

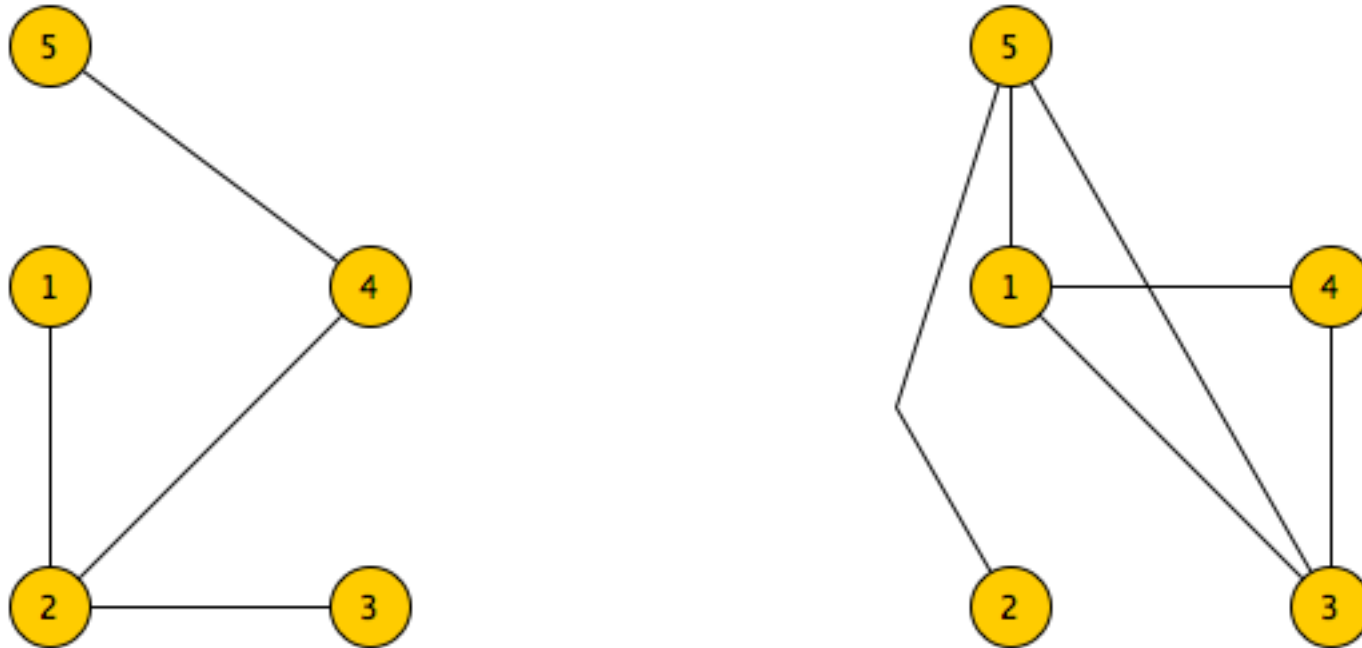
Progettazione di algoritmi

ESERCIZI 2

Esercizio 0:

Dato un grafo G il suo grafo complementare G^c è un grafo che ha gli stessi nodi di G ma in cui un arco è presente se e solo se manca a G .

Ad esempio, di seguito a sinistra un grafo G e a destra il suo complemento G^c

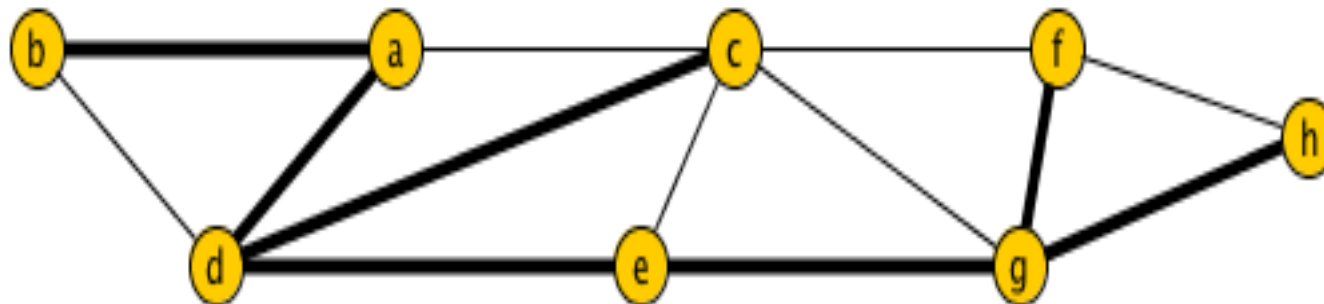


Dimostrare che, per ogni grafo G , almeno uno dei grafi G e G^c è connesso.

