CAPÍTULO II: LÍMITE FUNCIONAL EN UN PUNTO

Hemos visto que graficar funciones no siempre es fácil. Con tomar una tabla de valores, a veces no es suficiente, por que hay que tener cuidado al unir los puntos. Por esta razón a veces es necesario estudiar cómo se comporta la función alrededor de un punto determinado.

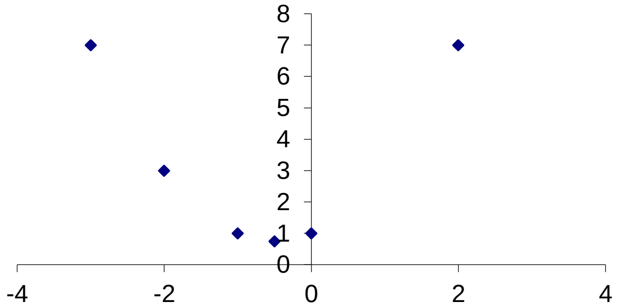
Veamos los siguientes ejemplos:

a) Supongamos que queremos graficar la función $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Lo primero que debemos hacer es hallar su dominio: $D = R - \{1\}$

Luego tomamos una tabla de valores para obtener algunos puntos.

x	0	2	-0.5	-1	-2	-3
y	1	7	3/4	1	3	7



El problema es ahora cómo unir los puntos, para ello es importante saber cómo se comporta la función en un entorno reducido del punto 1. Podemos tomar otra tabla de valores, con valores muy próximos al 1, por derecha y por izquierda, y ver qué pasa con sus imágenes.

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

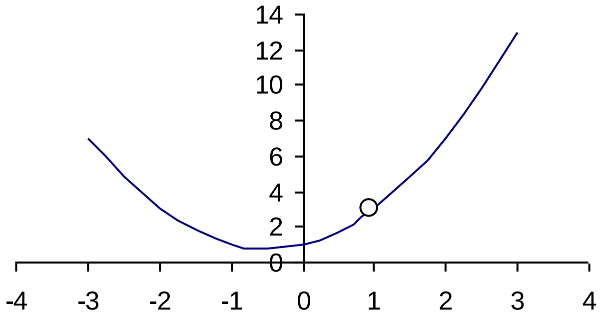
x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.25	1.5
y	1.75	2.313	2.710	2.97	2.997	3.003	3.310	3.813	4.7

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

Vemos que cuando x se acerca al 1 por la derecha y por la izquierda sus imágenes se acercan al n°3. Esto se expresa diciendo que cuando x tiende al n° l, la función tiende al n°3. **O bien que 3 es el límite de la función cuando x tiende al n° 1.**

En símbolos: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Ahora si podemos unir los puntos:



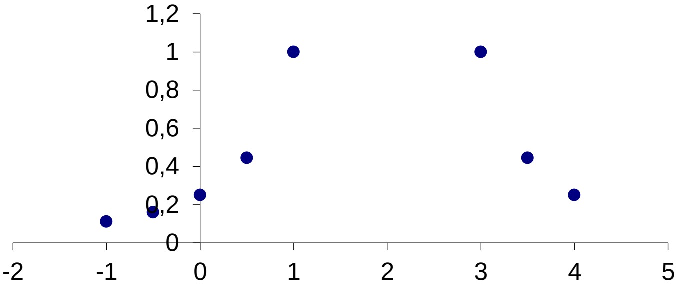
Vemos que obtenemos una parábola lo que es lógico, por que al dividir un polinomio de grado 3 con un polinomio de grado 1, se obtiene un polinomio de grado 2. Aunque la función no está definida en x=1, si tiene límite en x=1, esto produce una laguna en el punto (1,3). Esto ocurre muy a menudo y <u>es muy importante darse cuenta que aunque el punto x=1 no tiene imagen lo mismo puede tener límite</u>

b) Grafiquemos ahora la siguiente función : $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

Buscamos su dominio: $D = R - \{2\}$

Tomemos una tabla de valores:

x	-1	-0.5	0	0.5	1	3	3.5	4
y	1/9	4/25	1/4	4/9	1	1	4/9	¼



Cómo unimos los puntos? Qué pasa con la función entre 1 y 3 ?.

Tomemos otra tabla con valores cercanos al 2.

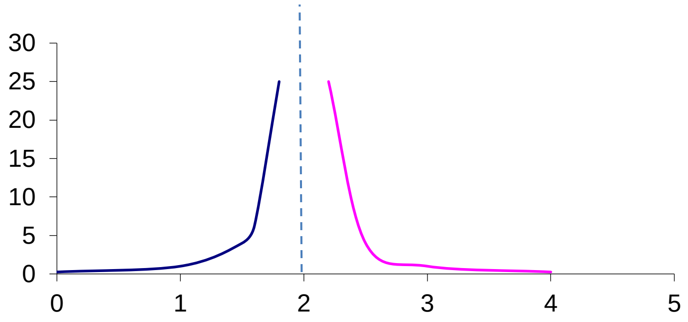
$\longrightarrow$ 2 $\longleftarrow$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
y	100	10000	1000000	1000000	10000	100

$\longrightarrow$ ∞ $\longleftarrow$

Observamos que cuando x tiende al 2, tanto por derecha como por izquierda, la función toma valores cada vez más grandes, por lo tanto en este caso la función no tiende a un número, sino que aumenta infinitamente. En este caso decimos que **no hay límite en x = 2**, por que la función tiende a infinito cuando x tiende a 2

En símbolos $\lim_{x\to 2} \mathbf{f(x) = \infty}$.



