Algebra Lineare e Geometria

Esercizi e Riassunto

Luca

8, Marzo 2021

Indice

Sistemi Lineari

Equazioni Lineari

$x_1 - 2x_2 = 3$ è un'equazione lineare nelle incognite x_1, x_2
$x_1^2 - 3x_2 = 0$ NON è lineare.

Sistemi Lineari

E' un insieme di n equazioni lineari che devono essere soddisfatte.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

Si dicono EQUIVALENTI se hanno esattamente lo stesso insieme di soluzioni.

Matrici

$m, n \in \mathbb{N} = 1, 2, 3, \cdots$ m righe e n colonne.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{posizione:1,2} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Moltiplicazione tra matrici

Righe per colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 + 0 \\ 2 + 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemi Lineari e Matrici

Riscriviamo ogni sistema lineare in termini di matrici.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice Incompleta}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 3 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{array}}_{\text{Matrice Completa}}$$

Matrice Quadrata

Se m = n (ovvero numero di righe = numero di colonne) la matrice è QUADRATA di ordine n.

Una matrice m · n si dice a scala (per righe) se soddisfa le seguenti proprietà:

1. Eventuali righe nulle (che contengono solo 0) si trovano in fondo alla matrice
2. Il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rg}(A) = 2$$

RANGO

Data una matrice a scala A si dice rango di A e si indica rg(A) il numero di righe non nulle di A.

Attenzione: Questa definizione di rango vale solo per le matrici a scala.

Terminologia: in una matrice a scala il primo elemento non nullo di ogni riga si chiama PIVOT

$\Longrightarrow$ il rango di una matrice a scala è il numero di pivot della matrice.

risolvo per sostituzioni successive dal basso

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 2 \\ -x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 = 6 \\ x_2 = 2 - 3x_3 = 2 + 3 = 5 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{A} \mid \underline{\mathrm{b}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

rg(A) = 2, rg(a|$\underline{\text{b}}$) = 3

Proposizione:

1. Il sistema ha soluzioni se e solo se rg(A) = rg(A|$\underline{\text{b}}$)
2. Se rg(A) = rg(A|$\underline{\text{b}}$) = n allora il sistema ha 1 sola soluzione.
3. Se rg(A) = rg(A|$\underline{\text{b}}$) < n allora il sistema ha ∞ soluzioni dipendenti da n - rg(A) variabili libere.

GAUSS

- Algoritmo di Gauss o procedimento di RIDUZIONE (a scala) di GAUSS
- Operazioni elementari sulle righe di una Matrice

1. SCAMBIO DI DUE RIGHE $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. PRODOTTO DI UNA RIGA PER UN NUMERO REALE <u>DIVERSO DA ZERO</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{moltiplico per } \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. SOSTITUZIONE DELLA RIGA i-esima con la somma della riga i-esima e della riga j-esima moltiplicata per un numero reale β

Se $\beta = 0$ non sto facendo nulla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{2^a \text{ riga} \to 2^a \text{ riga - } 1^a \text{ riga}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{2^a \text{ riga - } 1^a \text{ riga}}{\xrightarrow{SCAMBIO}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; 3^a \text{ riga} \to 3^a \text{ riga - } 2(1^a \text{ riga})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{2^a \text{ riga} \to 2^a \text{ riga - } 1^a \text{ riga}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

<u>Osservazioni:</u>

1. Le operazioni da eseguire per ridurre una matrice a scala **non** sono univocamente determinate.
2. Tutte le <u>forme ridotte</u> di una matrice cioè le matrici a scala che otteniamo attraverso l'algoritmo di Gauss a partire dalla matrice A hanno lo stesso rango.
3. (IMPORTANTE) Se $(A \mid \underline{b})$ è la matrice completa di un sistema lineare allora le operazioni elementari sulle righe di $(A \mid \underline{b})$ producono una matrice $(A' \mid \underline{b}')$ che è associata ad un sistema equivalente
   (a) Scambio di 2 righe $\Leftrightarrow$ Scambiare 2 equazioni (l'ordine delle equazioni in un sistema è irrilevante)
   (b) Prodotto di una riga per un numero reale $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$ Prodotto di un'equazione per un numero reale $\alpha \neq 0$ (mi da un'equazione equivalente)
   (c) i-esima riga

Esempio:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+z=1 \\ 3y+z=1 \end{cases}$$

$$(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2ª riga} \leftarrow \text{2ª riga - 1ª riga}]{} \xrightarrow[\textbf{2ª riga e 3ª riga}]{SCAMBIO} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3y+z=-1 \\ +z=+1 \end{cases}$$

Che posso risolvere per sostituzioni successive dal basso

$$\begin{cases} x=1-y-z=1-0-1=0 \\ 3y=1-z=0 \to y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\text{rg}(\text{A}') = 3$$

$$\text{rg}(\text{A}' \, | \underline{\text{b}}')$$

$$\Rightarrow 1 \text{ sola } \underline{\text{soluzione}} \text{ ovvero } (0,0,1)$$

Studiare il sistema al variare di un parametro

Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1+x_2+(2\lambda-1)x_3=8 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+4x_3=3(\lambda+1) \end{cases}$$

$$(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2\lambda-1 & 8 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 4 & 3\lambda+3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2ª riga = 2ª riga - } \lambda\text{(1ª riga)}]{\text{3ª riga = 3ª riga - 1ª riga}}$$

$$(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2\lambda-1 & 8 \\ 0 & \boxed{1-\lambda} & 1-2\lambda^2+\lambda & 1-8\lambda \\ 0 & \lambda-1 & \boxed{5-2\lambda} & 3\lambda-5 \end{array}\right)$$

Guardare <u>solo</u> il primo elemento di ogni riga, cambiato di segno.

$$\forall \lambda : \underset{\lambda \neq 1}{1-\lambda \neq 0} \quad \text{e} \quad \underset{\lambda_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{-1\pm7}{4}=-2e\frac{3}{2}}{2\lambda^2+\lambda-6 \neq 0}$$

$$\forall \lambda \neq 1, -2, \tfrac{3}{2} \quad \text{rg}(\text{A}') = \text{rg}(\text{A}' \mid \underline{\text{b}}') = 3 = n \text{ incognite}$$

$\Rightarrow$ il sistema ha 1° sola soluzione

Cosa succede se $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = \frac{3}{2}$?

Se $\lambda = 1$ la matrice rg(A′) = rg(A′ | <u>b′</u>) diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & {}^{6}0 & -7 \end{array}\right)$$

Corrisponde a 0 = -7 che non è mai soddisfatta

$\Rightarrow$ Per $\lambda = 1$ il sistema non ha soluzioni

Per $\lambda = -2$ l'ultima riga della matrice ridotta diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \big| 6 \end{pmatrix}$$

Dunque il sistema non ha soluzioni. Similmente se $\lambda = \frac{3}{2}$, l'ultima riga di rg(A′ | b̲′) diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \big| -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$

dunque anche in questo caso il sistema non ha soluzioni.

Vettori

Dimensioni

3D	Effetto tridimensionale, profondità dei corpi, spazio fisico in cui viviamo
2D	lo schermo è piatto
1D	Linea, oggeto geometrico di dimensione 1
0D	Punto

Definiamo $\mathbb{R}^2$

Operazioni che sappiamo fare con i numeri reali:

- somma di 2 numeri reali
- prodotto di un numero reale per un altro numero reale

Definiamo:

$\mathbb{R}^2 = \{(\text{a, b}) \mid \text{a, b} \in \mathbb{R}\}$COPPIE ORDINATE DI NUMERI REALI

$\boxed{\text{SOMMA}}$ (a, b) + (a′, b′) = (a + a′ , b + b′)

$\boxed{\text{PRODOTTO PER I NUMERI REALI}}$ $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(\text{a, b}) = (\alpha\text{a}, \alpha\text{b})$

SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$

SOMMA e PRODOTTO

COMMUTATIVA E ASSOCIATIVA SODDISFATTE

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

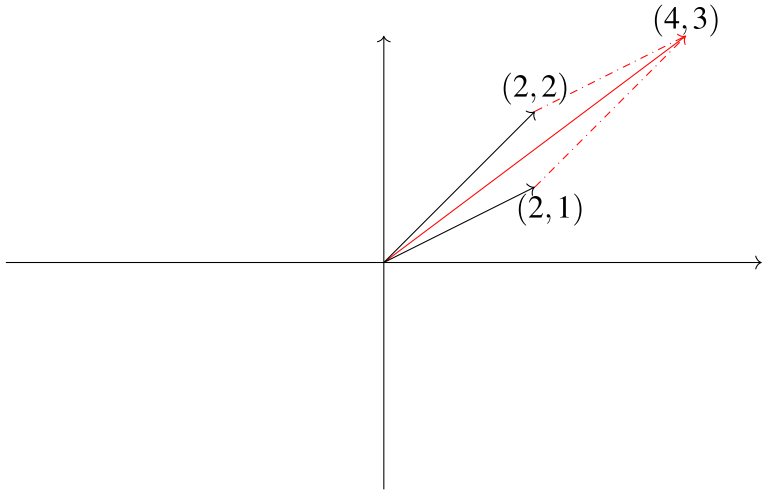
$\exists$ elemento neutro (rispetto alla somma)

$\underset{(0,0)}{0\mathbb{R}^2}$ infatti $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$(0,0) + (a,b) = (a,b) + (0,0) = (a,b)$

VETTORE

Def: 2.1 (Vettore)**.** Diremo che $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari è uno **SPAZIO VETTORIALE**.
Chiameremo **VETTORI** gli elementi di $\mathbb{R}^2$, **scalari** gli elementi di $\mathbb{R}$.
Il vettore (0,0) si chiama **VETTORE NULLO**.

