El método del simplex. Ejercicios resueltos y comentados

1.- Resolver utilizando el método del simplex el programa siguiente

Max
$$x_1 + 9x_2 + x_3$$

sujeto a
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$.
 $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15$
 $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Solución:

Paso 1: En primer lugar, transformamos este programa de forma canónica a forma estándar mediante la introducción de dos variables de holgura

Las variables de holgura se incorporan a la sujeto a sujeto a costos (coeficientes) nulos. Este es el cuerpo de las restricciones
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_1^h = 9$$
 Restricciones de no negatividad para las variables $x_1, x_2, x_3, x_1^h, x_2^h \ge 0$ Restricciones de no negatividad para las variables

Expresamos ahora los componentes del problema en forma matricial

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1^h \\ x_2^h \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

y comprobamos que rgA = rg(A, B) = 2. Esto significa que el sistema AX = B es compatible.

Además obtenemos una base canónica en la matriz *A* utilizando las dos últimas columnas lo que implica que no son necesarias variables artificiales para este problema.

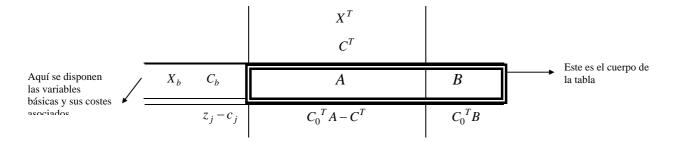
Paso 2: Determinamos una primera solución factible básica utilizando la matriz básica

canónica
$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, y tenemos $X_0 = A_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Esta solución básica es factible no degenerada y permite considerar las variables de holgura como básicas y sus costes asociadas como básicos

$$X_b = \begin{pmatrix} x_1^h \\ x_2^h \end{pmatrix} \qquad C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 3: Como se trata de un problema de maximización utilizaremos el siguiente esquema para *la primera tabla del simplex*



Calculamos en primer lugar los valores $C_0^T A - C^T$ y $C_0^T B$ y luego sustituimos en esta primera tabla

$$C_0^T A - C^T = (0,0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (1,9,1,0,0) = (-1,-9,-1,0,0)$$

$$C_0^T B = (0,0) \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 x_2 x_3 x_1^h x_2^h$$

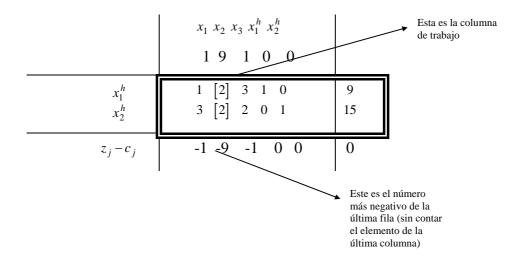
$$1 9 1 0 0$$

$$x_1^h 0$$

$$x_2^h 0$$

$$x_3^h 0$$

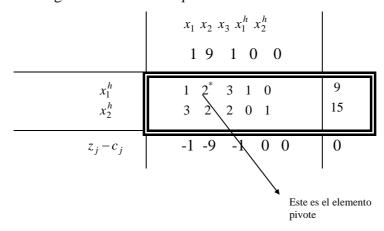
Paso 4: Para evitar confusiones prescindimos de los valores de la segunda columna y a continuación localizaremos el número *más negativo* de la última fila (excluyendo la última columna). La columna del cuerpo de la tabla que esté situada inmediatamente encima será la *columna de trabajo*.



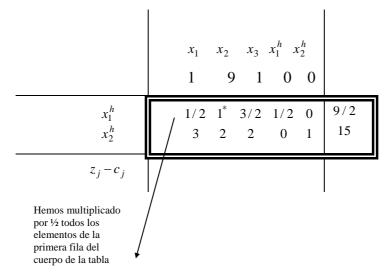
Ahora dividiremos cada número de la última columna del cuerpo de la tabla por el correspondiente en la columna de trabajo

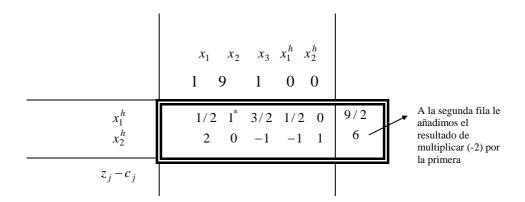
	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
x_1^h x_2^h	1 [2] < 3 1 0 3 [2] < 2 0 1	- 9 - 15
$z_j - c_j$	-1 -9 -1 0 0	0

y obtenemos los valores 9/2 = 4.5 y 15/2 = 7.5. Entre tales valores se escoge el que dé un resultado menor y el elemento de la columna de trabajo que proporciona este valor mínimo se distingue como *elemento pivote*.



