Corso di Progettazione di algoritmi

Esercizi 7

Esercizio 1

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato l'intero n, stampa tutte le stringhe lunghe n con simboli in $\{a, b\}$ dove i blocchi di simboli a di lunghezza massima che appaiono nella stringa hanno lunghezza pari.

Ad esempio per $n = 1$ viene stampata la sola stringa b mentre per $n = 5$, le stringhe da stampare sono:

$$bbbbb \quad aabbb \quad baabb \quad bbaab \quad bbbaa \quad baaaa \quad aabaa \quad aaaab$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(nS(n))$ dove $S(n)$ è il numero di stringhe da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 2

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato l'intero n, stampa tutte le stringhe lunghe n con simboli in $\{a, b\}$ che contengono un numero dispari di simboli a ed un numero dispari di simboli b.
Ad esempio per $n = 3$ non viene stampato nulla mentre per $n = 4$, le stringhe da stampare sono:

$$abbb \quad babb \quad bbab \quad bbba \quad baaa \quad abaa \quad aaba \quad aaab$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(nS(n))$ dove $S(n)$ è il numero di stringhe da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 3

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato un intero n, stampa tutte le stringhe palindromi lunghe $2n$ con valori in $\{a, b\}$.
Ad esempio per $n = 2$, le stringhe da stampare sono:

$$aaaa \quad abba \quad baab \quad bbbb$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(n2^n)$. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 4

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato l'intero n, stampa tutte le sequenze lunghe n formate da interi nell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ con la proprietà che nella sequenza numeri adiacenti distano almeno 2.
Ad esempio per $n = 3$ delle $4^3 = 64$ possibili sequenze ne vanno stampate solo 10, vale a dire:

$$131 \quad 141 \quad 142 \quad 241 \quad 242 \quad 313 \quad 314 \quad 413 \quad 414 \quad 424$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(nS(n))$ dove $S(n)$ è il numero di matrici da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 5

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato l'intero pari n, stampa tutte le permutazioni dei primi n interi in cui nell'ordinamento non appaiono mai due pari consecutivi nè due dispari consecutivi.
Ad esempio per $n = 4$ devono essere stampate le seguenti 8 permutazioni:

$$1234 \quad 1432 \quad 3214 \quad 3412 \quad 2143 \quad 2341 \quad 4123 \quad 4321$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(n^2 S(n))$ dove $S(n)$ è il numero di permutazioni da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 6

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che presi i tre interi n, m e k, stampa tutte le sequenze di n interi positivi con interi di valore al più m e nelle quali nessun intero compare più di k volte.

Ad esempio per $n = 3$, $m = 2$ e $k = 2$ le sequenze da stampare sono:

$$1, 1, 2 \quad 1, 2, 1 \quad 2, 1, 1 \quad 1, 2, 2 \quad 2, 1, 2 \quad 1, 2, 2$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(nS(n))$ dove $S(n)$ è il numero di sequenza da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 7

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato l'intero n, stampa tutte le matrici $n \times n$ e valori in $\{a, b, c\}$ con la proprietà che i simboli in ogni riga sono tutti uguali.

Ad esempio per $n = 2$ le matrici da stampare sono:

$$\begin{matrix} a & a \\ a & a \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & a \\ c & c \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b & b \\ a & a \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b & b \\ b & b \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} b & b \\ c & c \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c & c \\ a & a \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c & c \\ b & b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c & c \\ c & c \end{matrix}$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(n^2 S(n))$ dove $S(n)$ è il numero di matrici da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 8

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato l'intero n, stampa tutte le matrici ternarie $n \times n$ con la proprietà che le righe e le colonne della matrice risultano ordinate in modo crescente.