Esercizio 1:

Si consideri il grafo G nella figura qui sotto e l'albero T formato dagli archi marcati.

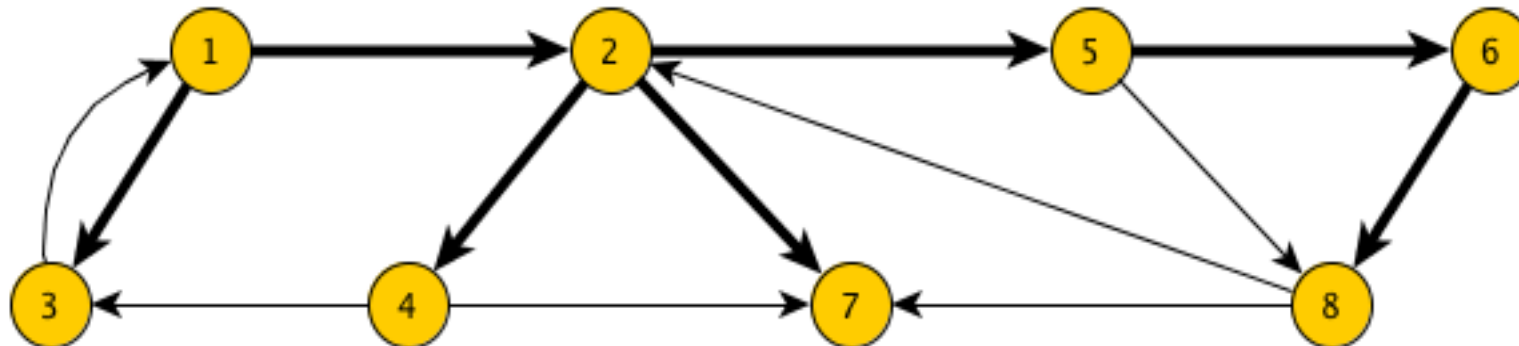
- L'albero T può essere stato prodotto da una DFS? In caso affermativo, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T e specificare il nodo da cui parte la visita e il numero di archi all'indietro che si ottengono a seguito della visita.



Esercizio 2:

Si consideri il grafo diretto G nella figura qui sotto e l'albero (arborescenza) T formato dagli archi marcati.

- L'albero T può essere stato prodotto da una DFS? In caso affermativo, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T e specificare il numero di archi all'indietro, in avanti e di attraversamento che si ottengono a seguito della visita.



Esercizio 3

Per un grafo diretto G , diciamo che un arco da u a v è *interno* se u e v appartengono alla stessa componente fortemente connessa e altrimenti diciamo che è *esterno*. In relazione ad una qualsiasi DFS, rispondere alle seguenti domande:

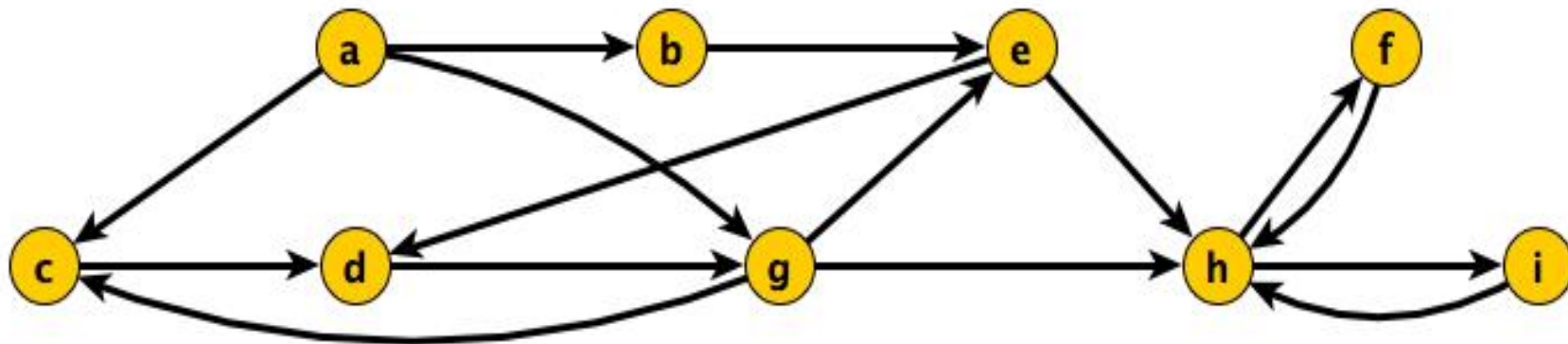
- 1) un arco in avanti può essere esterno?
- 2) un arco di attraversamento può essere interno?
- 3) un arco di attraversamento può essere esterno?
- 4) un arco all'indietro può essere esterno?

