ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN COMPLETAS

En estas ecuaciones también llamadas no homogéneas porque el segundo miembro es distinto de cero.

$$\mathbf{y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x) y = R(x)}$$

Si consideramos la ecuación con coeficientes constantes, se transforma en:

$$\mathbf{y''(x) + p\, y'(x) + q\, y = R(x)}$$ la función R(x) debe ser continua en un intervalo I

La solución general de una ecuación no homogénea estará formada por la suma de dos soluciones, una general correspondiente a la ecuación homogénea asociada, que llamaremos solución complementaria y_c y otra particular correspondiente a la no homogénea que la designamos y_p

Demostración:

La solución general es $\boxed{\mathbf{y = y_c + y_p}}$

Donde y_c e y_p deberán ser linealmente independientes.

Si es solución la reemplazamos en la ecuación diferencial

$(y_c + y_p)'' + p\,(y_c + y_p)' + q\,(y_c + y_p) = R(x)$

$y_c'' + y_p'' + p\, y_c' + p\, y_p' + q\, y_c + q\, y_p = R(x)$

Agrupamos los términos que contienen y_c e y_p

$(y_c'' + p\, y_c' + q\, y_c) + (y_p'' + p\, y_p' + q\, y_p) = R(x)$

El primer paréntesis del primer miembro es nulo porque y_c dijimos es solución de la ecuación homogénea $y_c'' + p\, y_c' + q\, y_c = 0$, la ecuación anterior nos queda:

$y_p'' + p\, y_p' + q\, y_p = R(x)$ quiere decir que y_p verifica la ecuación no homogénea dado que al sustituirla nos da la función R(x). El problema de hallar la solución general se reduce a encontrar esta solución particular y_p para ello veremos dos métodos, cuya elección dependerá de la naturaleza de R(x).

I- Método de coeficientes indeterminados:

Básicamente este método consiste en proponer mediante inspección del segundo miembro una función con un coeficiente indeterminado. Cuando reemplacemos la solución propuesta en la ecuación diferencial, el valor de este coeficiente quedará establecido.

Este método es muy sencillo, pero tiene la limitación que sólo es aplicable cuando R(x) es del tipo:

a) Polinómica
b) Exponencial.
c) Seno o coseno
d) Combinación de las anteriores.

Analizaremos cada caso a partir de un ejemplo

a) R(x) es una función polinómica:

Ejemplo 1:

$$y'' + y' - 6y = 3x - 2 \qquad R(x)= 3x - 2$$

Debemos hallar dos funciones linealmente independientes, para formar la solución general. Comenzamos por buscar la solución de la ecuación homogénea asociada para luego proponer y_p.

- Cálculo de y_c:

$y'' + y' - 6y = 0$ su ecuación característica es $m^2 + m - 6 = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$ raíces reales distintas

La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

- Cálculo de y_p:

Para proponer esta solución tenemos en cuenta y_c y R(x).

Como el segundo miembro es un polinomio proponemos como solución un polinomio del mismo grado completo con coeficientes indeterminados. Proponemos $y_p = a x + b$, esta solución debe ser linealmente independiente de la solución correspondiente a la ecuación homogénea asociada es decir no puede contener ningún término de y_c.

Si $y_p = a x + b$ es solución debe verificar la ecuación diferencial.

$(a x + b)'' + (a x + b)' - 6 (a x + b) = 3x - 2$

$(a x + b)' = a$

$(a x + b)'' = 0$ reemplazamos: $a - 6ax - 6b = 3x - 2$

Ordenamos: $- 6ax + (a - 6b) = 3x - 2$

Comparamos: $-6ax = 3x \rightarrow -6 a = 3$ de donde $a = - \frac{1}{2}$

$a - 6b = - 2$

$-1/2 - 6b = -2 \rightarrow b = \frac{1}{4}$

Vemos que quedaron determinados los coeficientes a y b, la solución particular de la ecuación no homogénea es $y_p = -1/2\, x + 1/4$

La solución general de la ecuación diferencial es $\boxed{\mathbf{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - 1/2\, x + 1/4}}$

Ejemplo 2:

$$y'' + 3y' = 8x + 5$$

- Cálculo de y_c:

$y'' + 3y' = 0$ su ecuación característica es $m^2 + 3m = 0$

Las raíces de esta ecuación son $m_1 = 0$ y $m_2 = -3$ raíces reales distintas

La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1 + c_2 e^{-3x}$

- Cálculo de y_p:

El segundo miembro es un polinomio, para determinar y_p debemos tener en cuenta que y_c contiene al término constante, si proponemos un polinomio de grado 1 se va a repetir este término, en este caso para que sean linealmente independientes debemos multiplicar la solución propuesta por x (recordemos que esta era la g(x) que utilizamos cuando las raíces eran repetidas)

Si multiplicamos por x el polinomio resultante será de grado 2, proponemos $y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx$

Reemplazamos y_p en la ecuación diferencial:

$(ax^2 + bx)'' + 3(ax^2 + bx)' = 8x + 5$

$2a + 6ax + 3b = 8x + 5$

Agrupamos y ordenamos:

$6ax + (2a + 3b) = 8x + 5$

Comparamos:

$6ax = 8x \rightarrow a = 4/3$

$2a + 3b = 5$

$2.4/3 + 3b = 5 \rightarrow b = 7/9$

Nos queda: $y_p = 4/3\, x^2 + 7/9\, x$

La solución general es de la forma: $\boxed{\mathbf{y = c_1 + c_2 e^{-3x} + 4/3\, x^2 + 7/9\, x}}$

b) <u>R(x) es una función exponencial:</u>

Ejemplo 3:

$$y'' + y' - 6y = 2e^{5x}$$

- Cálculo de y_c:

$y'' + y' - 6y = 0$ su ecuación característica es $m^2 + m - 6 = 0$

Las raíces de esta ecuación vimos que son $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$ raíces reales distintas

La solución general de la homogénea es: $\boxed{y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}}$

- <u>Cálculo de y_p:</u>

Ahora el segundo miembro es una exponencial cuyo exponente es 5x, como no corresponde al exponente de las funciones que aparecen en la solución de la homogénea podemos decir que son linealmente independientes y proponer como solución $y_p = a\,e^{5x}$ donde a es el coeficiente que debemos determinar.

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$(a\,e^{5x})'' + (a\,e^{5x})' - 6\,a\,e^{5x} = 2\,e^{5x}$

$25\,a\,e^{5x} + 5\,a\,e^{5x} - 6\,a\,e^{5x} = 2e^{5x}$

$24\,a\,e^{5x} = 2\,e^{5x} \rightarrow 24\,a = 2$ por lo tanto $a = 1/12$

La solución general es: $\boxed{\mathbf{y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + 1/12\,e^{5x}}}$

Si queremos verificar que la solución obtenida es la correcta, hacemos:

$(c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + 1/12\,e^{5x})'' + (c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + 1/12\,e^{5x})' - 6\,(c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} + 1/12\,e^{5x}) = 2\,e^{5x}$

$4\,c_1\,e^{2x} + 9\,c_2\,e^{-3x} + 25/12\,e^{5x} + 2c_1\,e^{2x} - 3\,c_2\,e^{-3x} + 5/12\,e^{5x} - 6\,c_1\,e^{2x} - 6\,c_2\,e^{-3x} - 6/12\,e^{5x} = 2\,e^{5x}$

Sacamos factor común las exponenciales:

$e^{2x}(4c_1 + 2\,c_1 - 6\,c_1) + e^{-3x}(9\,c_2 - 3\,c_2 - 6\,c_2) + e^{5x}(25/12 + 5/12 - 6/12) = 2\,e^{5x}$

Vemos que se anulan los dos primeros términos del primer miembro, esto es lógico porque estas funciones corresponden a la solución de la ecuación homogénea, por lo tanto nos queda:

$e^{5x}(25/12 + 5/12 - 6/12) = 2\,e^{5x}$

$e^{5x}(2) = 2\,e^{5x}$ comprobamos que es solución de la ecuación diferencial.

