SISTEMAS NO LINEALES

Estabilidad de los sistemas cuasi lineales:

Sea el sistema no lineal dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\,x + b\,y + P(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = c\,x + d\,y + Q(x, y) \end{cases}$$

Para el análisis de su solución tendremos en cuenta:

Teorema de Lyapunov:

Sea (0,0) un punto crítico aislado del sistema no lineal. Si las funciones P(x,y) y Q(x,y) cumplen las condiciones:

- **$P(0,0) = 0$ y $Q(0,0) = 0$**
- **Tienen derivadas primeras continuas en (0,0)**
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{Q(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Si se cumplen las condiciones anteriores, a partir del comportamiento de la solución del sistema lineal en el punto crítico (0,0), analizamos la solución del sistema cuasi lineal en dicho punto.

En cualquier otro punto crítico, para aplicar las condiciones anteriores, debemos hacer un cambio de variables, tal que para este nuevo sistema sea (0,0) el punto crítico.

Sean λ_1 y λ_2, las raíces de la ecuación característica del sistema lineal, asociado con el sistema no lineal

ENTONCES:

a) Si λ_1 y λ_2, son raíces reales iguales, entonces el punto crítico (0,0) es un nodo o punto espiral, y es asintóticamente estable si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, e inestable si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

b) Si λ_1 y λ_2 son imaginarias puras, entonces (0,0) es o bien un centro o un punto espiral, que puede ser estable o asintóticamente estable o inestable.

c) En cualquier otro caso el punto crítico (0,0) del sistema casi lineal, será del mismo tipo y estabilidad que el punto crítico (0,0) del sistema lineal asociado.

Una perturbación puede llevar desplazar al punto a la izquierda. En este caso la solución es compleja con parte real positiva, el sistema es estable

Una perturbación puede llevar desplazar al punto a la derecha. En este caso la solución es compleja con parte real positiva, el sistema es inestable

EJEMPLOS:

1. Analizar la estabilidad en el punto (0,0) del siguiente sistema no lineal, aplicando el método de Lyapunov.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y - 4xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 6y - 8x^2 y \end{cases}$$

$P(x,y) = -4xy \quad P(0,0) = 0 \quad Q\,(0;0) = 0$ **cumplen la primer condición**

$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = -4\,y \quad \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -4\,x \quad \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -16\,xy \quad \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = -8\,x^2$ **son continuas en (0;0)**

Calculamos el límite :

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ **limites reiterados** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-4xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{\sqrt{x^2}} = 0$

No hace falta tomar otro límite porque al tener derivadas parciales continuas la función es diferenciable, eso implica que la función es continua $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Consideremos en el punto anterior una función P(x,y) distinta, por ejemplo:

$P(x,y) = -4\,x\,\sqrt{y} \quad P(0,0) = 0$ **cumple la primer condición**

Calculamos las derivadas parciales

$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = -4\,\sqrt{y} \quad \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = -2\,\dfrac{x}{\sqrt{y}}$ **no es continua en (0;0)**

No podemos aplicar el método de Lyapunov , lo que no implica que no se pueda analizar su estabilidad con otro método

Sistema lineal asociado:

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 6y$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda I - A] = \det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 6) + 2 = \lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0$$

raíces : $\lambda_1 = 5 - j \quad \lambda_2 = 5 + j$ **El punto crítico (0,0) es un foco**

complejas conjugadas , parte real positiva : el foco es inestable

2. **Hallar el sistema lineal asociado al siguiente sistema no lineal. Analizar la estabilidad en sus puntos críticos teniendo en cuenta el teorema de Liapunov.**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 - y \end{cases}$$

Puntos críticos:

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - 1 = 0 \quad y = \pm 1$$

$$\frac{dy}{dt} = x^3 - y = 0 \quad \text{para } y = 1; \;\; x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \quad \text{para } y = -1 \;\; x^3 = -1 \rightarrow x = -1$$

puntos críticos $(1;1)$ y $(-1;-1)$ Sustitución: para $(1;1)$ $u = x - 1$ y $v = y - 1$ $y = v + 1$

