ECUACIONES DIFERENCIALES

Introducción:

La formulación de problemas relacionados a física, química, biología, economía entre otras disciplinas, requieren la elaboración de un modelo matemático. Este modelo consta de la variable o las variables que describen la situación dada, junto con una o más ecuaciones que relacionen dichas variables y sus razones de cambio. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones diferenciales.

Cuando trabajamos con ecuaciones algebraicas como por ejemplo $x^2 +2x+3 = 0$, resolverla es hallar valores numéricos de la variable x que satisfagan la ecuación. A diferencia del álgebra resolver una ecuación diferencial es hallar una función desconocida que satisfaga la ecuación.

La función desconocida puede depender de una o más variables independientes, esto nos permite clasificarlas según su tipo, las llamamos ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales en derivadas parciales respectivamente.

Trataremos primero ecuaciones ordinarias y luego ecuaciones en derivadas parciales. En ambos casos el estudio de ecuaciones diferenciales tiene los siguientes fines:

- Hallar la ecuación diferencial que describe una situación física particular
- Encontrar la solución apropiada para esa ecuación

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

I-Definición:

Una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas se llama ecuación diferencial.

II-Notación:

La notación general para una ecuación diferencial que contiene a la derivada enésima es:

$$\boxed{F(x, y , y', y'' ... y^n) = 0}$$

Ejemplos: $\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$ la escribimos como $F(x, y , y') = 0$

$\frac{d^2y}{d^2x} + 2\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ la escribimos como $F(y , y', y'') = 0$

Vemos que en los ejemplos citados aparecen una derivada primera en el primer caso y una derivada segunda en el restante, esto da origen a una nueva clasificación. Llamamos orden de una ecuación diferencial al de la derivada más alta que aparece en la ecuación. El grado de una ecuación diferencial es el de la potencia más alta a la que esté elevada la variable dependiente o una de sus derivadas.

La ecuación $\frac{d^3y}{d^3x}+2\frac{d^2y}{d^2x}+3\frac{dy}{dx}-y=0$ es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden

III-<u>Solución general:</u>

Una función y = f(x) se denomina solución de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando se sustituyen la variable y, y sus derivadas por f(x) respectivamente.

La clasificación según tipo y orden nos permitirán determinar la solución de la ecuación.

Existen una gran variedad de ecuaciones diferenciales y conforme a esto distintos métodos de resolución. Para el desarrollo de esta unidad se han seleccionada alguno de ellos, basados en la aplicación a la ingeniería como así también a los conocimientos que se pretende el alumno haya obtenido al iniciar el curso. Para ampliar el tema se citará la bibliografía utilizada en esta guía de estudio.

Hallar la solución de una ecuación diferencial es despejar de la ecuación la función desconocida, este procedimiento no siempre es sencillo, lo que da lugar a distintos métodos de resolución. Analizaremos algunas ecuaciones cuya solución la podemos obtener en forma inmediata.

Vamos a comenzar por la forma más simple que puede tomar una ecuación diferencial.

Si la ecuación es de la forma $\frac{dy^n}{dx^n}=f(x)$ basta con integrar n veces ambos miembros de la ecuación para obtener y(x). Los siguientes ejemplos son para n =1 y n =2.

<u>Ejemplo 1</u>:

Hallar la solución general de la ecuación y'(x) = 2x

Si integramos miembro a miembro respecto de x obtenemos:

$$\mathbf{y(x) = x^2 + c}$$

Por tratarse de una integral indefinida, aparece la constante c de integración. Esta solución recibe el nombre de solución general.

Geométricamente la solución general corresponde a una familia de curvas, en nuestro ejemplo parábolas cuya ordenada al origen dependerá del valor de la constante c.

Si le damos valor a la constante, obtendremos una sola curva, dando origen a la solución particular de la ecuación diferencial, para obtener dicha solución imponemos condiciones que debe verificar la ecuación llamadas condiciones iniciales.

Si en nuestro ejemplo la condición inicial es que la solución cumpla y(0) = 3, esto es para x = 0 y debe tomar el valor 3 nos queda:

y(0) = 0 + c = 3 se deduce por la tanto que c debe tomar el valor

Solución particular: $\mathbf{y(x) = x^2 + 3}$

Geométricamente corresponde a una parábola con eje de simetría x = 0, y ordenada al origen igual 3. Para obtener otra solución particular, debemos dar otras condiciones de contorno.

