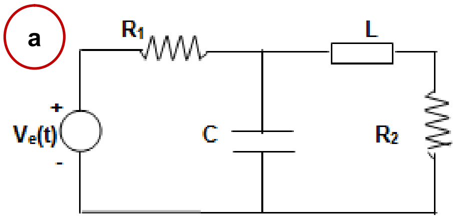
TRABAJO PRÁCTICO RESUELTO:

MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADO

1. **Plantear las ecuaciones de estado correspondientes a los siguientes circuitos.**

a



Para plantear las ecuaciones de estado tenemos en para cualquier circuito, tenemos en cuenta:

inductancia:

$$i_L = \frac{1}{L}\int v_L \, dt; \quad V_L = L\frac{di_L}{dt}$$

llamamos $x_1 = i_L$ **porque está relacionada con la derivada** $\Rightarrow V_L = L\,\dot{x}_1$

capacidad:

$$i_c = c\frac{dV_c}{dt} \; ; \; V_C = C\frac{di_C}{dt} \quad \text{llamamos } x_2 = V_c \Rightarrow i_c = C\,\dot{x}_2$$

Ecuaciones de equilibrio del sistema: (ecuaciones de malla)

1. $V_e(t) = V_{R1} + V_c$
2. $V_c = V_L + V_{R2}$
3. $i(t) = i_{R1} = i_c + i_L$

Escribimos lo que vemos en el circuito, debemos tener en cuenta las ecuaciones donde figuren las variables de estado, por ese motivo se incluye la última ecuación.

En función de las variables de estado, las ecuaciones anteriores las escribimos como:

1

$$V_e(t) = (i_c + i_L)\,R_1 + V_c \;\Rightarrow V_e(t) = \dot{x}_2(t)\,C\,R_1 + x_1(t)\,R_1 + x_2(t)$$

$$\text{Despejamos } \dot{x}_2(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -\frac{x_1(t)}{C} - \frac{x_2(t)}{CR_1} + V_e(t)$$

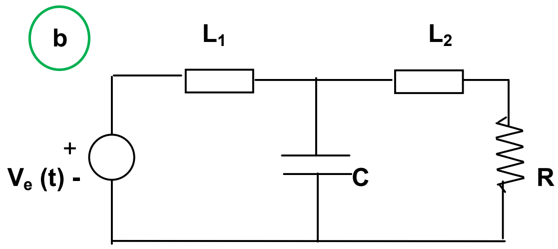
2

$$V_c = V_L + V_{R_2} \;\Rightarrow x_2(t) = L\,\dot{x}_1(t) + x_1(t)\,R_2 \;\text{(la corriente en } R_2 \text{ es } i_L)$$

$$\text{Despejamos } \dot{x}_1(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \frac{x_2}{L}(t) - x_1(t)\,\frac{R_2}{L}$$

Modelo en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{R_2} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} V_e(t) \quad \text{Matriz de salida } y(t) = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



. **Ecuaciones de equilibrio del sistema:**

1. $V_e\,(t) = V_{L1} + V_c$
2. $V_c = V_{L2} + V_R$
3. $i\,(t) = i_{L1} = i_c + i_{L2}$

Como en el caso anterior, la tercera ecuación es para tener en cuenta x'$_3$

En este ejemplo hay dos inductancias y un capacitor, tenemos tres elementos almacenadores de energía, por lo tanto el sistema es de orden 3.

Llamamos:

$$x_1 = i_{L_1}\ ;\ x_2 = i_{L_2}\ ;\ x_3 = V_c$$
$$V_{L_1} = L_1\,\dot{x}_1 \qquad V_{L_2} = L_2\,\dot{x}_2 \qquad i_c = C\,\dot{x}_3$$

1

$$V_e(t) = V_{L_1} + V_c \;\Rightarrow V_e(t) = L_1\,\dot{x}_1(t) + x_3(t)$$

$$\text{Despejamos } \dot{x}_1(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -\frac{x_3}{L_1}(t) + \frac{V_e(t)}{L_1}$$

2

$$V_c = V_{L_2} + V \;\Rightarrow x_3(t) = L_2\,\dot{x}_2(t) + x_2(t)\,R \text{ (la corriente en } R_2 \text{ es } i_L)$$

$$\text{Despejamos } \dot{x}_2(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -\frac{x_2 R}{L_2}(t) + \frac{x_3(t)}{L_2}$$

3

$$i_{L_1} = i_{L_2} + i_C \;\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) + C\,\dot{x}_3(t)$$

$$\text{Despejamos } \dot{x}_3(t) \Rightarrow \dot{x}_3(t) = \frac{x_1\,(t)}{C}(t) - \frac{x_2(t)}{C}$$

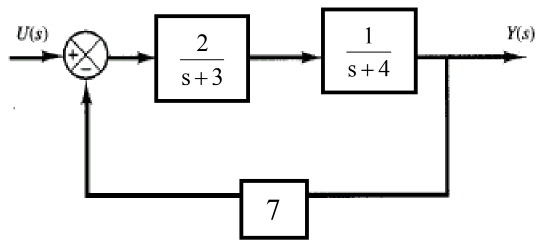
Modelo en el espacio de estado :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_e(t) \qquad \text{Matriz de salida } y\,(t) = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