<u>Ejemplo 4:</u>

En este ejemplo vamos a cambiar R(x) en la ecuación anterior $y'' + y' - 6y = 4\,e^{2x}$

La $y_c = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x}$ contiene el término e^{2x} por lo tanto no podemos proponer como solución particular $y_p = ae^{2x}$ ya que serían linealmente dependientes. En este caso debemos multiplicar por x la solución propuesta $y_p = a\,x\,e^{2x}$ en la ecuación diferencial tenemos:

$(a\,x\,e^{2x})'' + (a\,x\,e^{2x})' - 6\,(a\,x\,e^{2x}) = 4\,e^{2x}$

$a\,(2\,e^{2x} + 2\,e^{2x} + 4x\,e^{2x}) + a(e^{2x} + 2x\,e^{2x}) - 6ax\,e^{2x} = 4\,e^{2x}$

Aplicamos propiedad distributiva, sacamos factor común x, y agrupamos:

$x(4\,ae^{2x} + 2a\,e^{2x} - 6a\,e^{2x}) + (4a\,e^{2x} + a\,e^{2x}) = 4\,e^{2x}$

el paréntesis del primer término del primer miembro es nulo, nos queda:

$5\ a\ e^{2x} = 4\ e^{2x} \rightarrow 5\ a = 4$ de donde $a = 4/5$

La solución general es: $\boxed{\mathbf{y = c_1\ e^{2x} + c_2\ e^{-3x} + 4/5\ x\ e^{2x}}}$

Las funciones obtenidas son todas linealmente independientes.

Ejemplo 5:

a)Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 3e^x$ que verifique las condiciones

$y(0) = 2$

$y'(0) = 1$

b)Verificar que la solución obtenida es correcta.

Para hallar la solución particular, primero debemos encontrar la solución general de la ecuación.

- Cálculo de y_c:

  $y'' - 2y' + y = 0$ su ecuación característica es $m^2 - 2m + 1 = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$ raíces reales iguales

La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1\ e^x + c_2\ x\ e^x$

- Cálculo de y_p:

Debemos proponer una solución linealmente independiente de la solución general, para que el cociente de esta solución con las funciones e^x y $x\ e^x$ sea distinto de constante no podemos proponer $y_p = ae^x$ ni $y_p = x\ e^x$, proponemos entonces $y_P = a\ x^2\ e^x$ o sea que multiplicamos por x^2

Reemplazamos esta solución en la ecuación:

$(a\ x^2\ e^x)'' - 2\ (a\ x^2\ e^x)' + a\ x^2\ e^x = 3e^x$

$a(2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2\ e^x) - 2a(2xe^x + x^2\ e^x) + a\ x^2\ e^x = 3e^x$

Sacamos factor común:

$x^2 e^x\ (a - 2a + a) + x\ e^x\ (4a - 4a) + 2\ a\ e^x = 3\ e^x$

nos queda:

$2\ a\ e^x = 3\ e^x \rightarrow a = 3/2$

la solución general es: $\boxed{y = c_1\ e^x + c_2\ x\ e^x + 3/2\ x^2\ e^x}$

Verificación:

$y' = c_1\ e^x + c_2\ e^x + c_2\ x\ e^x + 3\ x\ e^x + 3/2\ x^2\ e^x$

$y'' = c_1\ e^x + c_2\ e^x + c_2\ e^x + c_2\ x\ e^x + 3\ e^x + 3\ x\ e^x + 3\ x\ e^x + 3/2\ x^2\ e^x$

Reemplazamos:

$c_1e^x+2c_2e^x+c_2\,xe^x+3e^x+6xe^x+3/2x^2e^x-2c_1e^x-2c_2e^x-2c_2\,x\,e^x-6xe^x-3x^2e^x+c_1e^x+c_2\,xe^x+3/2x^2e^x = 3e^x$

cancelamos términos y nos queda: $3e^x = 3e^x$ se verifica la ecuación.

Solución particular:

$y(0) = c_1 = 2$

$y'(0) = c_1 + c_2 = 1 \therefore c_2 = -1$

$$\boxed{y = 2\,e^x - x\,e^x + 3/2\,x^2\,e^x}$$ solución particular

c) **R(x) es del tipo sen kx; cos kx:**

Cuando el segundo miembro es una función trigonométrica sen bx, cos bx proponemos como solución $y_p = a \cos kx + b \operatorname{sen} kx$ En estas ecuaciones las soluciones y_c e y_p solo pueden presentar dependencia lineal si las raíces correspondientes a la ecuación homogénea son complejas conjugadas, dado que en este caso la solución general contiene sen bx y cos bx. Si las raíces de la homogénea son reales distintas o iguales, la solución es exponencial y su cociente con una trigonométrica es siempre distinto de constante.

