

# Formulario di probabilità e statistica

## Insiemistica

Se  $E$  e  $F$  sono tali che  $E \cap F = \varnothing$  allora  $E$  e  $F$  sono incompatibili o disgiunti, non si possono verificare contemporaneamente

Leggi di De Morgan:

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Disgiunzioni: siano  $F, E \in \Omega$  e  $\{E, E^c\}$  partizione di  $\Omega$

- Una partizione di  $\Omega$  è composta da eventi a due a due disgiunti e la cui unione forma  $\Omega$
- $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$
- $E \cup F = (E \setminus F) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus E)$
- $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$

Formula di inclusione-esclusione:  
 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Proprietà misura di probabilità:  $P(E) = 1 - P(E^c)$

## Conteggio

### Disposizioni

Dati  $n$  elementi, il numero di sottoinsiemi formati da  $k$  elementi, in cui due sottoinsiemi differiscano tra loro per almeno un elemento o per l'ordine

- Disposizioni con ripetizione: disposizioni in cui uno stesso elemento può comparire fino a  $k$  volte nello stesso gruppo:  $n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$ .
- Disposizioni senza ripetizione: disposizioni in cui in ogni sottoinsieme i  $k$  elementi sono tutti distinti tra loro:  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$  con  $k$  fattori.
- Permutazioni: disposizioni senza ripetizione in cui  $n = k$ :  $n!$

### Combinazioni

Dati  $n$  elementi, il numero di sottoinsiemi formati da  $k$  elementi, in cui due sottoinsiemi differiscano tra loro per almeno un elemento e non per l'ordine, e uno stesso elemento può comparire fino a  $k$  volte nello stesso gruppo:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

## Probabilità condizionata

Probabilità condizionata:

- Formula di moltiplicazione:  $P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$
- $P(E^c|F) = 1 - P(E|F)$
- $P(E \cup G|F) = P(E|F) + P(G|F) - P(E \cap G|F)$

Formula delle probabilità totali:  $P(E) = P(E|F) \cdot P(F) + P(E|F^c) \cdot P(F^c)$

Formula di Bayes:  $P(F|E) = \frac{P(E|F) \cdot P(F)}{P(E)}$

## Eventi indipendenti

Due eventi  $E, F$  si dicono indipendenti se  $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ . Inoltre:

- $\{E, F\}$  indipendenti  $\iff P(E|F) = P(E) \iff P(F|E) = P(F)$
- $\{E, F\}$  indipendenti  $\iff \{E^c, F\}$  indipendenti  $\iff \{E^c, F^c\}$  indipendenti  $\iff \{E, F^c\}$  indipendenti

## Variabili aleatorie

Formula valor medio:  $E(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k \cdot p_x(x_k)$

Proprietà valor medio:

- $E(aX) = a \cdot E(x)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $X \geq Y \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$

Valor medio:  $E(g(X)) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} (g(x_k) \cdot p_x(x_k))$

Varianza:  $Var(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} ((x_k - E(X))^2 \cdot p_x(x_k))$

## Varianza

*Sia  $X$  v.a. con legge  $P_X$  e alfabeto composto da elementi  $x_k$ . Si definisce la varianza:*

$$Var(X) = \sum_{x_k} [x_k - E(X)]^2 P_X(x_k)$$

*Valgono:*

- $Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$
- $Var(X) \geq 0$ , in particolare  $Var(X) = 0 \Leftrightarrow X \equiv costante$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$ ,  $a \in \mathbb{R}$
- $Var(X + a) = Var(X)$ ,  $a \in \mathbb{R}$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \implies Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

**Def** Covarianza. *Siano  $X, Y$  v.a.. Si definisce la covarianza:*  
 $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

*Valgono:*

- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $Cov(Y, X) = Cov(X, Y)$
- $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y)$
- $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \implies Cov(X, Y) = 0$

**Def** Indipendenza.  $X \perp\!\!\!\perp Y$  se:  $P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i)P_Y(y_j) \quad \forall x_i, y_j$

