Corso di Progettazione di algoritmi

Esercizi 1

Esercizio 1

Progettare un algoritmo che prende come parametro un intero n e in tempo $O(\sqrt{n})$ verifica se il numero n è *semiprimo*.

Un numero si dice semiprimo se è il prodotto di due numeri primi (non necessariamente diversi).

Ad esempio 25 e 15 sono semiprimi, 17 e 12 no.

Esercizio 2

Abbiamo una sequenza S di n interi ed una soglia k. Possiamo selezionare x elementi a sinistra di S e y elementi a destra di S a patto che risulti $0 \leq x+y < n$ e la somma degli interi selezionati non superi k. Vogliamo sapere qul'è il numero massimo di 0 in S che è possibile selezionare.

Progettare un algoritmo che prende come parametri la sequenza S e la soglia k e restituisce il valore massimo tra quelli delle diverse selezioni ammissibili.

Ad esempio: Per $S = 1, 0, 2, 8, 0, 5, 1, 6, 0, 0, 3$ e $k = 8$ la risposta deve essere 3 (e si ottiene con $x = 2$ e $y = 3$).

- L'algoritmo deve avere complessità $O(n^3)$.
- L'algoritmo deve avere complessità $O(n^2)$.
- L'algoritmo deve avere complessità $O(n \log n)$.
- L'algoritmo deve avere complessità $O(n)$

Esercizio 3

a. Dimostrare che in un grafo connesso G ci sono sempre almeno due vertici che hanno lo stesso grado.

   – l'affermazione è ancora valida nel caso in cui il grafo non sia connesso?

b. Dimostrare che se tutti i vertici di un grafo G hanno grado almeno due allora nel grafo G c'è almeno un ciclo.
   Se il grado di ogni vertice è esattamente due, si può affermare che G e un ciclo?

Esercizio 4

1. Dimostrare che ogni grafo connesso contiene un vertice la cui rimozione non sconnette il grafo.

2. Dimostrare che ogni grafo connesso (con almeno due nodi) contiene due vertici la cui rimozione non sconnette il grafo.

Esercizio 5

Rispondere alle seguenti domande motivando bene la risposta

a. Quanti archi ha un grafo con n nodi i cui nodi hanno tutti grado k?

   – Dare condizioni necessarie e sufficienti su k perché un grafo di n nodi possa avere tutti i nodi di grado k.

b. Durante una visita in profondità di un grafo connesso con n nodi e m archi quante volte si incontreranno nodi già visitati (i.e. quante volte, nel corso della visita, nello scorrere le liste adiacenza dei vari nodi si incontreranno nodi già visitati) ?

   – Qual'è il numero dei nodi già visitati nel caso in cui il grafo sia diretto e fortemente connesso?

Esercizio 6

Sia G un grafo connesso. Per ogni nodo x, sia D_x la distanza massima in G per x (vale a dire: il numero massimo di archi che bisogna attraversare per raggiungere da x qualunque altro nodo di G). Rispondere alle seguenti domande:

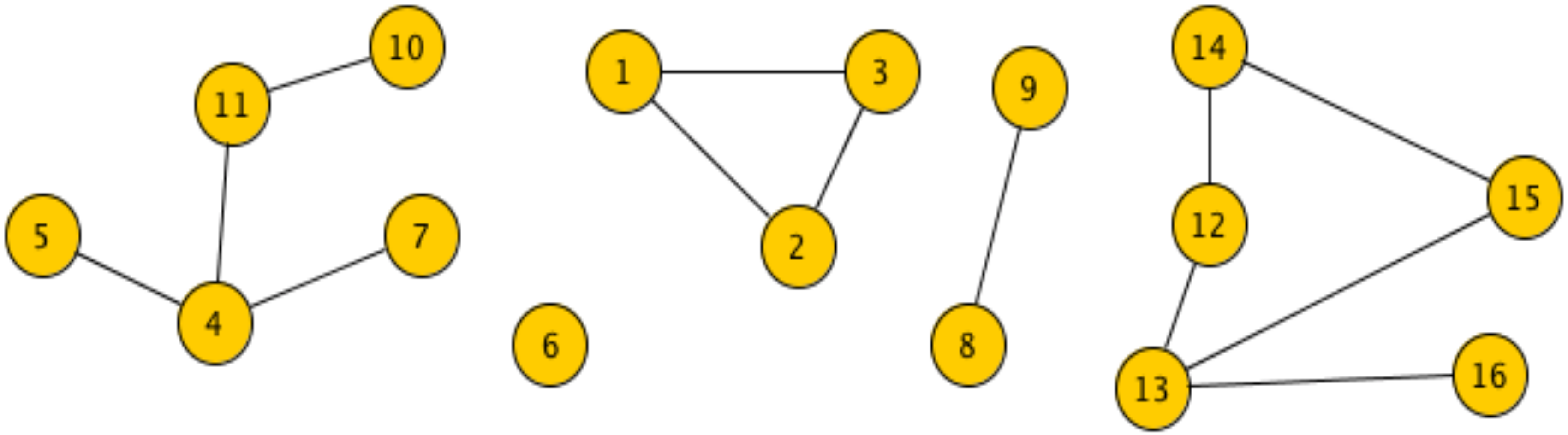
1. Possono esistere due nodi u e v in G tali che $D_u = 4$ e $D_v = 8$?