Ejemplo 6:

$$y'' - 4\,y' - 5y = 5 \cos x$$

- Cálculo de y_c:

$y'' - 4y' - 5y = 0$ su ecuación característica es $m^2 - 4m - 5 = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = 5$ y $m_2 = -1$ raíces reales distintas

La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1\,e^{5x} + c_2\,e^{-x}$

- Cálculo de y_p:

Proponemos $y_p = a \cos x + b \operatorname{sen} x$ vemos que la solución propuesta es una combinación de las dos funciones, en este ejemplo k=1

Si y_p es solución deberá verificar la ecuación:

$(a \cos x + b \operatorname{sen} x)'' - 4\,(a \cos x + b \operatorname{sen} x)' - 5\,(a \cos x + b \operatorname{sen} x) = 5 \cos x$

$-a \cos x - b \operatorname{sen} x + 4a \operatorname{sen} x - 4\,b \cos x - 5a \cos x - 5\,b \operatorname{sen} x = 5 \cos x$

como se trata de determinar los coeficientes, sacamos igual que en el ejemplo anterior, factor común las funciones:

$\cos x\,(-a - 4b - 5a) + \operatorname{sen} x\,(-b + 4a - 5b) = 5 \cos x$

Como el segundo miembro no contiene la función sen x, deberá ser:

$$-b + 4a - 5b = 0$$

$$-a - 4b - 5a = 5$$

Resolvemos el sistema $4a - 6b = 0$

$-6a - 4b = 5$ nos queda $a = -15/26$ y $b = -5/13$

La solución general es. $\boxed{y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} - 15/26 \cos x - 5/13 \operatorname{sen} x}$

Ejemplo 7:

$$y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$$

- Cálculo de y_c:

$y'' + 4y = 0$ su ecuación característica es $m^2 + 4 = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = 2j$ y $m_2 = -2j$ raíces imaginarias

La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$

- Cálculo de y_p:

Si proponemos $y_p = a \cos 2x + b \operatorname{sen} 2x$ la solución propuesta es linealmente dependiente de la solución de la homogénea, por lo tanto multiplicamos por x la solución y_p

$y_p = a\, x \cos 2x + b\, x \operatorname{sen} 2x$

Derivamos y reemplazamos:

$-2a \operatorname{sen} 2x - 2a \operatorname{sen} 2x - 4a\,x \cos 2x + 4b \cos 2x - 4b \operatorname{sen} 2x + 4a \cos 2x + 4b \operatorname{sen} 2x = 3 \operatorname{sen} 2x$

cancelando términos obtenemos:

$-4a \operatorname{sen} 2x + 4b \cos 2x = 3 \operatorname{sen} 2x$

como en el segundo miembro no aparece la función cos 2x, deberá ser b = 0, nos queda:

$-4a \operatorname{sen} 2x = 3 \operatorname{sen} 2x \rightarrow -4a = 3 \quad \therefore\ a = -3/4$

Solución general: $\boxed{y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \tfrac{3}{4} x \cos 2x}$

Las tres funciones obtenidas son linealmente independientes.

d) **R(x) es una combinación de funciones:**

Ejemplo 8:

$$y'' - 8y' + 16y = e^{5x} + \cos 3x$$

- Cálculo de y_c:

$y'' - 8y' + 16y = 0$ su ecuación característica es $m^2 - 8m + 16 = 0$

las raíces de esta ecuación son $m_1 = m_2 = 4$ raíces coincidentes

La solución general de la homogénea es: $y_c = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$

- Cálculo de y_p:

En el segundo miembro tenemos una función exponencial que es linealmente independiente de la solución de la ecuación homogénea y una función trigonométrica, por lo tanto proponemos como solución particular la suma o combinación de ambas funciones.

$y_p = a e^{5x} + b \cos 3x + c \operatorname{sen} 3x$

Reemplazando las derivadas en la ecuación y agrupando términos nos queda:

$$-19 a e^{5x} + 7 b \cos 3x + 7 c \operatorname{sen} 3x - 24 c \cos 3x + 24 b \operatorname{sen} 3x = e^{5x} + \cos 3x$$

Sacamos factor común las funciones trigonométricas.

$$-19 a e^{5x} + \cos 3x (7b - 24 c) + \operatorname{sen} 3x (7c + 24 b) = e^{5x} + \cos 3x$$

Para que se cumpla la igualdad deberá ser:

$-19 a e^{5x} = e^{5x} \rightarrow a = -1/19$

$(7b - 24 c) \cos 3x = \cos 3x \rightarrow 7b - 24 c = 1$

$(7c + 24 b) \operatorname{sen} 3x = 0 \rightarrow 7c + 24 b = 0$

Resolvemos el sistema:

$7 b - 24 c = 1$

$24 b + 7c = 0$ $b = 7/625$ y $c = -24/625$

Solución general: $\boxed{y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + 7/625 \cos 3x - 24/625 \operatorname{sen} 3x}$

Si alguno de los términos del segundo miembro, resulta ser combinación lineal de los que componen la solución de la homogénea se deberá multiplicar dicho término por x o por x^2 según corresponda.
Ejemplos: Si en el punto la exponencial del segundo miembro fuera e^{4x} debo proponer como solución:
$y_p = a\,x^2\,e^{4x} + b \cos 3x + c \operatorname{sen} 3x$.
De la misma manera si la solución de la homogénea contiene las funciones trigonométricas porque sus raíces son complejas conjugadas, se multiplica por x a las funciones seno y coseno.

Vamos a sintetizar en una tabla los casos propuestos, existen otras combinaciones, hemos visto sólo alguna de ellas:

En la primera columna figura R(x), en la segunda el tipo de raíces de la ecuación homogénea asociada, y la última la forma de la solución propuesta.

R(x)	$\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$	$\mathbf{y_p}$
x^n	$m_1 \neq m_2$	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
x^n	$m_1 = m_2$	$x\,(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$
$\cos k x$ o $\operatorname{sen} k x$	reales $m_1 \neq m_2$ o $m_1 = m_2$	$a \cos k x + b \operatorname{sen} k x$
$\cos k x$ o $\operatorname{sen} k x$	$m_1 = a + j\,b$ $\;m_2 = a - j\,b$ si $k \neq b$	$a \cos k x + b \operatorname{sen} k x$
$\cos k x$ o $\operatorname{sen} k x$	$m_1 = a + j\,b$ $\;m_2 = a - j\,b$ si $k = b$	$x\,(a \cos k x + b \operatorname{sen} k x)$
e^{ax}	$m_1 \neq m_2$ si $a \neq m_1$ y $a \neq m_2$	$a\,e^{ax}$
e^{ax}	$m_1 \neq m_2$ si $a = m_1$ o $a = m_2$	$a\,x\,e^{ax}$
e^{ax}	$m_1 = m_2$ si $a \neq m_1$	$a\,e^{ax}$
e^{ax}	$m_1 = m_2$ si $a = m_1$	$a\,x^2 e^{ax}$

Si R(x) es la suma de estas funciones, la solución a proponer será una suma de las correspondientes soluciones.

II- Método de variación de parámetros:

Este método se puede aplicar sin importar la naturaleza de R(x), recordemos que en el método anterior esta función tenía restricciones.

El método consiste en reemplazar en la solución complementaria (solución de la homogénea) las constantes c_1 y c_2 por funciones escalares que llamaremos $v_1(x)$ y $v_2(x)$. Al reemplazar las constantes por funciones, obtenemos una solución particular de la ecuación, por eso el método recibe el nombre de variación de constantes o parámetros. Llamamos y_p a esta nueva combinación.

$$\mathbf{y_p = v_1\, y_1 + v_2\, y_2} \quad (\text{ son todas funciones de x })$$

Para conocer y_p, debemos hallar las funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$.

Como tenemos dos funciones desconocidas, necesitamos dos condiciones que deben cumplir v_1 y v_2

Una de ellas es que $y_p = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$ sea solución de la ecuación diferencial completa, la otra condición será arbitraria y surge de simplificar la estructura de la ecuación cuando reemplacemos la solución propuesta.

Para la primera condición derivamos y reemplazamos, y_p deberá satisfacer la ecuación diferencial.

