

# Analisi Matematica Formulario

## Numeri Complessi

$$i^2 = -1$$

**Forma Algebrica:**

$z = a + ib$   $Re(z) = a$  parte reale,  $Im(z) = b$  parte immaginaria

**Complesso coniugato:**  $z = a + ib \rightarrow \bar{z} = a - ib$

**Forma Trigonometrica**  $z = r[\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta \in (-\pi, \pi]:$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) a > 0, b \text{ qualsiasi}$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi a < 0, b \geq 0$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi a < 0, b < 0$$

$$\frac{\pi}{2} a = 0, b > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} a = 0, b < 0$$

$$\text{Non definito } a = 0, b = 0$$

$$\theta \in (0, 2\pi]:$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) a > 0, b \geq 0$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi a > 0, b < 0$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi a < 0, b \text{ qualsiasi}$$

$$\frac{\pi}{2} a = 0, b > 0$$

$$\frac{3\pi}{2} a = 0, b < 0$$

$$\text{Non definito } a = 0, b = 0$$

**Forma esponenziale:**  $z = re^{i\theta}$

**Radice n-esima complessa:**

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{a^2 + b^2} \\ \theta x = \phi/n + 2k\pi/n \end{cases}$$

## Limiti

**Forme Indeterminate:**  $0^0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad \frac{0}{0} \quad \infty - \infty$

**Regola di de L'Hopital:**

se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  o  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  allora  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Alcuni Limiti notevoli:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

## Polinomio di Taylor

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

**Fattoriale:**  $n! \rightarrow n \cdot (n - 1)$

**Formula di Taylor**

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(|(x - x_0, y - y_0)|^2) \text{ per } (x - x_0, y - y_0) \rightarrow (0, 0)$$

**Formula di Taylor con Resto di Peano**  $f(x) = T_{c,n}(x) + R_{c,n}(x)$

## Derivate

| f(x)          | f'(x)                               | f(x)                      | f'(x)                           |
|---------------|-------------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| k             | 0                                   | $\sin x$                  | $\cos x$                        |
| $x^n$         | $x^{n-1}$                           | $\cos x$                  | $-\sin x$                       |
| x             | 1                                   | $\tan x$                  | $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$                    | $\cot x$                  | $-\frac{1}{\sin^2 x}$           |
| $\sqrt{x}$    | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$               | $\arcsin x$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$        |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$      | $\arccos x$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$       |
| x             | $\frac{ x }{x}$                     | $\arctan x$               | $\frac{1}{1+x^2}$               |
| $\log_a x$    | $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ | $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$              |

**Esempi**

|         |               |                    |                                  |
|---------|---------------|--------------------|----------------------------------|
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $\sin(x^2 + 4)$    | $2x \cdot \cos(x^2 + 4)$         |
| $a^x$   | $a^x \ln a$   | $e^{x^2+2x}$       | $e^{x^2+2x} \cdot (2x + 2)$      |
| $e^x$   | $e^x$         | $\arctan(x^2 + 4)$ | $\frac{1}{(x^2+4)^2+1} \cdot 2x$ |

**Derivata di una funzione composta**

| f(x)        | f'(x)                               |
|-------------|-------------------------------------|
| $\ln(g(x))$ | $\frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$        |
| $ g(x) $    | $\frac{g(x)}{ g(x) } \cdot g'(x)$   |
| $a^{g(x)}$  | $a^{g(x)} \cdot \ln(a) \cdot g'(x)$ |
| $[g(x)]^n$  | $n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$  |

## Regole di Derivazione

**Derivata di una somma**

$$f(x) + g(x) + h(x) \quad f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

**Prodotto di derivate**

$$f(x) \cdot g(x) \quad f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

**Rapporto di derivate**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

**Derivata di una costante**

$$k \cdot f(x) \quad k \cdot f'(x)$$

**Derivata di una funzione composta**

$$f[g(x)] \quad f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

**Derivata di una funzione elevata ad una funzione**

$$f(x)^{g(x)} \quad f(x)^{g(x)} \cdot [g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}]$$

## Integrali

| f(x)                  | F(x) [primitiva]          | f(x)                         | F(x)                                   |
|-----------------------|---------------------------|------------------------------|--|
| $\int 1 dx$           | $x + c$                   | $\int \sin x dx$             | $-\cos x + c$                          |
| $\int x^n dx$         | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ | $\int \cos x dx$             | $\sin x + c$                           |
| $\int \frac{1}{x} dx$ | $\ln x  + c$              | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ | $\tan x + c$                           |
| $\int a dx$           | $ax + c$                  | $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$ | $-\cot x + c$                          |
| $\int a^x dx$         | $\frac{a^x}{\ln a} + c$   | $\int \tan^2 x dx$           | $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$ |
| $\int e^x dx$         | $e^x + c$                 | $\int \cot^2 x dx$           | $\int \frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + c$ |
| $\int e^{kx} dx$      | $\frac{e^{kx}}{k} + c$    | $\int \frac{1}{1+x^2} dx$    | $\arctan x + c$                        |

