



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
<http://tmancini.di.uniroma1.it>

Slides A.3 (S.A.3)

Analisi dei requisiti

Logica del Primo Ordine (FOL)

Indice

Queste slide sono composte dalle seguenti sottounità:

S.A.3.1. Introduzione

S.A.3.2. Sintassi

S.A.3.3. Semantica

S.A.3.3.1. Introduzione

S.A.3.3.2. Valutazione dei Termini

S.A.3.3.3. Valutazione delle Formule



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
<http://tmancini.di.uniroma1.it>

Slides A.3.1 (S.A.3.1)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Introduzione

Logica

Famiglia di **linguaggi formali** per rappresentare informazione e derivare conseguenze.

Ogni logica (come ogni altro linguaggio formale) è definita da una **sintassi** e una **semantica**.

Sintassi: Considera il linguaggio come l'insieme delle sequenze finite di simboli ammesse dal linguaggio (**formule**), dove ogni simbolo appartiene ad un insieme prefissato (**alfabeto**). La sintassi definisce quindi la **struttura** delle formule.

Semantica: Definisce il significato di ogni formula della logica, ovvero la sua **verità** nei diversi **mondi possibili**.

Logica (2)

Esempio: il linguaggio dell'aritmetica

- ▶ **Sintassi:** $x + 2 \geq y$ è una formula, $x^2 + y \geq$ non lo è.
- ▶ **Semantica:**
 - ▶ $x + 2 \geq y$ è **vero** sse valore di $x + 2$ non è minore del valore di y
 - ▶ $x + 2 \geq y$ è **vero** in un mondo dove $x = 7$ e $y = 1$
 - ▶ $x + 2 \geq y$ è **falso** in un mondo dove $x = 0$ e $y = 6$.

Nelle logiche classiche, ogni formula è **vera o falsa** in ogni mondo.

Dato mondo m e formula φ : $m \models \varphi$ sse φ è vera nel mondo m
 $\implies m$ **modello** di φ .

Logica: Sintassi

Sintassi: Considera il linguaggio come l'insieme delle sequenze finite di simboli ammesse dal linguaggio (**formule**), dove ogni simbolo appartiene ad un insieme prefissato (**alfabeto**). La sintassi definisce quindi la **struttura** delle formule.

Per definire la sintassi di una logica occorre stabilire:

- ▶ Quali simboli appartengono al suo **alfabeto**
- ▶ Quali sequenze finite di elementi dell'alfabeto (**formule**) compongono il linguaggio.

Nota: La sintassi stabilisce quali sequenze di simboli siano formule logiche, e non dice **nulla** sul loro significato.

Logica: Semantica

Semantica: Definisce il significato di ogni formula della logica, ovvero la sua **verità** nei diversi **mondi possibili**. In ogni mondo possibile, una formula può essere “vera” o “falsa”.

Idea:

- ▶ Si dà un significato (**interpretazione**) alle formule più semplici (atomiche).
- ▶ Si usano le regole del sistema logico per stabilire il significato di formule arbitrarie.

Simile a valutare un'espressione algebrica a partire dalla valutazione dei suoi termini atomici.

Esempio: Si dà una interpretazione (valore) ad x ed y
 \implies si usano le regole dell'aritmetica per valutare $x + y \leq 20$.

Logica (dei predicati) del primo ordine

- ▶ Sintassi
- ▶ Semantica
 - ▶ Interpretazione
 - ▶ Assegnamento di variabili
 - ▶ Modello
 - ▶ Valutazione di una formula rispetto ad una interpretazione e ad un assegnamento di variabili
- ▶ Soddisfacibilità
- ▶ Insoddisfacibilità
- ▶ Validità



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
<http://tmancini.di.uniroma1.it>

Slides A.3.2 (S.A.3.2)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Sintassi

Sintassi di FOL: Alfabeto

Definizione (Alfabeto della logica del primo ordine)

L'alfabeto della logica del primo ordine è dato da:

- ▶ un insieme \mathcal{V} di *variabili*
- ▶ un insieme \mathcal{F} di *simboli di funzione*, ognuno dei quali ha associato il suo numero di argomenti detto *arietà*
- ▶ un insieme \mathcal{P} di *simboli di predicato*, ognuno dei quali ha associato il suo numero di argomenti detto *arietà*
 \implies assumeremo che \mathcal{P} contenga il predicato di arità 2 “=” (chiamato *uguaglianza*)
- ▶ i *connettivi logici* $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- ▶ i *quantificatori* \forall ed \exists , denominati rispettivamente *quantificatore universale* e *quantificatore esistenziale*
- ▶ i *simboli speciali* “ (”, “) ” e “ , ” (virgola).

Alfabeto di FOL: osservazioni

- ▶ Poiché il simbolo di predicato “=” è **obbligatorio**, per semplicità spesso lo ometteremo nella lista dei simboli di interesse
- ▶ Per riferirci ad un simbolo di funzione f o ad un simbolo di predicato p di arità k , scriveremo rispettivamente f/k e p/k
- ▶ I simboli di funzione di arità 0 vengono anche detti **simboli di costante**
- ▶ Rispetto alla logica proposizionale, gli oggetti più simili alle lettere proposizionali sono i simboli di predicato di arità 0, che verranno appunto denominati **lettere proposizionali** anche in questo contesto.

