UNIVERSIDAD DE MENDOZA

ANÁLISIS NUMÉRICO

Ing. José Luis Artal
Dra. Ana Nuñez
Lic. Sergio Fuentes

INTERPOLACION INTRODUCCION. INTERPOLACION LINEAL

La interpolación es una de las formas de aproximación de funciones que permite obtener datos exactos, o aproximados con un cierto error, a partir de un conjunto discreto de puntos, o de una función mucho más compleja.

2. INTERPOLACION LINEAL:

Sea una función $f(x)$ dada por una tabla $[(x_i, f(x_i)), i=0,1,2,..,n]$ o por un conjunto de operaciones $f()$, se desea aproximar dicha función mediante una recta en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, fig. 1. De este modo en el dominio total de la función, ésta queda aproximada por una poligonal, fig. 2.

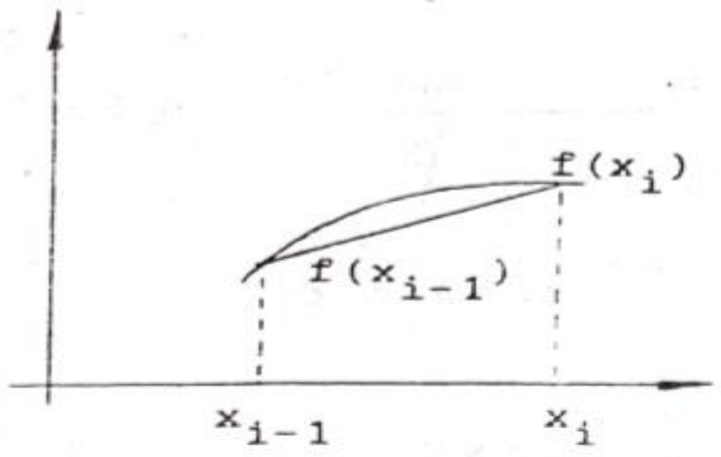

figura 1

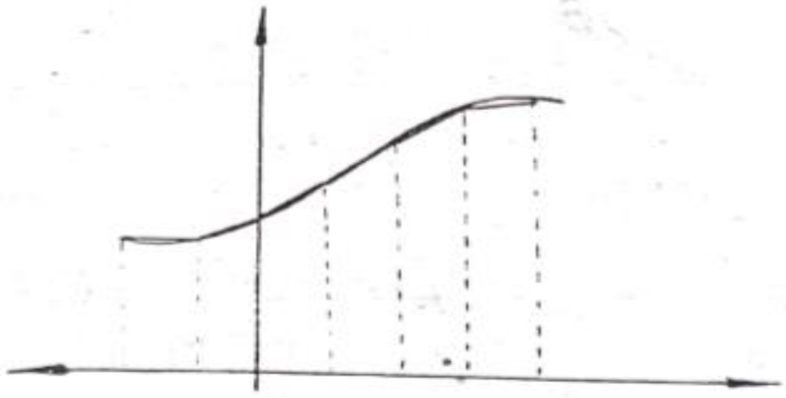

figura 2

INTERPOLACION INTRODUCCION. INTERPOLACION LINEAL

El problema se reduce a encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos del plano, y estimar los valores de la función con los de dicha recta.

<u>Datos</u>

$P_{i-1}\ (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$

$P_i\ (x_i, f(x_i))$

<u>Incógnitas</u>

Ecuación de la recta que pasa por P_{i-1} y P_i

Este es un problema resuelto por la Geometría Analítica.

$$y = m\,x + b \qquad (1)$$

$$f(x_{i-1}) = m\,x_{i-1} + b \qquad (2)$$

$$f(x_i) = m\,x_i + b \qquad (3)$$

De (1) y (3) restamos (2) para eliminar b

$$y - f(x_{i-1}) = m(x - x_{i-1}) \qquad (4)$$

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = m(x_i - x_{i-1}) \qquad (5)$$

Si efectuamos el cociente entre (4) y (5) es elimina m.

