MODELOS POBLACIONALES

Estos modelos corresponden a diversos sistemas donde interactúan diferentes tipos de poblaciones variables en el tiempo. Los modelos se examinan para analizar las ecuaciones que determinan la forma de variación de las poblaciones y poder extraer conclusiones.

Las poblaciones pueden ser de naturaleza muy diversa, tales como especies de animales que disputan territorio o se depredan entre sí, microorganismos que fagocitan a otros organismos, bacterias o individuos de distintos géneros sometidos a alguna ley de variación.

El Modelo depredador-presa:

Un ejemplo clásico de los modelos poblacionales es el Depredador-presa, donde coexisten en un determinado ámbito delimitado dos poblaciones de especies antagónicas, como podrían ser lobos y conejos, que se identificarán como población [x(t)] la de presas y población [y(t)] la de depredadores.

El modelo estudia de qué forma impacta en el tiempo la presencia de cada una de las poblaciones sobre la otra.

Para mayor simplicidad y como parte de las consideraciones generales o hipótesis del modelo, se supone que el alimento de las presas es ilimitado en el hábitat de la coexistencia y que el único alimento de los depredadores son las presas.

También se supone que no existen factores externos que pudieran alterar a las poblaciones de ninguna manera, tales como plagas, enfermedades, presencia de cazadores o de otros depredadores.

Con esto, la única causa de muerte posible para cada una de las poblaciones es la falta de alimento para los depredadores y el encuentro con un depredador para las presas.

Además, la característica del modelo es que cada encuentro lobo-conejo termina con la muerte del conejo, vale decir que los depredadores tienen una eficiencia de caza del 100%. No existe, teóricamente, la posibilidad de escape de la presa o falla del depredador.

En base a estas consideraciones generales se analizará la variación de cada población en el tiempo, vale decir, su derivada respecto del tiempo:

Así, se puede representar las respectivas derivadas por la notación habitual más simplificada:

[$\frac{dx(t)}{dt}$=x’];

[$\frac{dy(t)}{dt}$=y’]

Las ED correspondientes del modelo son, entonces, las siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{x' = ax - bxy} \\ \mathbf{y' = cky - ky} \end{cases} \qquad ①$$

donde los coeficientes son constantes que indican lo siguiente:

a: es un factor de proporcionalidad de la población inicial de presas y su tasa de natalidad

b: es un factor proporcional a la probabilidad de encuentros, visto desde las presas

c: es un factor proporcional a la probabilidad de encuentros, visto desde los depredadores

k: es un factor proporcional a la población inicial de depredadores y su tasa de natalidad.

En la primera ecuación se sobreentiende que la población de presas puede variar en disminución si aumenta la cantidad de encuentros, por eso este último término se encuentra restando.

En la segunda ecuación, se entiende mejor si se presenta de otro modo, despejando: **y’ + ky = cxy;** interpretándose así que la población de depredadores aumenta, a partir de su población inicial y teniendo en cuenta su tasa de natalidad, en función de la cantidad de encuentros [cxy].

En ambas ecuaciones se observa, por el signo, cómo influyen la cantidad de encuentros presa-depredador. En la población de presas, se ve que tiende a disminuirla y en la población de depredadores se ve que tiende a aumentarla, porque las presas son su único alimento.

El retrato fásico deberá estar en el primer cuadrante del PDF, porque ninguna de las poblaciones puede ser negativa.

El sistema tiene dos puntos críticos, uno de ellos ubicado en el origen, para [x=0] é [y=0]; y el restante en [x=k/c]; é [y=a/b]; éste último porque son las coordenadas donde se anulan ambas derivadas:

$$\begin{cases} x' = 0 = a.\dfrac{k}{c} - b.\dfrac{k}{c}\dfrac{a}{b} \\ y' = 0 = c.\dfrac{k}{c}\dfrac{a}{b} - k.\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Ambos puntos críticos son dos trayectorias de un solo punto en el diagrama de fase.