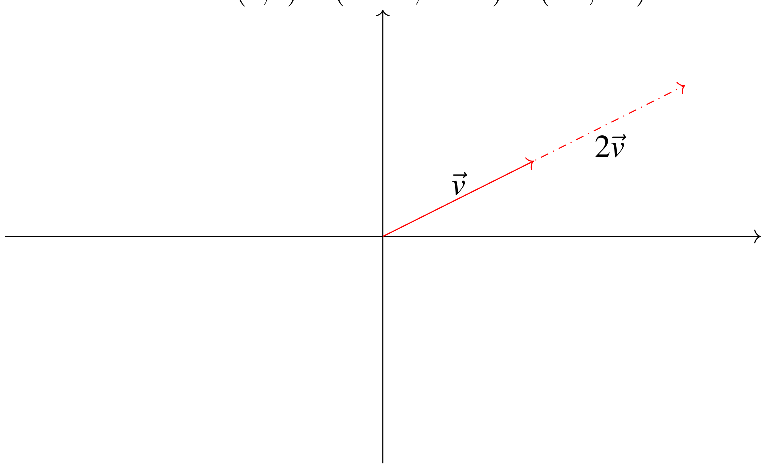


Somma tra due vettori

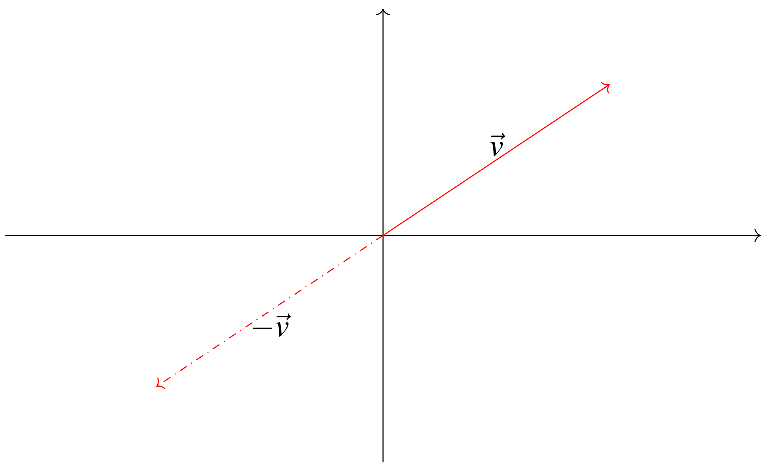
Somma di vettori: $(2,1)+(2,2) = (2+2,1+2) = (4,3)$

Prodotto scalare per vettore: $2(2,1) = (2\cdot 2, 1\cdot 2) = (4,2)$

Verso opposto di un vettore: $-1(3,2) = (-1\cdot 3, -1\cdot 2) = (-3,-2)$



Il doppio di un vettore

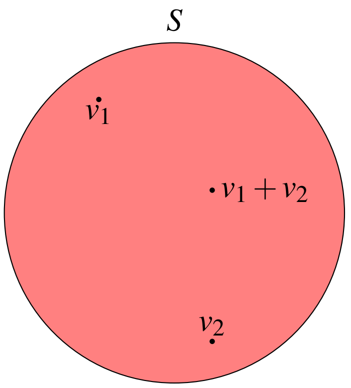


L’inverso di un vettore

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Def: 2.2 (Sottospazio Vettoriale)**.** Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}^n$ se è non vuoto e soddisfa le seguenti 2 proprietà:

1. è chiuso rispetto alla somma cioè $\forall v_1, v_2 \in S \quad v_1 + v_2 \in S$
2. è chiuso rispetto al prodotto per scalari cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in S, \quad \alpha v \in S$



$v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$0v = (0 \cdot x_1, \dots, 0 \cdot x_n) = (0, \dots, 0)$
CONDIZIONE NECESSARIA:
Quindi ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ contiene $0\mathbb{R}^n$

Domande:

1. Un sottospazio è per definizione non vuoto; Può contenere un solo elemento?
2. In generale quanti elementi contiene?

Controesempio:
$T = \{(1,1,1),(2,1,4)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
NON può essere un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ perchè non contiene (0,0,0)
$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$
NON può essere un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ perchè non contiene $0\mathbb{R}^2 = (0,0)$

Domanda: $S = 0\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$?

- E' chiuso rispetto alla somma? $0\mathbb{R}^n + 0\mathbb{R}^n = 0\mathbb{R}^n$
- E' chiuso rispetto al prodotto per scalari? $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot 0\mathbb{R}^n = 0\mathbb{R}^n \in S$

E' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$
$\{0\mathbb{R}^n\}$ contiene un solo elemento e si chiama SOTTOSPAZIO BANALE.
$\boxed{\mathbb{R}^2 \subsetneq \mathbb{R}^3}$ (non posso confrontare coppie con terne). NON solo NON è uno spazio vettoriale, ma non è neanche un sottoinsieme.

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2+y=0}_{y=-x^2}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$?

ha infiniti elementi del tipo $(x,-x^2), x \in \mathbb{R}$

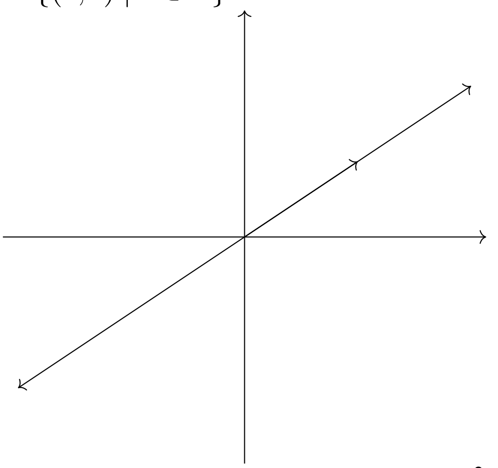
MA non è un sottospazio perchè non è chiuso, ad esempio, rispetto al prodotto per scalari. Infatti:

$(1,-1) \in P$ $\underline{\text{MA}} - (1,-1) = \underbrace{(-1,1)}_{y=-x^2 \text{ se } x=-1 \Rightarrow y=-(-1)^2 \Rightarrow y=-1} \notin P$

Esempio:

$S = \{(x, \boxed{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \boxed{x=y}\}$

$= \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$



<u>CHIUSO</u> RISPETTO ALLA SOMMA

<u>CHIUSO</u> RISPETTO AL PRODOTTO PER SCALARI

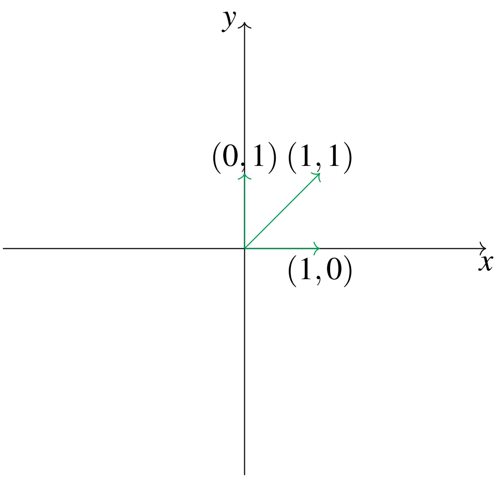
$\Rightarrow$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

<u>Esercizio:</u> Stabilire se $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

Notiamo che $(1,0) \in S$ perchè soddisfa $\underbrace{1}_{x} \cdot \underbrace{0}_{y} = 0$, analogamente $(0,1) \in S$ perchè soddisfa $0 \cdot 1 = 0$