INTERPOLACION INTRODUCCION. INTERPOLACION LINEAL

$$\frac{y - f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} = \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$$

Reordenando:

$$y = f(x_{i-1}) + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$y = \frac{(x_i - x_{i-1}) . f(x_{i-1}) + (x - x_{i-1}) . (f(x_i) - f(x_{i-1}))}{(x_i - x_{i-1})}$$

Simplificando y reordenando se obtiene:

$$y = \frac{(x_i - x) . f(x_{i-1}) + (x - x_{i-1}) . f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})}$$

Fórmula de Aitken

$$y = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i)$$

Fórmula de Lagrange

INTERPOLACION POLINOMICA DE LAGRANGE

Sea una función continua $f(x)$ de la cual se tienen algunos valores $[(x_i, f(x_i)),\ i=0,1,2,\dots,n]$. Se desea encontrar un polinomio que aproxime la función $f(x)$, ya sea porque la misma es muy compleja en sus procedimientos de cálculo o porque sencillamente no se la conoce y los valores son experimentales.

Datos	Incógnitas
$[(x_i, f(x_i)),\ i=1,2,\dots,n]$, x	$P_n(x)$ polinomio de interpolación

El procedimiento para encontrar el polinomio de interpolación depende de las condiciones que se le exijan a $P(x)$.

3.1. Interpolación de Lagrange

El polinomio de Lagrange se obtiene imponiendo la siguiente condición:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \ /\ i=0,1,2,\dots,n$$

Concer el polinomio significa conocer los coeficientes del mismo. Como estos son $n+1$ tendremos que plantear $n+1$ ecuaciones.

INTERPOLACION POLINOMICA DE LAGRANGE

$\forall i / i = 0, 1, \dots, n$

El sistema desarrollado será:

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= f(x_0) = P_n(x_0)\\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= f(x_1) = P_n(x_1)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n &= f(x_i) = P_n(x_i)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n &= f(x_n) = P_n(x_n)
\end{aligned}
$$

Si escribimos este sistema de ecuaciones en forma matricial tendremos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\
1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^n\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0\\ a_1\\ \dots\\ a_i\\ \dots\\ a_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f(x_0)\\ f(x_1)\\ \dots\\ f(x_i)\\ \dots\\ f(x_n)
\end{bmatrix}
$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE LAGRANGE

Compactando la notación queda:

$$X \cdot A = F$$

$$X^{-1} \cdot X \cdot A = X^{-1} \cdot F$$

$$L = X^{-1}$$

$$\boxed{A = L \cdot F}$$

La expresión queda en forma desarrollada :

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_i \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{00} & l_{01} & l_{02} & \cdots & l_{0n} \\ l_{10} & l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i0} & l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n0} & l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \cdots \\ f(x_i) \\ \cdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE LAGRANGE

$$a_1 = l_{10}.f(x_0) + l_{11}.f(x_1) + l_{12}.f(x_2) + \ldots + l_{1n}.f(x_n)$$

Reemplazando los valores a_i del polinomio por los calculados tendremos:

$$P(x) = (l_{00}.f(x_0) + l_{01}.f(x_1) + l_{02}.f(x_2) + \ldots + l_{0n}.f(x_n)) +$$
$$(l_{10}.f(x_0) + l_{11}.f(x_1) + l_{12}.f(x_2) + \ldots + l_{1n}.f(x_n)).x +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(l_{10}.f(x_0) + l_{11}.f(x_1) + l_{12}.f(x_2) + \ldots + l_{1n}.f(x_n)).x^1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$+(l_{n0}.f(x_0) + l_{n1}.f(x_1) + l_{n2}.f(x_2) + \ldots + l_{nn}.f(x_n)).x^n$$

Se puede reagrupar la suma y escribir del siguiente modo:

$$P(x) = (l_{00} + l_{10}.x + l_{20}.x^2 + \ldots + l_{n0}.x^n).f(x_0) +$$
$$(l_{01} + l_{11}.x + l_{21}.x^2 + \ldots + l_{n1}.x^n).f(x_1) +$$
$$(l_{01} + l_{11}.x + l_{21}.x^2 + \ldots + l_{n1}.x^n).f(x_1) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(l_{0n} + l_{1n}.x + l_{2n}.x^2 + \ldots + l_{nn}.x^n).f(x_n)$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE LAGRANGE

Si llamamos $L_i(x)$ (con $i=0,1,\ldots,n$) a cada uno de los polinomios entre paréntesis tendremos:

$$P(x) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + \ldots + L_n(x).f(x_n)$$

Para que se cumpla la condición inicial: $P(x_i) = f(x_i)$ necesariamente debe cumplirse:

$$(L_i(x_i) = 1) \quad y \quad (L_k(x_i) = 0 \quad \forall k / k \neq i)$$

Con lo cual se concluye que las abscisas de x_k de la tabla son ceros del polinomio $L_k(x)$, excluyendo por supuesto x_i.
Ejemplificando puede decirse que:

$L_0(x)$ tiene ceros en $[x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\ldots\ldots, x_n]$

$L_1(x)$ tiene ceros en $[x_0, x_2, \ldots, x_i, \ldots\ldots\ldots, x_n]$

....