Alfabeto di FOL: esempio

Alcuni **simboli di funzione** con i loro significati “**intuitivi**”:

- ▶ zero/0
il numero naturale 0 – simbolo di costante
- ▶ succ/1
succ(X) è il numero naturale $X + 1$ (successore di X)
- ▶ socrate/0
l’individuo “Socrate” – simbolo di costante
- ▶ padre/1
padre(X) è il padre dell’individuo X .

Alfabeto di FOL: esempio (2)

Alcuni **simboli di predicato** con i loro significati “**intuitivi**”:

- ▶ doppio/2
doppio(X, Y): il numero naturale Y è il doppio del numero naturale X
- ▶ somma/3
somma(X, Y, Z): il numero naturale Z è la somma dei numeri naturali X ed Y
- ▶ uomo/1
uomo(X): l'individuo X è un uomo
- ▶ mortale/1
mortale(X), l'individuo X è mortale.

Sintassi di FOL: formule

A partire dall'alfabeto si può definire il **linguaggio** della logica del primo ordine.

Questo linguaggio ha una struttura sintattica più complessa di quello della logica proposizionale: la sua definizione induttiva deve essere effettuata in **due passi**:

1. Viene definito un linguaggio intermedio, chiamato **linguaggio dei termini**
2. Si definisce il **linguaggio delle formule** (o della logica del prim'ordine), utilizzando nella regola base della definizione il linguaggio dei termini.

Il linguaggio dei termini

Definizione (Termini)

L'insieme dei *termini* è definito induttivamente come segue:

- ▶ ogni variabile in \mathcal{V} è un termine
- ▶ ogni simbolo di costante in \mathcal{F} è un termine
- ▶ se f è un simbolo di funzione ($f \in \mathcal{F}$) di arità $n > 0$ e t_1, \dots, t_n sono termini, allora anche $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine.

Il linguaggio dei termini (2)

Esempio:

Sia $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1, \text{socrate}/0, \text{padre}/1\}$

Le seguenti sequenze di simboli sono termini (MiaVariabile e X sono variabili)

- | | |
|-----------------|--------------------------|
| 1. zero | 4. padre(padre(socrate)) |
| 2. MiaVariabile | 5. padre(succ(X)) |
| 3. succ(zero) | 6. succ(succ(zero)) |

Idea: i termini denotano **oggetti di interesse**

(**quale** oggetto di interesse è denotato da un termine non è stabilito dalla sintassi!)

Il linguaggio delle formule

Definizione (Formule)

L'insieme delle *formule* è definito *induttivamente* come segue:

- ▶ se p è un *simbolo di predicato* di arità n e t_1, \dots, t_n sono *termini*, $p(t_1, \dots, t_n)$ è una formula (detta formula *atomica*)
- ▶ se ϕ e ψ sono formule, lo sono anche:

▶ (ϕ)	▶ $\phi \vee \psi$	▶ $\phi \rightarrow \psi$
▶ $\neg \phi$	▶ $\phi \wedge \psi$	▶ $\phi \leftrightarrow \psi$
- ▶ se ϕ è una formula e X è una variabile allora anche $\forall X \phi$ e $\exists X \phi$ sono formule.

Scriveremo $X = Y$ invece di $=(X, Y)$ e $X \neq Y$ al posto di $\neg(X = Y)$ (a sua volta al posto di $\neg=(X, Y)$).

Il linguaggio delle formule (2)

Esempio: siano

- ▶ $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1, \text{socrate}/0, \text{padre}/1\}$
- ▶ $\mathcal{P} = \{\text{doppio}/2, \text{somma}/3, \text{uomo}/1, \text{mortale}/1\}.$

Le seguenti sequenze di simboli sono **formule**:

- ▶ $\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)$
- ▶ $\exists X \text{ doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)$
- ▶ $\forall X \text{ doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)$
- ▶ $\text{somma}(\text{succ}(\text{zero}), \text{zero}, \text{succ}(\text{zero}))$
- ▶ $\forall X \forall Y \text{ somma}(X, X, Y) \rightarrow \text{doppio}(X, Y)$
- ▶ $(\forall X \exists Y \text{ doppio}(X, Y)) \wedge (\forall I \forall J \exists K \text{ somma}(I, J, K))$
- ▶ $\text{mortale}(\text{socrate})$
- ▶ $\text{mortale}(\text{socrate}) \wedge \text{mortale}(\text{padre}(\text{socrate}))$
- ▶ $\forall X \text{ mortale}(X)$

Il linguaggio delle formule (3)

- ▶ $(\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(X)) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$
- ▶ $\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{uomo}(\text{padre}(X))$
- ▶ $\forall X \text{ uomo}(\text{socrate})$
- ▶ $\forall X \forall Y \text{ uomo}(X)$
- ▶ $\text{uomo}(X)$
- ▶ $X = \text{socrate}$
- ▶ $X = Y$
- ▶ $\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{uomo}(\text{socrate}).$

Il linguaggio delle formule (4)

Le seguenti sequenze di simboli **non** sono formule:

- ▶ $\text{succ}(\text{zero})$
- ▶ $\text{mortale}(\text{mortale}(\text{socrate}))$
- ▶ $\text{padre}(\text{mortale}(X))$
- ▶ $\exists \text{socrate mortal}(\text{socrate})$
- ▶ $\exists X \text{ padre}(X)$
- ▶ $X \vee Y$
- ▶ $\text{zero} \wedge \text{zero}$
- ▶ $X \wedge \text{zero} =$



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
<http://tmancini.di.uniroma1.it>

Slides A.3.3 (S.A.3.3)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
<http://tmancini.di.uniroma1.it>

Slides A.3.3.1 (S.A.3.3.1)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica
Introduzione

Richiamo: semantica nella logica proposizionale

- ▶ Formule atomiche \implies lettere proposizionali
- ▶ Interpretazione: funzione I che assegna un valore di verità ad ogni lettera proposizionale
- ▶ Funzione di valutazione (predefinita nella logica!) che date:
 - ▶ una formula arbitrariamente complessa
 - ▶ una interpretazione sulle sue lettere (sottoformule atomiche)calcola il valore di verità della formula rispetto all'interpretazione data.

Richiamo: semantica nella logica proposizionale (2)

Esempio:

- ▶ Formula: $\varphi : a \wedge (b \vee c)$
- ▶ Lettere proposizionali in φ : $\{a, b, c\}$
- ▶ Interpretazione I : $I(a) = \text{true}$, $I(b) = \text{true}$, $I(c) = \text{false}$

La valutazione della formula avviene per **induzione** dai valori delle sue sotto-formule atomiche (lettere) dati dall'interpretazione I .

Richiamo: semantica nella logica proposizionale (3)

Esempio (continua):

- ▶ Formula: $\varphi : a \wedge (b \vee c)$
- ▶ Interpretazione I : $I(a) = \text{true}$, $I(b) = \text{true}$, $I(c) = \text{false}$.

La funzione induttiva di valutazione è predefinita nella logica (e implementa la nota semantica dei connettivi logici):

1. **Passo base** La formula atomica b vale $I(b) = \text{true}$
2. **Passo base** La formula atomica c vale $I(c) = \text{false}$
3. **Passo induttivo** La formula $(b \vee c)$ vale true (semantica di \vee)
4. **Passo base** La formula atomica a vale $I(a) = \text{true}$
5. **Passo induttivo** La formula $a \wedge (b \vee c)$ vale true (semantica di \wedge).

- \implies La formula proposizionale φ è **vera** nell'interpretazione I .
 \implies L'interpretazione I è un **modello** di φ : $I \models \varphi$.

Richiamo: semantica nella logica proposizionale (4)

Si può estendere il significato di ogni formula proposizionale senza riferimento a particolari interpretazioni:

- ▶ formula **soddisfacibile**: **esiste** una interpretazione che è suo modello
- ▶ formula **valida**: **ogni** interpretazione è suo modello
- ▶ formula **insoddisfacibile**: **nessuna** interpretazione è suo modello.

Esempio:

- ▶ la formula $a \wedge (b \vee c)$ è **soddisfacibile**
- ▶ la formula $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)$ è **valida**
- ▶ la formula $(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow b) \wedge \neg b$ è **insoddisfacibile**.

Semantica della logica del prim'ordine

Stesso itinerario concettuale della logica proposizionale:

1. Si definisce la nozione di **interpretazione** (valutazione delle formule atomiche)
2. Si definisce come viene valutata una formula **data** una **particolare** interpretazione
3. Si stabilisce il significato di ogni formula senza riferimento a particolari interpretazioni.

Semantica: termini vs. formule

La struttura del linguaggio evidenzia **due livelli sintattici**:

- ▶ Il livello dei termini
- ▶ Il livello delle formule

Abbiamo bisogno quindi di **due nozioni di valutazione**:

- ▶ La **valutazione dei termini**:
 - ▶ Valutazione dei termini atomici:
 - ▶ **Pre-interpretazione** (valutazione dei simboli di funzione)
 - ▶ **Assegnamento di variabili** (valutazione delle variabili)
 - ▶ Funzione (predefinita nella logica) di valutazione dei termini “complessi” a partire dalla valutazione dei termini atomici
- ▶ La **valutazione delle formule**: ...

Semantica: termini vs. formule (2)

Abbiamo bisogno quindi di **due nozioni di valutazione**:

- ▶ La **valutazione dei termini**: ...
- ▶ La **valutazione delle formule**:
 - ▶ Valutazione delle formule atomiche:
 - ▶ **interpretazione**
 - ▶ Valutazione (predefinita nella logica) delle formule “complesse” a partire dalla valutazione delle formule atomiche.

Semantica: esempio

Iniziamo **informalmente** con un semplice esempio.