Condiciones de contorno:

Si en el instante inicial [t=0] hubiera una población de [x_o] conejos y ningún lobo, vale decir:

$x(0)= x_o$

$y(0)= 0$

entonces, la solución del sistema sería:

$x= \varphi(t) = x_o\, e^{at}$

porque si se deriva, resulta:

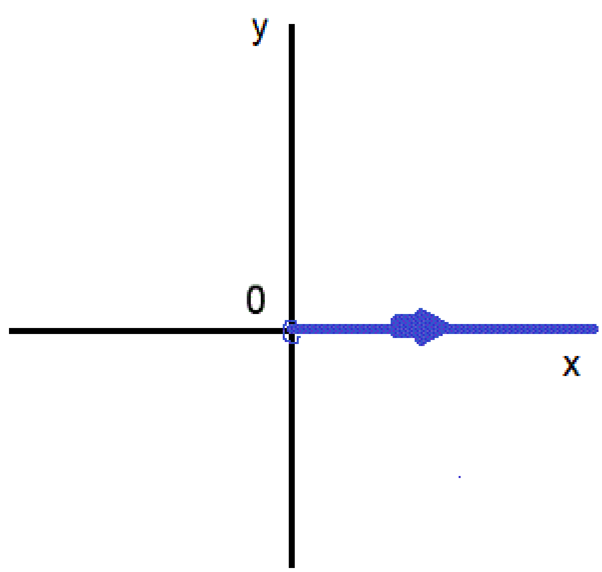
$x'= ax_o\, e^{at} = ax$

que es lo que queda de la primera ED cuando es [y=0].

Por otro lado, la otra trayectoria es:

$y = \psi(t) = 0$

Si estas soluciones se representan en el PDF, se obtiene:



Así, el semieje [X] positivo, con dirección creciente hacia la derecha, es la trayectoria que corresponde en el caso en que [y=0]. Como siempre, aproximándose indefinidamente al origen, pero sin tocarlo.

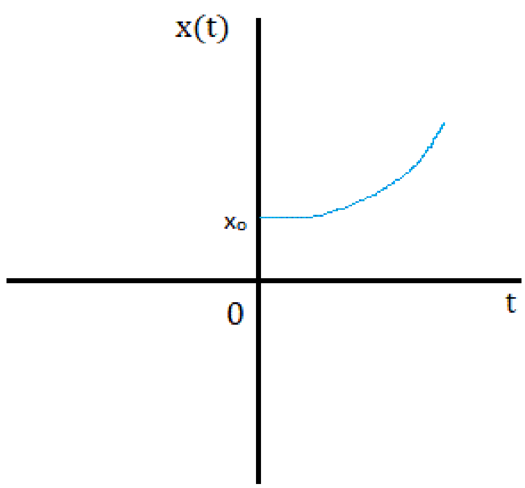
En este evento, la población inicial de lobos en [t=0] es nula, y la población de conejos, al carecer de un depredador restrictivo, simplemente crece en forma exponencial, como se aprecia en la solución temporal:

$x(t) = x_o \, e^{at}$

Vale decir que se verifica analíticamente lo que se presume lógicamente, que la población de presas crecerá exponencialmente al estar libre de la amenaza de los depredadores.

En un gráfico del comportamiento temporal de esta población en función del tiempo se verá una curva como la siguiente, creciendo desde la población inicial [x_o] y con una pendiente determinada por la tasa de natalidad de la especie.