Per ognuna, in caso affermativo esibire un esempio e altrimenti dimostrare l'impossibilità.

Esercizio 4

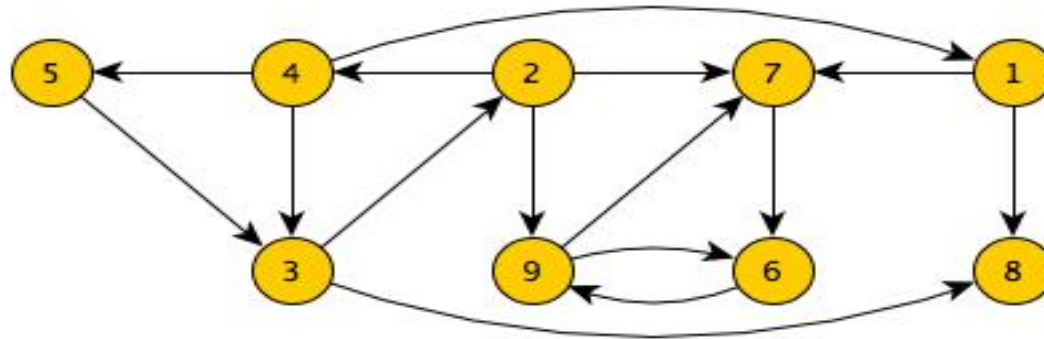
Applicando l'algoritmo di Tarjan al grafo nella figura qui sotto, partendo dal nodo a , (si assuma che il grafo è rappresentato tramite liste di adiacenza e che i nodi compaiono in queste liste in ordine lessicografico crescente) determinare le componenti fortemente connesse numerandole nell'ordine in cui sono trovate dall'algoritmo e per ognuna indicare la sua c -root.

Cosa cambia se i nodi compaiono nelle liste di adiacenza in ordine lessicografico decrescente?



Esercizio 5

Si consideri il grafo G nella figura qui sotto



si assuma che il grafo sia rappresentato tramite liste di adiacenza e che in ciascuna lista i nodi appaiono in ordine crescente.

- Determinare l'ordine con cui le componenti fortemente connesse di G vengono individuate dall'algoritmo di Tarjan e per ogni componente l'ordine con cui i nodi della componente sono prodotti.
- Come cambia l'ordine determinato al punto a) se si assume che nelle liste di adiacenza i nodi compaiono in ordine decrescente?

Esercizio 6

Dato un albero di n nodi rappresentato tramite il vettore dei padri P (per convenzione il padre del nodo radice è il nodo stesso) e due nodi dell'albero u e v , dare lo pseudocodice di un algoritmo che in tempo $O(n)$ calcola la distanza tra u e v nell'albero.

Ad esempio per

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$u = 9$ e $v = 4$ deve restituire 3 mentre $u = 3$ e $v = 6$ deve restituire 1.