Esempio: siano

$$\blacktriangleright \mathcal{F} = \{\text{socrate}/0, \text{padre}/1\} \qquad \blacktriangleright \mathcal{P} = \{\text{uomo}/1, \text{mortale}/1\}$$

Per valutare la formula:

$$(\forall X \text{uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

dobbiamo fornire:

Semantica: esempio (2)

Esempio (continua): Per valutare la formula

$$(\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

dobbiamo fornire:

Livello dei termini:

- ▶ un insieme \mathcal{D} di “oggetti del mondo” (**dominio**)
- ▶ una corrispondenza dai **simboli di funzione** a **funzioni** su \mathcal{D} (funzioni di opportuna arità):
 - ▶ $\text{socrate}/0$ (simbolo di costante) \implies funzione da \mathcal{D}^0 a \mathcal{D}
 \implies elemento di \mathcal{D}
 - ▶ $\text{padre}/1$ (simbolo di funzione 1-aria) \implies funzione da \mathcal{D}^1 a \mathcal{D}
- ▶ una corrispondenza dalle **variabili** a **elementi** di \mathcal{D} :
 - ▶ X (variabile) \implies elemento di \mathcal{D}

Livello della formula: ...

Semantica: esempio (3)

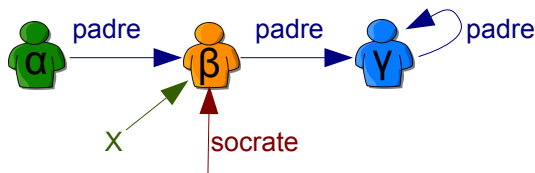
Esempio (continua): Una possibile interpretazione della formula

$$(\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

è la seguente:

Livello dei termini:

$$\mathcal{D} = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$$



Livello della formula: ...

Semantica: esempio (4)

Esempio (continua): Per valutare la formula

$$(\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

dobbiamo fornire:

Livello dei termini: ...

Livello della formula:

- ▶ una corrispondenza dai **simboli di predicato** a **relazioni** su \mathcal{D} di **opportuna arità**:
 - ▶ $\text{uomo}/1 \implies$ relazione 1-aria su \mathcal{D} (\implies sottoinsieme di \mathcal{D}^1)
 - ▶ $\text{mortale}/1 \implies$ relazione 1-aria su \mathcal{D} (\implies sottoinsieme di \mathcal{D}^1)

Semantica: esempio (5)

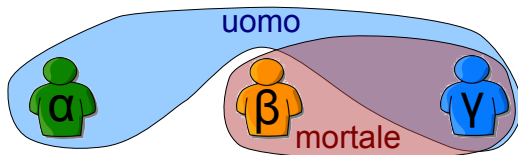
Esempio (continua): Una possibile interpretazione della formula

$$(\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

è la seguente:

Livello dei termini: ...

Livello della formula:



Semantica: esempio (6)

Esempio (riepilogo): Una possibile interpretazione della formula

$$(\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

è la seguente:

Livello dei termini:

- ▶ $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- ▶ socrate/0 associato all'elemento β (funzione $\mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}$)
- ▶ padre/1 associato alla seguente funzione $P : \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}$:

$$P(\alpha) = \beta, P(\beta) = \gamma, P(\gamma) = \gamma$$

- ▶ X associato a β

Livello della formula:

- ▶ uomo/1 associato alla relazione $U \subseteq \mathcal{D}^1$: $U = \{\alpha, \gamma\}$
- ▶ mortale/1 associato alla relazione $M \subseteq \mathcal{D}^1$: $M = \{\beta, \gamma\}$.



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
<http://tmancini.di.uniroma1.it>

Slides A.3.3.2 (S.A.3.3.2)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica
Valutazione dei Termini

Valutazione dei termini

Ricordiamo la definizione induttiva dei **termini** (sintassi):

Definizione (Termini)

*L'insieme dei **termini** è definito induttivamente come segue:*

- ▶ *ogni variabile in \mathcal{V} è un termine*
- ▶ *ogni simbolo di costante in \mathcal{F} è un termine*
- ▶ *se f è un simbolo di funzione ($f \in \mathcal{F}$) di arità $n > 0$ e t_1, \dots, t_n sono termini, allora anche $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine*

Valutazione dei termini (2)

Per valutare ogni termine che può essere scritto a partire da un insieme di variabili \mathcal{V} e un insieme di simboli di funzione \mathcal{F} abbiamo bisogno di definire:

- ▶ la valutazione dei termini atomici:
 - ▶ **pre-interpretazione** (valutazione dei simboli di funzione)
 - ▶ **assegnamento di variabili** (valutazione delle variabili)
- ▶ la funzione (predefinita nella logica) di valutazione dei termini “complessi” a partire dalla valutazione dei termini atomici.

Pre-interpretazione

Definizione (Pre-interpretazione)

Sia \mathcal{F} un insieme di simboli di funzione.

Una *pre-interpretazione* prel per \mathcal{F} è costituita da:

- ▶ un insieme *non vuoto* \mathcal{D} : il *dominio di interpretazione* (finito o infinito)
- ▶ una corrispondenza che associa ad ogni simbolo di funzione $f/n \in \mathcal{F}$ di arità $n \geq 0$ una *funzione* (totale) del tipo

$$\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$$

denotata “ $\text{prel}(f)$ ” (se $n = 0$, la funzione associa al simbolo di costante $f/0$ un elemento di \mathcal{D})

Esempio di pre-interpretazione: *preNAT*

Sia $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1\}$.