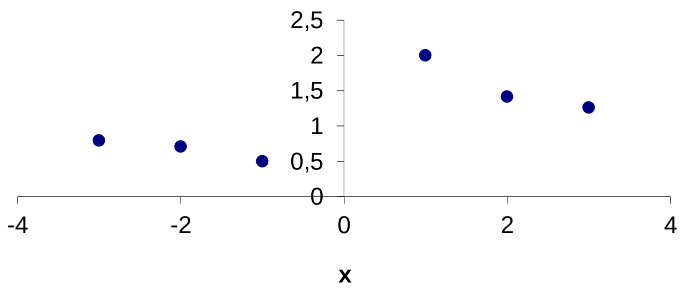
En este gráfico la recta de ecuación **x = 2** es asíntota vertical al gráfico de la función.

b) Grafiquemos ahora la función $y = 2^{1/x}$

El dominio es : D= **R*** = R - { 0 }

Tomemos una tabla de valores

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	0.79	0.7	0.5	2	1.41	1.2



Cómo unimos los puntos?

Analicemos cerca del 0 qué pasa.

$\longrightarrow$ 0 $\longleftarrow$

x	-0.5	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	0.25	0.0009	$7\ 10^{-31}$	$1.2\ 10^{30}$	1024

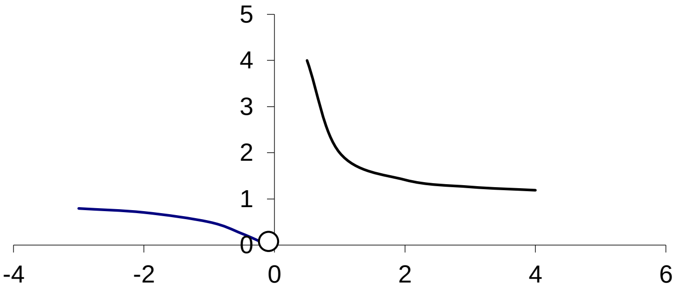
$\longrightarrow$ ∞ $\longleftarrow$

Vemos que cuando x se acerca a cero por la izquierda la función tiende a **cero**. Pero si la x se acerca a cero por la derecha la función tiende a ∞. En este caso **la función no tiene límite** porque tiene **LÍMITES LATERALES DISTINTOS** ya que se comporta de diferente modo por derecha que por izquierda.

En símbolos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \textbf{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

Ahora unimos los puntos



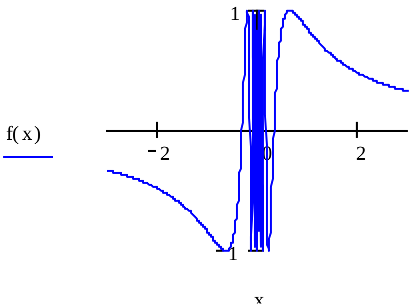
Aquí la recta **x = 0** es <u>asíntota vertical</u> por derecha

c) Grafiquemos ahora la función y = sen (1/x) D = R*

Tomemos una tabla de valores

x	2/π	2/3π	2/5π	2/7π
y	1	-1	1	-1

Vemos que cuando x tiende a cero los valores de la función **OSCILAN** entre 1 y – 1, por lo tanto **no tiene límite para x tendiendo a 0**



Con estos ejemplos hemos resumido algunas situaciones que se pueden presentar cuando se estudia el comportamiento de una función en un entorno reducido de un punto x = a.

El punto **a** donde se calcula el límite debe ser <u>punto de acumulación</u> del dominio de la función, ya que es necesario que alrededor del punto **a** hayan elementos del dominio de la función para poder calcular su imagen.

Resumiendo todo lo visto, podemos decir que:

La función y = f (x) tiene límite L en el punto x = a, si al tomar valores de x cada vez más próximos al punto <u>a</u> , los valores de la función se acercan, tanto como se quiera al número L.

<u>PRACTICA:</u>

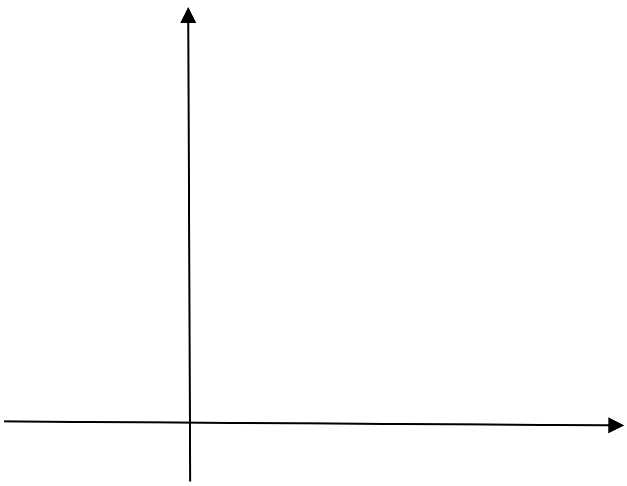
Analice si existe o no el límite indicado, usando tabla de valores.