## Regole di Integrazione

### In generale

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = F[g(x)] + c$$

### Prodotto di una costante k

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

### Somma di due o più funzioni

$$\int f(x) \pm g(x) \pm h(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \int h(x) dx$$

### Integrazione per parti

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

### Integrazione per sostituzione

$$\int f(x) dx \quad \text{ponendo } x = g(t)$$

$$\text{da cui deriva } dx = g'(t) \quad \int f[g(t)] \cdot g'(t)$$

### Integrazione delle funzioni razionali fratte

1. **DIVISIONE.** Se il grado del denominatore  $>$  grado numeratore, allora **SALTO QUESTO PASSAGGIO.**
2. **FATTORIZZARE,** scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di 1° grado.
3. **DECOMPORRE,** la frazione in frazioni semplici.
4. **INTEGRAZIONE,** delle varie parti.

## Successioni

### Successioni

#### • Successione convergente

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = l \quad (l \text{ limite finito})$$

#### • Successione divergente

- Se una successione ha limite infinito.

#### • Successione oscillante

- Il limite non esiste. Esempio:  $x_n = (-1)^n$
- Possiamo dividerle in due gruppi:
  - \* **successioni regolari:** il limite per  $n \rightarrow \infty$  esiste.
  - \* **successioni irregolari:** il limite per  $n \rightarrow \infty$  non esiste.

#### • Successioni Monotone

- monotona crescente  $x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- monotona decrescente  $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- strettamente monotona crescente  $x_n < x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- strettamente monotona decrescente  $x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

#### • Successioni limitate e illimitate

- limitata se  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale che  $x_n \in [a, b]$
- illimitata in caso contrario.

### Gerarchie degli Infiniti

$n^k$  ( $k > 0$ )  $a^n$  ( $a > 1$ )  $n!$   $n^n$  (in ordine decrescente da sinistra (più grande) a destra (più piccolo)).

## Serie

### • Serie numerica

- $A_k := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n$
- La successione  $A_k$  viene detta **serie numerica**.
- La quantità  $A_k$  viene chiamata **somma parziale k-esima**,  $\forall k \in \mathbb{N}$

### • Serie Geometrica

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{oscilla} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

### • Serie Armonica

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

## Punti di non derivabilità

### Punto Angoloso

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = m$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = l$  con  $m \neq l$

Allora  $x_0$  è un punto **angoloso**.

### Cuspide

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty$

Allora  $x_0$  è una **cuspide con vertice in alto**.

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$

Allora  $x_0$  è una **cuspide con vertice in basso**.

### Flesso

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty$

Allora  $x_0$  è un **flesso a tangente verticale crescente**.

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = -\infty$

Allora  $x_0$  è un **flesso a tangente verticale decrescente**.

## Monotonia di una funzione

- Determinare la sua derivata prima
- Studiarne il segno. (diseguazioni)
- Applicare il teorema.
- Descrivere la crescita, decrescenza e punti di massimo e minimo relativi.

## Determinare i punti critici

**Punti critici:** Massimo, Minimo, punto di sella, flesso.

**Metodologia:**

- Calcolare le derivate prime in base x ed y.
- Mettere a sistema queste derivate.
- Trovare gli eventuali punti.
- Calcolare le derivate seconde e fare l'Hessiano.
- Calcolare il determinante  $\det(Hf(x, y)) = (f_{xx} \cdot f_{yy}) - (f_{xy} \cdot f_{yx})$
- Calcolo la  $f_{xx}(\text{Punto})$ .
- Sostituisco il punto nel determinante:  $\det(Hf(\text{Punto}))$
- In base ai risultati determino la natura del punto:
  - determinante positivo, primo elemento positivo → **punto di minimo relativo**
  - determinante positivo, primo elemento negativo → **punto di massimo relativo**
  - determinante negativo → **punto di sella**
  - determinante nullo → **il test è inconcludente**

## Tabella dei gradi

|                       | Funzione       | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°    |
|-----------------------|----------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|--------|
| Sine, Cosine, Tangent | $\sin(\theta)$ | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1      |
|                       | $\cos(\theta)$ | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0      |
|                       | $\tan(\theta)$ | 0  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | undef. |

