Analisi Matematica Formulario

Numeri Complessi

$i^2 = -1$

Forma Algebrica:

$z = a + ib$ $\quad Re(z) = a$ parte reale, $Im(z) = b$ parte immaginaria

Complesso coniugato: $z = a + ib \rightarrow \overline{z} = a - ib$

Forma Trigonometrica $z = r[\cos\theta + i \cdot \sin\theta]$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta \in (-\pi, \pi]$:	$\theta \in (0, 2\pi]$:
$\arctan(\frac{b}{a}) a > 0, b$ qualsiasi	$\arctan(\frac{b}{a}) a > 0, b \geq 0$
$\arctan(\frac{b}{a}) + \pi a < 0, b \geq 0$	$\arctan(\frac{b}{a}) + 2\pi a > 0, b < 0$
$\arctan(\frac{b}{a}) - \pi a < 0, b < 0$	$\arctan(\frac{b}{a}) + \pi a < 0, b$ qualsiasi
$\frac{\pi}{2} a = 0, b > 0$	$\frac{\pi}{2} a = 0, b > 0$
$-\frac{\pi}{2} a = 0, b < 0$	$\frac{3\pi}{2} a = 0, b < 0$
Non definito $a = 0, b = 0$	Non definito $a = 0, b = 0$

Forma esponenziale: $z = re^{i\theta}$

Radice n-esima complessa:

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{a^2 + b^2} \\ \theta x = \phi/n + 2k\pi/n \end{cases}$$

Limiti

Forme Indeterminate: $0^0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad \frac{0}{0} \quad \infty - \infty$

Regola di de L'Hopital:

se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ allora $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Alcuni Limiti notevoli:

$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a) \quad \lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Polinomio di Taylor

$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Fattoriale: $n! \rightarrow n \cdot (n-1)$

Formula di Taylor

$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \bigtriangledown f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\mid (x - x_0, y - y_0) \mid^2) per (x - x_0, y - y_0) \rightarrow (0, 0)$

Formula di Taylor con Resto di Peano $f(x) = T_{c,n}(x) + R_{c,n}(x)$

Derivate

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
k	0	$\sin x$	$\cos x$
x^n	x^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$
x	1	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^n - 1}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\lvert x\rvert$	$\frac{\lvert x\rvert}{x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	arccot$x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Esempi

$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x^2 + 4)$	$2x \cdot \cos(x^2 + 4)$
a^x	$a^x \ln a$	e^{x^2+2x}	$e^{x^2+2x} \cdot (2x + 2)$
e^x	e^x	$\arctan(x^2 + 4)$	$\frac{1}{(x^2+4)^2+1} \cdot 2x$

Derivata di una funzione composta

f(x)	f'(x)
$\ln(g(x))$	$\frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$\mid g(x) \mid$	$\frac{g(x)}{\lvert g(x)\rvert} \cdot g'(x)$
$a^{g(x)}$	$a^{g(x)} \cdot \ln(a) \cdot g'(x)$
$[g(x)]^n$	$n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$

Regole di Derivazione

Derivata di una somma

$f(x) + g(x) + h(x) \qquad f'(x) + g'(x) + h'(x)$

Prodotto di derivate

$f(x) \cdot g(x) \qquad f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Rapporto di derivate

$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Derivata di una costante

$k \cdot f(x) \qquad k \cdot f'(x)$

Derivata di una funzione composta

$f[g(x)] \qquad f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Derivata di una funzione elevata ad una funzione

$f(x)^{g(x)} \qquad f(x)^{g(x)} \cdot [g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}]$

Integrali

f(x)	F(x) [primitiva]	f(x)	F(x)
$\int 1\,dx$	$x+c$	$\int \sin x\,dx$	$-\cos x+c$
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\int \cos x\,dx$	$\sin x+c$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\|x\|+c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\tan x+c$
$\int a\,dx$	$ax+c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\cot x+c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$\int \tan^2 x\,dx$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}=\tan x+c$
$\int e^x$	e^x+c	$\int \cot^2 x\,dx$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}=\cot x+c$
$\int e^{kx}$	$\frac{e^{kx}}{k}+c$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan x+c$