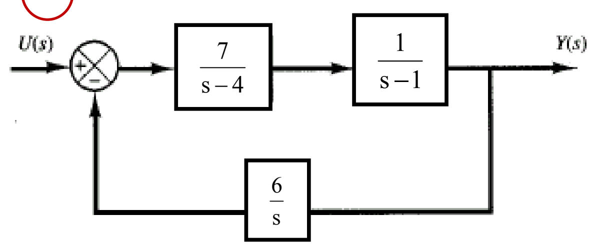
2. Dado los diagramas de bloques:

- Hallar la función de trasferencia
- Obtener la ecuación diferencial que modela el sistema representado.
- Plantear las ecuaciones de estado

a



b



a **Para encontrar la función de transferencia, se debe encontrar Y(s), siguiendo el diagrama**

$$Y(s)=\left(U(s)-7\,Y(s)\right)\left(\frac{2}{s+3}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)\quad\rightarrow Y(s)=U(s)\left(\frac{2}{s+3}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)-7\,Y(s)\left(\frac{2}{s+3}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)$$

$$Y(s)+7\,Y(s)\left(\frac{2}{s+3}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)=U(s)\left(\frac{2}{s+3}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)\qquad Y(s)=\frac{U(s)\left(\dfrac{2}{s^2+7s+12}\right)}{1+\dfrac{14}{s^2+7s+12}}=\frac{2\,U(s)}{s^2+7s+26}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2}{s^2+7s+26}$$

Ecuación diferencial que modela el sistema

$$Y(s)=\frac{2U(s)}{s^2+7s+26}\rightarrow Y(s)\left(s^2+7s+26\right)=2U(s)$$

$$s^2\;Y(s)+7sY(s)\;+26\;Y(s)=2U\;(s)\quad \textbf{Antitransformando queda:}\;\frac{d^2y\;(t)}{dt^2}+7\frac{d\;y(t)}{dt}+26\;y(t)=2u(t)$$

Ecuaciones de estado

$$\frac{d^2y}{dt^2}+7\frac{dy}{dt}+26y=2u(t)\quad \textbf{Lamamos}\; x_1(t)=y(t)\;\;;\,x_2(t)=y'(t)=\dot{x}_1(t)$$

Despejamos $\dot{x}_2(t)=2u(t)-26\,x_1(t)-7x_2(t)$ **en la ecuación debe figurar solo una derivada**

Modelo en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -26 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u(t)\quad \textbf{Matriz de salida}\; y\;(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

b **Función de transferencia**

$$Y(s)=\left(U(s)-\frac{6}{s}Y(s)\right)\left(\frac{7}{s-4}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)\quad\rightarrow Y(s)=U(s)\left(\frac{7}{s-4}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{6}{s}Y(s)\left(\frac{7}{s-4}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$$Y(s)+\frac{6}{s}Y(s)\left(\frac{7}{s-4}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)=U(s)\left(\frac{7}{s-4}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)\qquad Y(s)=\frac{U(s)\left(\dfrac{7}{s^2-5s+4}\right)}{1+\dfrac{42}{s\left(s^2-5s+4\right)}}=\frac{7\,s\,U(s)}{s^3-5s^2+4s+42}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{7\,s}{s^3-5s^2+4s+42}$$

Ecuación diferencial que modela el sistema

Si observamos el diagrama de bloque, hay tres bloques integradores lo que implica que la ecuación diferencial es de orden tres

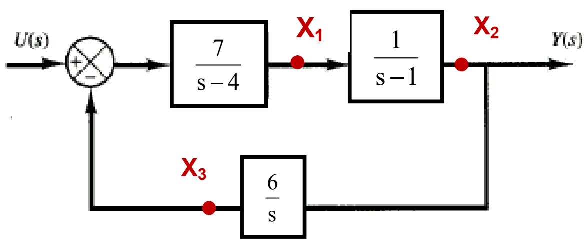
$$Y(s) = \frac{7\,s\,U(s)}{s^3 - 5s^2 + 4s + 42} \Rightarrow s^3Y(s) - 5s^2Y(s) + 4sY(s) + 42Y(s) = 7\,s\,U(s)$$

Antitransformando miembro a miembro: $\frac{d^3y}{dt^3} - 5\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 42\,y = 7\,\frac{du}{dt}$

La presencia de s en el segundo miembro significa que está derivada la entrada

Ecuaciones de estado

A diferencia del ejercicio anterior, en este caso se obtendrán las ecuaciones de estado a partir del diagrama del bloque



Las variables de estado las tomamos a la salida de los bloques integradores.

