MÉTODO DEL PLANO DE FASE

El Método del Plano de Fase (PDF) es un procedimiento muy completo que sirve para el análisis de sistemas tanto lineales como no lineales y brinda información sobre la respuesta temporal y sobre la estabilidad del sistema.

En el plano de fase se representan en dos ejes coordenados las variables del sistema, que dependen del tiempo y guardan entre sí una relación de fase, por ejemplo, porque una es derivada de la otra.

En cada instante, los valores de las variables definen un punto del plano y una sucesión de puntos, durante un cierto intervalo de tiempo, definen una trayectoria.

El conjunto de trayectorias que corresponden a un determinado sistema se denominan *diagrama de fase* o retrato fásico del sistema.

Tiene la limitación de poder emplearse solamente para sistemas de 1° y 2° Orden, que son los que pueden representarse en un plano cartesiano.

Podría ampliarse hasta tercer orden usando la misma metodología, mediante un *espacio de fase* para representarlo gráficamente mediante una terna cartesiana. Para sistemas de mayor orden ya se requiere un hiperespacio, que es una representación de tipo estadístico.

Las trayectorias en el PDF presentan una serie de propiedades, algunas de las cuales se mencionan a continuación.

PROPIEDADES

1) Una traslación de una trayectoria es también una trayectoria

Si $x(t)=\varphi(t)$ é $y(t)=\psi(t)$ son la solución de un sistema y existe una constante (b) se puede comprobar por sustitución que $x=\varphi(t+b)$ é $y=\psi(t+b)$ también satisfacen las ecuaciones del sistema y, por lo tanto, también constituyen trayectorias de éste.

Estas últimas soluciones son, además, una traslación de las primeras trayectorias en una magnitud dada por la constante (b).

2) Si dos trayectorias pasan a través del mismo punto, dado por las coordenadas (x_o;y_o), es porque una es traslación de la otra.

se puede verificar esta propiedad:

$x=\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t_o)=x_o$

$y=\psi(t) \Rightarrow \psi(t_o)=y_o$ ①

la otra trayectoria pasa por el mismo punto, pero en un instante distinto $t=t_1$; entonces:

$x=\alpha(t) \Rightarrow \alpha(t_1) = x_o$

$y=\beta(t) \Rightarrow \beta(t_1) = y_o$ ②

en la propiedad anterior se definió una trayectoria que es traslación de otra como:

$X(t)= \varphi(t+c)$

$Y(t)= \psi(t+c)$ ③

Pero como es una traslación, también es solución del sistema, luego $x=X(t)$ é $y=Y(t)$ son soluciones, pero como (c) era una constante arbitraria, podría asumirse que ella vale $c= t_o - t_1$; luego, suponiendo que es $t=t_1$ en ③ resulta:

$X(t_1)= \varphi(t_1+c)$

$Y(t_1)= \psi(t_1+c)$

pero, reemplazando [c] será:

$X(t_1) = \varphi(t_1+t_o-t_1) = \varphi(t_o) \Rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi(t_o)= x_o}$ por ①

$Y(t_1) = \psi(t_1+t_o-t_1) = \psi(t_o) \Rightarrow$ $\boldsymbol{\psi(t_o)= y_o}$ por ①

pero como era:

$x_o = \alpha(t_1)$

$y_o = \beta(t_1)$

entonces se puede igualar

$X(t_1) = \alpha(t_1)$ é $Y(t_1) = \beta(t_1)$

pero por la unicidad de las soluciones esto será válido para cualquier instante, además de $t=t_1$; entonces