Regole di Integrazione

In generale

$\int f[g(x)]\cdot g'(x)\,dx$ $\quad F[g(x)]+c$

Prodotto di una costante k

$\int k\cdot f(x)\,dx$ $\quad k\cdot\int f(x)\,dx$

Somma di due o più funzioni

$\int f(x)\pm g(x)\pm h(x)\,dx$ $\quad \int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx\pm\int h(x)\,dx$

Integrazione per parti

$\int f(x)\cdot g(x)\,dx$ $\quad F(x)g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)\,dx$

Integrazione per sostituzione

$\int f(x)\,dx$ $\quad$ ponendo x $=g(t)$

da cui deriva $dx=g'(t)$ $\quad \int f[g(t)]\cdot g'(t)$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

1. **DIVISIONE**. Se il grado del denominatore $>$ grado numeratore, allora **SALTO QUESTO PASSAGGIO**.
2. **FATTORIZZARE**, scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di 1° grado.
3. **DECOMPORRE**, la frazione in frazioni semplici.
4. **INTEGRAZIONE**, delle varie parti.

Successioni

Successioni

- **Successione convergente**
  - $\lim_{x\to+\infty} x_n = l$ (l limite finito)
- **Successione divergente**
  - Se una successione ha limite infinito.
- **Successione oscillante**
  - Il limite non esiste. Esempio: $x_n=(-1)^n$
  - Possiamo dividerle in due gruppi:
    - **successioni regolari**: il limite per $n\to\infty$ esiste.
    - **successioni irregolari**: il limite per $n\to\infty$ non esiste.
- **Successioni Monotone**
  - monotona crescente $x_n\le x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$
  - monotona decrescente $x_n\ge x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$
  - strettamente monotona crescente $x_n< x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$
  - strettamente monotona decrescente $x_n> x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$
- **Successioni limitate e illimitate**
  - limitata se $\exists a,b\in\mathbb{R}$ tali che $\forall n\in\mathbb{N}$ vale che $x_n\in[a,b]$
  - illimitata in caso contrario.

Gerarchie degli Infiniti

$n^k\ (k>0)\quad a^n\ (a>1)\quad n!\quad n^n$ (in ordine decrescente da sinistra (più grande) a destra (più piccolo)).

Serie

- **Serie numerica**
  - $A_k := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$
  - La successione A_k viene detta **serie numerica**.
  - La quantità A_k viene chiamata **somma parziale** k-**esima**, $\forall k \in \mathbb{N}$
- **Serie Geometrica**
  - $\sum_{n=0}^{+} \infty q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } \mid q \mid < 1 \\ \text{oscilla} & \text{se } q \leq 1 \end{cases}$
- **Serie Armonica**
  - $\sum_{n=1}^{+} \infty \frac{1}{n} = +\infty$

Punti di non derivabilità

Punto Angoloso
Se $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = m$ e $\lim_{x \to x_0+} f'(x) = l$ con $m \neq l$
Allora x_0 è un punto angoloso.
Cuspide
Se $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0+} f'(x) = -\infty$
Allora x_0 è una cuspide con vertice in alto.
Se $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to x_0+} f'(x) = +\infty$
Allora x_0 è una cuspide con vertice in basso.
Flesso
Se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$
Allora x_0 è un flesso a tangente verticale crescente.
Se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$
Allora x_0 è un flesso a tangente verticale decrescente.

Monotonia di una funzione

- Determinare la sua derivata prima
- Studiarne il segno. (disequazioni)
- Applicare il teorema.
- Descrivere la crescenza, decrescenza e punti di massimo e minimo relativi.

Determinare i punti critici

Punti critici: Massimo, Minimo, punto di sella, flesso.
Metodologia:

- Calcolare le derivate prime in base x ed y.
- Mettere a sistema queste derivate.
- Trovare gli eventuali punti.
- Calcolare le derivate seconde e fare l'Hessiano.
- Calcolare il determinante $det(Hf(x,y)) = (f_{xx} \cdot f_{yy}) - (f_{xy} \cdot f_{yx})$
- Calcolo la $f_{xx}(Punto)$.
- Sostituisco il punto nel determinante: $det(Hf(Punto))$
- In base ai risultati determino la natura del punto:
  - determinante positivo, primo elemento positivo $\rightarrow$ **punto di minimo relativo**
  - determinante positivo, primo elemento negativo $\rightarrow$ **punto di massimo relativo**
  - determinante negativo $\rightarrow$ **punto di sella**
  - determinante nullo $\rightarrow$ **il test è inconcludente**

Tabella dei gradi

Sine, Cosine, Tangent

Funzione	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.