Paso 5: Prescindimos de los valores numéricos de la última fila de la tabla y utilizando operaciones elementales de *filas* reducimos a ceros todos los elementos de la columna de trabajo distintos del pivote y a éste lo hacemos igual a la unidad





Paso 6: La variable básica situada en la fila del pivote pasa a ser no básica y la variable no básica situada en la columna del pivote pasa a ser básica. Añadimos ahora sus costes asociados. (Señalemos que no es conveniente retocar las variables de la primera fila de la tabla).

Paso 7: Reiteramos los pasos 3 y 4 y volvemos a efectúar los cálculos $z_j - c_j$, teniendo en cuenta que ahora es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1^* & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \end{pmatrix}; C_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y resulta

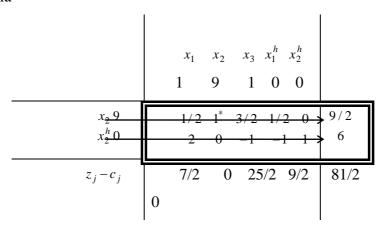
$$C_0^T A - C = (9,0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1^* & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - (1,9,1,0,0) = (7/2,0,25/2,9/2,0)$$

$$C_0^T B = (9,0) \begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \end{pmatrix} = 81/2.$$

• Reiteración del paso 3

 Reiteración del paso 4: No es posible debido a que no hay valores negativos en la última fila (sin contar la última columna). En consecuencia, el algoritmo se detiene.
 En el caso de que hubiera aparecido un número negativo en esta última fila, deberemos reiterar los pasos 5, 6 y 7.

Una vez que el algoritmo se ha detenido, identificamos las variables básicas presentes, que en este caso, son x_2, x_2^h y les asociamos los valores de la última columna del cuerpo de la tabla



$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y el resto de las variables se hace cero $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_1^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quedando como vector solución

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1^h \\ x_2^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y como valor máximo de la función objetivo tenemos el indicado en la última fila y última columna: 81/2.

2.- Resolver utilizando el método del simplex el programa siguiente

Min
$$z = 80x_1 + 60x_2$$

sujeto a
 $0,20x_1 + 0,32x_2 \le 0,25$.
 $x_1 + x_2 = 1$
 $x_1, x_2 \ge 0$

Solución:

Paso 1: Transformamos este programa de forma mixta a forma estándar mediante la introducción de una variable de holgura

Min
$$z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3$$

sujeto a
 $0,20x_1 + 0,32x_2 + x_3 = 0,25$.
 $x_1 + x_2 = 1$
 $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Como no podemos obtener una base canónica para la determinación de la primera solución factible básica, debemos introducir una variable artificial en la última restricción. Esta variable artificial se incorpora a la función objetivo con un coeficiente M muy grande con el fin de que el algoritmo quede penalizado por los valores de esta variable

Min
$$z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 + Mx_4$$

sujeto a
 $0,20x_1 + 0,32x_2 + x_3 = 0,25$.
 $x_1 + x_2 + x_4 = 1$
 $x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$

Expresamos el programa en forma matricial

$$C = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y ahora podemos comprobar que rgA = rg(A, B) = 2.

Paso 2: Determinamos una primera solución factible básica utilizando la matriz básica canónica $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y tenemos $X_0 = A_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esta solución básica es factible y no degenerada, pudiendo escribir

$$X_b = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}.$$

Paso 3: Como se trata de un problema de minimización utilizaremos el siguiente esquema para *la primera tabla del simplex*

	X^{T} C^{T}	
X_b C_b	A	В
$c_j - z_j$	$C^T - C_0^T A$	$-C_0^T B$

Vamos a efectúar los cálculos y sustituir en esta primera tabla

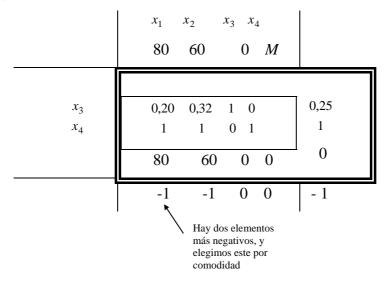
$$(80, 60,0, M) - (0, M) \begin{pmatrix} 0,20 & 0,32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (80 - M,60 - M,0,0); -(0, M) \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1 \end{pmatrix} = -M$$

	x_1 x_2 x_3 x_4	
	80 60 0 <i>M</i>	
$x_3 \ 0$ $x_4 \ M$	0,20 0,32 1 0 1 1 0 1	0,25
$c_j - z_j$	80-M 60-M 0 0	- M

Paso 4: Para evitar errores de redondeo vamos a desglosar la última linea de la primera tabla en dos lineas. La primera contiene a los términos que no contienen M y la segunda a los términos que lo contienen.

	x ₁ 80	60		м М	
x ₃ 0 x ₄ M	0,20	0,32	1 0 0 1		0,25
	80 -1	60 -1		0	0 -1

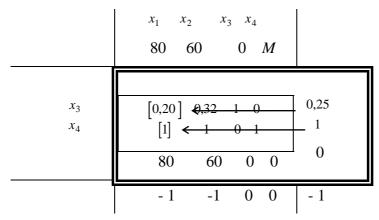
Paso 5: Se aplica ahora el algoritmo del simplex a la última fila de la tabla anterior, considerando que el cuerpo de la tabla se "amplia" con la penúltima fila. Así buscamos, en primer lugar, el elemento más negativo de esta última fila (sin incluir la última columna).