$X(t)= \alpha(t)$

$Y(t)= \beta(t)$

por lo tanto

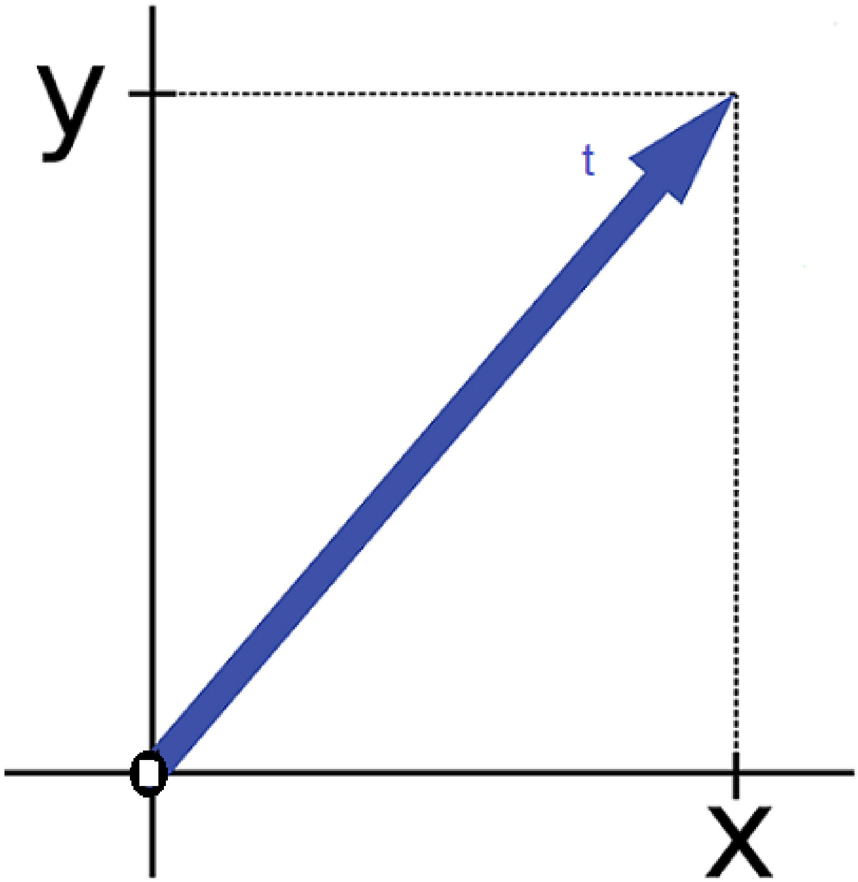
$\alpha(t)= \varphi(t+c)$

$\beta(t)= \psi(t+c)$

es decir que esta segunda trayectoria que pasa por el punto $P_o\,(x_o\ y_o)$; es una traslación de la primera.

3) Las trayectorias tienen un sentido de dirección

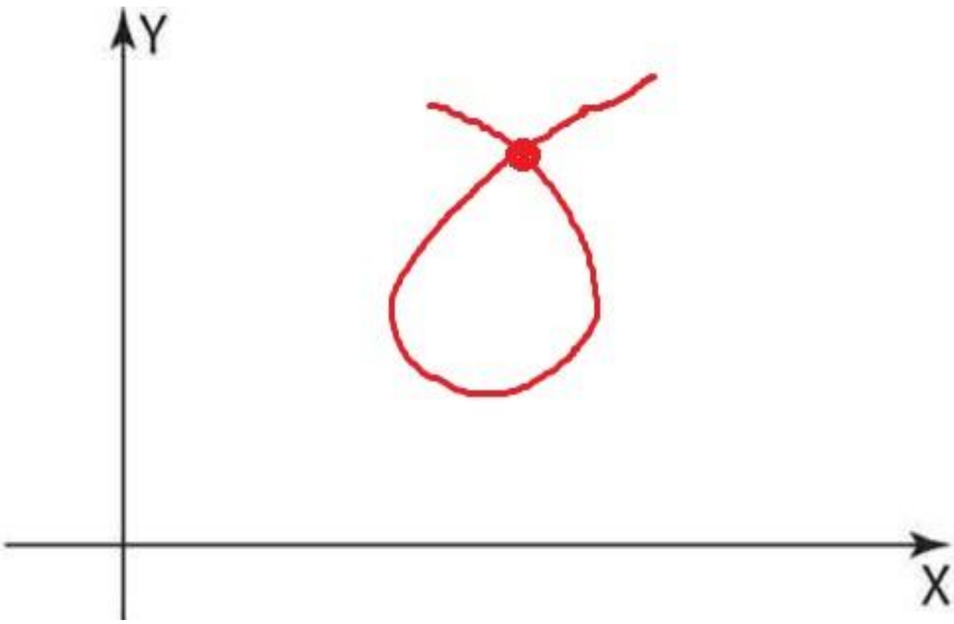
Siendo x=φ(t); y=ψ(t); se considerará sentido de la trayectoria a la dirección de avance del punto [φ(t); ψ(t)] a medida que crece el tiempo [t].



4) Una trayectoria no puede cruzarse o intersectarse a sí misma

La curva de la siguiente figura no podría ser el gráfico de una trayectoria, sin embargo, una trayectoria sí podría estar representada por una curva cerrada simple.

En su caso, una curva cerrada en el PDF representaría una solución periódica del sistema dado, correspondiente a un fenómeno cíclico con comportamiento temporal oscilatorio armónico.



Punto Crítico

Un *punto crítico*, también llamado punto de equilibrio o punto singular del sistema, es aquel para el cual las derivadas de todas sus variables son simultáneamente nulas. Este punto corresponde a una condición estacionaria del sistema.