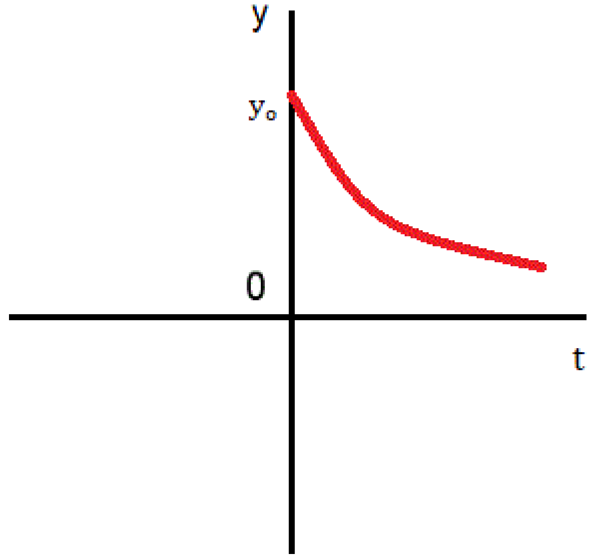
Algo así como lo siguiente:



En el caso recíproco, suponiendo que en el instante inicial [t=0] hubieran [$y(0) = y_o$] lobos y ningún conejo [$x(0) = 0$]; la solución del sistema sería:

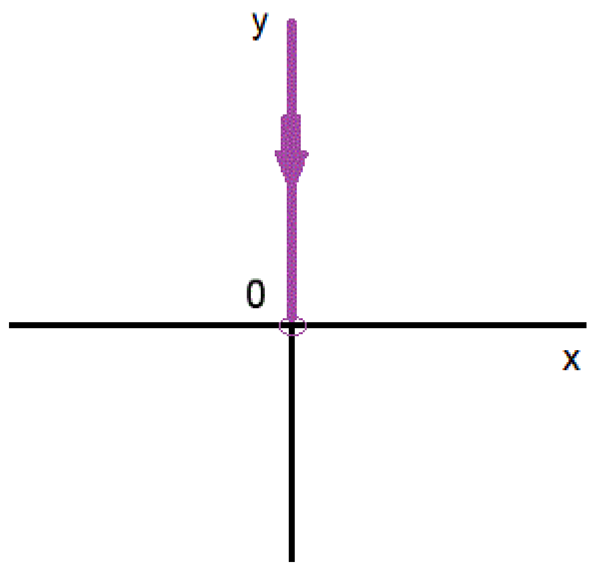
$$\begin{cases} x = \varphi(t) = 0 \\ y = \psi(t) = y_o \, e^{-kt} \end{cases}$$

Quiere decir que, si se supone que la población inicial de conejos es nula, la población de lobos declinaría exponencialmente por falta de alimento, desde su valor inicial [y_o]; conforme lo corrobora la solución temporal analítica, algo así como:



Esta solución es lógica porque, a falta de presas, la población de depredadores sólo puede disminuir debido a que mueren de inanición por carencia de alimentos.

Si esta trayectoria se representara en el PDF, sería el semieje de ordenadas positivo, pero con sentido decreciente, es decir hacia el origen de coordenadas (el cero de los lobos, que están decayendo).



Este gráfico y el recíproco anterior en el PDF, están demostrando que los ejes son trayectorias en el PDF para este sistema, de manera que las trayectorias del retrato fásico definitivo no podrán cortar a los ejes en ningún punto.

Vale decir que, definido el punto crítico en el primer cuadrante, las trayectorias [$x=\varphi(t)$]; [$y=\psi(t)$] que pasen por el punto [x_o,y_o] no podrán atravesar ninguno de ambos ejes, porque tanto el semieje [X] positivo como el semieje [Y] superior son trayectorias en las condiciones de contorno.

por lo tanto:

$\varphi(t)>0$

$\psi(t)>0$

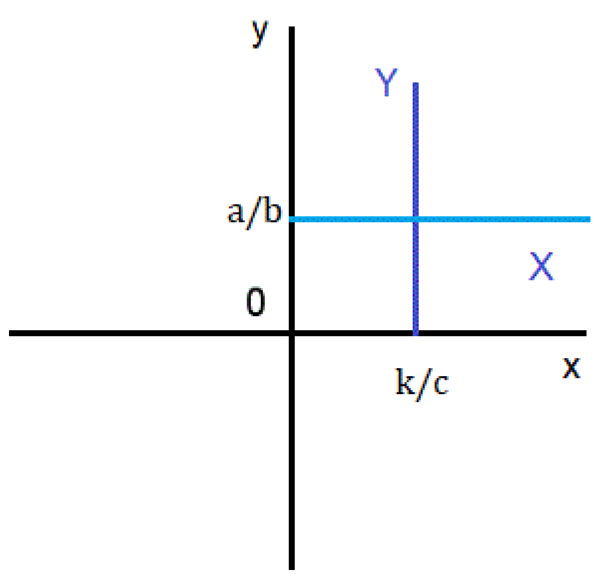
para todo valor de [t].

Recordando que las coordenadas del punto crítico son [$x_o=k/c$] é [$y_o=a/b$] se puede definir un nuevo par de ejes haciendo una traslación de manera que el origen de los nuevos ejes coincida con este punto crítico.

para ello se trasladan:

$X = x - \frac{k}{c}$

$Y = y - \frac{a}{b}$



de manera que las antiguas coordenadas, ahora pasan a ser:

$x = X + \frac{k}{c}$

$y = Y + \frac{a}{b}$

luego, las ED originales:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = cky - ky \end{cases}$$

se transforman en:

X' = a (X+ $\frac{k}{c}$) – b [(X+$\frac{k}{c}$)(Y+ $\frac{a}{b}$)]

y, operando:

X' = - b $\frac{k}{c}$ Y – b XY

en la otra ED, resulta:

Y' = c [(X+ $\frac{k}{c}$)(Y+ $\frac{a}{b}$)] – k (Y+ $\frac{a}{b}$)

operando, resulta:

Y' = c $\frac{a}{b}$ X + c XY

En definitiva, el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales trasladadas, que tiene un punto crítico en el origen, punto que es correspondiente a las coordenadas [($\frac{k}{c}$);($\frac{a}{b}$)] del sistema original, resulta ser:

$$\begin{cases} \mathbf{X' = - b \frac{k}{c} Y - b XY} \\ \mathbf{Y' = c \frac{a}{b} X + c XY} \end{cases}$$

Que es un sistema cuasilineal al que se pueden aplicar las condiciones de Lyapunov y descartar los dos términos no lineales en cada una de las ED. De manera que el sistema linealizado asociado es:

$$\begin{cases} X' = -b \ \frac{k}{c} \ Y \\ Y' = c \ \frac{a}{b} \ X \end{cases} \qquad (2)$$

cuya ecuación matricial característica es:

det {[A] – [λI]} = 0

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bk}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\} = 0$$

de donde:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{bk}{c} \\ \frac{ca}{b} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{ca}{b}\frac{bk}{c} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\lambda^2 + ak = 0}}$$

que es una EC algebraica de segundo grado incompleta, cuyas raíces son imaginarias puras conjugadas:

$\lambda_{1,2} = \pm\, j\, \sqrt{ak}$

Esto significa que el punto crítico del sistema linealizado es un *centro*, de manera que se trata de soluciones periódicas y el comportamiento analizado es el de un fenómeno cíclico.

Vale decir que la interacción entre ambas poblaciones cumplirá un ciclo que se repetirá indefinidamente, mientras no existan alteraciones externas.

Siendo el punto crítico obtenido para el sistema linealizado un Centro, significa que también para el sistema no lineal original se tratará de un centro.