Reemplazo en la ecuación $x = u + 1$ $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{du}{dt} = (v+1)^2 - 1 \rightarrow \dfrac{du}{dt} = v^2 + 2v + 1 - 1$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt} = (u+1)^3 - (v+1) = u^3 + 3u^2 + 3u + 1 - v - 1$$

$$\frac{du}{dt} = v^2 + 2v$$

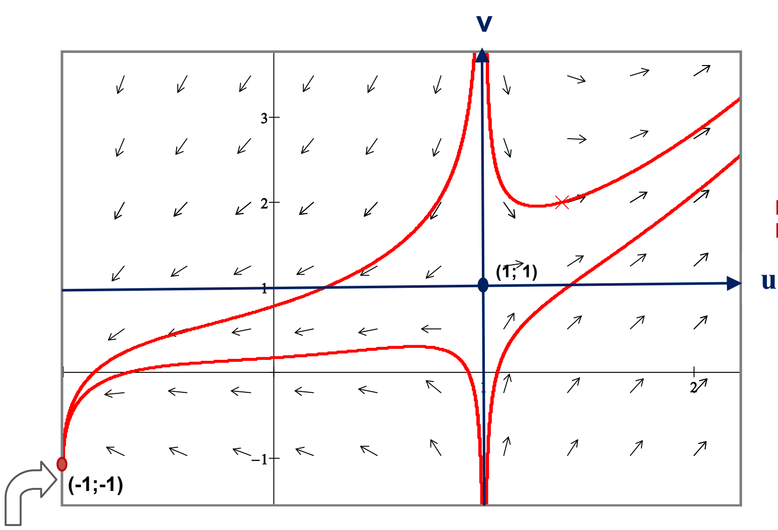
$\dfrac{dv}{dt} = u^3 + 3u^2 + 3u - v$ Buscamos $P(u,v) = v^2$ y $Q(u,v) = u^3 + 3u^2$ cumplen con Lyapunov

Sistema lineal equivalente

$$\frac{du}{dt} = 2v$$

$$\frac{dv}{dt} = 3u - v \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \det[\lambda I - A] = \det\begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$\lambda_1 = -3$ y $\lambda_1 = 2$ el punto crítico $(1;1)$ que corresponde al $(0,0)$ en el sistema equivalente es punto silla. El sistema es inestable



Punto (1; 1) equivale a (0,0) para los nuevos ejes de referencia

Hay trayectoria que se direccionan al tercer cuadrante porque (-1;-1) es un punto espiral asintóticamente estable

APLICACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES

1. **Modelos poblacionales: Ecuación logística de un sistema de primer orden**
2. **Sistemas de segundo orden: Depredador – presa**
3. **Ecuación logística aplicada al modelo Depredador - presa**
4. **Especies en competencia para una coexistencia pacífica.**
5. **Aplicación de la ecuación logística a especies en competencia**

✓ MODELOS POBLACIONALES

Supongamos que P (t) es el número de individuos de una población (humanos, insectos, bacterias) que tiene tasas constantes de natalidad y mortandad β y α respectivamente. Durante un corto intervalo de tiempo ocurren unos β P (t) nacimientos y α P (t) muertes, el cambio en P (t) está dado aproximadamente por: $\Delta P = (\beta - \alpha) P(t) \Delta t$**, si hacemos el cociente incremental y tomamos límite para** $\Delta t \to 0$**, obtenemos la** ecuación autónoma: $\frac{dP(t)}{dt} = k\,P(t)\quad \text{donde } k = \beta - \alpha$

Poblaciones limitadas

En situaciones se observa que la tasa de natalidad disminuye cuando la población aumenta. Las razones pueden variar, ser culturales, científicas, o algo más sencillo como la limitación de recursos alimenticios. Supongamos que la tasa de natalidad β es una función lineal decreciente de la población P (considerada en un punto a) tal que $\beta = \beta_0 - \beta_1 P(t)$ **donde** β_0 **y** β_1 **son constantes positivas.**