MA $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin S$ perchè $1 \cdot 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ S <u>non</u> chiuso rispetto alla somma , <u>non</u> è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$



$xy = 0$

$x = 0 \text{ oppure } y = 0$

$S = \underbrace{\{(x,y) \mid x=0\}}_{sottospazio} \cup \underbrace{\{(x,y) \mid y=0\}}_{sottospazio}$

Se

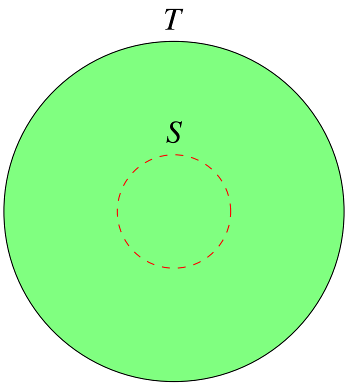
(1,1) non appartiene non si trova sull'origine sull'asse x e y

<u>MA</u> la loro unione NON è un sottospazio perchè <u>non</u> è chiusa rispetto alla somma

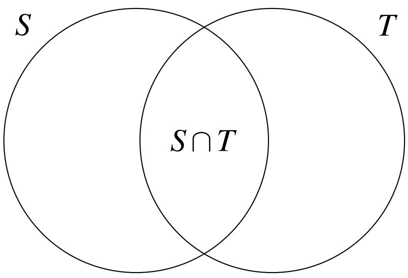
prendiamo (solo una delle due rette):
$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$
è facile verificare che questo è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Infatti se prendiamo:
$(0,a),(0,b) \in S_1 \quad (0,a)+(0,b) = (0,a+b) \in S_1$
$\Rightarrow S_1$ chiuso rispetto alla somma.
analogamente
$\alpha \in \mathbb{R}, (0,a) \in S_1, \alpha(0,a) = (0,\alpha a) \in S_1 \Rightarrow S_1$ chiuso rispetto al prodotto per scalari.

Proposizione:
Siano S,T due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}$, Allora $S \cup T$ è un sottospazio $\underset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ $S \subseteq T$ oppure $T \subseteq S$ (contenuto)

Dim.
Se $S \subseteq T$, $S \cup T = T$



Analogamente se $T \subseteq S$ $S \cup T = S$ che è un sottospazio per ipotesi supponiamo che $S \subsetneq T, T \subsetneq S$ e mostriamo che in tal viceversa caso $S \cup T$ non può essere un sottospazio.



$S \underset{\text{intersecato}}{\cap} T$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$?
Si lo è, perchè è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per scalari.

Gli esempi fatti mostrano che è possibile descrivere un sottospazio mediante equazioni lineari.

Esempio 1:
$U = \{(\boxed{x},y,\boxed{z}) \in \mathbb{R}^3 \mid \boxed{x=y}, \boxed{z=2y}\}$
$= \{(\underbrace{y,y,2y}_{y(1,1,2)}) \in \mathbb{R}^3\}$ Ogni vettore di U è un multiplo di (1,1,2)

Esempio 2:
$W = \{(\boxed{x},y,\boxed{z},t) \in \mathbb{R}^4 \mid \boxed{x=-y}, \boxed{z=2t}\}$
$= \{(-y,y,2t,t) \mid y,t \in \mathbb{R}\}$ (mi aspetto che $W \underset{\text{"assomiglia"}}{\simeq} \mathbb{R}^2$)
$y(-1,1,0,0)+t(0,0,2,1)$

Ho descritto tutti gli ∞ elementi di W "in funzione" di soli due.

COMBINAZIONE LINEARE

Def: 2.3 (Combinazione Lineare)**.** Siano $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ Si chiama **COMBINAZIONE LINEARE** di $v_1,\dots,v_n$ ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ della formula

$$v = \underbrace{\alpha_1}\, v_1 + \cdots + \underbrace{\alpha_k}\, v_k \text{ con } \alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}$$

con α_1 e α_k coefficienti della combinazione lineare

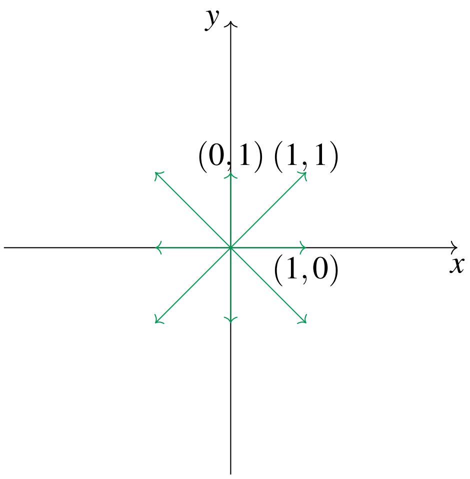
Es: Prendo due vettori
$v_1 = (1,0,2) \quad v_2 = (-1,3,2) \in \mathbb{R}^3$
$v = 3(1,0,2) - 2(-1,3,2)$ è una combinazione lineare di v_1, v_2
$0\mathbb{R}^3 = 0v_1 + 0v_2$ è sempre una combinazione lineare
Nell'esempio 2, qui sopra a pag.12, ho mostrato che $\boxed{\text{ogni}}$ vettore di W è combinazione lineare dei vettori (-1,1,0,0) e (0,0,2,1)

Generatori

Def: 2.4 (Generatori)**.** un sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^n$ si dice generatore dai vettori $v_1,\dots,v_k$ se ogni vettore $v \in S$ si scrive come combinazione lineare di $v_1,\dots,v_k$

Esempio:
W è generato da (-1,1,0,0) e (0,0,2,1) o, equivalentemente, dico che (-1,1,0,0) e (0,0,2,1) sono **GENERATORI** di W.
Nota: Quando parlo di sottospazi di $\mathbb{R}^n$ intendo anche $\mathbb{R}^n$. Se voglio escludere $\mathbb{R}^n$ e lo spazio banale dico che il sottospazio è **PROPRIO**.

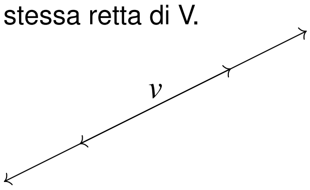
Domanda: Con quali vettori è possibile generare $\mathbb{R}^2$?
Possiamo generare $\mathbb{R}^2$,con i vettori (1,0) e (0,1). Infatti $\forall v \in \mathbb{R}^2$ v = (a,b) = a(1,0) + b(0,1) con a,b $\in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \{(1,0)(0,1)\}$ generano $\mathbb{R}^2$



Riesco a riempire tutto il piano, riesco a riempire di vettori tutto il piano. E' per questo che (0,1) e (1,0) funzionano.

Domanda: E' possibile generare $\mathbb{R}^2$ con 3 vettori?
Se i primi due generano $\mathbb{R}^2$, allora il terzo va bene.

Domanda: E' possibile generare $\mathbb{R}^2$ con un solo vettore?
NO,perchè dato $v \neq 0$ i vettori della forma αv con $\alpha \in \mathbb{R}$ sono vettori che giacciono sulla stessa retta di V.



Oss. Per generare $\mathbb{R}^2$ servono almeno 2 vettori.

Domanda: Bastano due vettori qualsiasi?
$\boxed{\text{NO}}$, Non devono essere allineati cioè non devono essere uno multiplo dell'altro. (perchè resterei sempre sulla stessa retta)

Domanda: Cosa succede nel caso di $\mathbb{R}^3$?
Un vettore solo non basta.
Domanda: Due vettori non allineati bastano a generare $\mathbb{R}^3$?
Riesco mediante combinazioni lineari a generare tutti i vettori del piano individuato dai due vettori, ma non riesco a trovare nessun vettore che esce dal terzo piano.
2 vettori $\boxed{\text{NON}}$ bastano a generare $\mathbb{R}^3$. Non riescono ad avere tutte le possibili somme. Ne servono almeno 3.
Per esempio: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

SOTTOSPAZIO GENERATO

Def: 2.5 (Sottospazio generato)**.** Siano $v_1,\dots,v_k$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Si chiama SOTTOSPAZIO GENERATO da $v_1,\dots,v_k$ e si indica con $< v_1,\dots,v_k >$ l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari di $v_1,\dots,v_k$ cioè:

$$< v_1,\dots,v_k >= \underbrace{\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}}_{\alpha_i v_1+\dots+\alpha_k v_k}$$

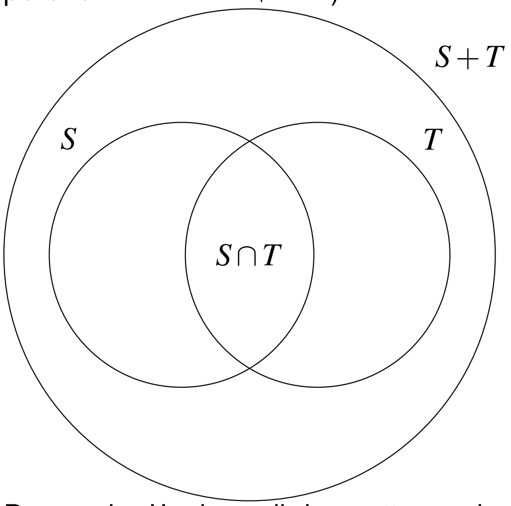
Oss. $< v_1,\dots,v_k >$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$
Osserviamo prima di tutto che $0\mathbb{R}^n = 0v_1 + \dots + v_k \in S$.