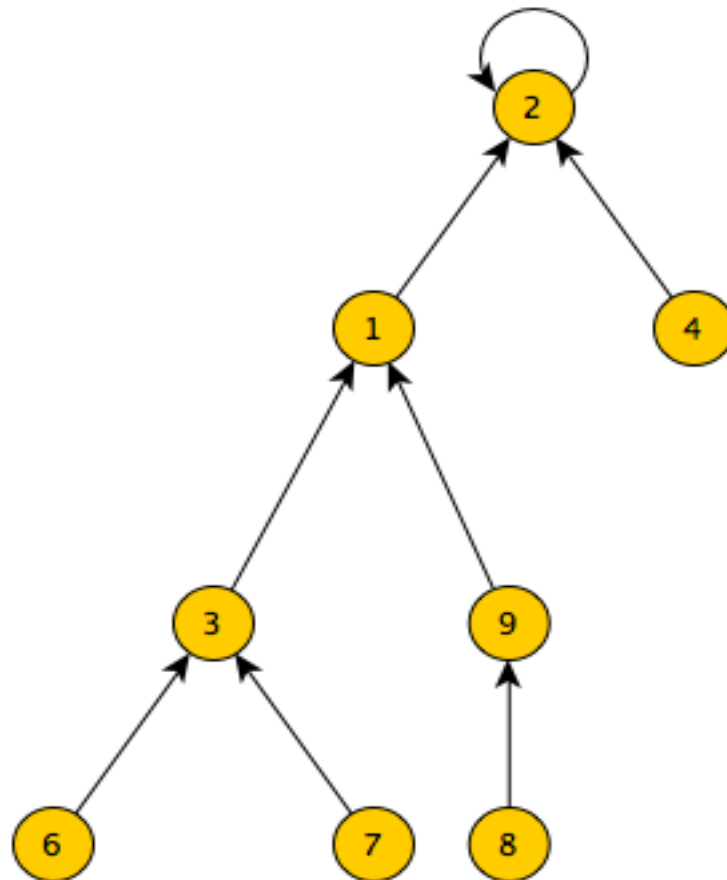
Ad esempio per

$P =$

2	2	1	2	4	3	3	9	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$u = 9$ e $v = 4$ deve restituire 3

$u = 3$ e $v = 6$ deve restituire 1.



Esercizio 7

Dato un albero di n nodi rappresentato tramite il vettore dei padri P (per convenzione il padre del nodo radice è il nodo stesso) e un suo nodo x , dare lo pseudocodice di un algoritmo che in tempo $O(n)$ produce la lista dei nodi di T presenti nel sottoalbero radicato in x .

Ad esempio per

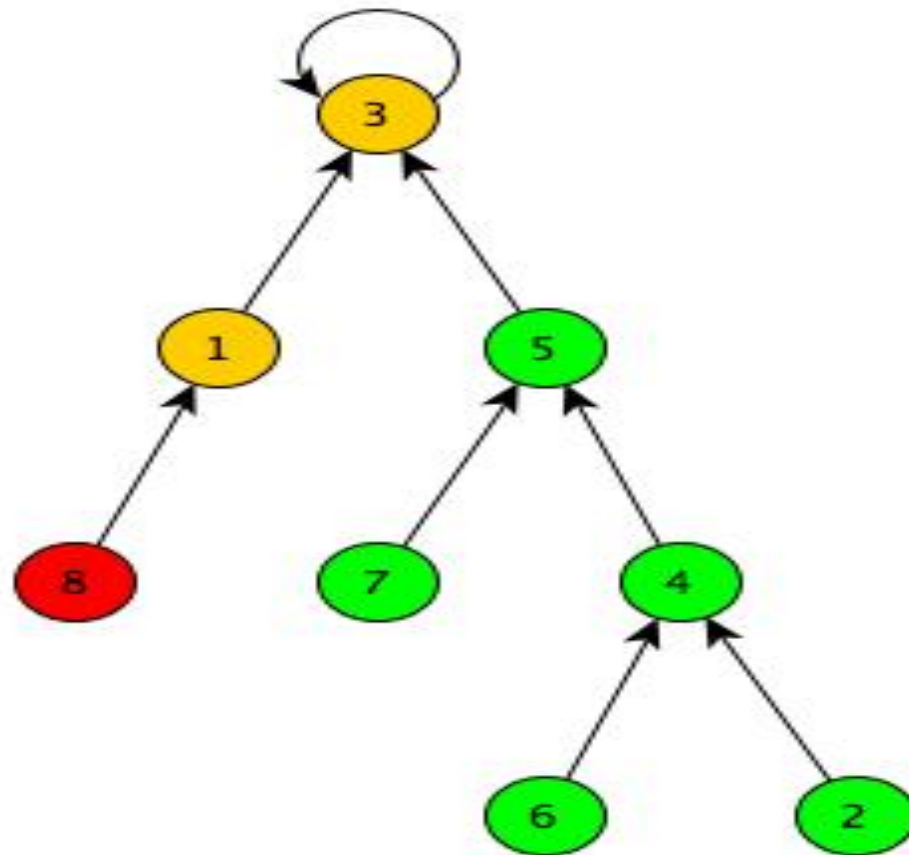
$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

e $x = 5$ deve restituire l'insieme $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ mentre per $x = 8$ deve restituire $\{8\}$