Suponiendo que las ecuaciones diferenciales del sistema están dadas por las siguientes ecuaciones implícitas genéricas:

$$\begin{cases} x'(t_o) = F[x(t_o); y(t_o)] = F(x_o, y_o) = 0 \\ y'(t_o) = G[x(t_o); y(t_o)] = G(x_o, y_o) = 0 \end{cases}$$

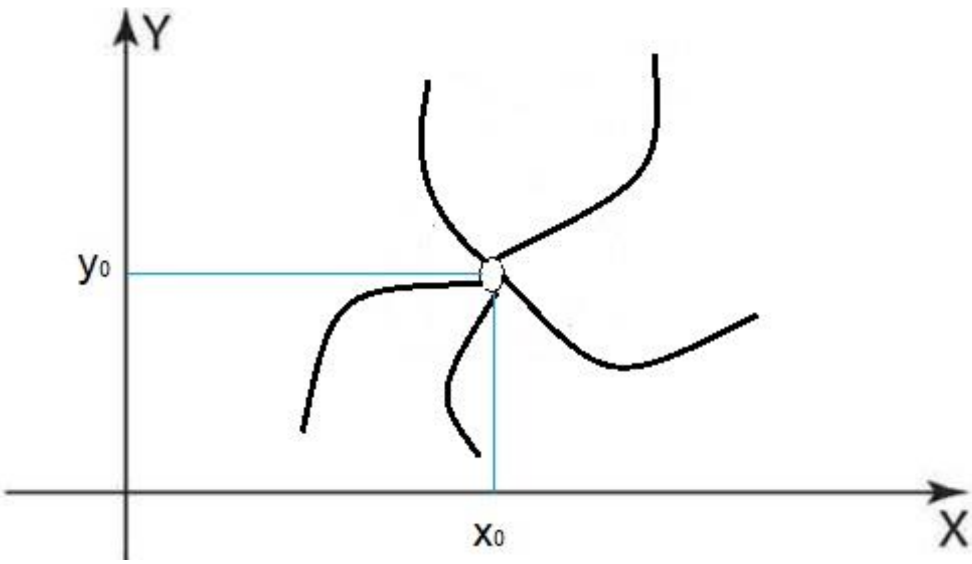
La solución no puede apartarse del punto crítico (x_o,y_o) en ningún instante (t). La trayectoria a través de un punto crítico es, en consecuencia, el punto único (x_o,y_o). Como las diferentes trayectorias de un sistema autónomo no pueden cruzarse unas a otras, ninguna otra trayectoria puede atravesar el punto crítico.

Se puede clasificar los puntos críticos de acuerdo con el comportamiento de las trayectorias que comienzan cerca de ellos o que se les aproximan. Esta clasificación, a su vez, permite describir los diferentes tipos de soluciones según su comportamiento.

En los sistemas lineales, el único punto crítico es [x_o=0; y_o=0], que cumple con la definición, por lo que siempre el punto crítico o de equilibrio del sistema lineal estará ubicado en el origen del plano cartesiano de coordenadas.

En los sistemas no lineales, en cambio, puede haber distintos puntos críticos ubicados en diferentes lugares del plano.

Es importante destacar que las trayectorias no llegan ni salen del punto crítico, sino que se aproximan indefinidamente a él sin tocarlo.



CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Un sistema de ED Lineales muy sencillo se podría expresar por medio de las siguientes ecuaciones genéricas:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

donde [a], [b], [c] y [d] son coeficientes reales, tales que [ad – bc] $\neq$ 0 para que el sistema tenga solución. Siendo un sistema lineal, el único punto crítico del sistema es el origen (0;0).

el mismo sistema se podría expresar en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

siendo la ecuación característica correspondiente:

det [λI- A] = 0

donde [A] es la matriz de los coeficientes: [A] = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

resolviendo la EC:

det $\left\{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$ = det $\begin{bmatrix} (\lambda - a) & -b \\ -c & (\lambda - d) \end{bmatrix}$ = 0

si se resuelve este determinante se obtiene la EC:

$\Delta(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0 \Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0}}$

Y, resolviendo la ecuación algebraica de segundo grado en [λ] se obtienen las raíces, cuya ubicación determinará si el sistema es estable o inestable en su punto crítico.

Además, la ubicación de las raíces en el plano complejo determina la clase de trayectoria asociada al punto crítico, vale decir el comportamiento del sistema.

siendo:

$\lambda_{1,2} = (a+d)/2 \pm [\sqrt{[-(a+d)]^2 - 4(ad - bc)}\,]/2$

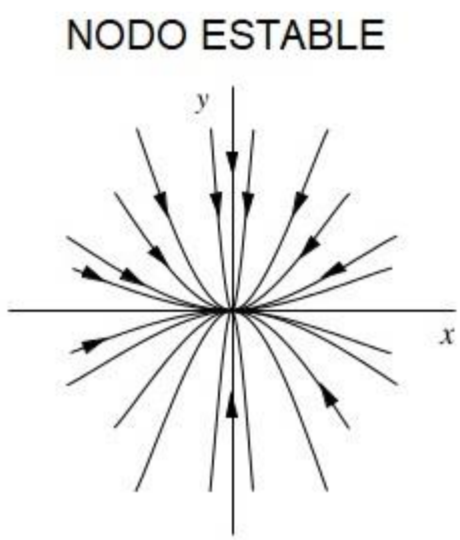
observando la constitución de las raíces y siendo los coeficientes [a, b, c, y d] números reales, se presentan cuatro posibilidades:

1.- Raíces reales distintas o coincidentes del mismo signo
2.- Raíces reales distintas de distinto signo
3.- Raíces complejas conjugadas
4.- Raíces imaginarias puras conjugadas

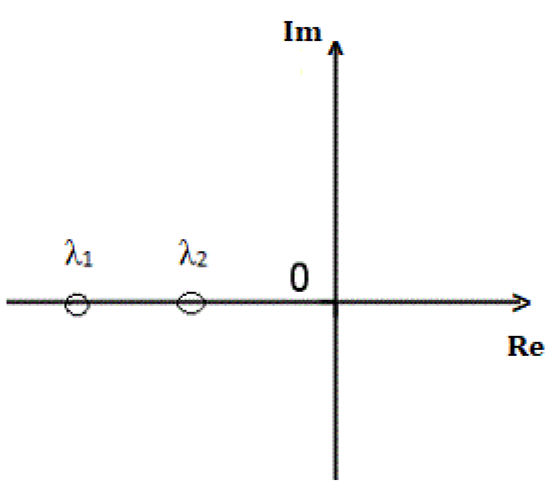
Según la ubicación de estas raíces en el plano complejo los puntos críticos pueden ser los siguientes, de acuerdo con la forma de sus trayectorias:

1) NODO:

Cuando las raíces son reales del mismo signo el punto crítico corresponde a un nodo, cuyas trayectorias son familias de curvas que concurren al punto, si es estable, o egresan de él si es inestable. La ubicación de las raíces en el semiplano izquierdo determina que sea estable y viceversa, si tienen parte real positiva el punto crítico es inestable.

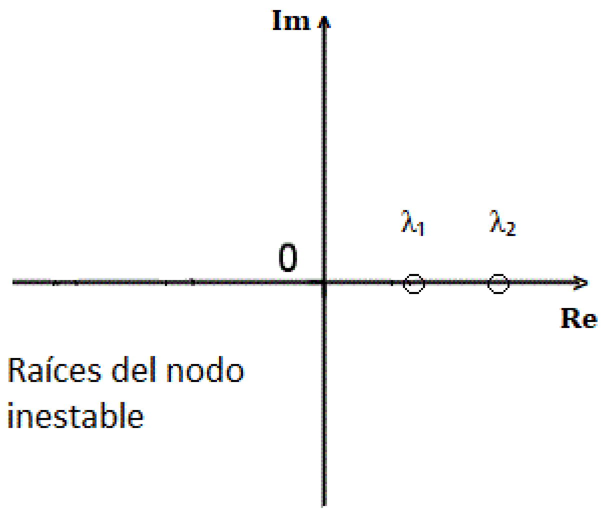


Para que el punto crítico sea un nodo estable como el graficado es porque la ubicación de las raíces está en el semiplano izquierdo, de manera que cuentan con parte real negativa:

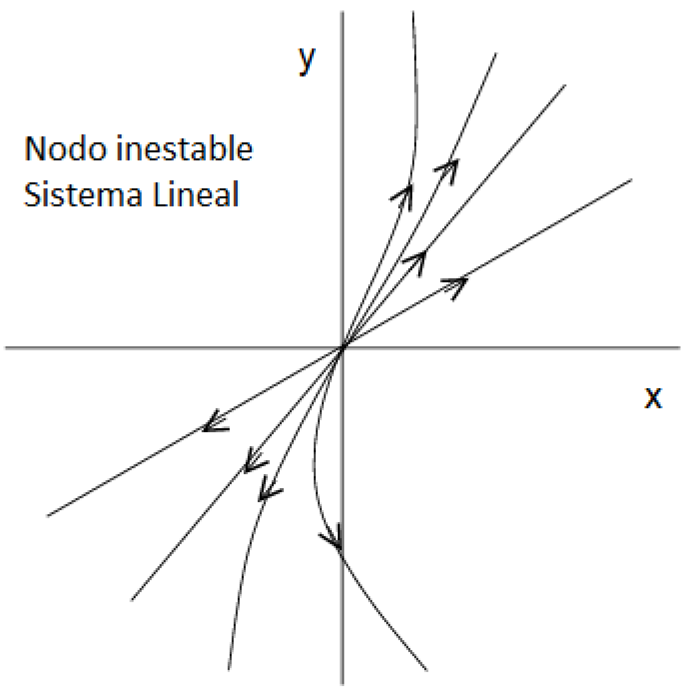


Raíces del nodo estable

En cambio, un nodo inestable tendrá las raíces del punto crítico ubicadas en el semiplano derecho y en el PDF las trayectorias serán curvas emergentes del punto crítico.