SOMMA DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

Def: 2.6 (Somma di Sottospazi Vettoriali)**.** Siano S,T sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Si chiama **SOMMA** di S e T il sottoinsieme:

$$S+T\{v=s+t \mid s \in S, t \in T\}$$

Oss.1: $S, T \subset S+T$ infatti ogni elemento di S si può pensare come $t = 0\mathbb{R}^n + t \in S+T$
Questo è equivalente a dire che $\boxed{\underbrace{S \cup T}_{\text{è costituito dagli elementi di S e dagli elementi di T.}} \subset S+T}$
Oss.2: In particolare $0\mathbb{R}^n \in S \cap T$ certamente appartiene a $S+T =$ (Anche perchè $0\mathbb{R}^n = 0\mathbb{R}^n + 0\mathbb{R}^n$)



$\boxed{S \cap T \subseteq S \cup T \subseteq S+T}$

Domanda: L'unione di due sottospazi coincide con la loro somma?NO!
Prop.: La somma di due sottospazi è un sottospazio.

$\boxed{\underbrace{S \cup T \subsetneq S+T}_{\text{non sono la stessa cosa}}}$ $\boxed{S+T \text{ è } \mathbb{R}^2}$ $\boxed{S \cup T \text{ è l'unione degli assi}}$

Abbiamo visto prima che: $\boxed{S+T = < S \cup T >}$

Esercizio: Stabilire se i vettori (0,0,1),(2,1,0),(1,1,1) generano $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento 1: Devo capire se ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come una combinazione lineare di (0,0,1),(2,1,0),(1,1,1) cioè se $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ esistono dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tale che $(a,b,c) = \alpha(0,0,1) + \beta(2,1,0) + \gamma(1,1,1) \Leftrightarrow (a,b,c) = (2\beta+\gamma, \beta+\gamma, \alpha+\gamma)$
Sistema lineare nelle incognite α, β, γ

$$\begin{cases} 2\beta+\gamma = a \\ \beta+\gamma = b \\ \alpha+\gamma = c \end{cases} \quad \text{1ª equazione - 2ª equazione} \rightarrow \begin{cases} \beta = a-b \\ \gamma = b-\beta = b-a+b = 2b-a \\ \alpha = c-\gamma = c-2b+a \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$(a,b,c) = (\underbrace{c-2b+a}_{\alpha})(0,0,1) + (\underbrace{a-b}_{\beta})(2,1,0) + (\underbrace{2b-a}_{\gamma})(1,1,1)$$

$\Rightarrow$ I vettori (0,0,1),(2,1,0),(1,1,1) generano $\mathbb{R}^3$.

Linearmente Indipendente

Def: 2.7 (Linearmente Indipendente)**.** k vettori $v_1,\dots,v_k$ di $\mathbb{R}^n$ si dicono linearmente INDIPENDENTI se l'unico modo di scrivere il vettore nullo come loro combinazione lineare è a coefficienti nulli. In caso contrario i vettori si dicono linearmente DIPENDENTI.

Riflettiamo: E' sempre vero che
$0v_1+0v_2+\cdots+0v_k=0\mathbb{R}^n$
Non è detto che questo sia l'unico modo di scrivere $0\mathbb{R}^n$ come combinazione lineare di $v_1,\dots,v_k$.
Es. $v_1=(1,0,0)\quad v_2=(0,1,0)\quad v_3=(2,1,0)$
$2(1,0,0)+(0,1,0)-(2,1,0)=(0,0,0)$
$\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI.
Invece
$(0,0,0)=\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)=(\alpha,\beta,0)\Leftrightarrow \alpha=0,\beta=0$
$\Rightarrow \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Guardiamo la definizione più da vicino

$\boxed{k=1}$ Un vettore v_1 è LINEARMENTE INDIPENDENTE se posso scrivere

$$0\mathbb{R}^n=\underbrace{\alpha}_{0}v_1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{0\mathbb{R}^n}\cdot 0\mathbb{R}^n=\frac{1}{\cancel{\alpha}}\cancel{\alpha}v_1=\boxed{v_1}$$

cioè $\boxed{\text{un vettore}}$ v è linearmente indipendente $\underset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ $v\neq 0\mathbb{R}^n$

$\boxed{k=2}$ 2 vettori v_1,v_2 sono linearmente DIPENDENTI se posso scrivere $0\mathbb{R}^n$ come loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli, cioè
$0\mathbb{R}^n=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2\quad \frac{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}}{\text{con}(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)}$
Per fissare le idee supponiamo che sia $\alpha_1\neq 0$ allora
$\Leftrightarrow v_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}v_2$ uno è multiplo dell'altro (giacciono sulla stessa retta).

$\boxed{\text{Equivalentemente, 2 vettori si dicono linearmente indipendenti se \underline{non} sono uno multiplo dell'altro.}}$

$\boxed{\text{k qualsiasi}}$ $v_1,\dots,v_k$ sono linearmente DIPENDENTI se posso scrivere
$0\mathbb{R}^n=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k\quad \alpha_i\in\mathbb{R}$ con $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\neq(0,\dots,0)$
Per fissare le idee sia $\alpha\neq 0\Leftrightarrow v_1=\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}v_2-\cdots-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}v_k\Leftrightarrow$ uno di essi è combinazione lineare degli altri $\Leftrightarrow v_1\in<v_2,\dots,v_k>$
Oss. Mettendo insieme le definizioni di vettori linearmente indipendenti e di sottospazio generato da k vettori possiamo dire che

$$<v_1,\dots,v_k>=<v_1,\dots,v_{k-1}>\Leftrightarrow\{v_1,\dots,v_k\}$$

sono linearmente dipendenti (se v_k è combinazione lineare degli altri.) In altre parole un insieme di generatori si può rimpicciolire $\underset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow}$ tali generatori sono linearmente dipendenti.

Esempio: Consideriamo il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

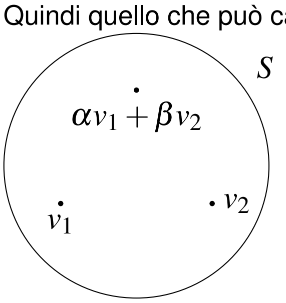
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

Osserviamo che : $(1,0,0) \notin S$
$(0,1,0) \notin S$
$(0,0,1) \notin S$

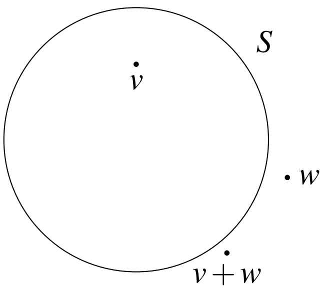
$$S = \{ \underbrace{(2y-z,y,z)}_{y(2,1,0)+z(-1,0,1)} \in \mathbb{R}^3\} = <(2,1,0),(-1,0,1)>$$

In particolare questo mostra che può capitare che $v_1, v_2 \notin S$ ma $2v_1 + v_2 \in S$

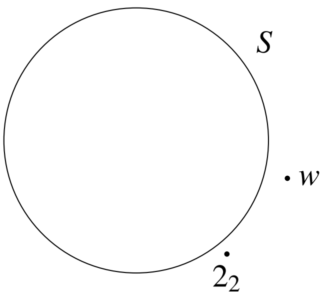
Quindi quello che può capitare, dato un sottospazio S è:



CHIUSO!



$v \in S$
$w \notin S$
$v + w \notin S$



Può capitare che $w_1 + w_2 \in S$ oppure $w_1 + w_2 \notin S$

Oss. Se $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme che non è un sottospazio NON posso parlare di generatori di V.

Certo posso considerare il sottospazio generato da V cioè $<V>$.