## Arcotangente

### Arctan

| Funzione          | -90°             | -60°             | -45°             | -30°                  | 0°  | 30°                   | 45°              | 60°              | 90°              |
|-------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------------|-----|-----------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\arctan(\theta)$ | $-\infty$        | $-\sqrt{3}$      | $-1$             | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ | $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$              | $+\sqrt{3}$      | $+\infty$        |
| $\pi = 180^\circ$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$      | $0$ | $+\frac{\pi}{6}$      | $+\frac{\pi}{4}$ | $+\frac{\pi}{3}$ | $+\frac{\pi}{2}$ |

## Differenziabilità

### Determinare se una funzione è differenziabile

- Esistono le derivate parziali prime nel punto  $(x_0, y_0)$
- $$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$
- Questo limite può anche essere espresso:
- $$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x-x_0) - f_y(x_0, y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

## Derivata direzionale

### Derivata direzionale rispetto a $v$ nel punto $(x_0, y_0)$ :

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos(\theta), y_0 + t \sin(\theta)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Se chiamo  $g(f) := f(x_0 + t \cos(\theta), y_0 + t \sin(\theta))$

$$\Rightarrow D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

(quindi fai la derivata prima e poi passi 0 a questa)

## Gradiente

### Teorema del Gradiente

Se  $f$  è differenziabile, allora esiste la derivata direzionale  $D_v f(x_0, y_0)$  e vale:

$$D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$$

$\nabla$  (gradiente) significa, almeno nel piano cartesiano, semplicemente le derivate prime in base ad  $x$  e  $y$ .

### Teorema Derivazione della Composizione

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile, sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile

$$\nabla h(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot \nabla f(x, y)$$

## Teoremi degli estremanti locali

### Teorema di Fermat

Se  $f$  è derivabile in  $c$  e  $c$  è un estremante locale allora:

$$f'(c) = 0$$

### Teorema di Rolle

Se  $f$  è continua su  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$  allora:

$\exists d \in (a, b)$  tale che  $f'(d) = 0$

### Teorema di Lagrange

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$  Allora:

$\exists d \in (a, b)$  tale che  $f(b) - f(a) = f'(d)(b - a)$

## Esistenza e Calcolo del Piano Tangente in due variabili

Data una funzione  $f(x, y)$  e un punto  $(x_0, y_0)$ .

Il piano che contiene entrambe le rette è dato da:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

## Asintoti

### Asintoti verticali

$$\lim_{x \rightarrow c \pm} f(x) = \pm \infty$$

$$c \in \mathbb{R}$$

### Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

### Asintoti Obliqui

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

$$\bullet \text{ Se } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ Se } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ Allora ho un asintoto obliquo di equazione: } y = mx + q$$

## O-Piccolo

Diciamo che  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow c$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\text{es: } x^3 = o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{es: } x^2 = o(x^3) \text{ per } x \rightarrow \infty$$

## Equazioni differenziali

### Modello di Malthus

È stato il primo modello di dinamica delle popolazioni a essere introdotto ed è il più semplice modello di crescita esponenziale.

tasso  $r$  costante.

$N(t)$  = numero di individui al tempo  $t$ .

$N'(t) = rN(t) \Rightarrow N(t) = ce^{rt}$  è la soluzione.

### Equazioni Differenziali del I Ordine Omogenee

È un'equazione che ha per incognita una funzione  $y = f(x)$  e che stabilisce una relazione tra la variabile indipendente  $x$ , la funzione incognita  $f(x)$  e almeno una delle sue derivate.

### Integrale Generale (o soluzione generale)

Insieme di tutte le funzioni  $y = f(x)$  che risolvono l'equazione.

### Soluzione particolare

È una determinata funzione che risolve l'equazione.

### Problema di Cauchy

È la **soluzione particolare** di un'equazione differenziale di una funzione  $y = f(x)$  in cui la curva integrale passa per un punto assegnato  $(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} y' = F(x; y) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

La condizione  $y_0 = f(x_0)$  è detta **condizione iniziale** del problema di Cauchy.

Individuare la funzione  $y = f(x)$  che soddisfa l'equazione differenziale e passa per il punto  $(x_0, y_0)$

### Equazioni differenziali a variabili separabili

Quando può essere scritta nella forma  $y' = g(x) \cdot h(y)$ , con  $g(x)$  e  $h(y)$  funzioni continue.

1. Separo le variabili  $y$  e  $x$
2. Integro ciascun membro

### Equazioni differenziali lineari

Quando la funzione incognita  $y$  e la sua derivata prima  $y'$  compaiono solamente in termini di primo grado.