ALGEBRA LINEAL

ESPACIOS MÉTRICOS

DRA. ANA MARÍA NUÑEZ

PRONÓSTICO DE TRAYECTORIAS

Según la primera ley de Kepler, un cometa debe tener una órbita elíptica, parabólica o hiperbólica (ignorando la atracción gravitacional de los planetas).

En coordenadas polares adecuadas, la posición (r, ϑ) de un cometa satisface una ecuación de la forma $r = \beta - e(r \cdot \cos \theta)$ donde β es una constante y e es la excentricidad de la órbita.

Las observaciones de un cometa recientemente descubierto proporcionan datos con los cuales es posible determinar el tipo de órbita y pronosticar su trayectoria.



El cometa Halley apareció por última vez en 1986 y reaparecerá en 2061.

Del libro Algebra Lineal y sus Aplicaciones de David C. Lay

En el ejemplo visto lo importante es conocer a qué distancia pasará de la Tierra, por ello comenzaremos por definir la función distancia

COMENCEMOS POR CONSIDERAR UN CONJUNTO NO VACÍO

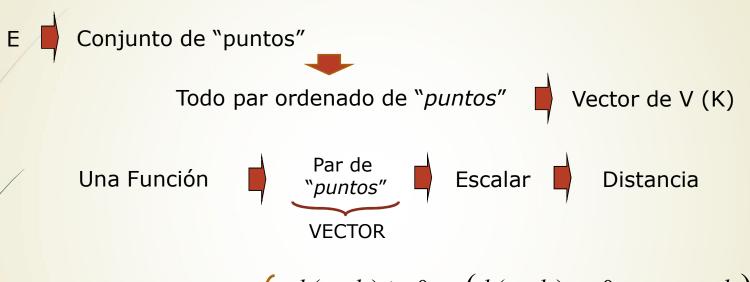
A CUYOS ELEMENTOS DENOMINAREMOS "PUNTOS"

Y EL CUERPO K DE LOS NÚMEROS REALES

EN SIMBOLOS!!



Función Distancia



Verificando las condiciones:
$$\begin{cases} d\left(a,b\right) \geq 0 \land \left(d\left(a,b\right) = 0 \Leftrightarrow a = b\right) \\ d\left(a,b\right) = d\left(b,a\right) \\ d\left(a,c\right) \leq d\left(a,b\right) + d\left(b,c\right) \end{cases}$$

K = IR

"E" ES UN ESPACIO MÉTRICO V(IR) Espacio vectorial asociado

FUNCIÓN DISTANCIA:

En el espacio geométrico IR² o IR³ ustedes saben calcular la distancia entre dos puntos!!!

RECORDAMOS

Determine la distancia entre los puntos del plano IR² dados:

$$a = (-1, 2)$$
 $b = (2, -3)$

A TRABAJAR

Calculamos y representamos en forma gráfica!!!

SEGUIMOS CONSIDERANDO EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES K = IR

Y UN CONCEPTO QUE USTEDES CONOCEN!!!!

FUNCIÓN NORMA

SIN EMBARGO AHORA DEBEMOS GENERALIZAR A LOS DEMÁS ESPACIOS VECTORIALES REALES



V (IR)

Función Norma





Vector



Escalar

$$\| \|: V \to IR$$

$$u \rightarrow ||u||$$

Verificando las condiciones:

$$||u|| \ge 0 \land \left(||u|| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0} \right)$$

$$||t.u|| = |t|.||u|| \quad (t \in IR)$$

$$||u + v|| \le ||u|| + ||v||$$

V (IR) ESPACIO NORMADO

V (IR) ESPACIO NORMADO

Función Norma

$$\|-\|u\| = \|u\|$$

$$||u-v||=||v-u||$$

||u|| = 1 u es un vector normado

$$||u|| \neq 1$$
 u se puede normalizar $u' = \frac{1}{||u||} u \Rightarrow ||u'|| = 1$

Siempre es posible definir una distancia inducida por una norma $tal \ que \ d(u,v) = \|u - v\|$