Definiamo la pre-interpretazione *preNAT* per \mathcal{F} come segue:

- ▶ il dominio di interpretazione \mathcal{D} è l'insieme degli interi non negativi:
 $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- ▶ $\text{preNAT}(\text{zero}) = 0 \in \mathcal{D}$
- ▶ $\text{preNAT}(\text{succ})$ è la funzione $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ definita come:

$$\begin{array}{ll} \text{preNAT}(\text{succ})(0) = 1 & \text{preNAT}(\text{succ})(2) = 3 \\ \text{preNAT}(\text{succ})(1) = 2 & \dots \end{array}$$

preNAT associa correttamente al simbolo *unario* *succ*/1 una funzione del tipo $\mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}$ (funzione unaria)

Per nostra scelta, la funzione (totale) $\text{preNAT}(\text{succ})$ codifica correttamente la funzione successore sugli interi non negativi

Assegnamento di variabili

Definizione (Assegnamento di variabili)

Sia \mathcal{V} un insieme di variabili e sia $prel$ una pre-interpretazione con dominio \mathcal{D} .

*Un **assegnamento delle variabili** \mathcal{V} per $prel$ è una funzione*

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{D}$$

che associa ad ogni variabile in \mathcal{V} un elemento del dominio di interpretazione di $prel$.

Nota: manteniamo l'assegnamento di variabili **separato** dalla pre-interpretazione. Questo risulterà comodo per valutare formule con variabili quantificate

Esempio: assegnamento di variabili per *preNAT*

Sia $\mathcal{V} = \{X, Y, Z\}$. Considerando la pre-interpretazione *preNAT* in cui il dominio di interpretazione \mathcal{D} è l'insieme degli interi non negativi, la funzione W tale che

- ▶ $W(X) = 3$
- ▶ $W(Y) = 6$
- ▶ $W(Z) = 4$

è un assegnamento delle variabili \mathcal{V} per *preNAT*

Valutazione dei termini

Siano \mathcal{F} un insieme di simboli di funzione e \mathcal{V} un insieme di variabili.

Per valutare un termine (arbitrariamente complesso) su \mathcal{F} e \mathcal{V} , dobbiamo avere a disposizione:

- ▶ una **pre-interpretazione** $prel$ per \mathcal{F} e
- ▶ un **assegnamento delle variabili** \mathcal{V} per $prel$.

Valutazione dei termini (2)

Definizione (Valutazione di termini) Dati \mathcal{V} e \mathcal{F} , sia \mathcal{T} l'insieme di tutti i termini che possono essere generati da \mathcal{V} e \mathcal{F} . Dati una pre-interpretazione $prel$ su dominio \mathcal{D} e un assegnamento di variabili S per $prel$, la funzione

$$pre\text{-}eval^{prel, S} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}$$

è definita induttivamente come segue, seguendo la struttura induttiva dei termini:

1. **caso base** (termini atomici):
 - 1.1. se X è una variabile: $pre\text{-}eval^{prel, S}(X) = S(X)$
 - 1.2. se c è un simbolo di costante: $pre\text{-}eval^{prel, S}(c) = prel(c)$
2. **caso induttivo** (termini complessi):
 - 2.1. se f è un simbolo di funzione di arità $n > 0$ e t_1, \dots, t_n sono termini: $pre\text{-}eval^{prel, S}(f(t_1, \dots, t_n)) = prel(f)(pre\text{-}eval^{prel, S}(t_1), \dots, pre\text{-}eval^{prel, S}(t_n))$

Valutazione dei termini: esempio

Sia $\mathcal{V} = \{X, Y, Z\}$ e $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1\}$.

Riconsideriamo la pre-interpretazione *preNAT* e l'assegnazione W :

$$\begin{array}{lll} \blacktriangleright W(X) = 3 & \blacktriangleright W(Y) = 6 & \blacktriangleright W(Z) = 4 \end{array}$$

L'insieme \mathcal{T} dei termini che possono essere generati da \mathcal{V} e \mathcal{F} è:

$\text{zero}, \quad X, \quad Y, \quad Z, \quad \text{succ}(\text{zero}), \quad \text{succ}(X), \quad \text{succ}(Y),$
 $\text{succ}(Z), \quad \text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), \quad \text{succ}(\text{succ}(X)), \quad \text{succ}(\text{succ}(Y)),$
 $\text{succ}(\text{succ}(Z)), \quad \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))), \quad \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(X))),$
 $\text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(Y))), \quad \text{succ}(\text{succ}(\text{succ}(Z))), \dots$

Nota: \mathcal{T} è infinito, data la presenza in \mathcal{F} di simboli di arità > 0 .

Valutazione dei termini: esempio (2)

A cosa corrisponde $pre\text{-}eval^{preNAT, W}(\text{zero})$?