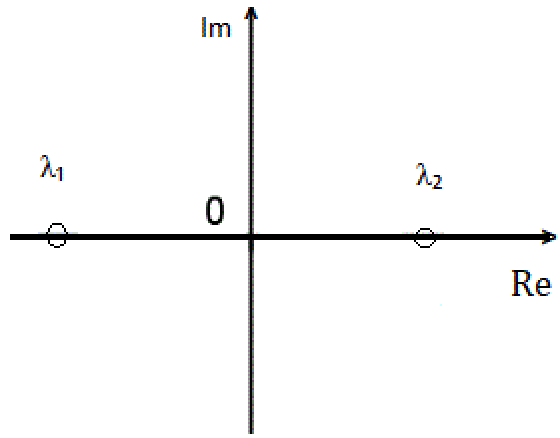


En la representación del retrato fásico se muestra el punto crítico para un sistema lineal, dado que su ubicación sigue estando en el origen de coordenadas.

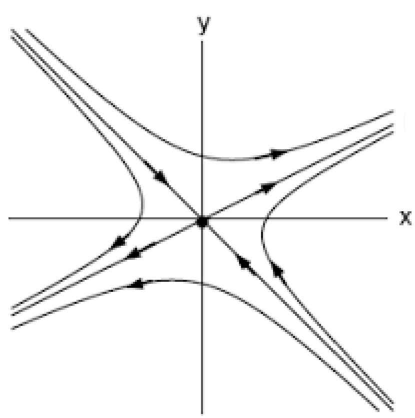


2) SILLA DE MONTAR

Este punto crítico se produce cuando las raíces de la EC son reales de distinto signo. Por esta razón siempre será un punto inestable, dado que siempre una de las raíces tendrá parte real positiva y se ubicará en el semiplano derecho.



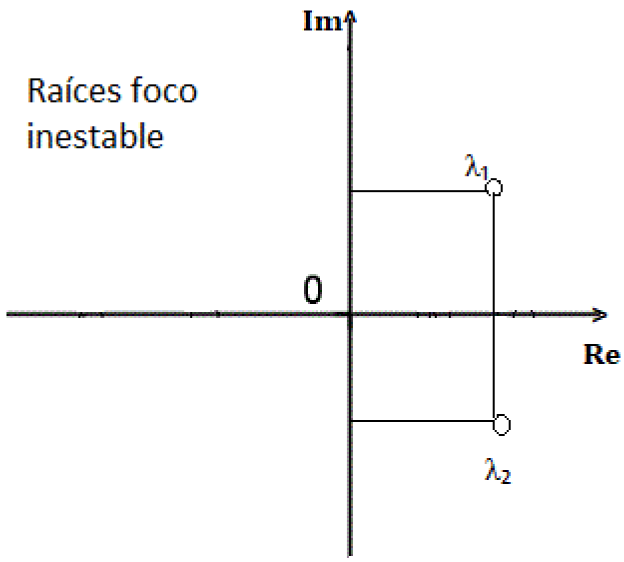
Las trayectorias en el PDF serán familias de hipérbolas, asintóticas a dos pares de semirrectas, uno de ellos convergente y el restante divergente del punto. Este doble par de semirrectas determina el sentido de crecimiento del tiempo [t] a lo largo de las ramas de curvas que delimitan.



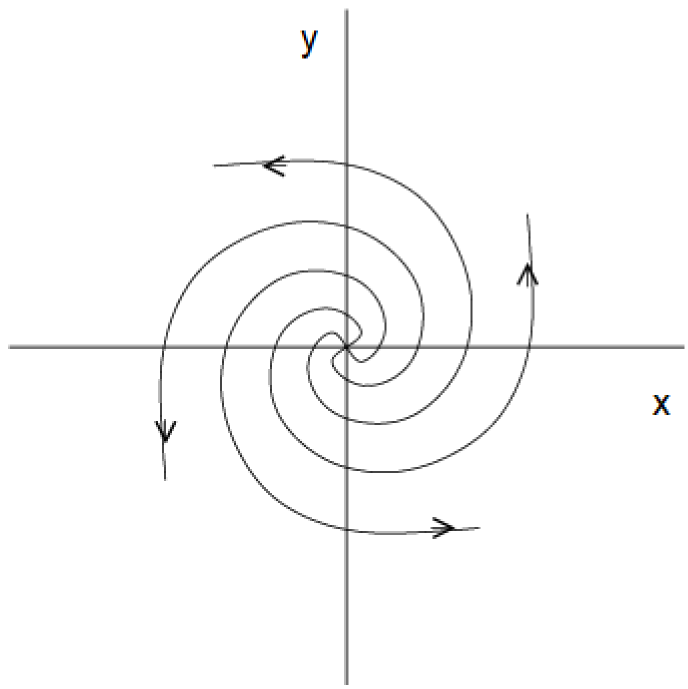
En el gráfico presentado se han dibujado sólo una rama en cada cuadrante de los que dividen las asíntotas, pero debe tenerse en cuenta que se trata de una familia de varias curvas. Situarse en una u otra curva depende de las constantes del sistema, asociadas a los coeficientes de las ED's.