De esta forma, la columna de trabajo es la primera del cuerpo de la tabla

	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
x ₃ x ₄	[0,20] 0,32 1 0 0,25 1 0 1 0 0 0 0
	-1 -1 0 0 -1

Dividimos cada elemento de la última columna del cuerpo de la tabla por el correspondiente en la columna de trabajo.



y obtenemos 0.25 / 0.20 = 1.25, 1/1 = 1. Esto nos indica que el elemento pivote es el segundo de la primera columna del cuerpo de la tabla

	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
<i>x</i> ₃ <i>x</i> ₄	0,20 0,32 1 0 0,25 1* 1 0 1 1 80 60 0 0
	-1 -1 0 0 -1

A continuación hacemos ceros con operaciones elementales de filas en el cuerpo de la tabla

y en la última fila.

	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
x_3 x_4	0 0,12 1 -0,20 0,05 1 1 0 1 1 0 -20 0 -80 -80
	0 0 0 1 0

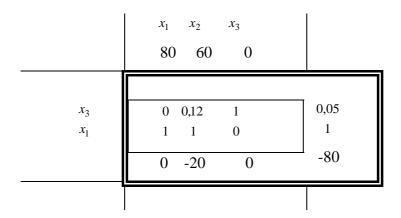
Cambiamos las variables básicas y no básicas. Así x_1 pasa a ser básica y x_4 deja de ser básica.

Observación importante: Siempre que una variable artificial deja de ser básica, se elimina de la primera línea de la tabla junto con toda la columna por debajo de ella.

Como la variable x_4 es artificial y ha dejado de ser básica, podemos eliminar toda la columna por debajo de ella.

Observación importante: La última fila de la tabla puede eliminarse si nos da todo ceros.

Como esto ocurre en nuestra tabla podemos suprimir la última fila.



Calculamos de nuevo $C^T - C_0^T A$ y $- C_0^T B$, con los valores

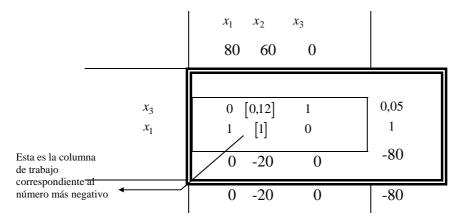
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1 \end{pmatrix}; C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \end{pmatrix},$$

$$(80,60,0) - (0,80) \begin{pmatrix} 0 & 0.12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,-20,0); -(0,80) \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1 \end{pmatrix} = -80$$

resultando la tabla

	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_6 x_7 x_8 x_8 x_9	
x_3 x_1	0 0,12 1 1 1 0 0 -20 0	0,05
$c_j - z_j$	0 -20 0	-80

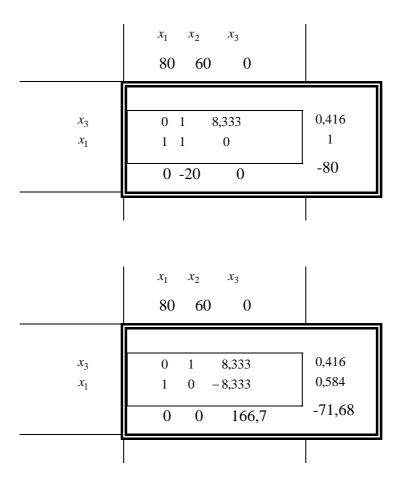
El número más negativo en la última fila (excluyendo el correspondiente a la última columna) es -20, luego la columna de x_2 es la columna de trabajo.



Las razones entre los elementos de última columna y los correspondientes de la columna de trabajo son 0.05/0.12=0.417 y 1/1=1. De esta manera, el elemento pivote es el 0.12.

	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_6 x_7 x_8	
<i>x</i> ₃ <i>x</i> ₁	0 0,12* 1 1 1 0 0 -20 0	0,05
•		

Convertimos el pivote en 1 y hacemos ceros de forma adecuada



Entra como variable básica x_2 y sale como no básica x_3 quedando.

	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6	
$x_2 \\ x_1$	0 1 8,333 1 0 -8,333 0 0 166,7	0,416 0,584 -71,68

Como en la última fila no aparecen elementos negativos se termina la aplicación del algoritmo y la solución es z=71,68 ya que se cambia el signo del valor obtenido en la última fila y columna. Este valor se alcanza para

$$x_1 = 0.584, \ x_2 = 0.416$$
.