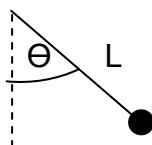


ECUACIONES DIFERENCIALES – PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Introducción:

Podemos describir en forma simplificada, el movimiento de un péndulo por medio de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$



Donde L es la longitud del péndulo, g la aceleración de la gravedad y Θ es el ángulo que forma el péndulo en la posición vertical o de equilibrio. Si además especificamos la posición del péndulo al momento de iniciar el movimiento $\Theta(t_0) = \Theta_0$ y su velocidad en ese momento $\Theta'(t_0) = \Theta'_0$, tendremos lo que se conoce con el nombre de problema de valor inicial.

Para simplificar este problema a uno lineal de valor inicial, para valores pequeños de Θ , podemos emplear la aproximación $\Theta \approx \sin \Theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0, \quad \Theta(t_0) = \Theta_0, \quad \Theta'(t_0) = \Theta'_0$$

Podemos resolver este problema por medio de un método estándar de ecuaciones diferenciales. Para valores mayores de Θ , hay que utilizar métodos de aproximación.

Recordemos que las ecuaciones diferenciales sirven para modelizar problemas de ciencias e ingeniería que requieren el cambio de una variable respecto a otra. En la mayoría de los casos hay que resolver un problema de valor inicial, es decir, resolver una ecuación diferencial que satisface una condición inicial.

En general, la ecuación diferencial que modela el problema resulta demasiado complicada para resolverla con exactitud, por lo que se recurre a dos procedimientos para aproximar la solución. El primero consiste en simplificar la ecuación diferencial de modo que podamos resolverla exactamente y utilizar después la solución de la simplificada para aproximar la solución de la ecuación original. El segundo, se vale de métodos para aproximar la solución del problema original. Este procedimiento es el que se emplea por lo regular, pues los métodos de aproximación dan buenos resultados y una información realista sobre el error.

Revisando algunos conceptos:

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones.

Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias:** aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.
- **Ecuaciones en derivadas parciales:** aquellas que contienen derivadas respecto a dos o más variables.

Ejemplos:

- $y' = 2x + 1$ es una ecuación diferencial ordinaria, donde $y = f(x)$ es la variable dependiente, x la variable independiente e $y' = \frac{dy}{dx}$ es la derivada de y con respecto a x .
- La expresión $\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dv} = 0$ es una ecuación en derivadas parciales.

Una ecuación diferencial de orden n :

$$F(X, Y, Y', Y'', \dots Y^n) = 0$$

Admite como solución general una función:

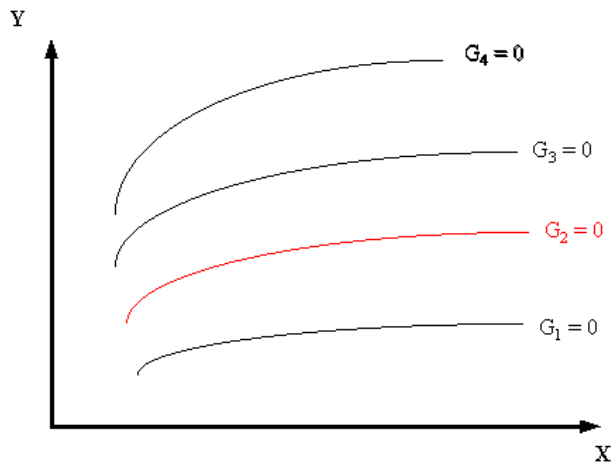
$$G(X, Y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

Con n constantes arbitrarias.

Hay tres tipos de soluciones para una ecuación diferencial:

- **Solución General:** Una solución de tipo genérico, expresada con una o más constantes. La solución general es un haz de curvas. Tiene un orden de infinitud de acuerdo a la cantidad de constantes (una constante corresponde a una familia simplemente infinita, dos constantes a una familia doblemente infinita, etc).
- **Solución Particular:** Un caso particular de la solución general, en donde la constante (o constantes) recibe un valor específico.
- **Solución Singular:** Una función que verifica la ecuación, pero que no se obtiene particularizando la solución general.