Si la tasa de mortandad $\alpha = \alpha_0$ **se mantiene constante, la ecuación diferencial toma la forma**

$$\frac{dP(t)}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 P - \alpha_0)\,P(t)$$

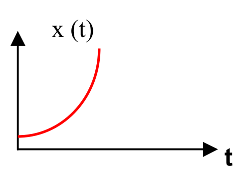
Si $a = (\beta_0 - \alpha_0)$ **y** $b = \beta_1$**. La ecuación se convierte en:** $\boxed{\frac{dP(t)}{dt} = aP(t) - bP^2(t)}$ **Ecuación Logística**

✓ MODELO DEPREDADOR PRESA

Una especie, los depredadores, se alimentan de la otra especie, la presa, que a su vez se nutre de un alimento ampliamente disponible en ese ambiente.
Para el estudio del modelo matemático del sistema depredador – presa, haremos las siguientes consideraciones:

- **En ausencia de depredadores, la población de presas crecería a una tasa natural dada por:**

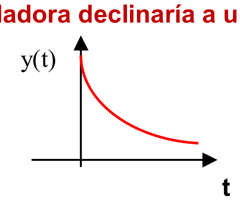
$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{para } a > 0$$



t

- **En ausencia de presas, la población depredadora declinaría a una tasa natural dada por:**

$$\frac{dy}{dt} = -cy \quad \text{para } c > 0$$



t

Cuando los depredadores y las presas están presentes, ocurre una combinación de tasas naturales de crecimiento y declinación proporcional a la frecuencia de los encuentros entre ambas especies; en el modelo matemático consideraremos el término xy como proporcional a la frecuencia de estos encuentros. Si los depredadores devoran a sus presas, tenemos una tasa de interacción decreciente dada por – b x y en la población de x presas. En la población de depredadores tenemos una tasa de interacción creciente dada por dxy, siendo b y d constantes positivas

Las ecuaciones del sistema resultan:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

Obtención del punto crítico

$ax - bxy = 0 \Rightarrow x\,(a - b\,y) = 0$

$-cy + dxy = 0 \Rightarrow y\,(-c + dx) = 0$ **puntos críticos (0;0) y (c/d; a/b)**

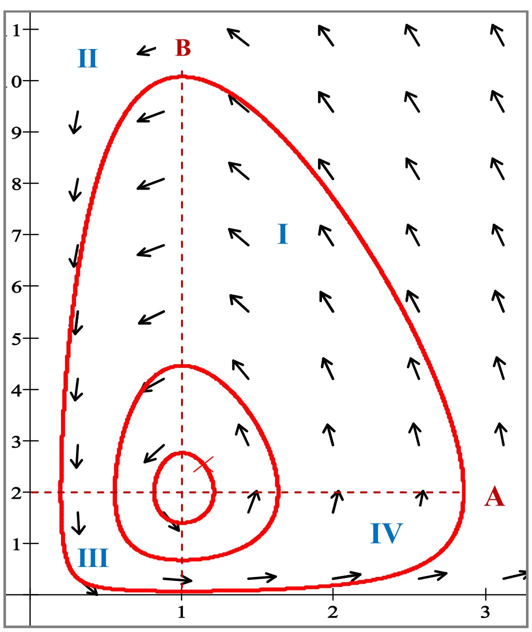
Región [I]

- **El punto A coincide con la coordenada del punto crítico sobre el eje Y**
- **La población de presas x(t) es máxima en A allí hay aproximadamente, un cuarto de la población máxima de depredadores (para la curva más alejada del punto crítico)**
- **La variable y tiene pendiente positiva en esta región**
- **La variable x tiene pendiente negativa en esta región**
- **Esta situación se mantiene hasta alcanzar el punto B; que coincide con la coordenada del punto crítico sobre el eje X y, por lo tanto, es el nuevo punto de inflexión de la trayectoria.**

Región [II]