BASE

Def: 2.8 (Base)**.** Dato un sottospazio vettoriale $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice BASE di S, un insieme di generatori di S linearmente indipendenti.
Alla luce di quanto detto finora osserviamo che una base è un insieme minimale di generatori.

Dimensione

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.1.** *Dato uno spazio vettoriale S di $\mathbb{R}^n$ ogni base di S ha la stessa cardinalità (cioè lo stesso numero di elementi). Chiamiamo DIMENSIONE di S, il numero di elementi di ogni sua base che indicheremo con dim S.*

Esempi: Una base di $\mathbb{R}^2$ è $\{(1,0),(0,1)\}$ infatti:

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b) = a(1,0) + b(0,1)$
- $\{(1,0),(0,1)\}$ sono linearmente indipendenti perchè $\boxed{\text{non}}$ sono uno multiplo dell'altro.

$\Rightarrow= \{(1,0),(0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim \mathbb{R}^2 = 2$
A questa base di $\mathbb{R}^2$ diamo un nome.
La chiamiamo BASE CANONICA di $\mathbb{R}^2$
Attenzione! Una base si intende ordinata.
Quindi $\{(0,1),(1,0)\}$ è un'altra base di $\mathbb{R}^2$ (diversa dalla base canonica).
Esercizio: Consideriamo i seguenti vettori $\mathbb{R}^4$:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = (1,1,0,1), v_2 = (1,1,0,0), v_3 = (0,0,0,0)\\
&v_4 = (2,2,0,3), v_5 = (1,0,1,1), v_6 = (2,0,2,0)\\
&v_7 = (1,7,3,2)
\end{aligned}
$$

Problema: generano $\mathbb{R}^4$? Estrarre una base.
Svolgimento: Sappiamo che i vettori (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) generano $\mathbb{R}^4$.
Basta vedere se questi 4 vettori sono generati da $v_1, v_2, \dots, v_7$
Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
v_1 - v_2 &= (0,0,0,1)\\
v_2 &= (1,1,0,0)\\
v_6 &= (2,0,2,0) \Leftarrow (1,0,1,0)\\
v_7 - 2(0,0,0,1) &= (1,7,3,0)\\
(1,7,3,0) - (1,1,0,0) &\,{=}18(0,6,3,0)
\end{aligned}
$$

$$(1,0,0,0) \stackrel{?}{=} a(1,1,0,0)+b(1,0,1,0)+c(0,6,3,0)$$
$$= (a+b, a+6c, b+3c, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+6c=0 \\ b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6c \\ b=-3c \\ -9c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=-\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$v_2-(1,0,0,0)=(0,1,0,0)$$
$$(1,0,1,0)-(1,0,0,0)=(0,0,1,0)$$

- Cosa significa "estrarre" una base di un insieme di generatori?

Base = insieme di generatori linearmente indipendenti.
Supponiamo che $\{v_1,\dots,v_k\}$ siano generatori di un sottospazio s di $\mathbb{R}^n$ cioè $S=<v_1,\dots,v_k>$. $\{v_1,\dots,v_k\}$ è una base di S? cioè $\{v_1,\dots,v_k\}$ sono linearmente indipendenti?

$\boxed{\text{NO}}$
Uno di essi, diciamo v_k, è combinazione lineare degli altri.
In tal caso:

$\boxed{\text{SI}}$
Ho trovato una base.

$$S=<v_1,\dots,v_{k-1},v_k>= \underbrace{<v_1,\dots,v_{k-1}>}_{\text{generano S , sono linearmente indipendente?}} \quad ?$$

$\boxed{\text{NO}}$
$\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$sono lin. ind.
$\Leftrightarrow$ Uno di essi è comb. lin. degli altri
$\Rightarrow$ lo scarto.

$\boxed{\text{SI}}$
$\Rightarrow \{v_1,\dots,v_{k-1}\}$è una base di S.

Itero il procedimento finchè non trovo un insieme minimale di generatori cioè un insieme di generatori di S lin. indipendenti (una base)
Torniamo all'esercizio :
Trovare base, ovvero dai 7 vettori dati, trpvarne 4 che generano $\mathbb{R}^4$ e sono linearmente indipendenti e quindi una base.
$\mathbb{R}^4=<\boxed{v_1},\boxed{v_2},v_3,v_4,\boxed{v_5},v_6,\boxed{v_7}>$

$$\boxed{v_1}=(1,1,0,1), \boxed{v_2}=(1,1,0,0), v_3=(0,0,0,0)$$
$$v_4=(2,2,0,3), \boxed{v_5}=(1,0,1,1), v_6=(2,0,2,0)$$
$$\boxed{v_7}=(1,7,3,2)$$

$$v_4 \overset{?}{\in} < v_1, v_2 > \Leftrightarrow (2,2,0,3) = a(1,1,0,1) + b(1,1,0,0) = (a+b, a+b, 0, a)$$
$$a = 3, b = -1 \Rightarrow \in < v_1, v_2 >$$
$$v_5 \overset{?}{\in} < v_1, v_2 > \Leftrightarrow (1,0,1,1) = \alpha(1,1,0,1) + \beta(1,1,0,0) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta, 0, \alpha)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases}$$
$$v_5 \notin < v_1, v_2 > \Leftrightarrow v_5 \text{ è lin. indip. da } v_1, v_2$$
$$v_6 \overset{?}{\in} < v_1, v_2, v_5 >$$
$$(2,0,2,0) \overset{?}{=} a(1,1,0,1) + b(1,1,0,0) + c(1,0,1,1) = (a+b+c, a+b, c, a+c)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 2 \\ a+b = 0 \\ c = 2 \\ a+c = 0 \end{cases} \qquad \Leftarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \\ a = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow (2,0,2,0) \in < v_1, v_2, v_5 >$$
$$v_7 \overset{?}{\in} < v_1, v_2, v_5 >$$
$$(1,7,3,2) \overset{?}{=} a(1,1,0,1) + b(1,1,0,0) + c(1,0,1,1) = (a+b+c, a+b, c, a+c)$$
$$c \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 1 \\ a+b = 7 \\ c = 3 \\ a+c = 2 \end{cases} \qquad a+b+c = 10$$
$$(1,7,3,2) \notin < v_1, v_2, v_5 > \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_5, v_7\} \text{sono linearmente indipendenti} \Rightarrow < v_1, \dots, v_7 > = < v_1, v_2, v_5, v_7 > = \mathbb{R}^4$$

Esempio: Sia $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$
Osserviamo che (1,1,0,0) $\in S$. Completare $\{(1,1,0,0)\}$ in una base di S. (capiamo che (1,1,0,0) appartiene ad S perchè se lo sostituiamo nell'equazione viene = 0).
Osservo subito che $S \neq \mathbb{R}^4$ perchè, ad esempio, (1,0,0,0) $\notin S$ (lo capiamo perchè sostituendolo nell'equazione non viene = a 0).

$S \boxed{\subsetneq \mathbb{R}^4}$ sto dando per buono che S è un sottospazio (sarebbe da verificare).
$dim S \leq 3$
$(0,1,1,0) \in S$ ed è lin. indip. da $(1,1,0,0)$ perchè non è un suo multiplo.
$(0,0,1,1) \in S$. è lin. indip. da (1,1,0,0) e (0,1,1,0)?
$\alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) = (\dots, 0)$ $\boxed{\text{SI}}$ sono vettori lin. indipendenti in S
$\Rightarrow \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1)\}$ base di S.
$dim S \leq 3 \Rightarrow$ Avrei potuto procedere cercando prima un insieme di generatori di S e poi "estraendo" da esso una base.

$$S = \{(x,y,z,t) \mid x - y + z - t = 0\}$$
$$S = \{\boxed{(x,y,z,x-y+z)} \mid \boxed{x - y + z - t = 0}\}$$

$S = \{(x,y,z,x-y+z) \in \mathbb{R}^4\} = \underbrace{<(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)>}_{\text{sono lin. ind. ?}}$

$x(1,0,0,1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,1)$

$(1,0,0,1)$ è lin. indip. perchè non nullo

$(1,0,0,1) e (0,1,0,-1)$ sono lin. indip. perchè non sono uno multiplo dell'altro

$(0,0,1,1) \overset{?}{\in} <(1,0,0,1),(0,1,0,-1)> \boxed{\text{NO}}$

$\Rightarrow \{(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)\}$ sono lin. indip.

$\Rightarrow$ individuo una base di S

$\Rightarrow dim S = 3$

Abbiamo visto che ci sono (almeno) 2 modi di costruire una base di un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^4$

1. A partire da un insieme di vettori lin. indipendenti

Aggiungo uno alla volta, vettori lin. indipendenti dai precedenti finchè non trovo un insieme di generatori.