- La pre-interpretazione $preNAT$ associa il simbolo $\text{zero} \in \mathcal{F}$ di arità zero (simbolo di costante) all'elemento $0 \in \mathcal{D}$ [caso 1.2]

Quindi $pre\text{-}eval^{preNAT, W}(\text{zero}) = preNAT(\text{zero}) = 0$

Valutazione dei termini: esempio (3)

A cosa corrisponde $pre\text{-}eval^{preNAT, W}(\text{succ}(\text{succ}(X)))$?

$$= preNAT(\text{succ})(pre\text{-}eval^{preNAT, W}(\text{succ}(X))) \quad [\text{caso 2.1}]$$

$$= preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(pre\text{-}eval^{preNAT, W}(X))) \quad [\text{caso 2.1}]$$

$$= preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(W(X)))$$

$$= preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(3)) \quad [\text{caso 1.1}]$$

La pre-interpretazione $preNAT$ associa il simbolo $\text{succ} \in \mathcal{F}$ di arità 1 alla funzione $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ definita come:

$$\begin{array}{ll} preNAT(\text{succ})(0) = 1 & preNAT(\text{succ})(2) = 3 \\ preNAT(\text{succ})(1) = 2 & \dots \end{array}$$

Quindi:

$$= preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(3)) = preNAT(\text{succ})(4) = 5$$



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
<http://tmancini.di.uniroma1.it>

Slides A.3.3.3 (S.A.3.3.3)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica
Valutazione delle Formule

Interpretazione

Definizione (Interpretazione)

Una *interpretazione* I è costituita da:

- ▶ Una *pre-interpretazione* $preI$ (che a sua volta definisce un dominio \mathcal{D} e una funzione su \mathcal{D} per ogni simbolo di funzione)
- ▶ Una funzione che associa ad ogni *simbolo di predicato* p/n di arità n una *relazione* $I(p)$ su \mathcal{D}^n :

$$I(p) \subseteq \underbrace{\mathcal{D} \times \cdots \times \mathcal{D}}_{n \text{ volte}}$$

Tale corrispondenza *deve* assegnare al simbolo di predicato “=” la relazione $\{(d, d) \mid d \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$

Nota: una (pre-)interpretazione *non* include un assegnamento di variabili!

Interpretazione (2)

Interpretazione di “=”

L'ultimo punto della definizione di interpretazione chiarisce che l'interpretazione di “=” deve rispettare i vincoli intuitivi dell'uguaglianza.

Ad esempio

- ▶ se abbiamo una interpretazione I con dominio di interpretazione $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$,
- ▶ allora la relazione associata da I al simbolo “=” deve essere **necessariamente** quella definita come:

$$\{(d_1, d_1), (d_2, d_2), (d_3, d_3)\}$$

Esempio di interpretazione: *NAT*

Siano:

- ▶ $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1\}$
- ▶ $\mathcal{P} = \{\text{doppio}/2, \text{somma}/3\}$

L'interpretazione *NAT* è definita in questo modo:

- ▶ la pre-interpretazione è *preNAT* (cfr. esempio precedente)
- ▶ $\text{NAT}(\text{doppio}) = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \dots\} = \{\langle x, y \rangle \mid y = 2x\}$
- ▶ $\text{NAT}(\text{somma}) = \{\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 2 \rangle, \dots\} = \{\langle x, y, z \rangle \mid z = x + y\}$

Valutazione di formule

Sia \mathcal{F} un insieme di simboli di funzione, \mathcal{P} un insieme di simboli di predicato e \mathcal{V} un insieme di variabili.

Per valutare una formula (arbitrariamente complessa) su \mathcal{F} , \mathcal{P} e \mathcal{V} , abbiamo bisogno di:

- ▶ una **interpretazione** I su \mathcal{P} , che include una pre-interpretazione *prel* su \mathcal{F}
- ▶ un **assegnamento alle variabili** \mathcal{V} per *prel*.

Valutazione di formule (2)

Definizione (Valutazione di una formula)

Siano dati \mathcal{V} , \mathcal{F} e \mathcal{P} , e sia Φ l'insieme di tutte le formule che possono essere generate da \mathcal{V} , \mathcal{F} e \mathcal{P} .

Sia I una interpretazione su \mathcal{P} che include una pre-interpretazione $preI$ su \mathcal{F} . Sia inoltre S un assegnamento alle variabili \mathcal{V} per $preI$.

Definiamo, in dipendenza da I e da S , la funzione

$$eval^{I,S} : \Phi \longrightarrow \{true, false\}$$

come segue:

Valutazione di formule (3)

Definizione (Valutazione di una formula) (continua)

La funzione è definita in modo induttivo, seguendo la struttura induttiva delle formule:

1. **caso base** (formule atomiche):

1.1. se p/n è un simbolo di predicato e t_1, \dots, t_n sono termini:

$$eval^{I,S}(p(t_1, \dots, t_n)) = I(p)(pre-eval^{prel,S}(t_1), \dots, pre-eval^{prel,S}(t_n))$$

2. **caso induttivo** (formule complesse):

...

Valutazione di formule (4)

Definizione (Valutazione di una formula) (continua)

1. caso base (formule atomiche): ...