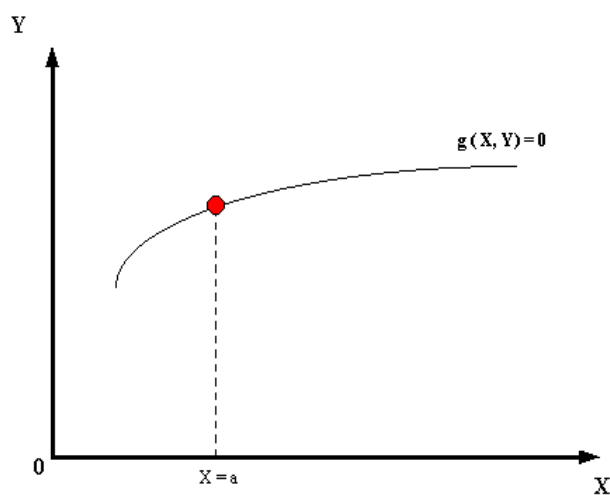
La solución general de la ecuación diferencial genera una familia de curvas planas para valores particulares de las constantes C_i



Cada una de estas curvas es una solución particular a la ecuación diferencial, sujeta a n condiciones independientes.

Según como se establecen esas condiciones independientes se está frente a un problema de valor inicial (PVI) o frente a un problema de valores frontera (PVF).

En el primer caso: PVI



$G(X, Y) = 0$ representa una solución particular a la ecuación diferencial. Las condiciones se definen respecto a un valor inicial:

$$x = a$$

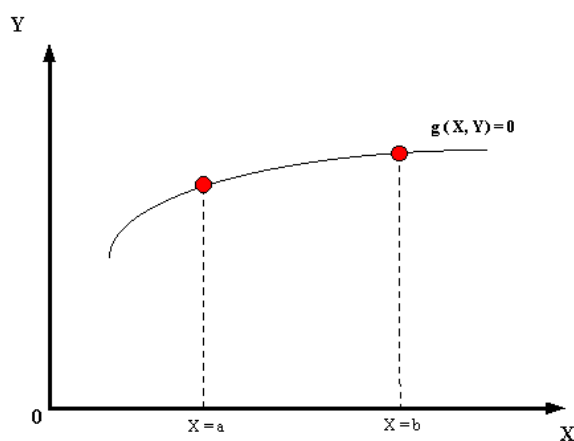
$$y(a) = y_0$$

$$y'(a) = y'_0$$

...

$$y^n(a) = y^n_0$$

En el segundo caso: PVF



$G(X, Y) = 0$ representa una solución particular a la ecuación diferencial.

Las condiciones se definen respecto a los valores comprendidos entre:

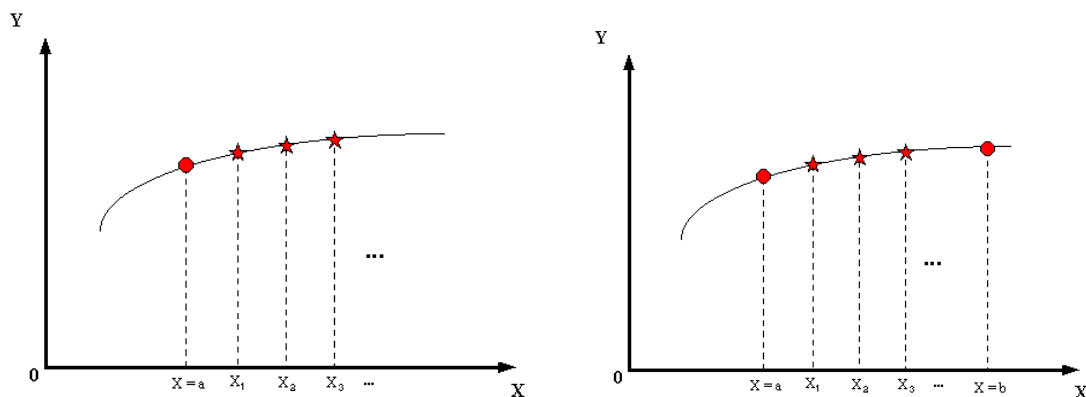
$$x = a \text{ e } y = b$$

Métodos numéricos aproximados:

La resolución numérica de las ecuaciones diferenciales consiste en discretizar la función, pasando de un dominio continuo a un conjunto discreto de valores, con la condición de que dichos valores se hallen a la misma distancia h unos de otros.

En PVI: $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ...

En PVF: $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh = b$



Los métodos numéricos buscan una solución particular cuando x toma los valores de x_i

En este curso de Análisis Numérico sólo abordaremos los métodos para el problema de valores iniciales.

(Gráficas extraídas de <http://luda.uam.mx/curso2/tema7/eqdif.html>)

MÉTODO DE TAYLOR:

La Serie de Taylor se puede expresar:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

Aplicando Taylor se puede resolver un problema como por ejemplo:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(1+x)y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Este es un problema PVI ya que el condicionamiento está dado con respecto a un solo punto inicial $x = 0$

Si truncamos la serie en el cuarto término, para obtener la solución particular de la ecuación diferencial para $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$

Derivando:

$$y' = \frac{1}{2}(1+x)y^2 \qquad y'(0) = \frac{1}{2}(1+0)1^2 = \frac{1}{2}$$

$$y'' = \frac{1}{2}y^2 + (1+x)yy' \qquad y''(0) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + (1+0)1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y''' = 2yy' + (1+x)y'^2 + (1+x)yy''$$

$$y'''(0) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + (1+0)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1+0)\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{9}{4}$$

Retomando la Serie de Taylor y reemplazando:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0)$$

$$y = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^3$$

Ecuación que permite hallar las soluciones particulares en los valores de x pedidos:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1	1.055375	1.130125	1.205125	1.304000

MÉTODO DE EULER:

La simplicidad de este método sirve para ejemplificar las técnicas con que se desarrollan algunos de los métodos más avanzados; y tiene por objeto obtener una aproximación de un problema bien planteado de valor inicial.

En la práctica, no se obtendrá una aproximación continua a la solución, por el contrario, se generarán aproximaciones a esa solución en varios valores, llamados puntos de red, en el intervalo en que este definida.

Dado un PVI de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

En primer lugar, estipulamos que los puntos de red tienen una distribución uniforme en todo el intervalo, tal que $|x_{i+1} - x_i| = h$, al valor h , distancia entre cada par de puntos, se lo denomina el paso.

Por lo visto en diferenciación numérica, método hacia delante:

$$\varphi'(x_0) = \frac{1}{h} \left[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x_0) - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \Delta^n f(x_0) \right]$$

Si se consideran solamente dos puntos: (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) la expresión anterior se puede escribir:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{1}{h} \Delta f(x_i) = \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i) \quad (\text{Truncada en el primer término})$$

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = f(x_i, y_i) \quad (\text{Por definición inicial de la ecuación diferencial en } x_i)$$

Si los primeros miembros son iguales los segundos también los son:

$$f(x_i, y_i) = \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i)$$

Si se conoce el primer punto (x_i, y_i) , $x_{i+1} = x_i + h$, la incógnita en esta ecuación es y_{i+1} que despejando se puede calcular como:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Por lo tanto a partir de un dato conocido, el valor inicial, se puede generar un conjunto de puntos por recurrencia a través de la expresión anterior que recibe el nombre de “Fórmula de Euler” para E.D.O. de primer orden.

Se puede obtener la misma fórmula trabajando con integración numérica.

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

El método de Euler permite hallar la solución particular para los valores de x_{i+1} conociendo el valor anterior x_i .

Ejemplo:

Hallar la solución para $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + x) y^2 \\ y(0) = 1 \quad (x_0 = 0) \end{cases}$$

$$y' = f(x, y) = \frac{1}{2} (1 + x) y^2 \quad \text{entonces } f(x_i, y_i) = y'(x_i) = \frac{1}{2} (1 + x_i) (y_i)^2$$

Partiendo de la condición de que $y(0) = 1$ y de que $h = 0.1$

Aplicando la Fórmula de Euler: $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i + h y'(x_i)$

x	y	y'
0	1	0.5
0.1	1.05	0.606375
0.2	1.110638	0.74011006
0.3	1.184649	0.9122056
0.4	1.267861	

Una ventaja que tiene este método sobre el de Taylor es que sólo requiere conocer los valores de x_i e y_i del punto anterior, no precisando evaluar las derivadas enésimas en el punto inicial.

MÉTODO DE RUNGE – KUTTA:

Los métodos de Taylor y Euler tienen un error local de truncamiento de orden alto (del orden de h), por este motivo se generan los nombrados métodos de Runge Kutta, que recurren al cálculo de la solución numérica de la ecuación diferencial a través de un promedio ponderado de tal forma que:

Dado un punto: (x_m, y_m) se tiene:

$$\begin{cases} X_{m+1} = x_m + h \\ Y_{m+1} = y_m + h \cdot \varphi(x, y) \end{cases}$$

Expresión en la cual $\varphi(x, y)$ es una combinación lineal de coeficientes e imágenes de puntos ficticios (x_g, y_g) .

El modo de determinar los coeficientes es a través de la aplicación sucesiva de la serie de Taylor en esos puntos ficticios, demostración que vamos a obviar en este curso pero que en los textos está disponible para que el alumno pueda apreciarla.

Uno de los métodos de Runge - Kutta para evaluar una ecuación diferencial de primer orden con un error del orden de h^5 (siendo h la distancia entre los puntos), denominado de cuarto orden, consiste en aplicar una ecuación de recurrencia en la cual:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Esta ecuación se obtiene haciendo un promedio de las cuatro pendientes k_1, k_2, k_3, k_4 a la curva en esos puntos ficticios que mencionamos antes.

Estos coeficientes son tales que:

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \cdot k_2\right)$$

$$k_4 = f(x + h, y + h \cdot k_3)$$

Para h suficientemente pequeño este método proporciona una muy buena aproximación a la solución particular de una ecuación diferencial, la cual se obtiene haciendo:

$$y_{i+1} = y_i + h \phi(x_i, y_i)$$

la cual se denomina Fórmula de Runge – Kutta

Ejemplo:

Hallar la solución para $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + x) y^2 \\ y(0) = 1 \quad (x_0 = 0) \end{cases}$$

x	y	k_1	k_2	k_3	k_4
0	1	0.5	0.5516	0.5544	0.6127
0.1	1.0554	0.6126	0.6782	0.6823	0.7575
0.2	1.1236	0.7575	0.8431	0.8494	0.9494
0.3	1.2085	0.9492	1.0647	1.0745	1.2121
0.4	1.3158				

Para $x = 0.1$

$$k_1 = \frac{1}{2} (1+0)1^2 = 0.5 \quad k_2 = 0.5 \left[1 + \left(0 + \frac{0.1}{2} \right) \right] \left[1 + \frac{0.1}{2} \cdot 0.5 \right]^2 = 0.5516$$

$$k_3 = 0.5 \left[1 + \left(0 + \frac{0.1}{2} \right) \right] \left[1 + \frac{0.1}{2} \cdot 0.5516 \right]^2 = 0.5544$$

$$k_4 = 0.5 [1 + (0+0.1)] [1 + (0.1) \cdot 0.5544]^2 = 0.6127$$