Para avanzar en el conocimiento de la solución, pueden dividirse miembro a miembro las dos ecuaciones resultantes del sistema linealizado ②, del siguiente modo:

$$\frac{\frac{dX}{dt}}{\frac{dY}{dt}} = \frac{-\frac{bk}{c}Y}{\frac{ac}{b}X}$$

luego, operando resulta:

$$\frac{dX}{dY} = -\frac{b^2kY}{ac^2X} \Rightarrow ac^2\, X\, dX = -b^2\, k\, Y\, dY$$

Entonces, integrando miembro a miembro:

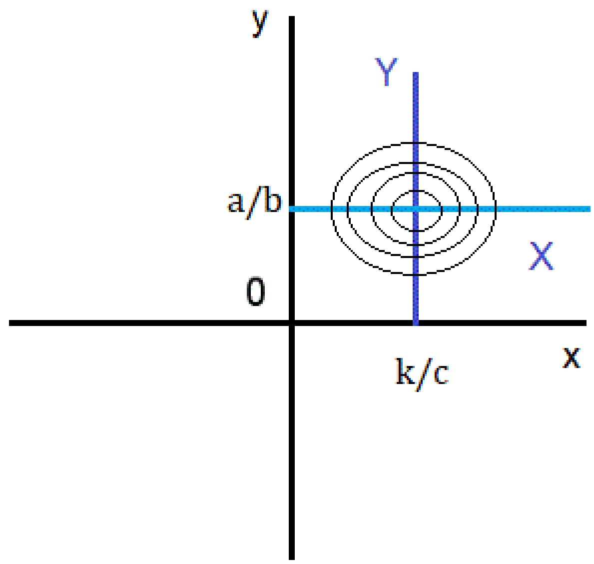
$ac^2\, X^2 = -b^2\, k\, Y^2 + K;$

donde K es una constante arbitraria positiva de integración

luego:

$\boldsymbol{ac^2\, X^2 + b^2\, k\, Y^2 = K}$

Esta última expresión es la ecuación de una familia de elipses en el plano XY, que dependen paramétricamente del valor de K.



La conclusión es que el sistema linealizado tiene trayectorias elípticas centradas alrededor del punto crítico $[\frac{k}{c}\,;\frac{a}{b}]$; que es el origen del sistema trasladado.

Aunque se sabe que el sistema cuasilineal original tendrá el mismo comportamiento en cuanto a punto crítico (centro), es conveniente estudiar con mayor profundidad el sistema no lineal.

Para ello, se pueden dividir miembro a miembro las dos ecuaciones del SNL ①, del mismo modo que se hizo con las del sistema linealizado asociado ②, así:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = cky - ky \end{cases}$$

de manera que dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{cxy-ky}{ax-bxy}$$

de aquí se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(cx-k)}{x(a-by)} \Rightarrow \frac{a-by}{y}\,dy = \frac{cx-k}{x}\,dx;$$

é integrando miembro a miembro esta última expresión, resulta:

$$\int\frac{a}{y}\,dy - \int b\,dy = \int c\,dx - \int k.\frac{1}{x}\,dx$$

resolviendo las respectivas integrales:

$a \ln y - by = cx - k \ln x + c_1$;

donde c_1 es una constante arbitraria de integración, operando:

$\ln (y^a x^k) = cx + by + c_1$

y, despejando el argumento del logaritmo natural:

$\underline{\mathbf{y^a x^k = K\, e^{cx+by}}}$ ④

donde

$K = e^{c_1}$

K es una constante arbitraria positiva, por la forma en la que está definida, a partir de una exponencial creciente. Sólo podría anularse si fuera $c_1 = -\infty$; algo que no puede ser.

Como los valores iniciales se habían denominado:

$x(0) = x_o$

$y(0) = y_o$

entonces se puede evaluar el valor de la constante K como sigue:

$(y_o)^a (x_o)^k = K\, e^{cx_o+by_o}$

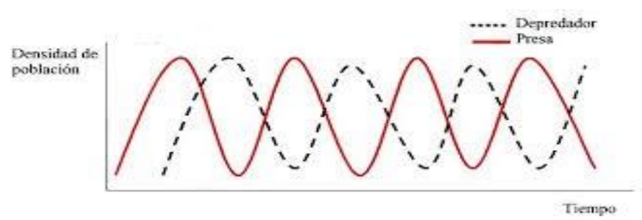
de donde, despejando K, queda:

$K= [(y_o)^a (x_o)^k]/ e^{cx_o+by_o}$

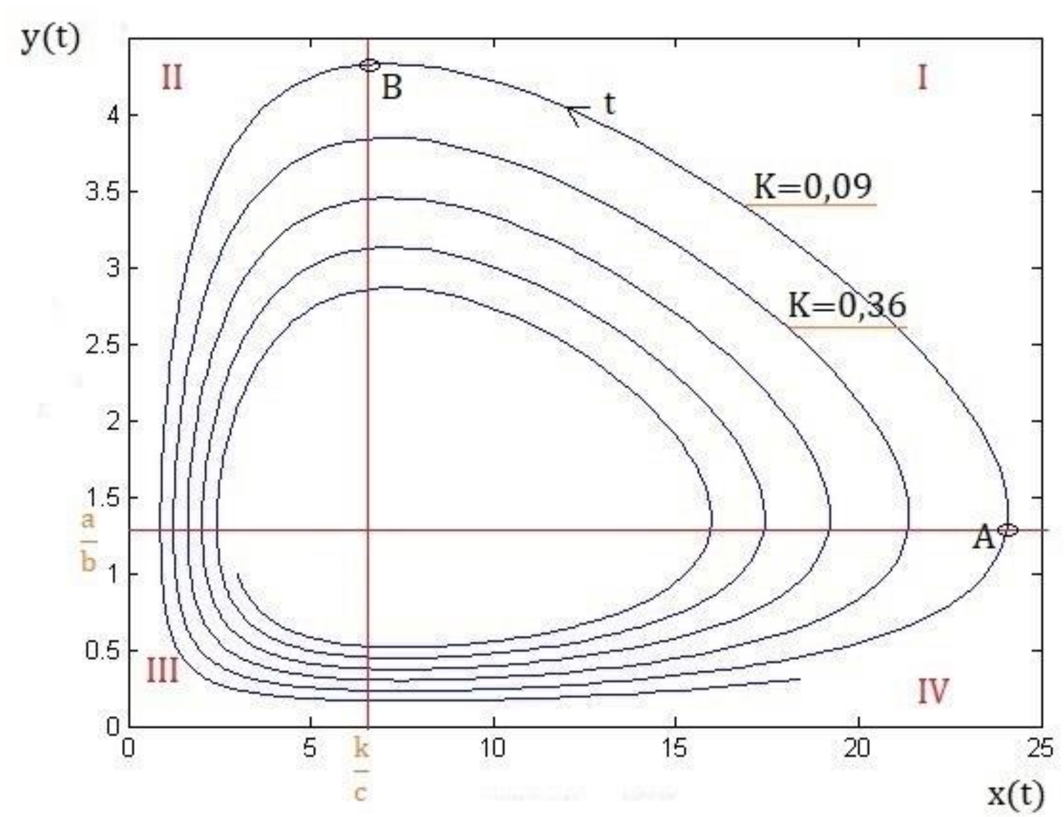
La expresión ④ es una ecuación implícita que es la solución del sistema autónomo original del modelo Depredador-Presa.

Esta ecuación determina una familia de curvas cerradas que no son exactamente elipses salvo las muy cercanas alrededor del punto crítico y estas curvas se van deformando a medida que los valores de (x,y) se alejan del mismo.

De este modo, las poblaciones de lobos y conejos tienen una variación cíclica y van desde un valor mínimo a uno máximo y viceversa, como una onda de tipo senoidal que no corta al eje de abscisas y, por lo tanto, nunca se anula.



El retrato fásico correspondiente al SNL o sistema cuasilineal original del modelo depredador-presa es de una forma bien conocida como la siguiente:



A medida que los valores de la constante K son menores, las curvas se van alejando del punto crítico, por la forma en que está definida.

Las trayectorias más cercanas al punto crítico (no dibujadas en este gráfico) serán casi elípticas, en coincidencia con las soluciones para el sistema linealizado.