Verifíquelo en el gráfico

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} =$

x	f(x)

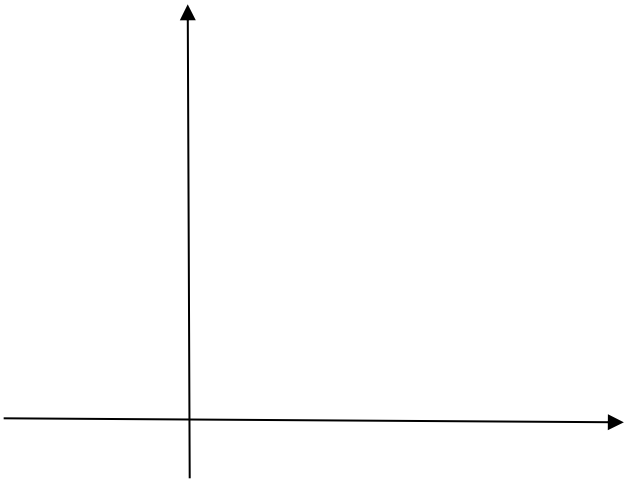
Gráficamente



b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x \neq 1 \\ 6\ , & \text{si } x = 1 \end{cases}$

x	f(x)

Gráficamente

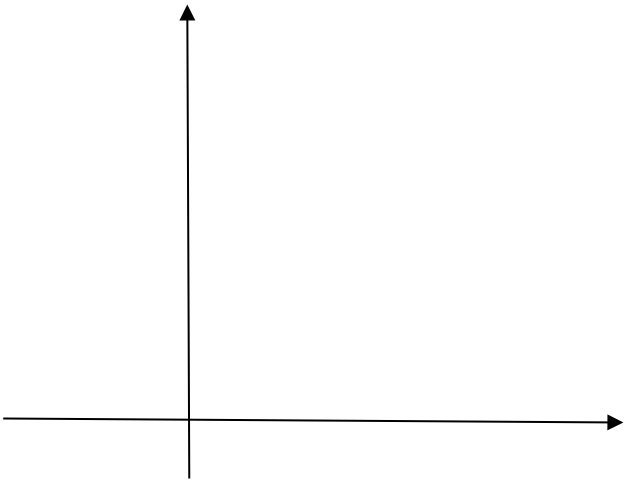


c) f(x) parte entera de un número real

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

x	f(x)

Gráficamente



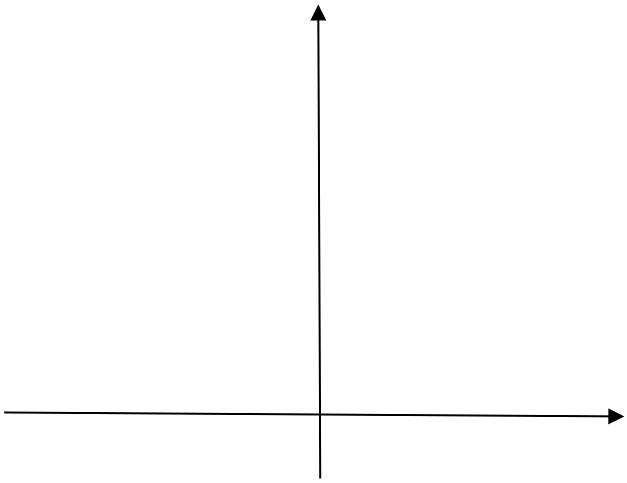
d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 4 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

x	f(x)

Gráficamente:



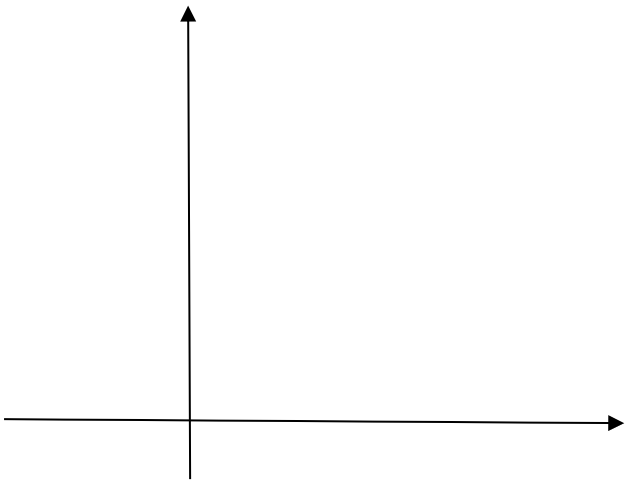
e)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

x	f(x)