2. caso induttivo (formule complesse):

2.1. se ϕ e ψ sono formule allora (similm. alla logica prop.):

- $eval^{I,S}(\phi) = eval^{I,S}(\phi)$
- $eval^{I,S}(\neg\phi) = \text{true se } eval^{I,S}(\phi) = \text{false};$
 $= \text{false altrimenti}$
- $eval^{I,S}(\phi \vee \psi) = \text{true se } eval^{I,S}(\phi) = \text{true oppure}$
 $\text{se } eval^{I,S}(\psi) = \text{true}$
 $= \text{false altrimenti}$
- $eval^{I,S}(\phi \wedge \psi) = \text{true se } eval^{I,S}(\phi) = eval^{I,S}(\psi) = \text{true}$
 $= \text{false altrimenti}$
- $eval^{I,S}(\phi \rightarrow \psi) = eval^{I,S}(\neg\phi \vee \psi)$
- $eval^{I,S}(\phi \leftrightarrow \psi) = eval^{I,S}((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$

2.2. ...

Valutazione di formule (5)

Definizione (Valutazione di una formula) (continua)

1. **case base** (formule atomiche): ...
2. **caso induttivo** (formule complesse):
 - 2.1. ...

2.2. se ϕ è una formula e V è una variabile in \mathcal{V} allora:

$$\begin{aligned} eval^{I,S}(\exists V \phi) &= \text{true se esiste } d \in \mathcal{D} \text{ t.c. } eval^{I,S[V/d]}(\phi) = \text{true} \\ &= \text{false altrimenti} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} eval^{I,S}(\forall V \phi) &= \text{true se per ogni } d \in \mathcal{D} \text{ vale } eval^{I,S[V/d]}(\phi) = \text{true} \\ &= \text{false altrimenti} \end{aligned}$$

Nota: Dato un assegnamento di variabili S , con $S[X/d]$ si indica un assegnamento uguale ad S eccettuato il fatto che alla variabile X viene assegnato il valore d (esempio: se $S(X) = 3$ e $S(Y) = 4$, allora $S[Y/9](X) = 3$ e $S[Y/9](Y) = 9$).

Nota: in una formula **chiusa** (dove **tutte** le variabili sono quantificate) l'assegnamento di variabili non gioca alcun ruolo (!!)

Esempio: valutazione su *NAT*

Riconsideriamo l'interpretazione *NAT* (che include *preNAT*) su:

- ▶ $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1\}$
- ▶ $\mathcal{P} = \{\text{doppio}/2, \text{somma}/3\}$

vista in un esempio precedente, e la seguente assegnazione W sulle variabili $\mathcal{V} = \{X, Y, I, J, K\}$:

- ▶ $W(X) = 3$
- ▶ $W(Y) = 6$
- ▶ $W(I) = W(J) = W(K) = 4$

Esempio: valutazione su NAT (2)

Quanto vale $eval^{NAT, W}(\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X))?$

$$\begin{aligned}
 &= NAT(\text{doppio})(\text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))), \text{pre-}eval^{preNAT, W}(X)) \\
 &= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(\text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{succ}(\text{zero}))), W(X)) \\
 &= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(\text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{zero}))), 3) \\
 &= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{zero}))), 3) \\
 &= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(0)), 3) \\
 &= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(1), 3) \\
 &= NAT(\text{doppio})(2, 3) \\
 &= \text{false}
 \end{aligned}$$

Esempio: valutazione su NAT (3)

Quanto vale $eval^{NAT, W}(\exists X \text{ doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))), X)$?

La variabile X è esistenzialmente quantificata. Dalla regola 2.2, la formula è true sse esiste $d \in \mathcal{D}$ tale che:

$$eval^{NAT, W[X/d]}(\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))), X) = \text{true}$$

Questo è vero per $d = 4$. La formula è quindi vera

Nota: il valore assegnato da W alla variabile quantificata X è irrilevante

Esempio: valutazione su NAT (4)

Quanto vale $eval^{NAT, W}(\forall X \text{ doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))), X)$?

La variabile X è universalmente quantificata. Dalla regola 2.2, la formula è false sse esiste $d \in \mathcal{D}$ tale che:

$$eval^{NAT, W[X/d]}(\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))), X) = \text{false}$$

Questo avviene, ad es., per $d = 1$. La formula è quindi **falsa**

Nota: il valore assegnato da W alla variabile quantificata X è **irrilevante**

Esempio: valutazione su NAT (5)

Quanto vale $eval^{NAT, W}(\text{somma}(\text{succ}(\text{zero}), \text{zero}, \text{succ}(\text{zero})))$?

$$\begin{aligned}
 &= NAT(\text{somma})(\text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{succ}(\text{zero})), \\
 &\quad \text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{zero}), \\
 &\quad \text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{succ}(\text{zero}))) \\
 &= NAT(\text{somma})(preNAT(\text{succ})(\text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{zero})), \\
 &\quad preNAT(\text{zero}), \\
 &\quad preNAT(\text{succ})(\text{pre-}eval^{preNAT, W}(\text{zero}))) \\
 &= NAT(\text{somma})(preNAT(\text{succ})(0), 0, preNAT(\text{succ})(0)) \\
 &= NAT(\text{somma})(1, 0, 1) \\
 &= \text{true}
 \end{aligned}$$

Esercizio: valutazione su *NAT*

1. Si calcoli il valore di verità delle formule seguenti sull'interpretazione *NAT* e sull'assegnamento di variabili *W* definiti in precedenza
 - 1.1. $\forall X \forall Y (\text{somma}(X, X, Y) \rightarrow \text{doppio}(X, Y))$
 - 1.2. $(\forall X \exists Y \text{doppio}(X, Y)) \wedge (\forall I \forall J \exists K \text{somma}(I, J, K))$
 - 1.3. $\forall X \exists Y \text{doppio}(X, Y)$
 - 1.4. $\exists Y \forall X \text{doppio}(X, Y)$
2. L'assegnamento di variabili *W* gioca un qualche ruolo nel determinare il valore di verità delle formule qui sopra? Perché?
3. L'assegnamento di variabili *W* gioca un qualche ruolo nel determinare il valore di verità delle sotto-formule delle formule qui sopra?
4. L'ordine dei quantificatori ha un qualche impatto nel determinare il valore di verità di una formula?