Estas trayectorias cerradas de tipo *centro*, representan gráficamente las soluciones periódicas del sistema cuasilineal.

Los ejes que pasan por las coordenadas del punto crítico dividen al primer cuadrante en cuatro regiones (I, II, III y IV).

Una trayectoria atravesará por las cuatro regiones cuando el sistema complete un ciclo.

Además, estas cuatro regiones del plano servirán para realizar un análisis pormenorizado del comportamiento del modelo.

Región I:

Cuando se ingresa a la Región [I] desde el punto [A]; que coincide con la coordenada del punto crítico sobre el eje [Y]; moviéndose en el sentido antihorario considerado como positivo para la circulación del tiempo, se observa que la población de presas [x(t)] es máxima en A y que hay allí, aproximadamente, un tercio de la población máxima de depredadores.

Suponiendo que las cifras están en miles en ambos ejes, en el punto [A] hay poco más de 24.000 conejos y cerca de 1.300 lobos.

A medida que transcurre el tiempo se ve que la población de depredadores tiende a crecer, por la gran disponibilidad de comida que tienen, ya que la población de presas es máxima. La variable [y] tiene pendiente positiva en esta Región I.

Contrariamente, se ve que la población de conejos tiende a disminuir suavemente, al aumentar el número de encuentros por el crecimiento de los depredadores. La variable [x] tiene pendiente negativa en esta Región I.

Esta situación se mantiene hasta alcanzar el punto [B]; que coincide con la coordenada del punto crítico sobre el eje [X] y, por lo tanto, es el nuevo punto de inflexión de la trayectoria.

En el punto [B] se observa que se ha alcanzado el valor máximo en la población de depredadores, alrededor de 4.300 lobos, mientras que la población de presas se fue reduciendo hasta casi la cuarta parte de su máximo, con poco más de 6.000 conejos.

Región II:

A partir del punto [B] se ingresa en la Región II, donde ambas variables tienen pendiente negativa.

Las presas siguen disminuyendo porque un máximo de depredadores significa un incremento en la posibilidad de encuentros, pero los depredadores también disminuyen porque ahora tienen que compartir presas más escasas con una gran cantidad de miembros de su especie.

Al disminuir las presas, éstas tienden a alcanzar su mínimo, alrededor de 700 conejos y por lo tanto hay un descenso casi vertical en la población de depredadores, lo que significa una pendiente negativa de casi 270°.

Obviamente, hay una gran mortandad entre los lobos, que venían de alcanzar su población máxima, ante la rápida disminución de alimento, por haber diezmado la población de conejos.

Esta población debilitada de presas resultó insuficiente para el incremento en la población de depredadores.

Al finalizar la Región II, límite que coincide con la coordenada sobre el eje [Y] del punto crítico, las presas están en su población mínima, cerca de 700 conejos, mientras que los depredadores vuelven al valor que tenía su población en el punto [A], cerca de 1.300 lobos, pero siguen en franca disminución por escasez de alimento.

Región III:

Ingresando en la Región III, las presas se mantienen en su mínimo y los depredadores siguen disminuyendo aceleradamente.

Sin embargo, se observa que al alcanzar los lobos un valor de aproximadamente 500 individuos cambia la pendiente de [x], tornándose positiva, es decir que suavemente la población de presas comienza a recuperarse, justamente porque los lobos son cada vez menos.

Pasado este punto de inflexión los depredadores tienden a alcanzar su mínimo, alrededor de 200 lobos, mientras que las presas se siguen recuperando, alcanzando los 5.000 conejos.

Cuando la trayectoria llega hasta la coordenada del punto crítico sobre el eje [X] el diagrama ingresa en la Región IV, con una población aproximada de 7.000 conejos y 200 lobos.

Entre la salida de la Región III y el ingreso a la Región IV, la trayectoria es horizontal, significa que estamos en un mínimo de [y(t)] que se verifica para cuando su derivada se anula, o sea que tiene pendiente cero: [y’=0].