2. Possono esistere due nodi u e v in G tali che $D_u = 4$ e $D_v = 9$?

In caso affermativo esibite un esempio e altrimenti dimostrate l'impossibilità

Esercizio 7

Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che, dato un grafo non diretto G, conta il numero delle componenti connesse di G che sono anche alberi. L'algoritmo deve avere complessità $O(n+m)$. Ad esempio per il grafo in figura l'algoritmo ritorna 3.



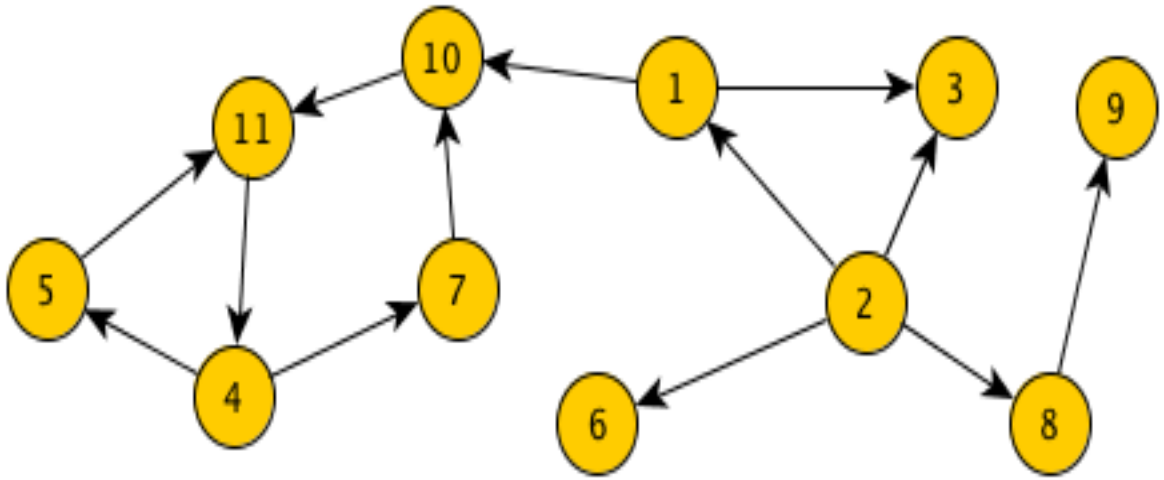
Esercizio 8

1. Sia G un grafo completo con m archi. Descrivere un algoritmo che dato G rappresentato tramite liste di adiacenza in $O(m)$ ne orienta gli archi producendo un grafo diretto aciclico.

2. Sia G un grafo con in cui sono presenti archi orientati e archi non orientati e privo di cicli orientati. È sempre possibile orientare gli archi non orientati in modo da ottenere da G un grafo diretto aciclico? In caso di risposta negativa produrre un contro-esempio. In caso di risposta positiva esibire un algoritmo che orienta gli archi di G e calcolarne la complessità.

Esercizio 9

Dato un grafo diretto G chiamiamo pozzo un suo nodo privo di archi uscenti. Dare lo pseudo-codice di un algoritmo che, dato un grafo diretto G ed un suo nodo u, conta i nodi pozzo raggiungibili a partire da u. L'algoritmo deve avere complessità $O(n+m)$. Ad esempio per il grafo in figura (che ha nodi pozzo $3, 6$ e 9) l'algoritmo con $u = 10$ ritorna 0, con $u = 2$ ritorna 3 e con $u = 9$ ritorna 1.