Ad esempio per

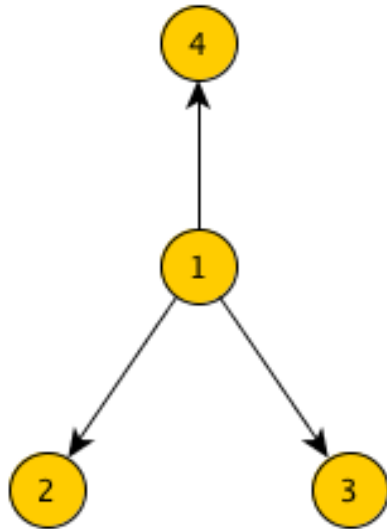
$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

e $x = 5$ deve restituire l'insieme $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ mentre per $x = 8$ deve restituire $\{8\}$

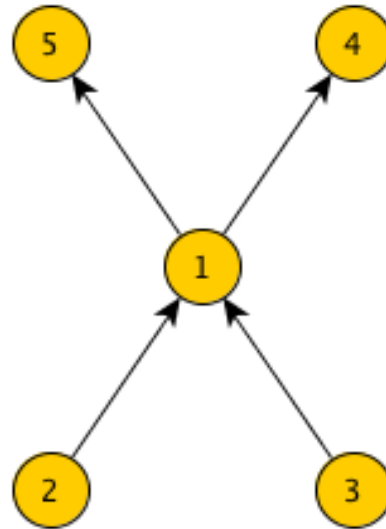


Esercizio 8

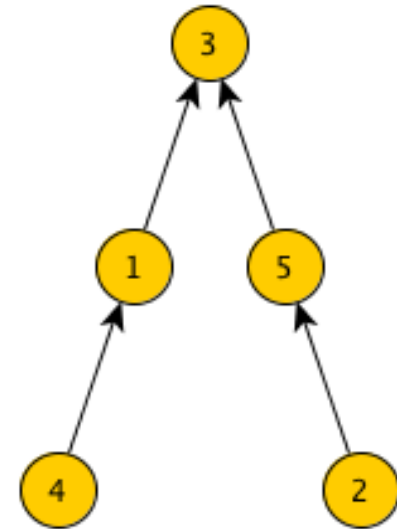
Per ognuno dei grafi diretti A , B e C qui sotto disegnati dare il numero di ordinamenti topologici possibili motivando le risposte.



A



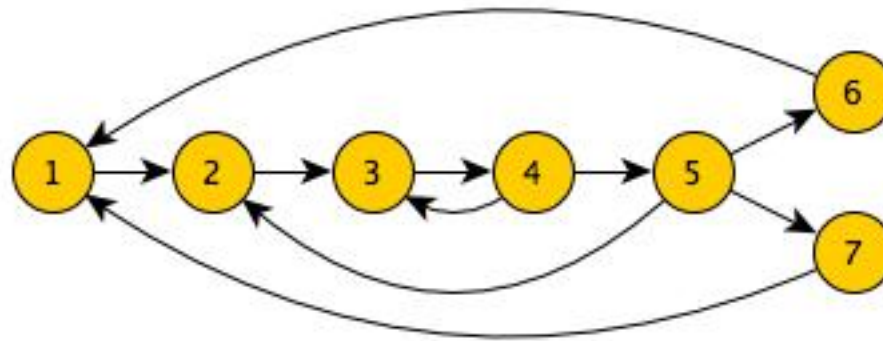
B



C

Esercizio 9

Si consideri il grafo G nella figura qui sotto



- a) Determinare il numero minimo di archi che bisogna eliminare da G perché il grafo ammetta ordinamenti topologici ****Motivare bene la risposta****
- b) Determinare i possibili ordinamenti topologici per il nuovo grafo ottenuto eliminando da G gli archi individuati al punto a)

Esercizio 10

Che caratteristiche deve avere un grafo connesso perché le visite DFS e BFS del grafo producano alberi di visita uguali? Motivare la risposta.