3) FOCO:

En este punto crítico las raíces de la EC son complejas conjugadas, las cuales, si tienen parte real positiva el punto crítico será inestable y si es negativa se tratará de un punto crítico estable. Las trayectorias de fase son familias de curvas en forma de espiral, que concurren al punto si éste es estable y que divergen del punto cuando el punto crítico es inestable.

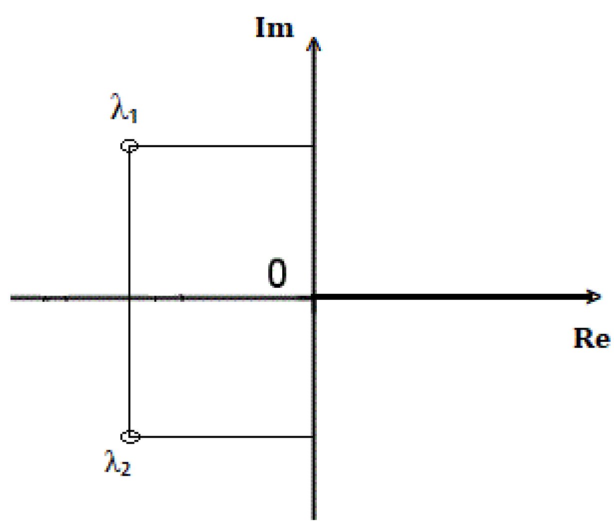


También se denomina a este punto crítico como Espiral y es característico de sistemas oscilatorios amortiguados cuando es estable y sistemas oscilatorios exponencialmente crecientes, típicos de realimentaciones positivas, cuando es inestable.



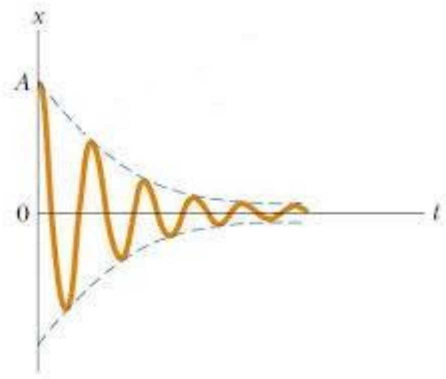
Como ya se ha expresado, este diagrama de fase corresponde a un sistema lineal porque el punto crítico está ubicado en el origen.

En el caso de un foco estable, las raíces se ubican en el semiplano izquierdo, por lo tanto, su parte real negativa es la que determina la estabilidad.

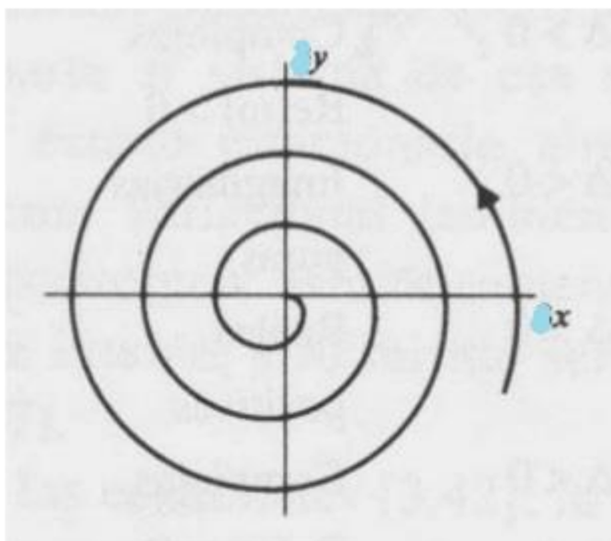


En el siguiente gráfico se ve que el comportamiento temporal que corresponde a un foco estable es el de un sistema oscilatorio amortiguado.

En el gráfico se observa que para t→∞; el sistema tiende al reposo, tanto en la curva de variación de x(t) como en el PDF.