$(v_1\, y_1 + v_2\, y_2)'' + p\,(v_1\, y_1 + v_2\, y_2)' + q\,(v_1\, y_1 + v_2\, y_2) = R(x)$

Calculamos primero y_p':

$(v_1\, y_1 + v_2\, y_2)' = v_1'\, y_1 + v_2'\, y_2 + v_1\, y_1' + v_2\, y_2'$

La segunda condición será exigir que $v_1'\, y_1 + v_2'\, y_2 = 0$, esto nos simplifica la derivada segunda

$y_p'' = (v_1\, y_1' + v_2\, y_2')' = v_1'\, y_1' + v_1\, y_1'' + v_2'\, y_2' + v_2\, y_2''$

Reemplazamos en la ecuación:

$v_1'\, y_1' + v_1\, y_1'' + v_2'\, y_2' + v_2\, y_2'' + p\,(v_1\, y_1' + v_2\, y_2') + q\,(v_1\, y_1 + v_2\, y_2) = R(x)$

Sacamos factor común v_1 y v_2

$v_1(y_1'' + p\, y_1' + q\, y_1) + v_2\,(y_2'' + p\, y_2' + q\, y_2) + v_1'\, y_1' + v_2'\, y_2' = R(x)$

Las expresiones dentro del paréntesis se anulan por ser y_1 e y_2 solución de la ecuación homogénea, la ecuación se reduce a:

$$v_1'\, y_1' + v_2'\, y_2' = R(x)$$

Tenemos que la solución propuesta será solución si se cumplen las condiciones:

$$\begin{cases} \mathbf{v_1'\, y_1 + v_2'\, y_2 = 0} \\ \mathbf{v_1'\, y_1' + v_2'\, y_2' = R(x)} \end{cases}$$

Al resolver el sistema, vamos a encontrar v_1' y v_2', estas son las derivadas de las funciones escalares que al reemplazarlas verifican la ecuación. Vemos que debemos integrar para despejar v_1 y v_2

Vamos a obtener las derivadas, aplicando el método de determinantes al sistema:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

Donde W(x) es el wronskiano del sistema. $v_1' = \dfrac{-y_2 R(x)}{W(x)}$ y $v_2' = \dfrac{y_1 R(x)}{W(x)}$

Tenemos: $v_1(x) = \displaystyle\int \frac{-y_2(x)R(x)dx}{W(x)}$ y $v_2(x) = \displaystyle\int \frac{y_1(x)R(x)dx}{W(x)}$

Ejemplo 1:

$$y'' + y = \text{tg } x$$

- Cálculo de y_c:

Ecuación característica $m^2 + 1 = 0$

Raíces: $m_1 = j$ y $m_2 = -j$ son imaginarias por lo tanto la solución es: $y_c = c_1 \cos x + c_2 \,\text{sen} x$.

siendo $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \text{sen } x$.

- Cálculo de y_p:

Proponemos como solución $y_p = v_1 \cos x + v_2 \,\text{sen } x$. Sabemos que $v_1' = \dfrac{-y_2 R(x)}{W(x)}$ y $v_2' = \dfrac{y_1 R(x)}{W(x)}$

Siendo: $W = \begin{vmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ -\text{sen } x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

$v_2' = \cos x \cdot \text{tg } x$ integramos $v_2 = \int \cos x \,\text{tg } x \, dx = -\cos x$

$v_1' = -\text{sen } x \cdot \text{tg } x$ integramos $v_1 = \int -\text{sen} x \,\text{tg } x \, dx = \text{sen } x - \ln|\sec x + \text{tg } x|$

La solución general es

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \,\text{sen } x + \cos x \,[\,\text{sen } x - \ln|\sec x + \text{tg } x|\,] - \cos x \,\text{sen } x}$$

Ejemplo 2:

$$y'' + y = \sec x$$

- Cálculo de y_c:

La ecuación homogénea asociada es igual que en el caso anterior, su solución es por lo tanto:

$$y_c = c_1 \cos x + c_2\, \text{sen} x.$$

- Cálculo de y_p:

En el segundo miembro $R(x) = \sec x$

Nos queda: $v'1 = -\,\text{sen} x.\ \sec x = \text{tg}\ x$

$$v_1 = \int \text{tg}\ x\ dx = \ln |\cos x|$$

$$v'_2 = \cos x\ .\ \sec x = 1$$

$$v_2 = \int dx = x$$

La solución general es

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2\, \text{sen}\ x + \cos x\ .\ \ln|\cos x| + x\ \text{sen}\ x}$$