$L_i(x)$ tiene ceros en $[x_0, x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n]$

....

$L_n(x)$ tiene ceros en $[x_0, x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots\ldots x_{n-1}]$

INTERPOLACION POLINOMICA DE LAGRANGE

Cuando se conocen los ceros de un polinomio este puede escribirse en forma factoreada:

$$L_i(x) = c.(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)$$

$$L_i(x) = c.\prod_{k=0}^{k=n}(x-x_k) \qquad (\forall\ i \neq k)$$

Además:

$$L_i(x_i) = 1 = c.\prod_{k=0}^{k=n}(x_i-x_k) \qquad (\forall\ i \neq k)$$

$$L_i(x) = \frac{L_i(x)}{1} = \frac{L_i(x)}{L_i(x_i)} = \frac{c.\prod_{k=0}^{k=n}(x-x_k)}{c.\prod_{k=0}^{k=n}(x_i-x_k)}$$

$$L_i(x) = \frac{c.\prod_{k=0}^{k=n}(x-x_k)}{c.\prod_{k=0}^{k=n}(x_i-x_k)}$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE LAGRANGE

La expresión final para el polinomio $P(x)$ será:

$$P(x) = \frac{\alpha \cdot \prod_{k=1}^{k=n} (x-x_k)}{\alpha \cdot \prod_{k=1}^{k=n} (x_0-x_k)} \cdot f(x_0) + \frac{\alpha \cdot \prod_{k=0,\, k\neq 1}^{k=n} (x-x_k)}{\alpha \cdot \prod_{k=0}^{k=n} (x_1-x_k)} \cdot f(x_1) + \ldots +$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha \cdot \prod_{k\neq 0}^{k=n-1} (x-x_k)}{\alpha \cdot \prod_{k=0}^{k=n-1} (x_n-x_k)} f(x_n)$$

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\alpha \cdot \prod_{k=0}^{k=n} (x-x_k)}{\alpha \cdot \prod_{k=0}^{k=n} (x_i-x_k)} f(x_i)}$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

Sea f una función definida en el intervalo [a,b] y supongamos que se conocen $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))$ de su gráfica.

Llamaremos *diferencia dividida* de orden $0, 1, \cdots, n$ de la función f a las expresiones que siguen:

$$
\begin{aligned}
f[x_i] &= f(x_i) \\
f[x_i, x_j] &= \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad (i \neq j) \\
f[x_i, x_j, x_k] &= \frac{f[x_i, x_j] - f[x_i, x_k]}{x_j - x_k} \qquad (j \neq k) \qquad (5.14) \\
&\vdots \\
f[x_0, x_1, \cdots, x_n] &= \frac{f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_n]}{x_{n-1} - x_n}
\end{aligned}
$$

Usemos ahora (5.14) para obtener un desarrollo de $f(x)$ en términos de diferencias divididas.

Cualquiera sea $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ tenemos:

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \quad \text{de donde}$$

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x]$$

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x]}{x_1 - x} \quad , \quad \text{luego}$$

$$f[x_0, x] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x_0, x_1, x]$$

y, por lo anterior,

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x]$$

Siguiendo el proceso, establecemos

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ & \cdots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, \cdots, x_n] \qquad (5.17) \\ & + (x - x_0) \cdots (x - x_n) f[x_0, \cdots, x_n, x] \end{aligned}$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

De este resultado se deduce que si $f(x) = p_q(x)$, un polinomio de grado q, entonces las diferencias divididas de orden mayor o igual que $q+1$ son todas nulas.

En efecto,

$$p_q(x) = p_q(x_0) + \cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_q) f[x_0, \cdots, x_q, x]$$

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$$

(

$$\cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) f[x_0, \cdots, x_n]$$

donde los x_i son distintos entre sí e intervienen en un orden arbitrario.