- **Ambas variables tienen pendiente negativa.**
- **Gran mortandad entre los lobos, que venían de alcanzar su población máxima, ante la rápida disminución de alimento, por haber diezmado la población de conejos.**

Al finalizar la Región II, límite que coincide con la coordenada sobre el eje [Y] del punto crítico, las presas están en su población mínima

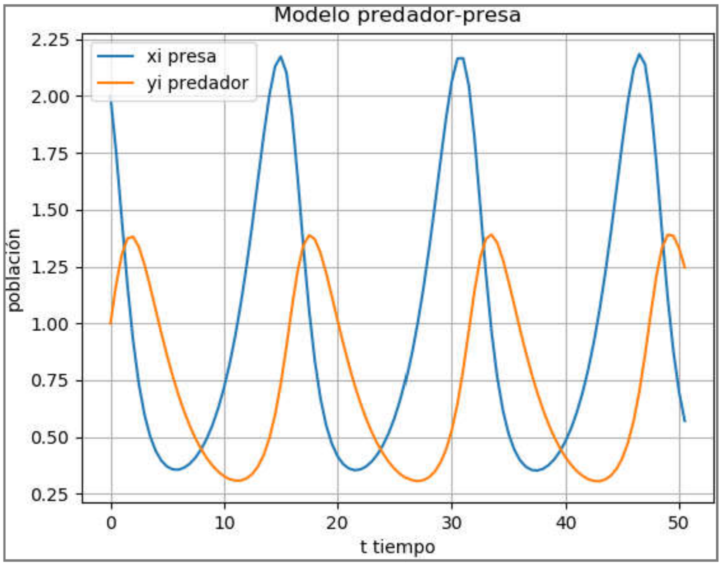


Región [III]

- **Las presas se mantienen en su mínimo y los depredadores siguen disminuyendo aceleradamente.**
- **Pasado este punto de inflexión los depredadores tienden a alcanzar su mínimo**
- **Entre la salida de la Región III y el ingreso a la Región IV, la trayectoria es horizontal, significa que estamos en un mínimo de [y(t)] que se verifica para cuando su derivada se anula, o sea que tiene pendiente cero: [y'=0].**

Región [IV]

- **Acelerado incremento de la población de presas, favorecidas por la muy escasa población de depredadores, que se mantienen en un mínimo prolongadamente**
- **Disponer los pocos depredadores sobrevivientes de una mayor probabilidad de encuentros.**
- **Esta Región IV, es la única del diagrama en que ambas variables tienen pendiente positiva**



EJEMPLO:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - xy \\ y'(t) = -6y + 6xy \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Cálculo de los puntos críticos:

$2x - x y = 0 \qquad x(2 - y) = 0 \rightarrow x = 0 \;\; e \;\; y = 2$

$-6y + 6xy = 0 \qquad 6y(x - 1) = 0 \rightarrow y = 0 \;\; y \;\; x = 1$ **Puntos críticos (0,0); (1,2)**

Para (0,0):

P(x, y) = -x y Q(x, y) = 6xy cumplen con Lyapunov, el sistema lineal equivalente es:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x \\ y'(t) = -6y \end{cases}$$

Det [λI – A] = det $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 6 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 6) = 0$

Tenemos $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -6$ raíces reales de distinto signo, el origen es un punto silla.

Para (1,2):

Debemos trasladar los ejes al punto crítico, llamamos u = x-1 y v = y - 2, reemplazamos en las ecuaciones:

$u'(t) = 2(u+1) - (u+1)(v+2) = 2u + 2 - uv - 2u - v - 2 = -v - uv$

$v'(t) = -6(v+2) + 6(u+1)(v+2) = -6v - 12 + 6uv + 12u + 6v + 12 = 12u + 6uv$

Sistema equivalente:

$u'(t) = -v$

$v'(t) = 12u$ **donde P(u,v) = -u v Q(u,v) = 6uv**

det [λI – A] = det $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -12 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 12 = 0 \qquad \lambda_1 = j2\sqrt{3} \quad y \quad \lambda_2 = -j2\sqrt{3}$

Raíces imaginarias, el punto (1,2) es un centro del sistema no lineal.