Ejemplo 2:

Dada la ecuación y''= 4x hallar la solución general.

Para despejar y(x) debemos integrar dos veces. La primera integración produce $y'(x) = 2x^2 + c_1$

Si integramos nuevamente obtenemos:

$y(x) = 2/3x^3 + c_1x + c_2$ Solución general.

Si queremos verificar que la solución obtenida es correcta, reemplazamos en la ecuación diferencial: derivamos la solución dos veces $y'(x) = 2x^2 + c_1$

$y''(x) = 4x^2$ verifica la ecuación.

Comparemos las soluciones generales de los ejemplos 1 y 2, en el primer caso la solución general contiene una constante c, mientras que en el otro aparecen dos constantes arbitrarias dado que se integró dos veces. Si tenemos $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ despejar es integrar n veces.

Con cada integración obtendremos una constante, esto nos permite ampliar la definición de solución general:

La solución general de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación diferencial y contiene tantas constantes arbitrarias como lo indique el orden de la ecuación.

Para obtener una solución particular en el segundo ejemplo pedimos que verifique las condiciones:

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{condiciones iniciales}$$

En la solución $y(x) = 2/3x^3 + c_1x + c_2$ reemplazamos las condiciones iniciales.

$y(0) = 2/3.0 + c_1.0 + c_2 = 2 \rightarrow c_2 = 2$

$y'(0) = 2.\ 0 + c_1 = 1 \qquad \rightarrow c_1 = 1$

resulta**:** $\mathbf{y(x) = 2/3x^3 + x + 2}$ solución particular

I-<u>ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN:</u>

<u>Métodos de resolución:</u>

a-<u>Integración directa:</u>

Si la ecuación de primer orden es de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ nos basta con integrar ambos miembros de la ecuación para obtener $y = \int f(x)dx + c$. Este es el método que se desarrolló en el punto anterior.

b-<u>Separación de variables:</u>

La ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$ se llama separable si $H(x, y)$ se puede escribir como producto de una función que dependa de la variable x, y una función que dependa solamente de y

$$H(x, y) = g(x)\varphi(y) = \frac{g(x)}{f(y)} donde \varphi(y) = \frac{1}{f(y)}$$

La ecuación diferencial nos queda de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$ las variables pueden ser separadas de modo que el primer miembro dependa de una de las variables y el segundo miembro de la restante, nos queda:

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Si integramos miembro a miembro obtenemos:

$\int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$ la expresamos como: $\int f(y)dy = \int g(x)dx + c$

Para aplicar el método solo se requiere que existan las antiderivadas F(y) = G(x)+c

Encontrar la solución es despejar la variable y de la función F (y)

Ejemplo 1:

Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = 6xy$ hallar la solución general

1- Separamos variables $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 6x$

2- Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por dx

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = 6xdx \quad \text{si tenemos en cuenta que} \quad \frac{dy}{dx}dx = y'dx = dy$$

3-Reemplazamos e integramos miembro a miembro

$\int \frac{1}{y}dy = \int 6xdx$ nos queda $\ln y = 3x^2 + c$

4-Despejamos y

$y = e^{3x^2+c} = e^{3x^2}e^{c}$ teniendo en cuenta que $e^{c} = k$ la solución general nos queda:

$$\boxed{y = ke^{3x^2}}$$

En este tipo de ecuaciones diferenciales no siempre es posible despejar la variable dependiente, o resulta complicado hacerlo, la solución general en esos casos estará dada en forma implícita.

Ejemplo 2:

Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $x^2\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{3y^2+1}$ que verifique la condición inicial $y(2) = 1$

1- Separamos variables y multiplicamos miembro a miembro por dx

$(3y^2+1)\frac{dy}{dx}dx = \frac{x^2+1}{x^2}dx$

2- Integramos $\int (3y^2+1)\,dy = \int \frac{x^2+1}{x^2}dx$ nos queda: $y^3 + y = x - 1/x + c$ solución general.

Vemos que no podemos despejar y de la solución general, por lo tanto la dejamos expresada en forma implícita.

3- Para obtener la solución particular debemos hallar el valor de c tal que la solución verifique la condición inicial.