COMPLETAMENTO

2. A partire da un insieme di generatori

Elimino uno alla volta i generatori lin. indipendenti dagli altri finchè non trovo un insieme di vettori lin. indipendenti.

ESTRAZIONE

$\boxed{\text{Problema}}$ Come si fa a capire se 2 sottospazi di dimensione 2 $S =< v_1, v_2 >, T =< w_1, w_2 >$ coincidono?

Esempio: $\{(0,a,b,0) \in \mathbb{R}^4\} = S =< (0,1,0,0),(0,0,1,0) >$

$\{(0,0,a,b) \in \mathbb{R}^4\} = T =< (0,0,1,0),(0,0,0,1) >$

$S \neq T$ perchè, per esempio, $\underbrace{(0,1,0,0)}_{S} \neq T$

Consideriamo ora una matrice 2x3 a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

Allora posso leggere le sue righe come vettori di $\mathbb{R}^3$

$(1,-2,3),(0,1,2)$

Nello stesso modo posso leggere le sue colonne come vettori di $\mathbb{R}^2$

$(1,0),(-2,1),(3,2)$

Posso quindi considerare il sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ generato dalle righe di A $S =< (1,-2,3),(0,1,2) >$ e il sottospazio T di $\mathbb{R}^2$ generato dalle colonne di A

$T =< (1,0),(-2,1),(3,2) >$

Posso chiedermi quali siano le dimensioni di S e T dim S = 2, dim T = 2

Questo fatto succede sempre!! Vale a dire: data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato ($T = \mathbb{R}^2$) dai vettori riga di A e il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori colonna di A hanno sempre la stessa dimensione. Tale dimensione si chiama RANGO di A e si indica con $rg(A)$ (o $\underbrace{\text{rk}}_{\text{rank}}(A)$), Nell'esempio fatto rg A = 2.

rango matrici non a scala

non numero di righe, ma linearmente indipendenti.

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{\text{Osserviamo}}$ che rg A = 0 significa che il sottospazio generato delle righe di A è banale e così pure è banale il sottospazio generato dalle colonne quindi A = 0

ATTENZIONE! abbiamo definito il rango di una matrice a scala come il numero delle sue righe non nulle (o, equivalentemente, il numero di pivot della matrice a scala).

Ora $\boxed{\text{dobbiamo}}$ scala le due definizioni di rango coincidono.

Righe non nulle sono linearmente indipendenti.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \text{rg A} = 3$$

Le righe non nulle di una matrice a scala sono linearmente indipendenti quindi il sottospazio generato dalle righe di una matrice a scala ha dimensione data dal numero di righe non nulle.

RANGO MATRICE A SCALA

Def: 2.9 (RANGO MATRICE A SCALA). Sia $A \in M_{m,n} \in (\mathbb{R})$. Si chiama rango di A e si indica con rg(A) il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A (come vettori di $\mathbb{R}^n$) o, equivalentemente, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A (come vettori di $\mathbb{R}^n$).

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \text{M}_{4,3}(\mathbb{R}) \quad \text{rg A} = 3$$

Osservazione: Supponiamo che $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ sia una $\boxed{\text{matrice a scala}}$ allora abbiamo 2 definizioni di rango di A.

rg A

il massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti

numero di righe non nulle = il numero di pivot di A

E' necessario osservare che, nel caso di matrici a scala, non c'è ambiguità, cioè che le due definizioni coincidono.
Basta mostrare che in una matrice a scala le righe non nulle sono linearmente indipendenti. Questo si può fare usando "l'argomento degli zeri" cominciando dalle righe in basso e risalendo.
Ex.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{rg A} = 3 \text{ righe non nulle}$$

$(0,0,0,1) \neq 0\mathbb{R}^4 \Rightarrow$ lin. ind.
$\{(0,0,0,1),(0,1,2,2)\}$ lin. ind. perchè non sono uno multiplo dell'altro
$\{(-1,3,2,1),(0,1,2,2),(0,0,0,1)\}$ sono lin. ind. perchè
$(-1,3,2,1) \notin <(0,1,2,2),(0,0,0,1)>$
$3 = \dim <(-1,3,2,1),(0,1,2,2),(0,0,0,1)>$
Per quanto abbiamo detto, in questo esempio 3 è anche il numero di colonne linearmente indipendenti della matrice A. Notiamo infatti che le colonne contenenti i pivot sono lin. ind.
$\{(-1,0,0,0),(3,1,0,0),(1,2,1,0)\}$
Abbiamo preso solo le colonne dove c'era il pivot.
La terza colonna, invece, è combinazione lineare delle prime 2:
$(2,2,0,0) = 4(-1,0,0,0) + 2(3,1,0,0)$
Problema: Come si calcola (in modo efficiente) il rango di una matrice qualsiasi?
FATTO La risoluzione di Gauss preserva il rango.
Per calcolare il rango di una matrice qualsiasi A si può ridurre A a scala per righe ottenendo la matrice A' e si ha $\boxed{rgA = rg\text{A'}}$

Attenzione Questo significa che le operazioni elementari sulle righe di A preservano anche la dimensione del sottospazio generato dalle colonne (perchè questa dimensione è sempre rg A) MA le operazioni sulle righe non preservano il sottospazio generato dalle colonne.
Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2ª riga = -3(1ª riga)}]{\text{3ª riga = 3ª riga - 1ª riga}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

$$< (1,2),(3,-1),(1,1) > = < (1,2),(0,-1), > = \mathbb{R}^2 \quad \text{rg A} = 2$$

rg A = rg A', A ha 2 colonne lin. ind. così come A!

$$\boxed{\text{MA}} \quad < \underbrace{(1,3,1),(2,-1,1)} > \neq < \underbrace{(1,0,0),(2,-1,0)}_{z=0} >$$

$$\dim 2 = < (1,3,1),(2,-1,1) > = \dim < (1,0,0),(2,-1,0) >$$

Esempio 3: Siano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ e $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$ Determinare una base di $S \cap T$ ed una base di $S + T$.

Svolgimento

Determiniamo $S \cap T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0, y - z = 0\}$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} = \{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3\}$$

$= < (1,1,1) >$

$\{(1,1,1)\}$ è una base di $S \cap T \quad dim S \cap T = 1$

Ora determiniamo S + T

Osservazione Siano S,T sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di S e sia $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di T. Quindi $k = dim S, h = dim T$.

ATTENZIONE! In generale $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_h\}$ $\boxed{\text{non}}$ sono una base di S + T cioè in generale non è detto che $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_h$ siano lin. indipendenti

Infatti ogni vettore $v \in S + T$ si scrive $v = s + t$ con

$\underbrace{s \in S}_{s = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k}$, $\underbrace{t \in T}_{t = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n}$

$(\alpha_i \in \mathbb{R}) \quad (\beta_j \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow v = s + t = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$

Nel nostro esempio determiniamo S + T usando questa osservazione.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x - 2y + z = 0}_{z = 2y - x}\} = \{(x,y,2y-x) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= < (1,0,-1),(0,1,2) >$$

lin. indip.

Una base d S è $\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$

$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{y - z = 0}_{y = z}\} = \{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3\} = < (1,0,0),(0,1,2) >$

Una base di T è $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$

Grazie all'osservazione che abbiamo fatto

$S+T =< (1,0,-1),(0,1,2),(1,0,0),(0,0,1) >$

$$\dim(S+T) = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\underbrace{3}_{\text{rango}}} \quad \boxed{S+T \subseteq \mathbb{R}^3}$$

$\Rightarrow$ S + T = $\mathbb{R}^3$

A questo punto scelgo la base di $\mathbb{R}^3$ che preferisco, per esempio, la base canonica.

Osservazione: In questo esempio abbiamo:
dim S = 2, dim T = 2, dim $S \cap T = 1$, dim S + T = 3

$$\boxed{\dim S + \dim T - \dim S \cap T = \dim (S+T)}$$

Formula di Grassmann

Grassmann

Vale la seguente formula:

Teorema 2.2 (Grassmann)**.** *Siano S,T sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^n$
Allora

$$dim\ (S + T) = dim\ S + dim\ T - dim\ (S \cap T)$$

Idea : Calcolare la dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ significa contare gli elementi di una sua base.

In generale abbiamo visto che se $B_S \cup B_T$ individua un insieme di generatori di S + T
MA $B_S \cup B_T$ in generale NON sarà una base di S + T.