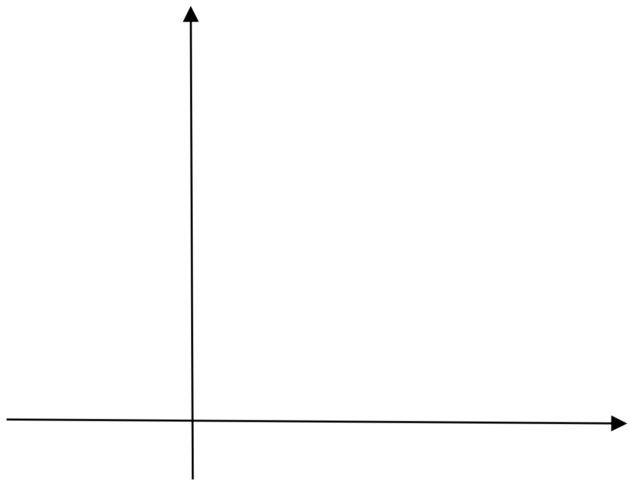
Gráficamente



f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x^2-4}$

x	f(x)

Gráficamente:



CÁLCULO PRÁCTICO DE LÍMITE

Por lo visto anteriormente vemos que si la función no tiene lagunas, ni asíntotas, ni saltos en el punto x = a , el valor del límite en **a** coincide con la imagen de **a,** es decir **f(a).** Por lo tanto en estos casos, para calcular el límite basta con reemplazar en la fórmula de la función, a la **x** por **a**. **(Esto se llama sustitución directa)**.

Estas funciones que no presentan lagunas, asíntotas o saltos en un punto x = a se dice que son **continuas** en dicho punto (este concepto será tratado con profundidad más adelante)

De acuerdo a lo dicho anteriormente podemos garantizar que:

Si **b** y **c** son n° reales y **n** un n° entero (positivo si c= 0), entonces se cumple:

a) $\lim\limits_{x \to c} b = b$ (el límite de una constante es la misma constante)

b) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

c) $\lim\limits_{x \to c} x^n = c^n$

d) sea f(x) una función trigonométrica y c un elemento del dominio entonces:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Por ejemplo:

1. $\lim\limits_{x \to 3} 8 = 8$

2. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$

3. $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = -1$

Estos límites son obvios, porque sabemos que esas funciones no tienen nada raro (son continuas)

Propiedades de los límites

Si c es un n° real y n un n° entero positivo y f, g funciones que tienen límites L_1 y L_2 respectivamente cuando **x** tiende a **c**, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

a) $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L_1 + L_2$

b) $\lim\limits_{x \to c} (f(x) \,.\, g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to c} g(x) = L_1 \,.\, L_2$

c) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

d) $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to c} f(x))^n = (L)^n$

e) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ Si n es par entonces L debe ser mayor a 0

De estas propiedades no se exige demostración, pero sí que el alumno las interprete y verifique con ejemplos.

Veremos ahora algunos ejemplos de aplicación de estas propiedades:

1. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + \sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 1 + 1 = 2$

2. $\lim\limits_{x \to 10} \sqrt{x - 1} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 10} x - \lim\limits_{x \to 10} 1} = \sqrt{10 - 1} = 3$ fc. Irracional

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 4} 2}{\lim\limits_{x\to 4} x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ fc. Racional

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-1\right)}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

Aquí no podemos aplicar la propiedad distributiva respecto del cociente, por que el denominador tiende a cero en x=2. Si usáramos la sustitución directa esto nos llevaría a la forma indeterminada 0 / 0 , ya que el numerador también es cero en x= 2.

Para poder resolver este caso veremos un teorema que debemos aplicar en este ejercicio:

TEOREMA: **<u>Funciones que coinciden en todos sus puntos excepto en uno</u>**.

> Sea c un número real y f(x) = g(x) para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene al c . si existe el límite de g(x) para x tendiendo a c , entonces el límite de f(x) también existe y es:
>
> $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$$

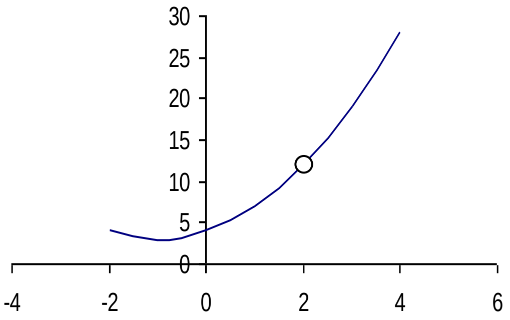
En el ejemplo anterior, debemos buscar una función cuya gráfica coincida con la función dada, excepto en x= 2. Para ello, se puede factorizar para simplificar el factor que anula numerador y denominador.