- **APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA AL MODELO DEPREDADOR - PRESA**

Poblaciones acotadas:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x - x^2 - x\,y \\ y'(t) = -2y + x\,y \end{cases}$$

En la primera ecuación, aparece el término x^2, esto significa que en ausencia de la otra especie la población es limitada y está dada por la ecuación logística.

PUNTOS CRÍTICOS:

$x(5 - x - y) = 0 \rightarrow x = 0 \;\; y \;\; x = 5 - y$

$y(-2 + x) = 0 \rightarrow y = 0 \;\; y \;\; x = 2$ **Los puntos críticos son : (0,0) ; (5,0) ; (2,3)**

- **Punto crítico (0,0):**

Como (0,0) es el punto crítico del sistema lineal, verificamos que las funciones $P(x,y) = x^2 - xy$ y $Q(x,y) = x\,y$ cumplan con las condiciones de Liapunov.

Sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x \\ y'(t) = -2y \end{cases}$$

Para el análisis de la estabilidad, tenemos en cuenta la matriz característica, y su determinante.

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Det } [\lambda I - A] = \lambda^2 - 3\lambda - 10$$

Ecuación característica: $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -2$ reales de distinto signo, se trata de un punto silla, el sistema es en ese punto inestable.

Para graficar las trayectorias, tenemos en cuenta que la solución de la ecuación diferencial es de la forma $x(t) = x_0 e^{5t}$ e $y(t) = y_0 e^{-2t}$ *por lo tanto las trayectorias entran a lo largo del eje y, y salen a lo largo del eje x.*

- **Punto crítico (5,0):**

Como no corresponde al punto crítico del sistema lineal, debemos buscar un sistema lineal equivalente cuyo punto crítico sea (0,0). Para ello hacemos una traslación de ejes al punto (5,0) de manera que resulta $\rightarrow u = x - 5 \rightarrow v = y$

Reemplazamos en el sistema, siendo $x'(t) = u'(t)$ e $y'(t) = v'(t)$

$u'(t) = 5(u+5) - (u+5)^2 - (u+5)v = -5u - 5v - u^2 - u\,v$

$v'(t) = -2v + (u+5)v = 3v + u\,v$

Donde $P(u, v) = -u^2 - u\,v$ y $Q(u, v) = u\,v$ funciones cuyas derivadas primeras son continuas y satisfacen las condiciones de Liapunov.

El sistema linealizado es:

$$\begin{cases} u'(t) = -5u - 5v & (1) \\ v'(t) = 3v & (2) \end{cases}$$

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda + 5 & 5 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Det } [\lambda I - A] = \lambda^2 + 2\lambda - 15$$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -5$, reales de distinto signo, se trata de un punto silla inestable del sistema linealizado.

3. **Punto crítico (2,3):**

Buscamos el sistema lineal equivalente cuyo punto crítico sea (0,0).

Resulta $u = x - 2$ y $v = y - 3$.

Reemplazamos en el sistema, siendo $x'(t) = u'(t)$ e $y'(t) = v'(t)$

$u'(t) = 5(u+2) - (u+2)^2 - (u+2)(v+3) = -2u - 2v - uv$

$v'(t) = -2(v+3) + (u+2)(v+3) = 3u + uv$. Siendo $P(u,v) = -uv$ y $Q(u,v) = uv$

El sistema linealizado es: $u'(t) = -2u - 2v$ 1

$v'(t) = 3u$ 2

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ -3 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{Det } [\lambda I - A] = \lambda^2 + 2\lambda + 6$$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = -1 + j\sqrt{5}$ y $\lambda_2 = -1 - j\sqrt{5}$

Raíces complejas conjugadas, es un punto espiral asintóticamente estable del sistema linealizado.

Representación de algunas trayectorias del sistema. Las especies coexisten con poblaciones en equilibrio para $x_E = 2$ e $y_E = 3$