Ad esempio per $n = 2$ delle $3^4 = 81$ possibili matrici $n \times n$ ne vanno stampate solo 20, vale a dire:

$$\begin{matrix}1 & 1\\1 & 1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1\\1 & 2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1\\1 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1\\2 & 2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1\\2 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 1\\3 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 2\\1 & 2\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1 & 2\\1 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 2\\2 & 2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 2\\2 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 2\\3 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 3\\1 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 3\\2 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 3\\3 & 3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}2 & 2\\2 & 2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}2 & 2\\2 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}2 & 2\\3 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}2 & 3\\2 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}2 & 3\\3 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}3 & 3\\3 & 3\end{matrix}$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(n^2 S(n))$ dove $S(n)$ è il numero di matrici da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 9

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che dato l'intero n, stampa tutte le matrici binarie $n \times n$ con la proprietà che nella matrice non compaiono mai due uni adiacenti in orizzontale, in verticale o in diagonale.

Ad esempio per $n = 3$ delle $2^9 = 512$ possibili matrici $n \times n$ ne vanno stampate solo 35, vale a dire:

$$\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{matrix}$$

L'algoritmo deve avere complessità $O(n^2 S(n))$ dove $S(n)$ è il numero di matrici da stampare. Motivare la complessità del vostro algoritmo.

Esercizio 10

Un *quadrato magico* di ordine n è una matrice $n \times n$ contenente tutti gli interi in $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ assegnati in modo tale che la somma di ogni riga, di ogni colonna e delle due diagonali sia la stessa.
Ad esempio per $n = 5$ un possibile quadrato magico è

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Scrivere in pseudo-codice una procedura che, preso in input un intero n, stampi i diversi quadrati magici di ordine n (nota che la somma di tutti gli elementi della matrice è

$$\sum_{i=1}^{n^2} i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

quindi la somma comune alle righe, alle colonne ed alle due diagonali deve essere $\frac{n(n^2+1)}{2}$).

Esercizio 11

L'ufficio postale di uno stato permette l'uso di francobolli di n valori interi e diversi e proibisce l'uso di più di m francobolli per lettera. Scrivere in pseudo-codice una procedura che, presi in input m ed n, calcola il massimo intervallo a partire da 1 di affrancature possibili e tutti gli insiemi di valori che permettono di realizzarlo.
Ad esempio, per $n = 4$ e $m = 5$ l'intervallo massimo è $\{1, 2 \ldots, 71\}$ che si può ottenere solamente con i seguenti due insiemi di valori:
$\{1, 4, 12, 21\}$
$\{1, 5, 12, 28\}$.

Esercizio 12

Ci sono n lavori che vanno assegnati a k macchine che possono eseguirli in parallelo, $k \leq n$. Si dispone di un vettore V ad n componenti dove nella locazione $V[i]$ troviamo il tempo necessario per l'esecuzione dell'i-esimo lavoro. Descrivere in pseudo-codice una procedura che, presi il vettore V e e gli interi n e k, produce un assegnamento degli n lavori alle k macchine ed allo stesso tempo minimizza il il tempo di fine dell'esecuzione di tutti i lavori.

Esercizio 13

Dato un vettore circolare V di n locazioni (vale a dire un vettore in cui la locazione $i \geq 0$ equivale alla locazione $i \bmod n$) contenente interi, si dice che un intero x è generabile da V se esiste un sottovettore di V la somma dei cui elementi è x.
Scrivere in pseudo-codice una procedura che, presi in input tre interi positivi n, k ed m, stampa tutti i distinti vettori circolari di n locazioni i cui elementi sono interi maggiori o uguali a k e tali che la sequenza continua di elementi generati dai vettori e che ha come primo elemento m sia la più lunga possibile.
Per evitare di stampare rotazioni di uno stesso vettore circolare si stampi tra tutte le rotazioni quella che presenta l'elemento più piccolo in prima posizione.
Ad esempio per $n = 5$, $k = 1$ ed $m = 2$ La sequenza più lunga che parte da 2 e può ottenersi con un vettore circolare di 5 locazioni con elementi maggiori e uguali di 1 va da 2 a 21 e può ottenersi con 4 diversi vettori circolari.
Il programma stamperà

1	3	10	2	5
1	5	2	10	3
2	4	9	3	5
2	5	3	9	4