenza di taglio f_{TB} , introduce sulle diverse armoniche:

1. un ulteriore *guadagno* $G(f) = 1/\sqrt{1 + (f_{TB}/f)^2}$;
2. un ulteriore *sfasamento* $\Delta\phi = \arctan(f_{TB}/f)$.

Queste ulteriori modifiche delle armoniche agiscono "in cascata": l'attenuazione andrà a moltiplicare l'ampiezza delle componenti armoniche già attenuate dall'integratore e lo sfasamento andrà a sommarsi allo sfasamento prodotto dall'integratore. Detta $w_B(t)$ la forma d'onda in uscita da B, si può quindi scrivere

$$G_{B,k} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_{TB}/f_k)^2}} \quad (7)$$

$$\Delta\phi_{B,k} = \arctan(f_{TB}/f_k) \quad (8)$$

$$w_B(t) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi k} G_{A,k} G_{B,k} \cdot \sin(2\pi f_k t + \Delta\phi_{A,k} + \Delta\phi_{B,k}). \quad (10)$$

dove $G_{A,k}$ e $\Delta\phi_{A,k}$ sono quelli determinati in Eqs. 4-5. Notate che, come è ovvio, per le frequenze a cui integratore e derivatore si comportano come si deve i due

sfasamenti si annullano a vicenda, tendendo rispettivamente a $-\pi/2$ rad (integratore) e $\pi/2$ rad (derivatore), per cui in uscita da B si ritrova un'onda quadra in fase con quella in ingresso, ovviamente di molto attenuata.

Le Figs. 5, 6 mostrano i risultati, cioè le forme d'onda ricostruite in uscita rispettivamente da A e da B. Il range di frequenze f considerato parte da f_{TA} e arriva a f_{TB} . Notate che anche in queste figure l'asse orizzontale è espresso in unità di periodo T , mentre l'asse verticale cambia di grafico in grafico.

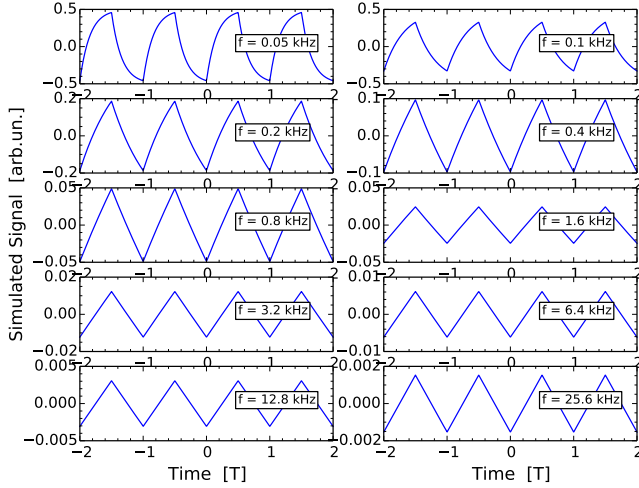


Figura 5. Simulazione del segnale in uscita dall'integratore descritto nel testo ($f_{TA} = 50$ Hz) con all'ingresso un'onda quadra. I vari pannelli si riferiscono a diverse frequenze, come in legenda. Fate attenzione alla scala orizzontale, in unità di periodi $T = 1/f$, e alla scala verticale, che cambia di grafico in grafico. Gli array graficati sono composti da 1000 punti e realizzati sommando su 1000 iterazioni.

Vediamo cosa succede per la forma d'onda simulata in uscita dal derivatore (uscita B, Fig 6). Questo sotto-circuito funziona come derivatore solo per $f \ll f_{TB}$. In effetti a basse frequenze il derivatore fa il suo mestiere, ma agisce su una forma d'onda che è praticamente quadra, dato che a queste frequenze l'integratore non integra "abbastanza": nel segnale ricostruito numericamente si vedono chiaramente le "tracce" della derivata di un'onda quadra, che per la matematica è costituita da una successione di funzioni tipo delta, separate temporalmente da mezzo periodo e dirette alternativamente verso l'alto e verso il basso. C'è poi un intervallo di frequenze (per esempio per i grafici corrispondenti a $f = 1.6$ kHz e $f = 3.2$ kHz) in cui l'uscita B riporta una forma d'onda quadra: qui sia l'integratore che il derivatore fanno il loro dovere. Se la frequenza viene ulteriormente aumentata si esce dalla condizione $f \ll f_{TB}$ e la forma d'onda in uscita dal derivatore tende a essere inalterata rispetto a quella che si trova al suo ingresso: dunque essa tende ad essere triangolare, o, se preferite, a pinna di squalo.

In maniera simile a quanto fatto per il solo integrato-

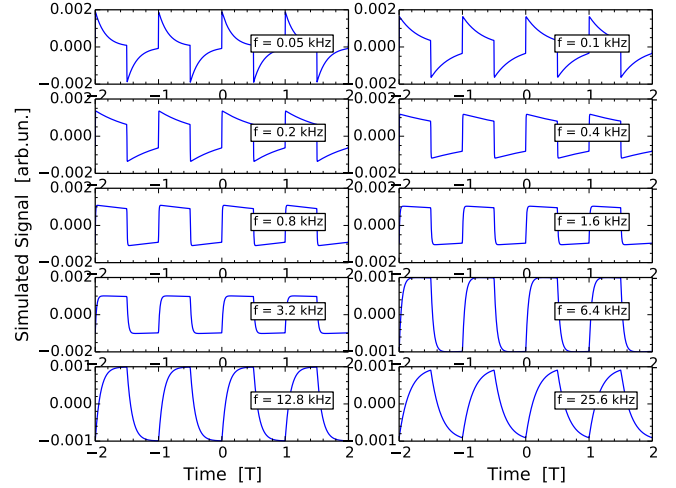


Figura 6. Simulazione del segnale in uscita dalla cascata integratore+derivatore descritta nel testo ($f_{TB} = 25$ kHz) con all'ingresso un'onda quadra. I vari pannelli si riferiscono a diverse frequenze, come in legenda. Fate attenzione alla scala orizzontale, in unità di periodi $T = 1/f$, e alla scala verticale, che cambia di grafico in grafico. Gli array graficati sono composti da 1000 punti e realizzati sommando su 1000 iterazioni.