Si reemplazamos $y(2) = 1$ esto es para $x = 2$ $y = 1$, resulta $c = 1/2$

$$\mathbf{y^3 + y = x - 1/x + 1/2} \quad \text{solución particular}$$

Ejemplo 3:

En la introducción se habló de modelos matemáticos, veremos un ejemplo. Supóngase que se desea conocer la tasa de cambio de una población con respecto al tiempo, sabemos que los índices de natalidad y mortandad son constantes y la variación será proporcional al tamaño de la población. Debemos traducir el problema a un lenguaje matemático.

Llamamos P(t) a la población, su variación es $\frac{dP(t)}{dt}$ la ecuación diferencial será:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$ donde k es una constante de proporcionalidad.

Para resolverla separamos variables

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = k$$

Multiplicamos ambos miembros por dt

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}dt = kdt$$ donde P'(t)dt = dP(t)

Reemplazamos e integramos: $\int \frac{1}{P(t)}dP(t) = \int kdt$ su resultado es: ln P(t) = k t despejamos la función desconocida nos queda:

$\boxed{P(t) = c\, e^{kt}}$ **solución general**

Siendo c la constante arbitraria de integración

Para hallar la solución particular, Vamos a considerar que se trata de una población de una colonia de bacterias que en un tiempo t =0 (horas) era 1000, y se duplica después de una hora.

Esta información adicional acerca de la función P(t) reemplazada en la solución general nos conduce a las siguientes ecuaciones

si t = 0 P(0) = c =1 000

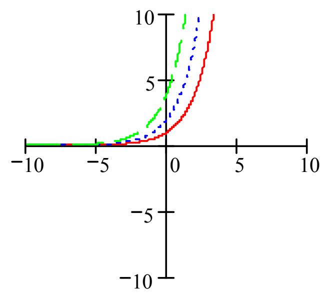
al cabo de una hora P(1) = ce^k = 2000

De estas ecuaciones se deduce que c = 1000 y $e^k = 2$ despejamos $k = \ln 2 \approx 0{,}69315$

La solución particular que satisface las condiciones iniciales es:

$$\boxed{P(t) = 1000e^{\ln 2t}}$$

Gráficamente la solución general corresponde a una familia de curvas exponenciales. Cada una de estas curvas es para un valor determinado de c.



La función obtenida nos permitirá conocer la población en un tiempo futuro, por ejemplo la población en un tiempo t = 90 minutos se obtiene reemplazando t en la solución.

$P(1{,}5) = 1000\, e^{1{,}5 \ln 2} \approx 2828$ bacterias. (Hemos tenido en cuenta que t = 90minutos = 1,5 horas)

Este fue un ejemplo sencillo, aunque quizá no realista dado que las tasas de natalidad y mortandad han de ser variables. Cuando queremos representar una situación física, un modelo matemático detallado puede ser difícil llevarlo a cabo, aparece entonces un compromiso entre lo que es físicamente realista y matemáticamente viable. Se deben encontrar caminos para simplificar el modelo matemático sin sacrificar rasgos esenciales del mundo real.

En la unidad de Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales volveremos sobre estos modelos, en esta unidad analizares los distintos tipos de ecuaciones que se pueden presentar y la solución correspondiente.

II-ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

Vemos que es una ecuación lineal respecto de la función desconocida y su derivada.

Las funciones P(x) y Q(x) son funciones continuas de x en un intervalo, o bien pueden ser constantes.

Si el segundo miembro es Q(x) =0 la ecuación diferencial se llama homogénea en ese caso es posible resolverla separando variables.

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ Separamos variables $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)$

Si integramos esta expresión respecto de x obtenemos: ln y = - P(x) + c despejando y nos queda: $y = e^{-P(x) + c} = k\, e^{-P(x)}$ solución general

Vemos que su solución es una función exponencial.

Si Q(x) es distinta de 0 no se puede resolver aplicando separación de variables. Buscaremos una forma sencilla de evaluarla para poder despejar la función desconocida.