Esempio:

$$S =< (1,1,0),(0,1,1) > B_S = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$$
$$T =< (1,0,0),(0,0,1) > B_T = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$$

$$S+T = \underbrace{< (1,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(0,0,1) >}_{\text{non sono lin. indipendenti perchè sono 4 vettori in } \mathbb{R}^3!}$$

$\Rightarrow$ Non costituiscono una base di S + T

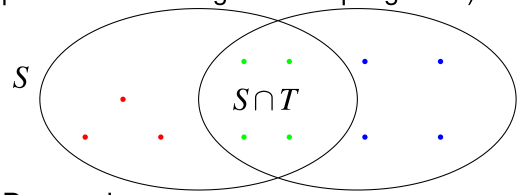
Per trovare una base di S + T devo scartare i vettori lin. dipendenti dagli altri.

Per esempio: (0,1,1) = (1,1,0) + (0,0,1) - (1,0,0)

$$\Rightarrow S+T = \underbrace{< (1,1,0),(1,0,0),(0,0,1) >}_{\text{sono lin. ind.} \Rightarrow \text{una base}}$$

S + T è $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$, (dim S + T = 3 $\Rightarrow$ S + T = $\mathbb{R}^3$)

Domanda: C'è un modo per costruire direttamente una base di S + T (senza passare per un insieme di generatori più grande)?



$\underbrace{7+8-4=11}_{\text{dim S + dim T - S}\cap\text{T}}$

Domanda

Possono esistere 2 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due la cui intersezione è banale?

$\boxed{\text{NO}}$ Perchè per la formula di Grassmann se S ha dimensione 2 e T ha dimensione 2, ma S,T $\subseteq \mathbb{R}^3$ anche S + T $\subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ dim(S + T) = 2 + 2 - $\underbrace{dim S\cap T}_{\text{se fosse = 0}}$ = 4

Sarebbe impossibile (se l'intersezione fosse uguale a 0).

In questa situazione dim S$\cap$T ≥ 1

Geometricamente questo significa che in uno spazio tridimensionale due punti hanno in comune almeno una retta.

Riprendiamo l'esempio e costruiamo una base di S + T a partire da una base dell'intersezione.

$S =< (1,1,0),(0,1,1) >$

$T =< (1,0,0),(0,0,1) >$

$\boxed{\text{la dim S } \cap\text{T deve essere} > 0\text{, ma più piccola di S e di T, non può essere di certo più grande.}}$

$\boxed{1 < \text{dim S}\cap\text{T} < \text{dim S,T}}$ (questa l'ho scritta io, non era negli appunti)

Metodo generale per determinare S$\cap$T quando sia S che T sono definiti mediante dei generatori.

$$S\cap T = \{v \in S \mid v \in T\} = \{\underbrace{v = \alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)}_{\in S} \mid v \in T\}$$

$= \{v = (\alpha, \alpha+\beta, \beta) \mid v \in T\} \Leftrightarrow$ è comb. lineare di (1,0,0),(0,0,1)

$\Leftrightarrow \overset{-\alpha}{\text{rg}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta \end{pmatrix} = 2 = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha+\beta & \beta \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\alpha+\beta} & \beta \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$

$\left(\text{Se } \alpha+\beta \neq 0 \text{ rg() = 3} \quad \text{Se } \alpha+\beta = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow S\cap T = \{(\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^3\} =< (1,0,-1)$

$B_{S\cap T} = \{(1,0,-1)\}$ è una base di $S \cap T$ (dim $S \cap T$ = 1)
Ora completo $B_{S\cap T}$ in una base di S ottenendo:
$B_S = \{(1,0,-1),(1,1,0)\}$ deve appartenere ad S ed essere lin. indipendente da (1,0,-1)
Ora completo $B_{S\cap T}$ in una base di T ottenendo:
$B_T = \{(1,0,-1),(1,0,0)\}$
Ora sono sicuro che $\{\underbrace{(1,0,-1)}_{\text{base di S} \cap \text{T}},(1,1,0),(1,0,0)\}$
è una base di S + T
In questo modo ho ottenuto una base di S + T
Completando una base di S ∩ T

Diretta

Def: 2.10 (Diretta)**.** La somma di due sottospazi S e T di $\mathbb{R}^n$ si dice DIRETTA se $S \cap T = \{0\mathbb{R}^n\}$.
In tal caso la somma di S e T si indica con $S \oplus T$.

Osserviamo in questo caso la formula di Grassmann dice:

$$\dim(S \oplus T) = \text{dim S + dim T - dim S} \cap \text{T = dim S + dim T}$$

Per quanto visto prima, in questo caso una base di $S \oplus T$ è data dall'unione di una base di S e una base di T.
Esempio: $S =< (1,1,1) > \quad T =< (2,3,2) >$
La somma di S e T è diretta.
$S = \{(a,a,a) \in \mathbb{R}^3\} \quad T = \{(2b,3b,2b) \in \mathbb{R}^3\}$
$S \cap T = \{0\mathbb{R}^3\} \quad S \oplus T =< (1,1,1),(2,3,2) > \quad \dim(S \oplus T) = 2$
Abbiamo visto prima che 2 sottospazi di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ NON possono essere in somma diretta (perchè la loro intersezione ha sempre dimensione almeno 1).
Esempio:
$S =< (1,1,1,1),(0,1,0,2) > \quad T =< (0,0,1,3) >$
Questi sono in somma diretta perchè i 3 vettori (1,1,1,1),(0,1,0,2),(0,0,1,3) sono lin.indipendenti.
Similmente, se prendo $V =< (0,0,1,3),(0,0,0,1) >$
$S \oplus V = \mathbb{R}^4$

Modulo 2

Equazioni Parametriche e Cartesiane

$$V = \{(a, 2b+a, b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Equazioni parametriche di V : viene presentato un generico elemento al variare di parametri (a e b in questo caso).

$$\boxed{\text{Eq. parametriche}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Insieme di generatori}}$$

Infatti
$U =< (\boxed{1}, 3, 5, -1), (\boxed{2}, 1, 7, 6) >$ insieme di generatori
$U = \{(\boxed{a} + \boxed{2b}, 3a+b, 5a+7b, -a+6b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ eq. parametriche
$W = \{(5-2t, 5+t, t) \in \mathbb{R}^3 : s, t \in \mathbb{R}\}$ eq. parametriche
$W =< (1,1,0), (-2,1,1) >$ (insieme di generatori)

Equazioni cartesiane

Def: 3.1 (Equazioni Cartesiane)**.** Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, un sistema lineare omogeneo (in n variabili) si dice m sistema di equazioni cartesiane di W. (o semplicemente eq. cartesiane di W) se W è l'insieme delle sol. del sistema stesso.

Come si determinano le equazioni cartesiane?
Metodo 1: eliminazione dei parametri
$V =< (1,2,3), (1,1,1) > \subseteq \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) = a(1,2,3) + b(1,1,1)$
$x = a+b \quad y = 2a+b \quad z = 3a+b$
Dalla terza $b = z-3a$ e lo sostituiamo nelle altre due

$$x = a + (z-3a) \qquad\qquad y = 2a + (z-3a)$$
$$x = z - 2a \qquad\qquad y = z - a$$

Dalla 2ª equazione ricaviamo $a = z-y$, la sostituiamo nella prima e otteniamo $x = z - 2(z-y) = -z + 2y$

$$\boxed{x - 2y + z = 0} \text{ è l'equazione cartesiana.}$$

E' buona norma verificare che i vetotri generatori (1,1,1) e (1,2,3) soddisfano questa equazione.

$$(1,1,1) \qquad\qquad (1,2,3)$$
$$1 - 2(1) + 1 = 0 \checkmark \qquad\qquad 1 - 2(2) + 3 = 0 \checkmark$$

Metodo 2: rango

$V =< (1,1,1),(1,2,3) >$

$(x,y,z) \in V \Leftrightarrow$ è combinazione lineare di (1,1,1),(1,2,3)

Osserviamo che (1,1,1) e (1,2,3) formano una base

$(x,y,z) \in V \Leftrightarrow (x,y,z),(1,1,1)$ e $(1,2,3)$ sono dipendenti

$$\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2 \xrightarrow[\text{2ª riga = 2ª riga - 1ª riga}]{\text{3ª riga = 3ª riga - x (1ª riga)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & y-x & z-x \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3ª riga = 3ª riga - y - x(2ª riga)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & z-x-2(y-x) \end{pmatrix}$$

il rango è 2 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{x - 2y + z = 0}}$

Osservazione

Ogni eq. lineare omogenea può essere "pensata" come ad un vettore, guardando ai suoi coefficienti

$$x-2z = 0 \leftrightarrow (1,0,-2)$$

Possiamo quindi parlare di eq. linearmente dipendenti o indipendenti. Se una eq. di un sistema è dipendente dalle altre la posso eliminare senza modificare la soluzione.