re, anche per la cascata integratore+derivatore può essere interessante valutare numericamente l'andamento del guadagno complessivo $G_B(f)$ in funzione della frequenza f . Nel caso sinusoidale, tale guadagno dovrebbe rimanere costantemente al valore atteso $G_{B,att} = f_{TA}/f_{TB}$: poiché il comportamento dei due sotto-circuiti in cascata è, in qualche modo, opposto, la dipendenza dalla forma d'onda non dovrebbe essere particolarmente rilevante e il risultato della simulazione dovrebbe essere in sufficiente accordo con il valore atteso. Se volete, potete verificarlo numericamente!

VII. ESERCIZIO 5: ACCOPPIAMENTO AC IN INGRESSO ALL'OSCILLOSCOPIO

Come ben sapete, l'accoppiamento AC in ingresso all'oscilloscopio serve per cancellare la componente continua del segnale visualizzato. Questa possibilità è estremamente utile nei (frequent) casi in cui il segnale è costituito da una (piccola) componente variabile nel tempo, che contiene l'informazione di interesse, sovrapposta a un piedistallo costante.

Questa modalità di operazione dell'oscilloscopio può essere modellata supponendo la presenza di un condensatore di capacità C_{AC} in serie al segnale: una volta carico, esso impedisce il passaggio di corrente, sopprimendo la componente continua del segnale. Assieme alla resistenza di ingresso dell'oscilloscopio (tipicamente per noi è $r_{osc} = 1$ Mohm nominale), montata in parallelo al segnale, cioè tra segnale e linea di massa, o terra, il

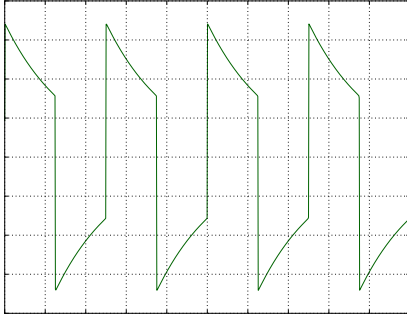


Figura 7. Simulazione della visualizzazione di un'onda quadra di frequenza $f = 40$ Hz e ampiezza 0.5 V con un oscilloscopio accoppiato in AC. L'oscilloscopio è regolato in modo da avere una velocità di sweep di 10 ms/div e un'amplificazione di 200 mV/div: osservate come l'ampiezza picco-picco visualizzata in AC sia maggiore di quella effettiva della forma d'onda a causa dell'operazione di derivata temporale. Il derivatore in ingresso all'oscilloscopio è supposto avere $f_T = 10$ Hz. è chiaro che la forma d'onda simulata potrebbe differire da quanto osservato all'oscilloscopio: è infatti possibile che sul suo schermo i segmenti verticali, che rappresentano brusche variazioni di d.d.p. in funzione del tempo, non siano (ben) visibili a causa del troppo scarso deposito di energia sullo strato di fosforo conseguente al rapido movimento del pennello elettronico.

condensatore realizza di fatto un circuito derivatore RC, ovvero un filtro passa-alto.

Una conseguenza eclatante dell'accoppiamento AC è

la forte distorsione di una forma d'onda quadra a bassa frequenza, che prende una forma caratteristica in cui i tratti orizzontali assumono andamenti di tipo esponenziale. Questa distorsione può essere facilmente ricostruita numericamente applicando attenuazione e sfasamento a un'onda quadra scritta in componenti di Fourier. La Fig. 7 simula la visualizzazione all'oscilloscopio di un'onda quadra di frequenza $f = 40$ Hz sottoposta all'azione di un filtro passa-alto con $f_T = 10$ Hz, una più o meno ragionevole stima per la frequenza di taglio del circuito di accoppiamento AC di un oscilloscopio.

Purtroppo credo che nessuno di voi abbia la disponibilità di dati sperimentali su questo punto: avrebbe potuto essere sufficiente fare la fotografia dello schermo dell'oscilloscopio con un telefonino, ma ho dimenticato di segnalarvelo! Tuttavia potete sicuramente inserire nella relazione anche una simulazione di questo tipo, dato che sicuramente avrete avuto modo di osservare il segnale all'oscilloscopio durante le vostre esercitazioni.

VIII. ESERCIZIO 6: RIPPLE IN UN TRENO DI IMPULSI

Per questo esercizio siete rimandati alla nota sulla ricostruzione della curva caratteristica del diodo pubblicata nel sito di e-learning.

IX. ESERCIZIO N

Beh, già in questa nota ci sono diversi spunti, oltre agli esercizi codificati, ma di sicuro potete far lavorare la vostra curiosità ed escogitare altre configurazioni degne di essere simulate usando la serie di Fourier!