<u>Método del Factor integrante</u>

Para resolver la ecuación lineal de primer orden no homogénea, usamos un factor integrante u(x) tal que el primer miembro de la ED multiplicado por ese factor sea igual a la derivada del producto u(x) por y(x). Si esto es posible nos quedaría $\frac{d[u(x)y(x)]}{dx}$ si integramos esta expresión respecto de x resulta:

$\int \frac{d}{dx}[u(x).y(x)]dx = u(x).y(x)$ Al integrar el primer miembro, obtenemos el producto u(x).y(x) de el cual podemos despejar la función desconocida y(x).

<u>Cálculo de u(x):</u>

Debemos encontrar la función desconocida u(x), para ello multiplicamos miembro a miembro en la ecuación:

$$u(x)\frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y = Q(x)u(x)$$

Trabajamos con el primer miembro:

Queremos hallar una u(x) tal que:

$$u(x)\frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y = \frac{d[u(x)y(x)]}{dx}$$

Desarrollamos la derivada del producto $\frac{d[u(x)y(x)]}{dx} = \frac{du(x)}{dx}y(x) + u(x)\frac{dy(x)}{dx}$

Una forma más sencilla de escribir estas ecuaciones es:

u(x).y'(x) + u(x) P(x) y(x) = [u(x) y(x)]' $\boxed{1}$

[u(x).y (x)]' = u'(x).y(x) + u(x).y'(x) $\boxed{2}$ (notación que utilizaremos en el resto del desarrollo)

Si reemplazamos $\boxed{1}$ en $\boxed{2}$ vemos que:

u(x) y'(x) + u(x) P(x) y(x) = u'(x) y(x) + u(x) y'(x)

Cancelando los términos u(x) y'(x), nos queda: u(x) P(x) y(x) = u'(x) y(x)

Agrupamos y sacamos factor común y(x).

$y(x)[\, u'(x) - u(x)\, P(x)] = 0$

Como y(x) es distinta de cero por ser la solución, deberá ser $u'(x) - u(x)\, P(x) = 0$ que es una ecuación diferencial homogénea, cuya solución vimos que es la función exponencial.

$$\boxed{\mathbf{u(x) = e^{\int P(x)dx}}}$$

Siendo u(x) el factor integrante buscado

Ejemplo 1:

Resolver $y' + 2y = 3x$

Para hallar la solución seguiremos los siguientes pasos:

1- Identificamos cual es la función P(x), en el ejemplo es una constante, $P(x) = 2$

2- Calculamos el factor integrante $u(x) = e^{\int 2\, dx} = e^{2x}$

3- Multiplicamos miembro a miembro la ecuación por este factor

$e^{2x} y' + 2\, e^{2x} = e^{2x}\, 3x$

4- Reconocemos el primer miembro como la derivada de un producto

$e^{2x} y' + 2\, e^{2x} = [e^{2x} y]'$

Reemplazamos:

$$[\, e^{2x} y]' = e^{2x}\, 3x$$

5 –Integramos miembro a miembro respecto de x:

$$\int [e^{2x} y]' dx = \int e^{2x} 3x dx$$

Teniendo en cuenta que $[e^{2x} y]'\, dx = d\, [e^{2x} y]$ nos queda:

$$\int d[e^{2x} y] = \int e^{2x} 3x dx$$

6- Resolvemos la integral y despejamos y(x), en el segundo miembro aplicamos integración por partes.

$$e^{2x}\, y(x) = 3/2x\, e^{2x} - 3/2\, e^{2x} + c$$

$$y(x) = e^{-2x}\, (3/2x\, e^{2x} - 3/4\, e^{2x} + c)$$

$$\mathbf{y(x) = 3/2x - 3/4 + ce^{-2x}} \quad \text{Solución general}$$

Ejemplo 2:

Hallar una solución de la ecuación diferencial: $y' - 3y = e^{2x}$ que verifique la condición $y(0) = 3$

Si comparamos con la ecuación lineal de primer orden vemos que $P(x) = -3$

El factor integrante será: u(x) = $e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

Multiplicamos miembro a miembro por e^{-3x}

$e^{-3x}\,y' + e^{-3x}\,3\,y = e^{-3x}\,e^{2x}$

$[e^{-3x}\,3\,y]' = e^{-x}$

Integramos: $\int [\,e^{-3x} y(x)]'\,dx = \int e^{-x}\,dx$

Obtenemos $e^{-3x} y(x) = e^{-x} + c$

Despejamos $y(x) = -\,e^{3x}\,e^{-x} + c\,e^{3x} = -\,e^{2x} + c\,e^{3x}$ Solución general

