INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Cuando se interconectan dos sistemas lineales distintos entre sí, cada uno con sus propios parámetros y, por lo tanto, cada uno con su propio vector de estado; existe la posibilidad de considerar a la interconexión como si fuera un único sistema.

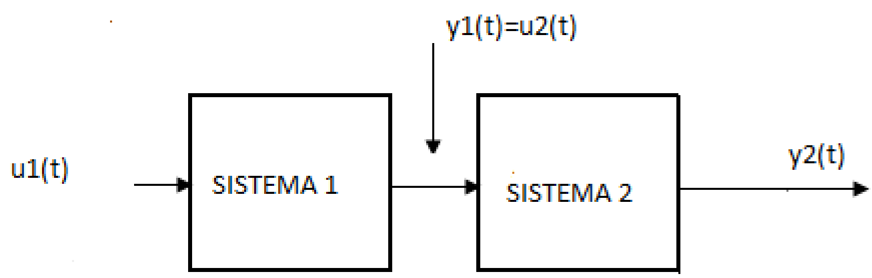
En ese caso, este único nuevo sistema tendrá su propio vector de estado en lo que se denomina la técnica del *aumento de estado*.

Este estado aumentado es teórico, obviamente, y quedará definido en función de los parámetros de los subsistemas constituyentes.

Para encontrar el estado aumentado, propio de la interconexión, habrá que combinar adecuadamente los parámetros de cada uno de los sistemas componentes de la misma, dependiendo del modo de conexión empleado.

1) *Conexión serie:*

Cuando se interconectan dos sistemas distintos en serie o cascada, pueden plantearse las ecuaciones de estado de cada uno de los sistemas:

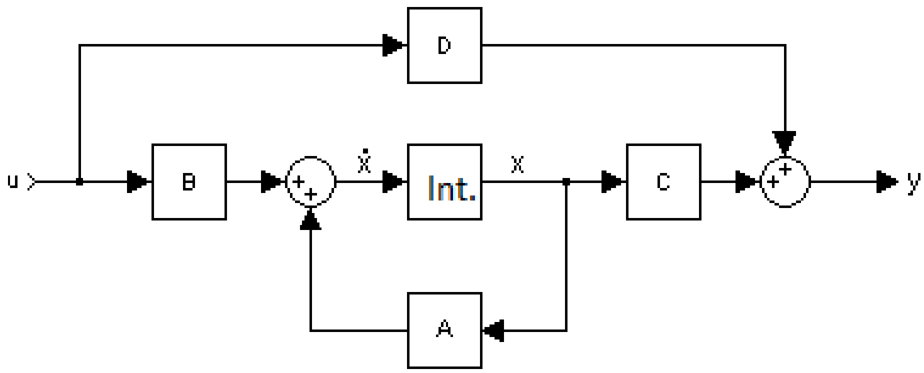


Así, la ecuación diferencial de estado como la ecuación de estado de salida para cada uno de los sistemas serán:

$$\text{SISTEMA 1} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) + B_1(t)u_1(t) \\ y_1(t) = C_1(t)x_1(t) + D_1(t)u_1(t) \end{cases}$$

$$\text{SISTEMA 2} \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2(t)x_2(t) + B_2(t)u_2(t) \\ y_2(t) = C_2(t)x_2(t) + D_2(t)u_2(t) \end{cases}$$

Vale la pena aclarar que estos dos juegos de ecuaciones corresponden a un modelo de estado con una Matriz de Proalimentación ó Alimentación Directa, como el siguiente esquema:



donde el Bloque [Int.] es un integrador, frecuentemente indicado también como (1/s), que integra a la derivada $\dot{x}(t)$ para obtener el vector de estado x(t).

En la interconexión, el vector de estado aumentado que hay que encontrar será el resultado de obtener:

{x(t)} = $\begin{Bmatrix} \mathbf{x_1(t)} \\ \mathbf{x_2(t)} \end{Bmatrix}$

Tomando solamente las ecuaciones diferenciales de estado de ambos sistemas, en una notación más simplificada, porque ya se sabe que todos los parámetros dependen del tiempo (t), excepto en el caso invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \end{cases}$$

Pero considerando que la salida del primer sistema es igual a la entrada del segundo, se puede reemplazar en la segunda ecuación: $u_2(t) = y_1(t)$; y resulta:

$\dot{x}_2 = A_2\, x_2 + B_2\, [C_1\, x_1 + D_1\, u_1]$

entonces, $\dot{x}_2 = A_2\, x_2 + B_2\, C_1\, x_1 + B_2\, D_1\, u_1$

Por lo tanto, se puede reescribir el par de ecuaciones diferenciales de estado de ambos sistemas como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1\, x_1 + B_1u_1 \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_2u_1 \end{cases}$$

Si se traslada este par de ecuaciones diferenciales de estado a la forma matricial se obtendrá el estado aumentado:

$$\{\dot{\mathbf{x}}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \{\mathbf{x(t)}\} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \mathbf{u_1(t)}$$

que es la ecuación diferencial matricial de estado aumentado del sistema resultante de la interconexión serie.

En el caso de la ecuación de estado de salida, se debe considerar a la salida $y_2(t)$ como la salida de todo el sistema interconectado; por lo tanto:

$$y_2(t) = C_2\, x_2 + D_2\, u_2$$

pero sigue siendo $u_2(t) = y_1(t)$; entonces, reemplazando se obtiene:

$$y_2(t) = C_2\, x_2 + D_2\, [C_1\, x_1 + D_1\, u_1] = C_2\, x_2 + D_2\, C_1\, x_1\, D_2\, D_1\, u_1$$

Finalmente, la ecuación de estado de salida del sistema realimentado serie resulta ser:

$$\mathbf{y_2(t) = [D_2\, C_1 \quad C_2]\, \{x(t)\} + D_2\, D_1\, u_1(t)}$$

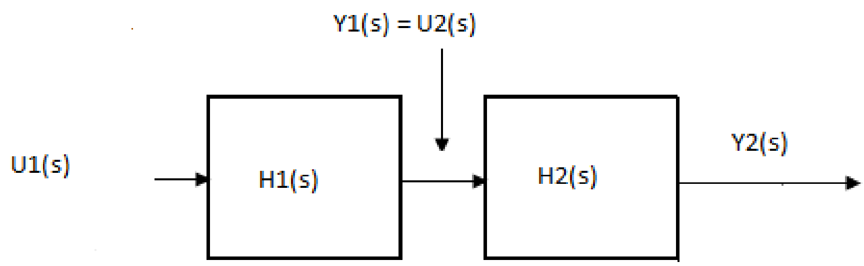
Función de Transferencia Serie

En el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, cuando los parámetros de las matrices [A]; [B]; [C] y [D] son constantes, por serlo así los parámetros de los sistemas constituyentes, se puede recurrir a la obtención de las matrices de transferencia o funciones de transferencia.

Serán matrices o funciones, según se trate de Sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output); o de Sistemas SISO (Single Input Single Output), respectivamente.

En el caso visto, aparentemente $u_1(t)$ es una entrada escalar y única, por lo tanto estaríamos en la alternativa SISO y trabajaremos con Funciones de Transferencia $H_1(s)$ y $H_2(s)$ para los diferentes subsistemas.

Aplicando las respectivas Transformadas de Laplace a todas las señales involucradas se obtiene la disposición equivalente invariante:



En el Sistema 2 puede plantearse la salida en base a la FdT como $Y_2(s) = H_2(s)\ U_2(s)$; pero ya se sabe que $U_2(s) = Y_1(s)$; donde la salida del primer sistema es $Y_1(s)=U_1(s)\ H_1(s)$; luego, reemplazando resulta:

$Y_2(s) = H_2(s)\ H_1(s)\ U_1(s)$

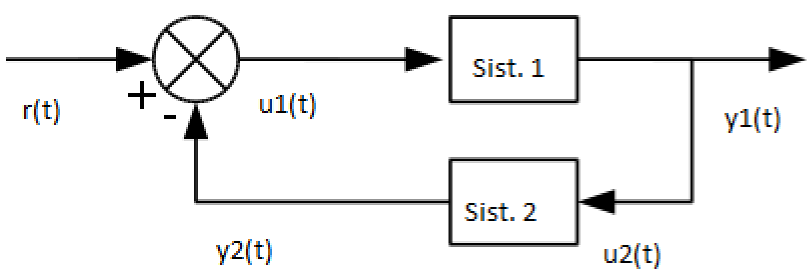
Y la FdT equivalente será la salida total del conjunto dividida por la entrada total del mismo, o sea:

$$\mathbf{H(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = H_2(s)\ H_1(s)}$$

Lo que significa un resultado lógico y consistente con la teoría de diagramas de bloque, considerando que se trata de bloques que están conectados en serie.

2) Conexión realimentada:

Este es el caso en que los dos sistemas independientes se han interconectado en una disposición de lazo cerrado o realimentada, de manera que la salida del primer sistema es igual a la entrada del segundo y todo el conjunto tiene una entrada única independiente en la señal de referencia r(t).



Observando la interconexión, se verifica que se cumplen las siguientes relaciones entre las señales:

$y_1(t) = u_2(t)$

$u_1(t) = r(t) – y_2(t)$

y pueden escribirse las ecuaciones de estado para cada sistema individual del siguiente modo:

$$\text{SISTEMA 1} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) + B_1(t)u_1(t) \\ y_1(t) \;\; = \qquad\qquad C_1(t)x_1(t) \end{cases}$$

$$\text{SISTEMA 2} \quad \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2(t)x_2(t) + B_2(t)u_2(t) \\ y_2(t) = C_2(t)x_2(t) + D_2(t)u_2(t) \end{cases}$$

Como se observa, el Sistema 1 se adopta sin enlace directo o proalimentación D_1 para evitar que aparezcan ecuaciones implícitas al retroalimentar. En el Sistema 2 no se presentaría este problema y se respetan las ecuaciones completas.

Tomando exclusivamente las ecuaciones diferenciales de estado de ambos sistemas por separado y utilizando la notación simplificada, resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \end{cases}$$

Pero, recordando las relaciones antes mencionadas, se puede reemplazar y obtener nuevas ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1\,r \,-\, B_1\,y_2 \\ \dot{x}_2 = \qquad A_2x_2 + B_2C_1x_1 \end{cases}$$

En la segunda ecuación, el resultado queda así dado que $u_2 = y_1$; pero $y_1 = C_1$ x1; además, reemplazando y_2 en la primera ecuación, quedará:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1\,r \,-\, B_1\,[C_2x_2 + D_2u_2] \\ \dot{x}_2 = \qquad\qquad\qquad A_2x_2 + B_2C_1x_1 \end{cases}$$

y reordenando

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [A_1 - B_1D_2C_1]\, x_1 - B_1\, C_2x_2 \;+\; B_1\, r \\ \qquad \dot{x}_2 \qquad = \quad B_2C_1x_1 \quad - \quad A_2x_2 \end{cases}$$

que se puede expresar en forma matricial como:

$$\{\dot{\mathbf{x}}\} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1) & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \{\mathbf{x}\} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{r(t)}$$

esta es la ecuación diferencial matricial de estado correspondiente a una interconexión realimentada.

Considerando que $y_1(t)$ es la salida de todo el conjunto realimentado se puede plantear la ecuación de estado de salida del sistema interconectado como:

$$\mathbf{y_1(t)} = [\mathbf{C_1} \quad \mathbf{0}] \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix}$$

Función de transferencia Realimentada:

Considerando el caso invariante en el tiempo se puede plantear la ecuación de salida en términos de matrices de transferencia.

$Y_1(s) = U_1(s)\ H_1(s)$

pero $U_1(s) = R(s) – Y_2(s)$

entonces:

$Y_1(s) = [R(s) – Y_2(s)]\ H_1(s)$

donde:

$Y_2(s) = H_2(s)\ U_2(s)$

luego:

$Y_1(s) = [R(s) – H_2(s)U_2(s)]\ H_1(s)$

pero:

$U_2(s) = Y_1(s)$

por lo tanto, reemplazando:

$Y_1(s) = [R(s) – H_2(s)Y_1(s)]\ H_1(s)$

y operando:

$Y_1(s) = H_1(s)\ R(s) - H_2(s)\ H_1(s)\ Y_1(s)$

por lo tanto, pasando de miembro el segundo término:

$Y_1(s) + H_2(s)\ H_1(s)\ Y_1(s) = H_1(s)\ R(s)$

y, sacando factor común en el primer miembro, resulta:

$[I(s) + H_2(s)\ H_1(s)]\ Y_1(s) = H_1(s)\ R(s)$

Donde se ha colocado una matriz identidad en lugar de la unidad escalar, previendo la eventualidad de que se trate de matrices en los sistemas MIMO.

Si se premultiplica miembro a miembro por la inversa de la matriz que aparece en primer lugar quedará despejada la salida Y_1

$\mathbf{Y_1(s) = [I(s) + H_2(s)\ H_1(s)]^{-1}\ H_1(s)\ R(s)}$

y en notación simplificada:

$Y_1(s) = [I + H_2\ H_1]^{-1}\ H_1\ R$

donde la matriz sin invertir se denomina *Matriz Diferencia de Retorno* $J(s) = [I + H_2\ H_1]$

por lo tanto, también se puede indicar la salida como

$Y_1(s) = [J(s)]^{-1}\ H_1\ R$

y considerando que la FdT equivalente será la salida global sobre la entrada global, es:

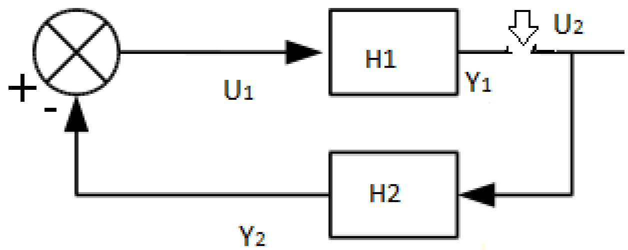
$\mathbf{H(s) = \frac{Y_1(s)}{R(s)} = J^{-1}(s)\ H_1(s)}$

Función de Transferencia Equivalente de la Interconexión realimentada

Matriz diferencia de Retorno:

Esta matriz debe su nombre a la manera en la que se obtiene. Primeramente se debe enmudecer la entrada del sistema interconectado realimentado, luego se debe abrir el lazo en un punto e inyectar una señal de prueba y analizar lo que sucede.

A la señal de prueba inyectada le llamamos $U_2(s)$; porque ingresa antes del bloque correspondiente al segundo sistema individual H_2.



Si se analiza lo que ocurre a la salida del primer Sistema la señal será Y_1 manteniendo la nomenclatura utilizada hasta ahora:

$Y_1 = U_1 H_1$

Pero $U_1 = - Y_2$; porque se deben respetar los signos del comparador que determinan el flujo de las señales.

Luego:

$Y_1 = - Y_2 H_1$

siendo $Y_2 = U_2 H_2$; a la salida del bloque del sistema 2, por lo tanto, reemplazando:

$Y_1 = - U_2 H_2 H_1$

Si ahora se considera la diferencia entre la señal de prueba que ingresa (U_2) menos la que retorna (Y_1) se tendrá la *diferencia de retorno*:

$U_2 – Y_1 = U_2 – [-U_2 H_2 H_1]$; que resulta

$U_2 – Y_1 = U_2 + U_2 H_2 H_1$

y sacando factor común U_2 en el segundo miembro:

$U_2 – Y_1 = [I + H_2 H_1] U_2$

donde la matriz obtenida

$J(s) = [I + H_2 H_1]$ es la llamada *Matriz Diferencia de Retorno*