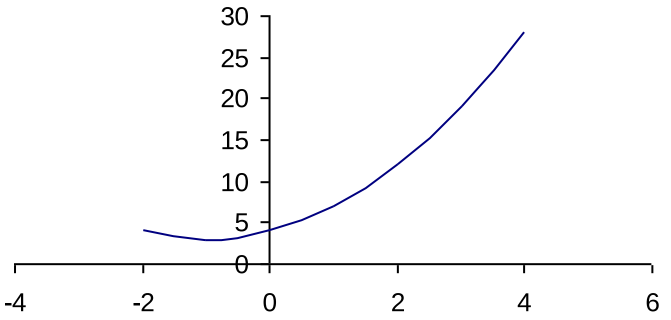
$$\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2).\left(x^2+2x+4\right)}{x-2} = x^2+2x+4$$

Luego aplicando el teorema anterior:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right) = 12$$

Gráficamente esto significa que la fc. tiene una laguna en el punto de coordenadas (2 , 12)





$$y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$y = x^2 + 2x + 4$$

Otro ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} =$$

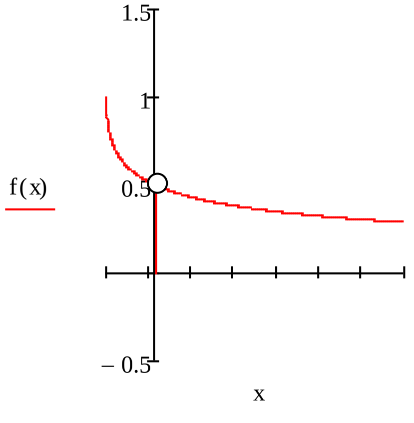
en este caso también numerador y denominador tienden a 0, por lo tanto el límite conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Para buscar una función que tenga la misma gráfica excepto en x= 0 se puede racionalizar el numerador :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} . \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1}{.x.\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{x}{.x.\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

entonces hay laguna en el punto (0, 1/2)

Gráficamente:



Ejemplo:

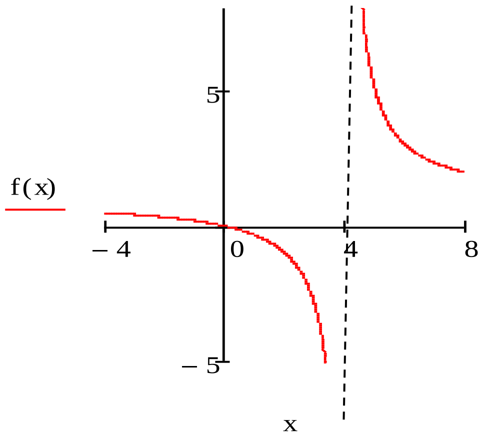
$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-4}$$

Si sustituimos en la fórmula a la x por 2, el denominador tiende a cero, pero el numerador no; por lo tanto **no es una indeterminación**.

Pero cómo interpretamos que nos dé un n° sobre cero?. Si el denominador tiende a cero , el cociente tiende a ser cada vez más grande , por lo tanto decimos que el cociente tiende a infinito

En este caso la recta de ecuación **x = 2** es **asíntota vertical** al gráfico de la función. Esto sucede siempre que el límite tiende a ∞ en un punto.

Gráficamente:



<u>Propiedades de los límites infinitos</u>

Si **a** y **L** son n° reales y **f** , **g** son funciones tales que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L$$

entonces las siguientes propiedades son válidas:

a) $\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = \infty$

b) Si $L \neq 0$ entonces: $\lim_{x \to a} \left(f(x).g(x) \right) = \infty$

Si L=0 entonces nos daría una forma de indeterminación $(0.\infty)$ la cual resolveremos más adelante

c) $\lim_{x \to a} \left(f(x)/g(x) \right) = \infty$ y $\lim_{x \to a} \left(g(x)/f(x) \right) = 0$

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\dfrac{2x}{\operatorname{cotg}x}\right) = 0$

Estas propiedades son válidas para los límites laterales y para las funciones cuyo límite es - ∞

INFINITÉSIMO EN UN PUNTO

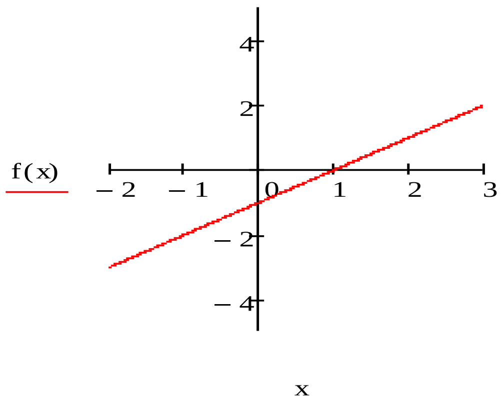
Definición:

La función f es un infinitésimo en $x = a$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Ej: $f(x) = x - 1$ es un infinitésimo en $x = 1$ ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

Observe que decir que f es un infinitésimo en $x = 1$ significa que para valores de x muy próximos a 1, la función toma valores muy pequeños (cercanos a cero). Generalmente para distinguirla de las otras funciones se designa un infinitésimo con un letra griega, como por ejemplo φ, ϕ , o χ .