Región IV:

Al ingresar a esta región se advierte un acelerado incremento de la población de presas, favorecidas por la muy escasa población de depredadores, que se mantienen en un mínimo prolongadamente.

Sin embargo, cuando la población de presas alcanza un valor aproximado de 10.000 conejos, comienza a insinuarse una recuperación de la población de depredadores.

Este crecimiento insinuado de la población de lobos se acrecienta a medida que siguen aumentando las presas, al disponer los pocos depredadores sobrevivientes de una mayor probabilidad de encuentros.

En esta Región IV, es la única del diagrama en que ambas variables tienen pendiente positiva, algo que se hace mucho más evidente al superar las presas un valor aproximado de 15.000 conejos.

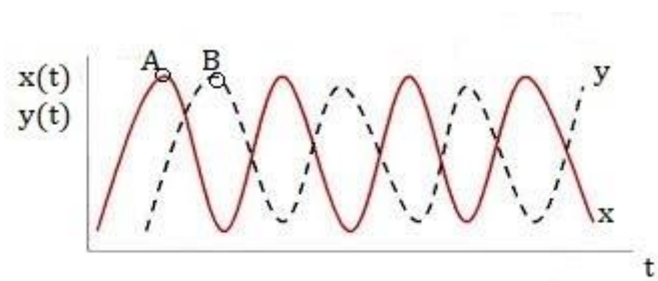
Para este punto, los depredadores ya están en un número cercano a los 300 ejemplares y su población sigue creciendo.

Esta tendencia se mantiene hasta el punto [A], donde el ciclo se reinicia con una población máxima de presas y un tercio de los depredadores.

Como ya se ha expresado, si no hay ningún factor externo que altere el equilibrio, este ciclo se repetirá de la misma manera indefinidamente, que es la característica de un sistema cuando el punto crítico es un centro en el PDF.

El comportamiento temporal de las poblaciones es del tipo de una oscilación armónica, pero con variaciones senoidales desplazadas respecto del eje de abscisas, ya que las poblaciones nunca se anulan ni mucho menos adoptan valores negativos como ocurriría con una variación senoidal corriente.

Como se ve en el siguiente diagrama y tal como se observó en el análisis realizado, a un máximo de las presas [A] le sigue un máximo de los depredadores [B], desfasado en el tiempo, pero luego a un mínimo de las presas le sigue un mínimo de los depredadores y así, cíclicamente.



Ejemplos de aplicación:

Con este modelo se pueden analizar sistemas físicos reales de distinto tipo, biológicos y hasta económicos.

Como un ejemplo de estos últimos, se analizó en una oportunidad el problema causado por la pesca intensiva de la merluza en los mares del sur argentino.

En esta aplicación, las presas eran la población de merluzas disponibles para la pesca y los depredadores eran los pescadores y los empleados de la industria pesquera.

Aquí no había muertes de depredadores, sino que el símil del modelo estaba representado por la pérdida de empleos en la industria pesquera.

La baja de actividad se traducía en el desempleo de los pescadores y el cierre de establecimientos y factorías por falta de cardúmenes a consecuencia de haber sido diezmados.

Estudiando el ciclo con el modelo depredador-presa, se llegó a la conclusión de que era conveniente cambiar la forma a las curvas del punto crítico, dedicando una gran parte de la fuerza de trabajo, durante un tiempo, a otras tareas afines para permitir que las poblaciones de merluza se recuperaran, "redondeando" las trayectorias en el PDF.

Esto evitaba el cierre de establecimientos pesqueros y permitía reactivar el sector al mejorar, después de un plazo, las condiciones para la pesca.

La solución consistió en cambiar el punto de inflexión antes de que la población de merluza llegara a su mínimo. Sin permitir tampoco que los pescadores lleguen a un mínimo, al crearles artificialmente nuevas actividades distintas, pero relacionadas, para mantenerlos ocupados y alejados de la pesca de merluza momentáneamente.

H. B. 2020