- $X \perp\!\!\!\perp Y \implies Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \implies Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$

**Def** V.a. scorrelate. *Le v.a.  $X, Y$  sono dette scorrelate se  $Cov(X, Y) = 0$*

- Indipendenza  $\implies$  Scorrelazione
- Non valido il contrario

## Variabili aleatorie discrete notevoli

### Alfabeto finito: Variabili aleatorie di Bernoulli

- $X \sim Be(p)$  con  $p \in [0, 1]$
- Alfabeto  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$
- Densità discreta  $p_x(1) = p, p_x(0) = 1 - p$
- $E(X) = p \quad Var(X) = p(1 - p)$

### Alfabeto finito: Variabili aleatorie binomiali

Conta il numero di successi in uno schema di Bernoulli con  $n$  prove indipendenti, dove la probabilità di successo è  $p$

- $X \sim Bin(n, p)$  con  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$  e  $p \in [0, 1]$
- Alfabeto  $\mathcal{X} = \{0, 1, ..., n\}$
- Densità discreta  $p_x(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, k \in \mathcal{X}$
- Inoltre  $E(X) = np \quad Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

### Alfabeto infinito: Variabili aleatorie geometriche

Corrisponde al numero di prove che devo effettuare per osservare il primo successo in uno schema di Bernoulli dove il numero di prove non è necessariamente predefinito e dove la probabilità di successo è  $p$

- $X \sim Ge(p)$  con  $p \in (0, 1)$
- Alfabeto  $\mathcal{X} = \mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$
- Densità discreta  $p_x(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p, k \in \mathcal{X}$
- Inoltre  $E(X) = \frac{1}{p} \quad Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$

Variante: invece di guardare alla prova che corrisponde al primo successo si guarda il numero di fallimenti prima del primo successo:

- $X' = X - 1, X \sim Ge(p)$  con  $p \in (0, 1)$
- Densità discreta  $p_x(k) = (1 - p)^k \cdot p, k \in \mathcal{X}$
- Inoltre  $E(X) = \frac{1-p}{p} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Probabilità di lunga attesa: indica la probabilità che per il primo successo si debba aspettare più di qualcosa:  $P(X > k) = (1 - p)^k$

Alfabeto infinito: Variabili aleatorie di Poisson

Una v.al. Binomiale con  $n$  molto grande e  $p$  molto piccolo può essere approssimata da una v.al di Poisson di parametro  $\lambda = n \cdot p$ .  
Euristica:  $n > 100$ ;  $p < 0.01$ ;  $np \leq 20$

- $X \sim Po(\lambda)$  con  $\lambda > 0$
- Alfabeto  $\mathcal{X} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$
- Densità discreta  $p_x(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathcal{X}$
- Inoltre  $E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$

Vettori aleatori discreti

Siano  $X$  v.al con alfabeto  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$  e  $Y$  v.al con alfabeto  $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}$  allora per l'alfabeto  $\mathcal{V}$  del vettore aleatorio  $\underline{v}$  si ha  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

- Densità congiunta:  $p_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$
- Densità marginale  $X$ :  $p_X(x_i) = \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} p_{XY}(x_i, y_j) \quad \forall x_i \in \mathcal{X}$
- Densità marginale  $Y$ :  $p_Y(y_j) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} p_{XY}(x_i, y_j) \quad \forall y_j \in \mathcal{Y}$
- Valor medio:  $E[g(XY)] = \sum_{x_i, y_j} g(x_i, y_j) p_{XY}(x_i, y_j)$
- Valor medio:  $E(XY) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)$

Siano  $X, Y$  v.al. con alfabeti composti da elementi  $x_i$  e  $y_j$ . Allora  $X$  e  $Y$  si dicono indipendenti se:  $P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i)P_Y(y_j) \quad \forall x_i, y_j$

Variabili aleatorie assolutamente continue

**Def** Una v.a.  $X$  si dice (ass.) continua si definisce associando una densità  $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

- $f_X(x) \geq 0$  (positività)
- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$  (normalizzazione)

Valgono:

- $P(X \in [a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx$
- $P(X = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

**Def** Funzione di distribuzione.

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$
$$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$$

**Def** Valor medio v.a.c..  $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$

**Def** Varianza v.a.c..  $Var(X) = \int_{\mathbb{R}} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx$

**Def** Valor medio di una funzione  $g(X)$ , con  $X$  avente densità  $f_X$ :  
 $E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$

Variabili aleatorie continue notevoli

Variabili aleatorie uniformi

$X \sim U(a, b)$  con  $a < b$  se ha:

- densità  $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- distribuzione  $F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$
- $E(X) = \frac{b+a}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Variabili aleatorie esponenziali

Descrive la durata della vita di un fenomeno privo di memoria.

Valgono:  $X \sim Exp(\lambda)$  con densità:  $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione di distribuzione:  $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

- $P(X > T + t \mid X > T) = P(X > t)$

Variabili aleatorie gaussiane(o normali)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e densità:  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$   
 $\sigma^2$ =Varianza  
 $\sigma$ =Deviazione standard

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- $P(Z \leq x) = \Phi(x)$
- $P(|Z| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$
- $P(Z \geq x) = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$
- $P(|Z| \geq x) = 2(1 - \Phi(x)) = 2\Phi(-x)$
- $P(x \leq Z \leq y) = \Phi(y) - \Phi(x)$
- $P(\mu - 4\sigma \leq X \leq \mu + 4\sigma) \approx 1$

**Def** Gaussian standard.  $X \sim N(0, 1)$ .  
**Prop** Trasformazioni affini di v.a. normali. Sia  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $Y = aX + b$  allora  $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$   
quindi se  $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$   
Se due v.al.  $X, Y$  sono indipendenti e  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$   
 $X + Y$  allora:  
 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Teoremi Limite

**Def** Legge dei grandi numeri (LLN). Siano  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con media finita. Allora  $\overline{X}_n \rightarrow E(X_1)$

**Def** Metodo Monte Carlo.  $\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx \quad b > a$   
 $\mathcal{I} = (b - a) \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx = (b - a) E(f(x))$  con  $X = U(a, b)$

**Def** Teorema centrale del limite (CLT). Siano  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con  $E(X_1) = \mu, Var(X_1) = \sigma^2$ . Allora:  
 $\sqrt{n} \left( \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \rightarrow N(0, 1)$   
 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma \sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$   
 $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightarrow N(0, \sigma^2)$

Statistica Descrittiva

Indici di posizione

Media campionaria:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$   
Mediana:  $M = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{1}{2} (x_{n/2} + x_{(n/2)+1}) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$   
Moda: dato a cui corrisponde la frequenza assoluta massima

Indici di dispersione

Varianza campionaria:  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$   
 $p$ -esimo quantile ( $0 < p < 1$ ):  
 $q_p = \begin{cases} x_{\lfloor np \rfloor + 1} & \text{se } np \text{ non è intero} \\ \frac{1}{2} (x_{np} + x_{np+1}) & \text{se } np \text{ è intero} \end{cases}$   
con  $n$  ampiezza del campione

- 25-esimo percentile= $Q_1$ =primo quartile =  $q_{0,25}$
- 50-esimo percentile= $Q_2$ =secondo quartile (mediana) =  $q_{0,5}$
- 75-esimo percentile= $Q_3$ =terzo quartile =  $q_{0,75}$

Differenza interquantile:  $IQR = Q_3 - Q_1$   
Boxplot:

- $IQR$
- Limite del baffo inferiore =  $L = Q_1 - 1.5 \cdot IQR$
- Limite del baffo superiore =  $U = Q_3 + 1.5 \cdot IQR$
- Outliers: dati che rimangono fuori dai baffi

Statistica Inferenziale

Stimatori

Uno stimatore  $T$  si dice corretto/non distorto se  $E_{\underline{\theta}}(T) = \tau(\underline{\theta})$

Uno stimatore  $T$  si dice consistente se  $Var_{\underline{\theta}}(T) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$