Arcotangente

Arctan

Funzione	**-90°**	**-60°**	**-45°**	**-30°**	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
$\arctan(\theta)$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
$\pi = 180°$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$+\frac{\pi}{6}$	$+\frac{\pi}{4}$	$+\frac{\pi}{3}$	$+\frac{\pi}{2}$

Differenziabilità

Determinare se una funzione è differenziabile

- Esistono le derivate parziali prime nel punto (x_0, y_0)
- $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Derivata direzionale

Derivata direzionale rispetto a v nel punto (x_0, y_0):

$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos(\theta), y_0 + t\sin(\theta)) - f(x_0,y_0)}{t}$

Se chiamo $g(f) := f(x_0 + t\cos(\theta), y_0 + t\sin(\theta))$

$\Rightarrow D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0)$

(quindi fai la derivata prima e poi passi 0 a questa)

Gradiente

Teorema del Gradiente

Se f è differenziabile, allora esiste la derivata direzionale $D_v f(x_0, y_0)$ e vale:

$D_v f(x_0, y_0) = \bigtriangledown f(x_0, y_0) \cdot v$

$\bigtriangledown$ (gradiente) significa, almeno nel piano cartesiano, semplicemente le derivate prime in base ad x e y.

Teorema Derivazione della Composizione

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile

$\bigtriangledown h(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot \bigtriangledown f(x, y)$

Teoremi degli estremanti locali

Teorema di Fermat

Se f è derivabile in c e c è un estremante locale allora:

$f'(c) = 0$

Teorema di Rolle

Se f è continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$ allora:

$\exists d \in (a, b)$ tale che $f'(d) = 0$

Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) Allora:

$\exists d \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(d)(b - a)$

Esistenza e Calcolo del Piano Tangente in due variabili

Data una funzione $f(x, y)$ e un punto (x_0, y_0).

Il piano che contiene entrambe le rette è dato da:

$z = f(v_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

Asintoti

Asintoti verticali

$\lim_{x\to c\pm} f(x) = \pm\infty$

$c \in \mathbb{R}$

Asinti orizzontali

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Asintoti Obliqui

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Se $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$
- Se $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$
- Allora ho un asintoto obliquo di equazione: $y = mx + q$

O-Piccolo

Diciamo che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$

se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

es: $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$

es: $x^2 = o(x^3)$ per $x \to \infty$

Equazioni differenziali

Modello di Malthus
È stato il primo modello di dinamica delle popolazioni a essere introdotto ed è il più semplice modello di crescita esponenziale.
tasso r costante.
$N(t) =$ numero di individui al tempo t.
$N'(t) = rN(t) \Rightarrow N(t) = ce^{rt}$ è la soluzione.

Equazioni Differenziali del I Ordine Omogenee
È un'equazione che ha per incognita una funzione $y = f(x)$ e che stabilisce una relazione tra la variabile indipendente x, la funzione incognita f(x) e almeno una delle sue derivate.

Integrale Generale (o soluzione generale)
Insieme di tutte le funzioni $y = f(x)$ che risolvono l'equazione.

Soluzione particolare
È una determinata funzione che risolve l'equazione.

Problema di Cauchy
È la **soluzione particolare** di un'equazione differenziale di una funzione $y = f(x)$ in cui la curva integrale passa per un punto assegnato (x_0, y_0)

$$\begin{cases} y' = F(x; y) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

La condizione $y_0 = f(x_0)$ è detta **condizione iniziale** del problema di Cauchy.
Individuare la funzione $y = f(x)$ che soddisfa l'equazione differenziale e passa per il punto (x_0, y_0)

Equazioni differenziali a variabili separabili
Quando può essere scritta nella forma $y' = g(x) \cdot h(y)$, con $g(x)$ e $h(y)$ funzioni continue.

1. Separo le variabili y e x
2. Integro ciascun membro

Equazioni differenziali lineari
Quando la funzione incognita y e la sua derivata prima y' compaiono solamente in termini di primo grado.