TODO ESPACIO NORMADO ES TAMBIÉN MÉTRICO

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 1.Considere la norma p definida en IRⁿ (IR) dada por:

$$\|(x_1,...,x_n)\|_p = + (\|x_1\|^p + ... + \|x_n\|^p)^{1/p} \text{ para } p = 1, 2, ..., n$$

Para p = 4

Determine la veracidad de: si u = (-1, 1, -1, 1) entonces || $u ||^4 = (4)^{1/4}$

Calcule a partir de esta norma la distancia de u a v si se sabe que:

$$u = (-1, 1, -1, 1)$$
 $v = (0, 2, -1, 2)$

ESPACIO NORMADO

K = IR

Función Norma

Ejemplos de normas matriciales: M_{nxm}

$$||A||_1 = m \acute{a} ximo \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| (j=1,2,...,m) \right\}$$

$$||A||_{\infty} = m \acute{a} ximo \left\{ \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| (i = 1, 2, ..., n) \right\}$$

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2}$$

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos un ejemplo

Considere la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Halle la norma de A para cada una de las funciones normas recién ejemplificadas.

A trabajar ...!!!

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 2. Se tienen en M_{3x3} (IR) las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1.2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determine la norma infinito de cada una de ellas e indique si son normadas.
- b) Si no son normadas normalícelas.
- c) Determine la distancia de A a B a partir de la distancia inducida por esa norma.

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 3. . En el espacio vectorial de las funciones continuas sobre un intervalo [a, b]: $C_{[a,b]}$ (IR), se define una función norma como sigue:

$$|| f ||_{\infty} = \max \{ | f(x) |; x \text{ de } [a,b] \}.$$

Considere el intervalo [-1,1] y las siguientes funciones f, g definidas de él en IR tal que: $f(x) = x^2 + x - 1$ $y g(x) = -x^2 + 2$

- a) Determine la norma de ambas funciones.
- b) Calcule la distancia de f y g inducida por esta norma.

SEGUIMOS CONSIDERANDO EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES K = IR

OTRO CONCEPTO QUE USTEDES CONOCEN!!!!

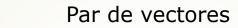
FUNCIÓN PRODUCTO ESCALAR

AHORA DEBEMOS GENERALIZAR EL CONCEPTO A LOS DEMÁS ESPACIOS VECTORIALES REALES

ESPACIO VECTORIAL REAL V (IR)

Producto escalar

Una Función





Escalar

$$\langle \rangle : VxV \to IR$$

 $(u,v) \to \langle u,v \rangle$

Verificando las

Verificando las condiciones:
$$\begin{cases} \langle u,u \rangle \geq 0 \land \left(\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0} \right) \\ \langle t.u,v \rangle = t.\langle u,v \rangle & (t \in IR) \\ \langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle \\ \langle u+w,v \rangle = \langle u,v \rangle + \langle w,v \rangle \end{cases}$$

V (IR) ESPACIO prehilbertiano

V (IR) ESPACIO prehilbertiano

Producto escalar

$$\langle u, v \rangle = 0$$
 entonces u, v son ortogonales

Siempre es posible definir una norma inducida por un producto escalar : $||u|| = +\sqrt{\langle u, u \rangle}$

Siempre es posible definir una distancia inducida por un producto escalar y una norma :

$$d(u, v) = ||u - v|| = +\sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

TODO ESPACIO PREHILBERTIANO ES TAMBIÉN MÉTRICO

K = IR

ESPACIOS NORMADOS

ESPACIOS PREHILBERT

Trabajamos un ejemplo

Considere las matrices reales:

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Halle el producto entre A y B para el siguiente producto escalar:

$$\langle A, B \rangle = Tr (A^T.B)$$

A trabajar ...!!!