Esercizio 10

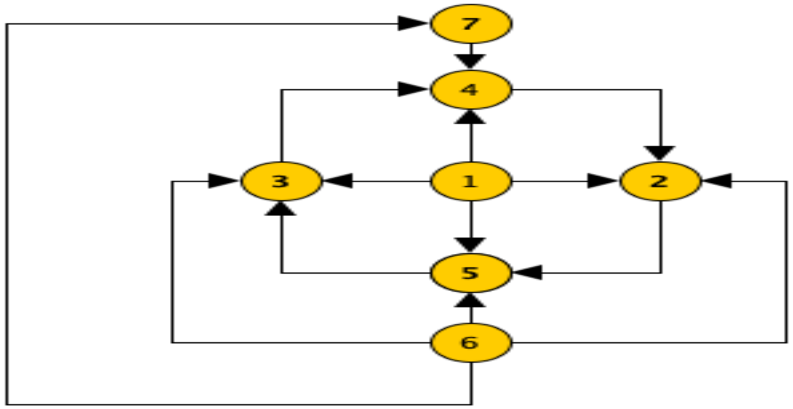
Sia G un grafo diretto aciclico con n nodi ed m archi.

1. Calcolare il numero massimo di archi che G può avere in termini di n.
2. Calcolare il numero minimo di componenti fortemente connesse che G può avere.

Sia T un albero radicato di n nodi in cui tutti gli archi sono stati orientati dal padre al figlio.

1. Calcolare il numero minimo di ordinamenti topologici che T può avere.
2. Calcolare il numero massimo di ordinamenti topologici che T può avere.

Esercizio 11



Assumiamo che il grafo G è rappresentato tramite liste di adiacenza e in ogni lista i nodi compaiono in ordine crescente.

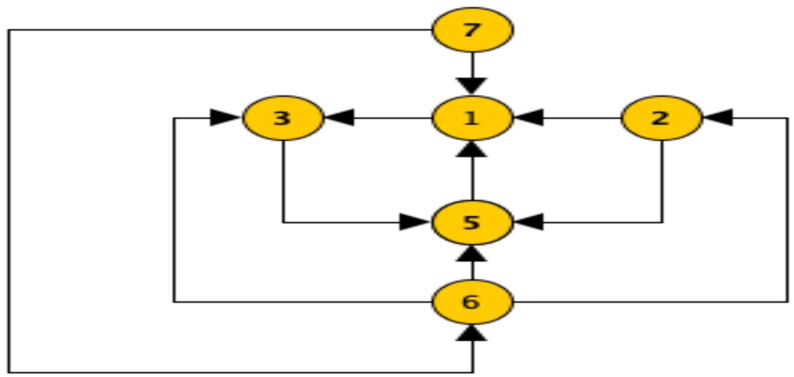
a) Disegnare l'arborescenza che si ottiene da G a seguito di una DFS che parte dal nodo 6 e specicare poi quanti archi all'indietro, quanti archi in avanti e quanti archi di attraversamento si incontrano durante la visita.

b) Individuare le componenti fortemente connesse del grafo G.

c) Qual'è il numero minimo di archi che bisogna inserire nel grafo G perchè risulti fortemente connesso? **Motivare bene la risposta**

d) Qual'è il numero minimo di archi che bisogna eliminare perché G risulti avere almeno un ordinamento topologico? **Motivare bene la risposta**.

Esercizio 12



Assumiamo che il grafo G è rappresentato tramite liste di adiacenza e in ogni lista i nodi compaiono in ordine crescente.

a) Disegnare l'arborescenza che si ottiene da G a seguito di una DFS che parte dal nodo 6 e specicare poi quanti archi all'indietro, quanti archi in avanti e quanti archi di attraversamento si incontrano durante la visita.

b) Individuare le componenti fortemente connesse del grafo G.

c) Qual'è il numero minimo di archi che bisogna inserire nel grafo G perchè risulti fortemente connesso? **Motivare bene la risposta**

d) Qual'è il numero minimo di archi che bisogna eliminare perché G risulti avere almeno un ordinamento topologico? **Motivare bene la risposta**.