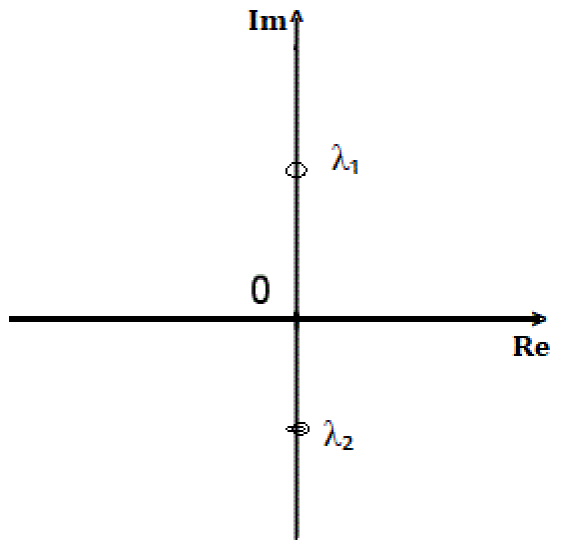


FOCO ESTABLE

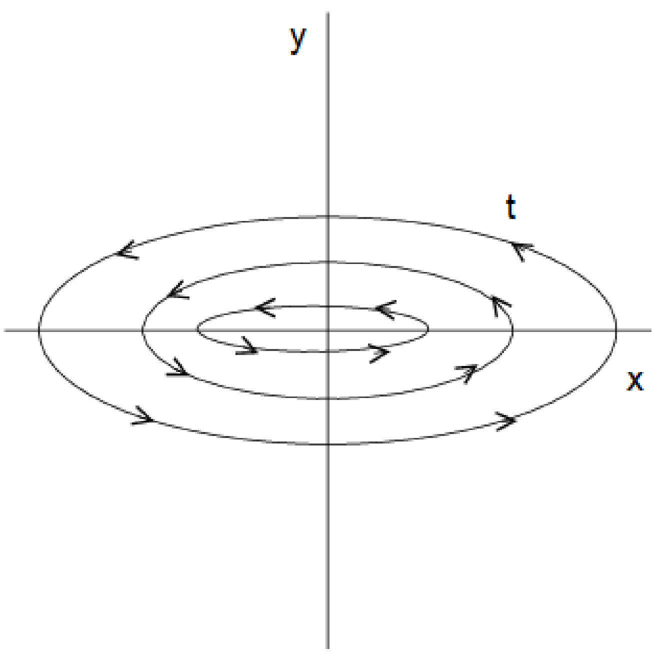


4) CENTRO

El punto crítico es un Centro cuando las raíces de la EC adoptan valores imaginarios conjugados. En ese caso no se puede hablar de estabilidad o inestabilidad porque la ubicación de las raíces sobre el eje imaginario está en el límite de la estabilidad.

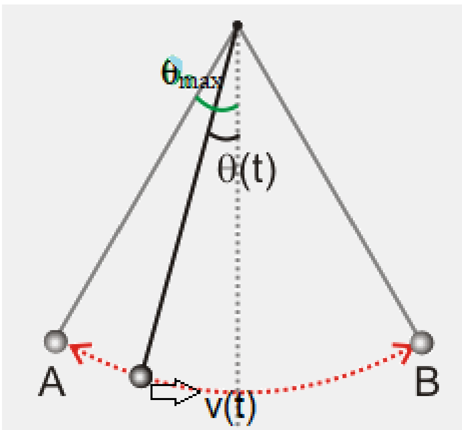


Las trayectorias fásicas en el diagrama son elipses concéntricas, el punto crítico es el origen de coordenadas que se comporta como un atractor, equidistante de las trayectorias. El comportamiento temporal que corresponde a un centro en el PDF es el de un sistema oscilatorio armónico, por ejemplo: el péndulo ideal.



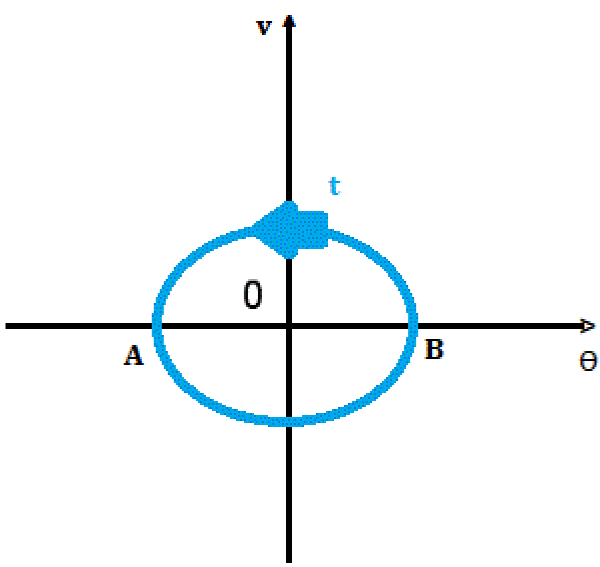
Péndulo ideal:

Si se representan las variables como y=v(t); x=θ(t); o a la inversa, es indistinto, porque lo importante es considerar la variación en el tiempo del ángulo respecto de la normal [θ] y la velocidad tangencial del peso [v], respecto del tiempo.