De (5.13) y (5.17) se obtiene una expresión para la cota del error de interpol

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{|(x - x_0)\cdots(x - x_n)|}{(n+1)!} M \ , \quad x \in I_x = K\{x_0, \cdots, x_n, x\},$$

(

donde $|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad , t \in I_x$.

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	1	-1	13	41

construyamos el polinomio de interpolación de f, con diferencias divididas.

Para escribir $p_3(x)$ se requiere conocer las diferencias divididas de f. En la tabla que sigue usamos la notación $\hat{\Delta}^{(k)} f$ para la diferencia dividida de orden k.

x_i	y_i	$\hat{\Delta} f$	$\hat{\Delta}^{(2)} f$	$\hat{\Delta}^{(3)} f$	$\hat{\Delta}^{(4)} f$
0	1				
		-2			
1	-1		3		
		7		1	
3	13		7		-8
		28		-15	
4	41		-8		
		36			
2	-31				

se tiene

$$p_3(x) = 1 - 2x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-3)$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

Si a la tabla agregamos un nuevo dato, por ejemplo el punto (2,-31), podemos extender la tabla de diferencias.

Podemos ahora escribir el polinomio $p_4(x)$ que interpola a f con la tabla extendida:

$$p_4(x) = 1 - 2x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-3) - 8x(x-1)(x-3)(x-4).$$

Si consideramos ahora que los datos $(x_i, f(x_i))$ son tales que $x_{i+1} - x_i = h$, para todo $i = 0, 1, \cdots, n-1$, se tiene

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

donde $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i-1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2},$$

donde $\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$ para $i = 0, 1, \cdots, n-2$.

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

Siguiendo este cálculo tenemos

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^{(n)} f(x_i)}{n! h^n},$$

para $i = 0$, siendo

$$\Delta^{(n)} f(x_i) = \Delta^{(n-1)} f(x_{i+1}) - \Delta^{(n-1)} f(x_i).$$

es decir, $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^{(n)} f(x_0)}{n! h^n}$, donde $\Delta^{(n)} f(x_0) = \Delta^{(n-1)} f(x_1) - \Delta^{(n-1)} f(x_0)$.

De esta manera, podemos escribir el polinomio de interpolación de f introduciendo estas nuevas diferencias $\Delta^{(k)} f(x_i)$, llamadas *diferencias no divididas*, en la expresión (5.20):

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + \cdots + \\ \cdots + \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})}{n! h^n} \Delta^{(n)} f(x_0) \tag{5.22}$$

Esta forma de escribir $p_n(x)$ se conoce como *fórmula de Newton progresiva* y las diferencias $\Delta^{(k)} f(x_i)$ que intervienen se denominan *diferencias no divididas de orden* k.

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

Se conoce también la *fórmula de Newton regresiva* para $p_n(x)$ y es la

$$p_n(x) = f(x_n) - (x - x_n)\frac{\nabla f(x_n)}{h} + (x - x_n)(x - x_{n-1})\frac{\nabla^2 f(x_n)}{2h^2} + \cdots +$$

$$\cdots + \frac{(x - x_n)\cdots(x - x_1)}{n!h^n}\nabla^{(n)} f(x_n)$$

donde

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}) \quad ; \quad i = n, n-1, \cdots, 1$$

$$\nabla^2 f(x_i) = \nabla f(x_i) - \nabla f(x_{i-1}) \quad ; \quad i = n, n-1, \cdots, 2$$

$$\vdots$$

$$\nabla^{(n)} f(x_i) = \nabla^{(n-1)} f(x_i) - \nabla^{(n-1)} f(x_{i-1}) \quad ; \quad i = n$$

INTERPOLACION POLINOMICA DE NEWTON

x_i	0	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	7	13	43	145	350	700

escribamos la fórmula progresiva del polinomio de interpolación $p_5(x)$.

Construyamos la tabla de diferencias no divididas de f.

x_i	y_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	7					
		6				
2	13		24			
		30		48		
4	43		72		-17	
		102		31		28
6	145		103		11	
		205		42		
8	350		145			
		350				
10	700					

El valor de h es 2 y, de (5.22), se tiene

$$p_5(x) = 7 + 3x + 3x(x-2) + x(x-2)(x-4) - \frac{17}{384}x(x-2)(x-4)(x-6) +$$
$$+ \frac{7}{960}x(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$$

MUCHAS GRACIAS

Jose.artal@um.edu.ar