Gráficamente:



Álgebra de infinitésimos

Sean f y g dos infinitésimos en $x = a$

a) $(f + g)(x)$ también es un infinitésimo en $x = a$ (demostrar aplicando límite de la suma)

b) $(f \cdot g)(x)$ también es un infinitésimo en $x = a$ (demostrar aplicando límite del producto)

c) El cociente de dos infinitésimos en $x = a$ **NO** siempre es otro infinitésimo. Esto depende del orden del infinitésimo. El orden del infinitésimo es la rapidez con la que tiende al cero. Si el infinitésimo del numerador tiende más rápidamente a cero entonces el cociente SI es un infinitésimo.

Si el denominador tiende más rápidamente a cero entonces el límite del cociente da infinito.

Si el numerador y el denominador tienden con la misma rapidez a cero, entonces el límite del cociente da un número distinto de cero (si ese número es 1 se llaman **infinitésimos equivalentes**).

Ejemplo 1:

$f(x) = x^2$ es un infinitésimo en $x = 0$

$g(x) = x^4$ es un infinitésimo en $x = 0$

a) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 + x^4) = 0 + 0 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 . x^4) = 0.0 = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$ porque x^4 tiende más rápidamente a cero y está en el denominador, es decir es de mayor orden.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Ejemplo 2:

$f(x) = x$ es un infinitésimo en $x = 0$

$g(x) = \text{sen } x$ es un infinitésimo en $x = 0$

Si hacemos el cociente entre ellos, y calculamos su límite para $x \to 0$, nos da $\frac{0}{0}$

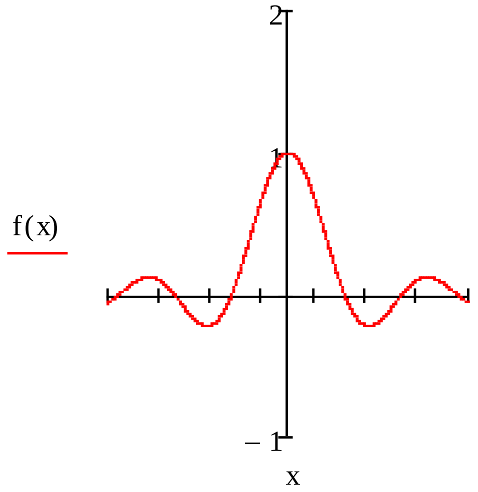
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{senx}}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

pero esto es una indeterminación, que no podemos salvar con las herramientas vistas hasta ahora.

Sin embargo (Usando la regla de L'Hopital que veremos después) podemos demostrar que dicho límite es 1, es decir:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ este límite se llama **límite notable,** ya que el resultado se toma como dato y no se resuelve

Gráficamente:



Los límites notables son 4:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx}{\operatorname{sen}(kx)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(kx)}{kx} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx}{\tan(kx)} = 1$$

Estos límites nos permiten resolver algunos otros límites, que a pesar de no ser notables, pueden resolverse usando notables

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}4x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(4.\dfrac{\text{sen}4x}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 4.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}4x}{4x} = 4.1 = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 6x}{2x}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2.\dfrac{\tan 6x}{6x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 6x}{6x} = 2.1 = 2$

TEOREMAS SOBRE LIMITE FINITO Y ÚNICO

1) Teorema del signo del límite

Sea f una función que tiene límite L en un punto x = a de acumulación del dominio:

- **Si L > 0 entonces $\exists\ E^*(a,\partial)\ :\ \forall x \in E^*(a,\partial)\ ,\ f(x) > 0$**
- **Si L < 0 entonces $\exists\ E^*(a,\partial)\ :\ \forall x \in E^*(a,\partial)\ ,\ f(x) < 0$**

Esta propiedad asegura que la fc. y = f (x) tiene el mismo signo que su límite al menos muy cerca del punto.

2) Teorema fundamental de límite

Si una función tiene límite L en un punto a de acumulación de su dominio entonces existe un entorno reducido del punto donde la función es igual a su límite más un infinitésimo.

Demostración:

Por definición de límite:

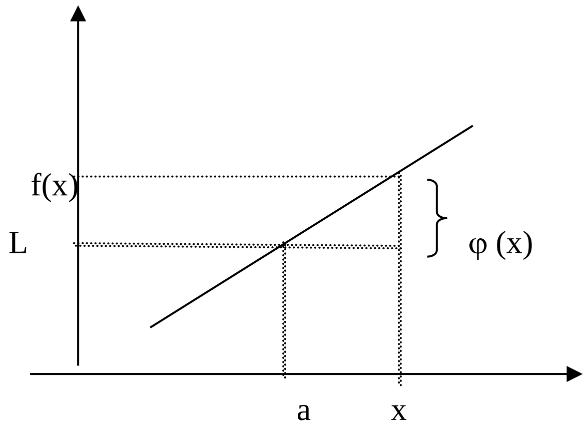
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\big(f(x) - L\big) = 0$$

pero entonces (f(x) – L) es un infinitésimo al que llamaremos φ (x), por lo tanto

$$f(x) - L = \varphi(x)$$

despejando $f(x) = L + \varphi(x) \qquad \forall x \in E^*(a,\delta)$

Este teorema significa que muy cerca del punto x = a el valor f(x) puede ser reemplazado por el valor de su límite más un infinitésimo.