La solución particular la obtenemos reemplazando x por 0 e y por 3

y(0) = -1 + c = 3 despejamos c y obtenemos c = 4

$y(x) = -\,e^{2x} + 4\,e^{3x}$ Solución particular

Ejemplo 3:

$$y' + \frac{3x}{x^2+1}\,y = \frac{6x}{x^2+1}$$

P(x) = $\dfrac{3x}{x^2+1}$ calculamos u(x) = $e^{\int \frac{3x}{x^2+1}dx}$ aplicando el método de sustitución

u(x) = $e^{\ln\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$

multiplicamos miembro a miembro por u(x)

$$\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} y' + \frac{3x}{x^2+1}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,y = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,\frac{6x}{x^2+1}$$

$$\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} y' + 3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,y = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,\frac{6x}{x^2+1}$$

Vemos que el primer miembro corresponde a la derivada del producto entre el factor integrante y la función y(x), integramos esta expresión

$$\int [y.\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}]'\,dx = \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,\frac{6x}{(x^2+1)}\,dx$$

La integral del segundo miembro la resolvemos aplicando el método de sustitución y obtenemos:

$$y\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = 2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

Despejamos y: $\boxed{y = 2 + \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} c}$ Solución general

III- **ECUACIONES REDUCIBLES A LINEALES**

Una ecuación diferencial no lineal muy conocida, que se reduce a una lineal es la ecuación diferencial de Bernoulli $\mathbf{y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^{n}}$

Aquí la denominación "no lineal" debería sustituirse por "ED de grado n", dado que obedece al hecho de que en el segundo miembro aparece y^{n} ,o sea una potencia de la variable dependiente.

Para resolver esta ecuación haremos una sustitución que nos permitirá resolverla como una ecuación lineal mediante el factor integrante.

1) En la ecuación $y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^{n}$ dividimos miembro a miembro por y^{n}

$y'y^{-n} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x)$ $\boxed{1}$

2) Hacemos una sustitución: $z = y^{1-n}$ si la nueva variable es z, para reemplazarla en la ecuación diferencial debemos calcular su derivada.

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ Hemos aplicado la regla de la cadena dado que z = f(y) e y = f(x)

$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ una notación mas sencilla es $z' = (1-n)\, y^{-n}\, y'$

3) Remplazamos en la ecuación $\boxed{1}$

$\frac{1}{(1-n)} z' + P(x)\, z = Q(x)$

4) Multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{(1-n)}$ nos queda:

$z' + (1-n)\, P(x)\, z = (1-n)\, Q(x)$ Ecuación lineal de primer orden.

5) La resolvemos utilizando el método del factor integrante, su solución será de la forma:

$z = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx}\, Q(x)\, dx$

de la sustitución $z = y^{(1-n)}$ despejamos y : $\boxed{y = z^{\frac{1}{1-n}}}$

Ejemplo:

$x.y' + x^{2}y = x^{2}\, y^{3}$

1) dividimos cada miembro por x, para llevarla a la forma normal (coeficiente de la derivada de mayor orden es 1)

$y' + x\, y = x\, y^{3}$

2) dividimos por y^3

y^{-3} y' + x y^{-2} = x

3) Hacemos la sustitución $z = y^{-2}$

Calculamos z' = -2 y^{-3} y' si comparamos con el primer término del primer miembro vemos que: y^{-3} y'= - ½ z'

4) Reemplazamos en la ecuación y multiplicamos por –2

z' – 2xz =-2x Ecuación lineal

5) Resolvemos la ecuación: factor integrante u(x) = $e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$

e^{-x^2} z' –2x e^{-x^2} = -2x e^{-x^2} la expresamos como derivada de un producto [e^{-x^2} z]' = -2x e^{-x^2}

5) Integramos miembro a miembro respecto de x y obtenemos:

e^{-x^2} z = e^{-x^2} + c

Despejamos z = 1 + e^{x^2} c

6) si $z = y^{-2}$ resulta: $\boxed{\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{z}} = \left(1 + ce^{x^2}\right)^{\frac{-1}{2}}}$ Solución general

----