Soddisfacibilità, insoddisfacibilità, validità, modelli

- ▶ Formula ϕ **soddisfacibile**: esiste una interpretazione I e un assegnamento di variabili S tale che $eval^{I,S}(\phi) = \text{true}$
- ▶ Formula ϕ **insoddisfacibile**: per ogni interpretazione I e assegnamento di variabili S , si ha $eval^{I,S}(\phi) = \text{false}$
- ▶ Formula ϕ **valida**: per ogni interpretazione I ed ogni assegnamento di variabili S , si ha $eval^{I,S}(\phi) = \text{true}$

Nota: in una formula **chiusa** (dove **tutte** le variabili sono quantificate) l'assegnamento di variabili non gioca alcun ruolo (!!)

Per **formule chiuse** abbiamo anche:

- ▶ **Modello** di ϕ : interpretazione M per cui si ha: $eval^{M,S}(\phi) = \text{true}$ per qualunque assegnamento di variabili S (formula chiusa $\implies S$ irrilevante)

$$M \models \phi$$

Esempio: valutazione di formule aperte

Si consideri la seguente formula aperta

$$\exists X \text{ doppio}(X, Y)$$

Data l'interpretazione *NAT* definita in un esempio precedente, si definiscano tutte le assegnazioni alle variabili che rendono la formula vera e tutte quelle che la rendono falsa

Esempio: valutazione di formule aperte

Si consideri la seguente formula aperta

$$\exists X \text{ doppio}(X, Y)$$

Data l'interpretazione *NAT* definita in un esempio precedente, si definiscano tutte le assegnazioni alle variabili che rendono la formula **vera** e tutte quelle che la rendono **falsa**

Soluzione

- ▶ La formula è **vera** per tutte le assegnazioni alle variabili che assegnano ad *Y* un valore **pari**
- ▶ La formula è **falsa** per tutte le assegnazioni alle variabili che assegnano ad *Y* un valore **dispari**

Regole di precedenza per la valutazione

In FOL vengono usate convenzionalmente le seguenti **regole di precedenza** per la valutazione dei connettivi e quantificatori:

1. \neg
2. \wedge, \vee
3. \forall, \exists
4. \rightarrow

Esempio: La formula

$$\forall X \, P(X) \vee S(X) \rightarrow \exists Y \, Q(X, Y) \wedge \neg R(Y)$$

viene valutata come se fosse

$$\forall X \, ((P(X) \vee S(X)) \rightarrow (\exists Y \, (Q(X, Y) \wedge \neg (R(Y)))))$$

Campo d'azione dei quantificatori

La presenza di più quantificatori che quantificano variabili omonime può creare **ambiguità**

Esempio: Si consideri la formula

$$\forall X \text{ uomo}(X) \wedge \exists X \text{ mortale}(X) \vee X = \text{padre}(\text{socrate})$$

- ▶ A quale quantificatore fa riferimento X in $\text{mortale}(X)$?
- ▶ A quale quantificatore fa riferimento X in $X = \text{padre}(\text{socrate})$?

Il problema del **campo di azione di un quantificatore** è analogo a quello del campo d'azione degli identificatori in un linguaggio di programmazione con sottoprogrammi

Campo d'azione dei quantificatori (2)

Osservazione: il nome di una variabile quantificata non gioca alcun ruolo, analogamente ai parametri formali nei linguaggi di programmazione

La formula può essere sempre riscritta evitando che due quantificatori siano applicati a variabili omonime

Quindi, in base alle intenzioni del progettista, la formula può essere scritta come (formule **non equivalenti!**):

1. $\forall X \text{ uomo}(X) \wedge \exists Y \text{ mortale}(X) \vee Y = \text{padre}(\text{socrate})$
2. $\forall X \text{ uomo}(X) \wedge \exists Y \text{ mortale}(Y) \vee Y = \text{padre}(\text{socrate})$
3. $\forall X \text{ uomo}(X) \wedge \exists Y \text{ mortale}(Y) \vee X = \text{padre}(\text{socrate})$
4. $\forall X \text{ uomo}(X) \wedge \exists Y \text{ mortale}(X) \vee X = \text{padre}(\text{socrate})$

Nota: in alcuni casi (come quello dell'esempio) l'ambiguità può essere risolta semplicemente aggiungendo le parentesi, ad es.:
 $(\forall X \text{ uomo}(X)) \wedge (\exists X \text{ mortale}(X) \vee X = \text{padre}(\text{socrate}))$ (equiv. alla 2.)

Suggerimento: usare parentesi ed evitare quantificatori su var. omonime!