FATTO: Un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ ha dimensione d se e solo se è dato da n - d equazioni lineari linearmente indipendenti.

Esempio: $W \subseteq \mathbb{R}^3 \quad dimW = 2$ allora W è dato da 3 - 2 = 1 eq. lineari indipendenti

se $U \subseteq \mathbb{R}^5 \quad dim(U) = 2$ allora U è dato da 5 -2 = 3 eq.lineari indipendenti

$W = \{(x_1,\dots,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_4 = 0, x_2 + 3x_3 = 0, x_5 = 0\}$

dim W? Le tre equazioni sono indipendenti?

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{matrix} \quad \text{ha rango 3}$$

$\Rightarrow$ le tre equazioni sono indipendenti.

$\Rightarrow$ dim W = 5 - 3 = 2 vettori, ovvero dimensione di W, qui non calcoliamo le eq. ma la dim.

Metodo 3: "Ad occhio"

Se v ha dimensione d in $\mathbb{R}^n$ e conosciamo una base $B = \{b_1,\dots,b_d\}$, allora "basta" trovare n-d eq. lineari omogenee soddisfatte dai vettori di B.

Esempio: $W =< (1,1,1),(1,2,3) >$

$dimW = 2$ dentro $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ ci basta un'equazione

$\mathbb{R}^3 - dimW = 3-2 = 1$ eq.lineare

$\boxed{\text{x - 2y + z = 0}}$

Esempio: $U =< (1,2,3,0),(2,1,0,1) > \subseteq \mathbb{R}^4$

$dimU = 2 \quad \mathbb{R}^4 - dimU = 2$ equazioni

$$\begin{cases} x+z = 2y \\ x+y-z-3t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y-3t = 0 \\ 3x-z-6t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & -6 \end{matrix}$$

3ª riga = somma delle prime due quindi la eliminiamo
4ª riga = prima riga + 2(2ª riga) quindi la cancelliamo
rg = 2

Esempio: $W =< (0,1,1),(0,-2,3) > \quad 3-2=1$

Coordinate rispetto ad una base (ordinata)

$B = \{b_1,\ldots,b_d\}$ base

$B =$

$(b_1,\ldots,b_d)$ base ordinata , cioè in cui è importante l'ordine (usiamo le tonde anzichè le graffe)

Esempio: $V =< (1,1,1),(1,2,3) >$

$B = ((1.1.1),(1,2,3)) \quad D = ((2.3.4),(0,1,2))$

$C = ((1,2,3),(1,1,1))$ sono tre basi ordinate di V

Eq. di V è $x-2y+z=0$ i vettori di D soddisfano questa equazione

$\Rightarrow$ D è una base.

Dato un qualunque vettore $v \in V$ usando la base B possiamo trovare α_1,α_2, tale che

$$v = \alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,2,3))$$

Esempio: $v = (-3,1,5) \in V \quad (-3,1,5) = -7(1,1,1)+4(1,2,3)$

I due coefficienti di α_1,α_2 si dicono coordinate di v rispetto alla base B.

Scriviamo $v = (\alpha_1,\alpha_2)_B$

Nell'esempio: $(-3,1,5) = (-7,4)_B$

Se cambiamo base (ordinata) cambieranno anche le coordinate.

$(-3,1,5) = (4,-7)_C$ La base C è quella in cui avevamo invertito i vettori.

Cambiamento di coordinate

Supponiamo di avere due basi di uno sp. V

$$B = (b_1,\ldots,b_d) C = (c_1,\ldots,c_d)$$
$$v = (x_1,\ldots,x_d)_B = (y_1,\ldots,y_d)_C$$

C'è una formula per passare dalle x alle y?

$B = ((1,1,1),(1,2,3)) \quad C = ((2,3,4),(0,1,2)) \; (x_1,x_2)_B = (y_1,y_2)_C$

1° passo: calcoliamo le coordinate dei vettori b_1 e b_2 rispetto alla base c.

$$b_1 = (1,1,1) = 1/2(2,3,4)-1/2(0,1,2) = (1/2,-1/2)_C$$
$$b_2 = (1,2,3) = 1/2(2,3,4)+1/2(0,1,2) = (1/2,1/2)_C$$

2° passo: cambio di coordinate

$$\begin{aligned} v = (x_1,x_2)_B &= x_1b_1 + x_2b_2 \\ &= x_1(\frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2) + x_2(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2) \\ &= (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)C_1 + (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)C_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \qquad y_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\text{chi è questa matrice?}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

MATRICE DEL CAMBIO DI BASE

Def: 3.2. V spazio vettoriale di dimensione d

$B = (b_1,\dots,b_d) \qquad C = (c_1,\dots,c_d)$ basi di V.

$b_{\boxed{1}} = (a_{1\boxed{1}}, a_{2\boxed{1}}, \dots, a_{d\boxed{1}})_C$

$b_{\boxed{2}} = (a_{1\boxed{2}}, a_{2\boxed{2}}, \dots, a_{d\boxed{2}})_C$

$b_{\boxed{d}} = (a_{1\boxed{d}}, a_{2\boxed{d}}, \dots, a_{d\boxed{d}})_C$

$$M_C^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

Esempio: $B = ((1,1,1),(1,2,3)), C = ((2,3,4),(0,1,2))$

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

v = $1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 = (3,5,7) = (1,2)_B = (3/2, 1/2)_C$

Quali sono le coordinate di v rispetto a C

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Esempio: $B = ((1,1,1),(1,2,3)) \qquad C = ((1,2,3),(1,1,1))$

$b_1 = c_2 = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = (0,1)_C$

$b_2 = c_1 = (1,0)_C$

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y_1 = x_2}\boxed{y_2 = x_1}$$

Applicazioni Lineari

Def: 3.3 (Applicazioni Lineari)**.** Un'applicazione lineare è una funzione tra due spazi vettoriali che ne rispetta la struttura, cioè la somma e il prodotto per scalari.
V, W spazi vettoriali
$F : V \longrightarrow W$ si dice lineare se

1. $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V$
2. $F(\alpha v) = \alpha F(v) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

Controesempi:
$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$F((x,y)) = F(x,y) = (x+1, y)$ questa è la funzione
$F(2,3) = (3,3)$ è lineare?
Rispetto alla somma?

$$F(\underbrace{(1,1)+(2,3)}_{F(\underbrace{3,4}_{(4,4)})}) \stackrel{?}{=} F(1,1) + F(2,3) = (\underbrace{2}_{x+1}, 1) + (\underbrace{3}_{x+1}, 3) = (5,4)$$

$$F(\underbrace{(1,1)+(2,3)}_{(4,4)} \neq \underbrace{F(1,1)+F(2,3)}_{(5,4)}$$ F NON è lineare

Oss.: $F : V \longrightarrow W$ lineare allora
$F(0v) = 0w$ Infatti,
$F(0v) = F(0 \cdot v) = 0 \cdot F(v)$
Quindi l'esempio di prima (il controesempio) precedente non era lineare anche perchè
$F(0,0) = (1,0)$
Esempio: $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$F(x,y) = (x^2, y -$
$x)$ equazione non lineare, il grado deve essere 1 se c'è un esponente di grado > 1. L'eq. non è lineare.

$$F(\underbrace{2(1,1)}_{F(\underbrace{2,2}_{(4,0)})}) \stackrel{?}{=} 2F(1,1) = 2 \cdot (1,0) = (2,0)$$

$$F(\underbrace{2(1,1)}_{(4,0)} \neq \underbrace{2F(1,1)}_{(2,0)}$$ F NON è lineare

Esempio: $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (\underbrace{x+y,}_{x} \underbrace{-y}_{y})$$

$$F(\underbrace{(1,1)+(2,3)}_{F(\underbrace{3,4}_{(7,-4)})}) \stackrel{?}{=} F(1,1) + F(2,3) = (2,-1) + (5,-3) = (7,-4)$$

$$F(\underbrace{(1,1)+(2,3)}_{(7,-4)} = \underbrace{F(1,1)+F(2,3)}_{(7,-4)}$$ F potrebbe essere lineare

va verificata anche rispetto al prodotto.

$\boxed{\text{Cosa abbiamo imparato: se F è lineare}}$

- non ci devono essere "termini noti" nelle sue equazioni (altrimenti $F(0v) \neq (ow)$.
- non ci devono essere termini di grado ≥ 2.

Inoltre, ci vanno bene esempi in cui le equazioni sono lineari omogenee