ESPACIOS PREHILBERT

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 4. Considere el siguiente producto escalar real dado en forma matricial:

$$\langle u, v \rangle = \langle (a, b, c), (d, e, f) \rangle = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

a) Muestre que se verifica el axioma de positividad de producto escalar:

$$\langle u, u \rangle \ge 0 \land \langle u, u \rangle = 0 \iff u = \vec{0}$$

b) Calcule el producto escalar entre u = (-1, 2, -2) y v = (1, -1, 2)

ESPACIOS NORMADOS Y PREHILBERT

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 5. Considere el siguiente producto escalar definido en el espacio vectorial de las funciones reales: $\mathcal{C}_{[-1, 1]}(R)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$$

Y las funciones: $p(x) = x^2 - 1$ $q(x) = (x - 1)^2$

- a) Calcule el producto escalar entre ellas e indique si son ortogonales, justifique su respuesta.
- b) Determine la distancia de p a q a partir de la distancia inducida por el producto dado.

ESPACIOS NORMADOS Y PREHILBERT

K = IR

Trabajamos con el práctico

- Problema 6. Demuestre que en un espacio normado y prehilbert real:
- a) dos vectores son ortogonales si se verifica que: ||u+v|| = ||u-v||
- b) $\langle u + v, u v \rangle = ||u||^2 ||v||^2$

Y EL SI CONSIDERAMOS EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES

K = **C**

QUE SUCEDE CON LA

FUNCIÓN PRODUCTO ESCALAR...

Y CON LA DISTANCIA ...



ESPACIO COMPLEJO

V (C)

Una Función

Par de vectores

Complejo

$$\langle \rangle : VxV \to C$$

$$(u, v) \to \langle u, v \rangle$$



Producto hermítico

V (C) ESPACIO UNITARIO

V (C) ESPACIO UNITARIO

Ejemplo de productos usuales

Canónico en *C*ⁿ (*C*)

$$u = (z_1, z_2, ..., z_n)$$

 $v = (w_1, w_2, ..., w_n)$



$$u = (z_1, z_2, ..., z_n) v = (w_1, w_2, ..., w_n)$$

$$\langle u, v \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + ... + z_n \overline{w_n}$$

Canónico en M_{nxn} (C)

$$A = (z_{ij}) \quad B = (w_{ij})$$



$$A = (z_{ij}) \quad B = (w_{ij}) \qquad \qquad \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

ESPACIO UNITARIO

K = C

Trabajamos con el práctico

Problema 7. Demuestre en el espacio unitario C ² (C) que se verifica el axioma:

$$\langle u, v \rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2}$$
 siendo $u = (z_1, z_2)$ $v = (w_1, w_2)$

Problema 8. Considere las matrices complejas:

$$A1 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} -1-i & 1+i \\ -2 & -1+3i \end{pmatrix}$$

Halle el producto entre A y B para el producto hermítico usual $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_{i} \overline{w_{i}}$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

Determine la distancia entre A y B inducida por este producto.

CONSECUENCIAS





Conjunto Normado

$$||u_i|| = 1 \ (\forall i = 1, 2, ..., n)$$





Conjunto Ortogonal

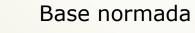
$$\langle u_i, u_j \rangle = 0$$

 $(\forall i = 1,...,n)(\forall j = 1,...,n)(i \neq j)$

Conjunto ortonormado



ES BASE



Base ortogonal

Base ortonormada

Trabajamos con el práctico

Problema 9. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres $P_3(R)$ se tiene el producto interior:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$$

Investigue si los siguientes vectores constituyen una base, en caso afirmativo analice si es ortonormada u ortogonal: {f1, f2, f3, f4} siendo:

$$f1(x) = 1$$
, $f2(x) = x$, $f3(x) = x^2$, $f4(x) = x^3$

Trabajamos con el práctico

Problema 10. Sea C*[a, b] el espacio vectorial de las funciones definidas en [a, b] con valores complejos, en él se define el siguiente producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) . \overline{g(t)} dt$$

Y las funciones $f(t) = 2 \cdot t^2 - t i$ y g(t) = t - 2t i

- a) Analice si son funciones ortogonales, justifique su respuesta.
- b) Determine la distancia entre ellas a partir de la distancia inducida por este producto.