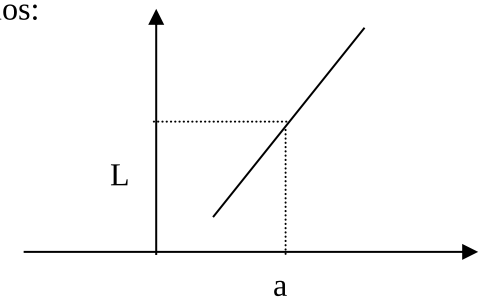
<u>CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO</u>

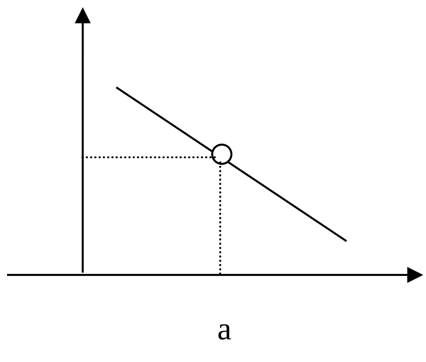
Una función es continua en un punto **a** de su dominio si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe la imagen de la función en x=a: **∃f(a)**
2. Existe el límite de la fc. en el punto x=a : $\mathbf{\lim_{a} f(x) = L}$
3. El valor del límite coincide con la imagen : **L = f(a)**

Deben cumplirse las tres condiciones para que sea continua en x=a

Ejemplos:





es continua en x = a

no es continua en x=a

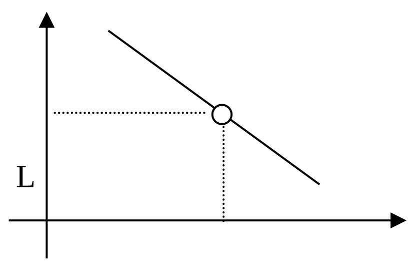
En el segundo gráfico decimos que no es continua ya que no tiene imagen en el punto **a**

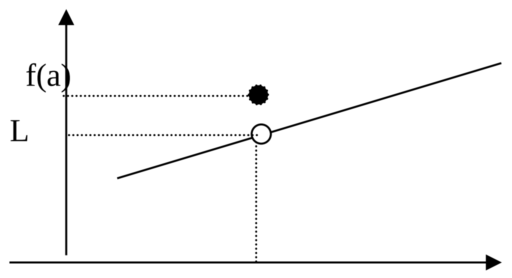
Cuando una de las tres condiciones no se cumplen, se dice que es discontinua.

Las discontinuidades se clasifican en dos : **evitable y esencial**

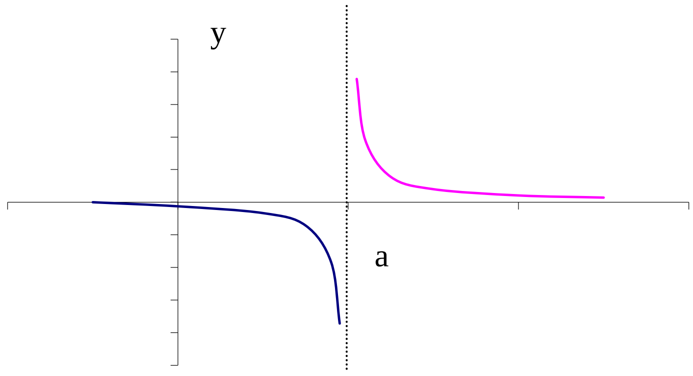
a) **Evitable**: tiene una discontinuidad evitable en x=a si es discontinua en x=a, y **si existe el límite (finito y único) en x=a.**

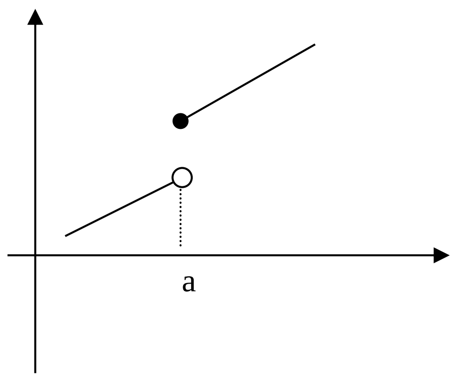
Ejemplo:





b) **Esencial:** tiene discontinuidad esencial en x=a si es discontinua en dicho punto , y **no existe el límite en x=a**





Ejemplo:

Hallar los puntos de discontinuidad de la siguiente función y clasificarla:

$$y = \frac{x-3}{x^2-9}$$

Para hallar los puntos de discontinuidad se analizan los valores de x donde el denominador se anula.

En el ejemplo: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

Analizamos ahora que tipo de discontinuidad tienen en cada punto:

<u>En x= 3</u>

1) f(3) = **no existe imagen** por que no pertenece al dominio

Ya sabemos que no es continua, pero para clasificarla debemos ver si existe límite

2) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3).(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$

Luego **sí existe el límite**, por lo tanto la discontinuidad es **evitable en x = 3**

<u>En x = - 3</u>

1) f(-3) = no existe imagen por que no pertenece al dominio

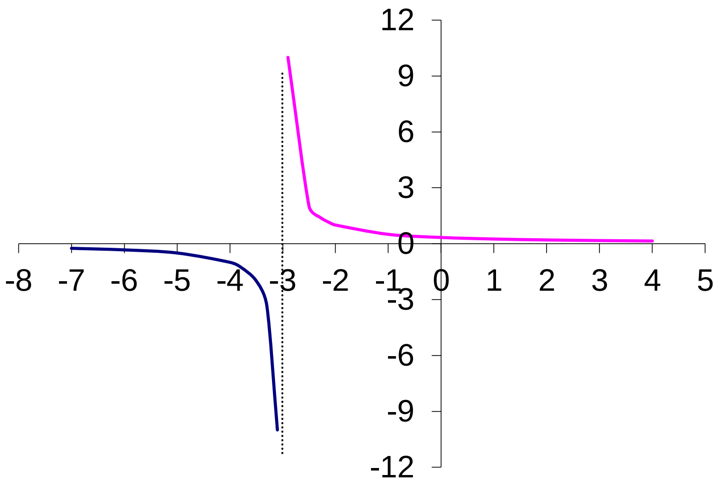
Ya sabemos que no es continua, pero para clasificarla debemos ver si existe límite

2) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \infty$

Luego **no existe límite,** por lo tanto la discontinuidad es **esencial en x = - 3**

Decir que la función tiene una discontinuidad evitable en x = a , significa que se puede transformar en continua. Esto se logra redefiniendo la fc. y asignándole en el punto x=a el valor del límite en a. En el ejemplo anterior:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-9} & \text{si } x \neq 3 \\[2ex] 1/6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

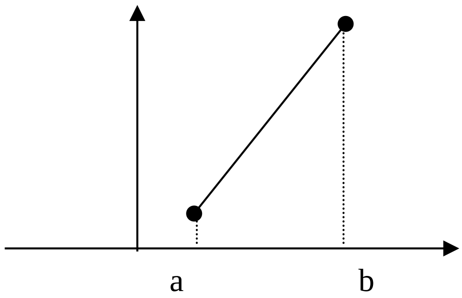


<u>Continuidad en un intervalo</u>

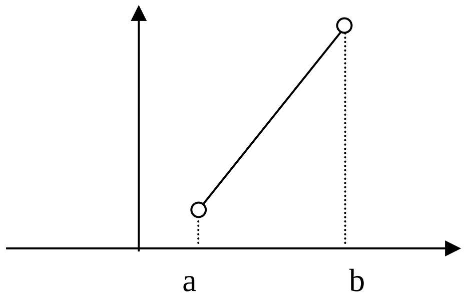
La función y = f(x) es continua en el intervalo] a , b [si y sólo si es continua en todos los puntos del intervalo.

La función y = f(x) es continua en el intervalo [a , b] si y sólo si es continua en] a , b [y

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

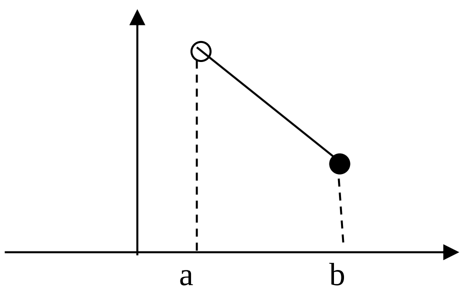


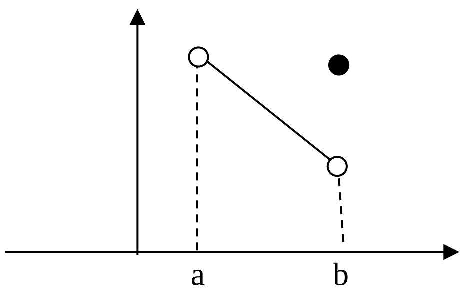
es continua en [a , b]



es continua en]a , b[

Analice en los siguientes gráficos si son continuas en el intervalo [a , b] o]a , b[





Propiedades de las funciones continuas

1) Sean f y g funciones continuas en x=a, entonces las funciones:

(k. f) (x) ; (f + g) (x) ; (f - g) (x) ; (f . g) (x) ; (f / g) (x)

también lo son en x = a

(el alumno debe saber demostrar estas propiedades usando propiedad de límite)

2) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y si g es continua en x = a entonces:

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x) \right) = g(L)$$

En particular si f es continua en a y g es continua en f(a), entonces la composición también es continua en a.

Esta última propiedad es muy importante ya que permite justificar las siguientes proposiciones:

a) $\lim\limits_{x\to a} \ln(f(x)) = \ln(\lim\limits_{x\to a} f(x))$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

b) $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{sen}(f(x)) = \mathrm{sen}(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 2} \ln(3x^2 - 10) = \ln(\lim\limits_{x\to a} (3x^2 - 10)) = \ln 2$
- $\lim\limits_{x\to \pi} \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{sen}(\lim\limits_{x\to \pi} (\frac{\pi}{2} - x)) =$ **sen (-π/2) = - sen (π/2) = - 1**