$$X_3 = \frac{6}{s}X_2 \qquad X_2 = \frac{7}{s-4}X_1 \qquad X_1 = \left(U(s) - X_3\right)\frac{7}{s-4}$$

$$s\,X_3 = 6\,X_2 \Rightarrow \dot{x}_3(t) = 6\,x_2(t)$$

$$X_2(s-4) = X_1\,;\; sX_2 = X_1 + 4\,X_2 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 4\,x_2(t)$$

$$X_1\,(s-4) = 7\,U(s) - 7\,X_3\,;\;\; sX_1 - 4X_1 = 7\,U(s) - 7\,X_3 \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 4\,x_1(t) - 7\,x_3(t) + 7\,u(t)$$

Modelo en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_e(t) \qquad \text{Matriz de salida } y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

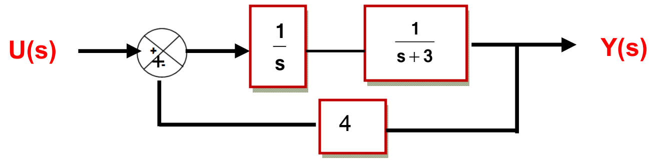
3. Dada la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 4y = u(t)$ hacer el correspondiente diagrama de bloques

Transformamos miembro para obtener la función de transferencia:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 4y = u(t) \Rightarrow s^2Y(s) + 3sY(s) - 4\,Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 3s - 4\right) = U(s) \quad \text{despejamos } Y(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 3s - 4}\,;\;\; H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s - 4}$$

$$\text{Expresamos } H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,R(s)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s) - \frac{4}{s^2 + 3s}} = \frac{\frac{1}{s\,(s+3)}}{1 + (-4)\frac{1}{s\,(s+3)}}$$



4. Determinar la función de transferencia si el modelo de estado dado por

Matriz de estado $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

Matriz de salida $$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Función de transferencia: $\boxed{H(s) = [C]\,[SI-A]^{-1}\,[B]}$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{Debemos calcular} \quad \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

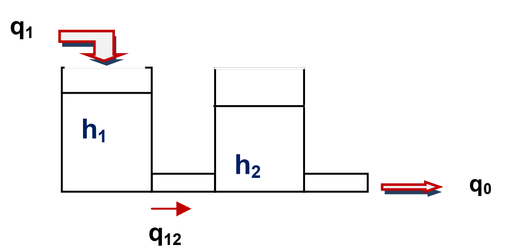
$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{T} \frac{1}{(s^2+3s+2)} = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

$$H(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

5. Para el sistema de tanques interconectados de la figura, encontrar modelo en el espacio de estado y hacer el correspondiente diagrama de bloques

Considere que q_{12} depende de la diferencia de nivel entre los dos tanques.



Capacitancia del tanque: Se define como el cambio necesario en la cantidad de líquido almacenado, para producir un cambio de una unidad en el potencial (altura)

C = cambio en el líquido almacenado / cambio en la altura [m^2]

Resistencia: Cambio en la diferencia de nivel necesaria para producir un cambio de una unidad en la velocidad del flujo.

R = cambio en la diferencia de nivel / cambio en la velocidad del flujo [seg/m^2]

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_1 - q_{12}}{C_1} \quad \textbf{siendo} \quad q_{12} = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad \frac{dh_2}{dt} = \frac{q_{12} - q_0}{C_2} \quad \textbf{donde} \quad q_0 = \frac{h_2}{R_2}$$

MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADO

Llamamos $h_1 = x_1$ y $h_2 = x_2$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_1 - q_{12}}{C_1} \qquad \text{siendo } q_{12} = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{x_1}{R_1C_1} + \frac{x_2}{R_1C_1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_1C_2} - \frac{x_2}{R_1C_2} - \frac{x_2}{R_2C_2} = \frac{x_1}{R_1C_2} - x_2\left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} [q_1]$$

La salida está dada por: $q_0 = \frac{x_2}{R_2}$ **en forma matricial:** $q_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

H(s) = [C] [SI-A]$^{-1}$ [B]

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{C_1 \cdot R_1 + C_1 \cdot R_2 + S \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{S \cdot C_1 \cdot R_1 + S \cdot C_1 \cdot R_2 + S \cdot C_2 \cdot R_2 + S^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 1} & \frac{C_2 \cdot R_2}{S \cdot C_1 \cdot R_1 + S \cdot C_1 \cdot R_2 + S \cdot C_2 \cdot R_2 + S^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 1} \\ \frac{C_1 \cdot R_2}{S \cdot C_1 \cdot R_1 + S \cdot C_1 \cdot R_2 + S \cdot C_2 \cdot R_2 + S^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 1} & \frac{\left(C_2 + S \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1\right) \cdot R_2}{S \cdot C_1 \cdot R_1 + S \cdot C_1 \cdot R_2 + S \cdot C_2 \cdot R_2 + S^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 1} \end{bmatrix}}_{[SI - A]^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{S \cdot C_1 \cdot R_1 + S \cdot C_1 \cdot R_2 + S \cdot C_2 \cdot R_2 + S^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 1}}_{H(s)}$$