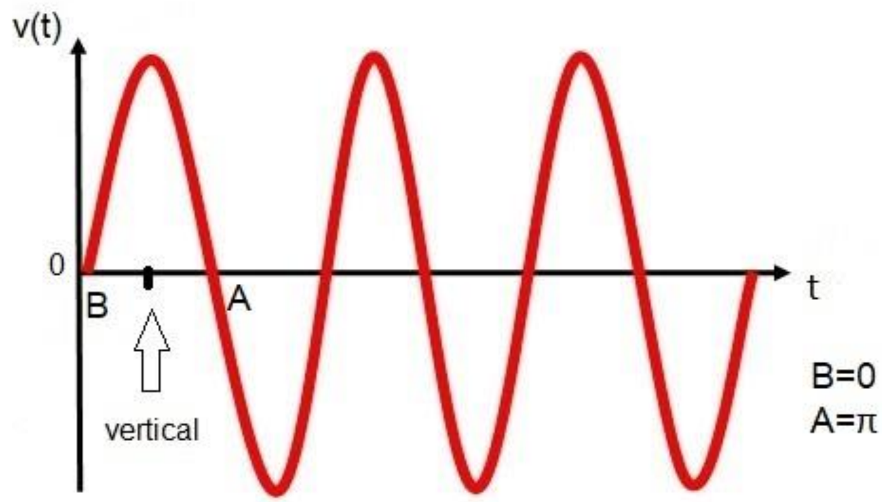
Cuando la pesa llega a los extremos, A ó B, el ángulo es máximo [$\theta=\theta_{max}$] y la velocidad es nula [v=0], porque está a punto de invertirse el sentido de la oscilación.

Contrariamente, cuando la pesa pasa por el punto medio, el ángulo es nulo [θ=0] y la velocidad es máxima [$v=v_{max}$]; si esto se representa en el PDF se obtiene una trayectoria cerrada elíptica, vale decir un Centro.



Con cada oscilación del péndulo el ciclo se repite indefinidamente, no olvidar que es el péndulo ideal que no tiene rozamiento con el aire ni pérdida de energía por ningún motivo, luego el comportamiento es oscilatorio armónico.

Si se representara la velocidad en función del tiempo o el ángulo en función del tiempo, se obtiene una onda senoidal pura que representa su variación desde un valor nulo a un máximo, pera volver a cero y luego invertir el sentido y repetir el ciclo.



En el punto [B] la velocidad vale cero y comienza a aumentar, es máxima cuando pasa por la vertical, desde donde comienza a disminuir hasta anularse. Esto ocurre cuando alcanza el punto [A], como se ve en el PDF también. A partir de [A] vuelve a aumentar, pero en sentido contrario, por eso cambia el signo. El ciclo se repetirá indefinidamente en el péndulo ideal.

Que se haya comenzado a analizar el comportamiento desde el punto [B] es totalmente arbitrario, sólo se ha hecho por comodidad, pero se podría haber comenzado en cualquier punto.

Igualmente, el sentido de desplazamiento de la variable tiempo se ha considerado horario, pero podría tomarse el antihorario como positivo. Esto es convencional y depende de la convención que se elija y se comunique.

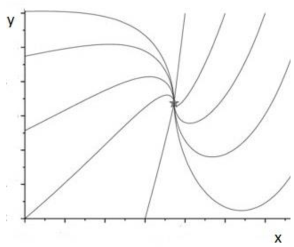
Nota: En el caso del péndulo real, que se representó unos renglones más arriba, al haber rozamiento hay fricción que va disipando la energía motriz del péndulo, por eso la trayectoria en el PDF es un foco estable, porque las oscilaciones se van acortando cada vez más, al consumirse la energía motriz. En cada nuevo ciclo, la velocidad es menor y el ángulo alcanzado también será menor y se va conformando la trayectoria en espiral.

El comportamiento temporal del péndulo real es oscilatorio amortiguado por esta misma causa y hay una tendencia final hacia el reposo.

SISTEMAS NO LINEALES

En los sistemas no lineales (SNL) es común que exista más de un punto crítico. Cuando existe uno solo, está ubicado en algún lugar del plano, distinto del origen. Cuando existen varios puntos críticos, uno de ellos puede ser el origen, en correspondencia con la parte del sistema que tenga un comportamiento lineal para determinado régimen de operación. El resto estarán en diferentes lugares del plano.

En un ejemplo cualquiera, se puede ver la ubicación que le corresponde a un SNL cuyo punto crítico es un Nodo:



En este caso, parecería ser el punto crítico de algún SNL correspondiente a un modelo poblacional, ya que éstos siempre se encuentran en el primer cuadrante porque las poblaciones no pueden ser negativas.

Otro ejemplo arbitrario de retrato fásico de un SNL podría estar constituido por las trayectorias de diversos puntos críticos ubicados en distintos lugares del PDF: