Universidad de Mendoza
Facultad de Ingeniería

Algebra Lineal

TRABAJO PRACTICO

ESPACIOS VECTORIALES REALES Y COMPLEJOS

OBJETIVOS:

- *Ampliar el estudio de los espacios vectoriales.*
- *Reconocer a las funciones y a las matrices en el contexto de espacio vectorial.*
- *Aplicar las nociones de subespacio, base y dimensión.*
- *Resolver ejercicios que requieran cambios de base.*

PARTE A: PARA TRABAJAR EN CLASE

1. Pruebe que el conjunto de los Polinomios de grado menor o igual a dos, es un espacio vectorial real con las operaciones usuales entre funciones y entre escalar y función.

---

2. Pruebe que el conjunto de pares ordenados de números complejos es un espacio vectorial complejo con las operaciones usuales suma de complejos y producto de un complejo por un par ordenado de complejos.

---

3. Considere el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a tres $\boldsymbol{P_3}$(IR). Analice si el siguiente conjunto es subespacio del mismo. Justifique su respuesta.

$S = \{ p \,/\, p \in \boldsymbol{P_3}(\mathrm{IR}) \wedge p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ , con } a - b = 0 \}$

---

4. Considere el espacio vectorial de las matrices 2x2 con elementos complejos e investigue si el siguiente conjunto es un subespacio de él. Justifique su respuesta.

$S = \{ A \,/\, A \in M_{2x2} \wedge A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \text{siendo } z_1 \text{ y } z_2 \text{ de } \mathbb{C} \}$

---

5. Muestre que el conjunto H de los vectores en IR^2 (IR) de la forma (3s, 2 + 5s) con s de IR, no es un subespacio vectorial, Justifique su respuesta encontrando un vector específico u en H, y un escalar c tal que cu no esté en H.

---

6. Investigue si el vector A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ del espacio vectorial M_{2x2} (IR) es combinación lineal de los vectores dados en los siguientes casos, justifique sus respuestas:

a) $A1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

---

7. Considere el espacio vectorial de los Polinomios de grado menor o igual a tres sobre lo reales, y sea p (x) = a x^3 + b x^2 + c x + d, con a $\neq$ 0, demuestre que los vectores p (x), p'(x), p''(x), p'''(x) de las derivadas sucesivas, conforman una base de P_3 (IR).

---

8. Determine una base y la dimensión del espacio vectorial complejo: $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}$) de pares ordenados de números complejos.

---

9. Determine una base y la dimensión del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres sobre los reales.

---

10. Halle una base y la dimensión de los subespacios dados:

a) S = { A / A $\in M_{2x2} \wedge$ A = $\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ siendo z_1 y z_2 de $\mathbb{C}$} Subespacio de las matrices 2x2 con elementos complejos.

b) Subespacio vectorial de IR^4(IR) que contiene a los vectores u para los cuales se verifica que: $x + y = 0 \wedge z - t = 0$

---

11. En el espacio vectorial $\boldsymbol{P}_3$ (IR) de los polinomios de grado menor o igual a tres, se tiene una base B = {p_1, p_2, p_3, p_4} tal que $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 2x$, $p_3(x) = -2 + 4x^2$, $p_4(x) = -12x + 8x^3$. Halle las componentes de p en la base B si se conoce que $p(x) = 7 - 12x - 8x^2 + 12x^3$ en la base canónica de $\boldsymbol{P}_3$

---

12. Halle las componentes de la matriz A en la base B si se sabe que en la base canónica de M_{2x2}(R) se expresa: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

---

13. En el espacio vectorial IR^3 (IR) se tiene el vector v = (6, 5, 7) respecto de la base canónica, y se sabe que sus componentes en la base B = {v_1, v_2, v_3} son v = (2, 3,4).
Si v_1 = (1, 1, 0) y v_2 = (0,1 ,1), determine las componentes del vector v_3

PARTE B: PARA TRABAJAR SOLOS Y DISCUTIR EN CONSULTA

1. Sea H el conjunto de todos los vectores de IR ^{4} (IR) de la forma $(a - 3b,\ b - a,\ a,b)$, donde a y b son escalares arbitrarios.

Esto es, sea $H = \{(a - 3b, b - a, a, b)$: a y b en R$\}$. Demuestre que H es un subespacio de R^4 (IR).

2. Considere el semiplano dado en IR^2IR): $S = \{(x, y) / (x, y) \in IR^2 \wedge \quad x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$

a) U está en S y v está en S. ¿u + v está en S? Justifique su respuesta.
b) Encuentre un vector específico u en S, y un escalar t tal que t.u no esté en S.

c) ¿Es S un subespacio vectorial de IR^2? ¿Por qué?

---

3. Investigue si los siguientes conjuntos son subespacios de los respectivos espacios vectoriales, justifique sus respuestas.

a) En IR^3 (IR)
$U = \{u/u = (x, y,z) \in IR^3 \wedge x + y + z = 1\}$

b) En $\boldsymbol{C}_{[a,\, b]}$ (IR) el espacio de las funciones continuas en el intervalo real [a, b]
$A = \{f \in \boldsymbol{C}_{[-1,\,1]} \wedge \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$

c) En M_{2x2} (IR)
$U = \{A / A \in M_{2x2} \wedge A^T = -A\}$

d) En M_{2x2} (IR) se tiene una matriz F fija tal que: $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
$U = \{A / A \in M_{2x2} \wedge F.A = 0$, con F dada y fija$\}$

---

4. Si una masa m se coloca en el extremo de un resorte y se jala de ella hacia abajo y luego se le suelta, el sistema de masa-resorte comenzará a oscilar. El desplazamiento y de la masa desde su posición de reposo está dado por una función de la forma:

$y(t) = c1 \cos \omega t + c2 \operatorname{sen} \omega t$ (*) donde ω es una constante que depende del resorte y de la masa.

Demuestre que el conjunto de todas las funciones descritas en (*) (con ω fija y $c1$ y $c2$ arbitrarias y reales) es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones continuas.

---

5. Se llama SUBESPACIO NULO a aquel conjunto que es solución del sistema de ecuaciones lineales homógeneo A.X = 0. Pruebe en el siguiente ejemplo que en efecto se trata de un subespacio, resolviendo el sistema homogéneo cuya matriz asociada es la dada. Justifique sus respuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

---

6. Muestre que en una matriz real A de orden 3 (M_{3x3} (IR)) que posee determinante nulo (det(A)=0), sus columnas son vectores linealmente dependientes.

---

7. Encuentre el o los valores de *h* para los cuales **u** está en el subespacio de R^3 (IR) generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, si se sabe que:

$$v1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \quad v3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{siendo } u = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$$

---

8. Se tiene una matriz A triangular del espacio vectorial real M_{3x3}(IR), demuestre que los vectores columna son linealmente independientes.

---

9. Analice la dependencia o independencia lineal de los vectores del espacio complejo de los números complejos: $\mathbb{C}^3$ *($\mathbb{C}$)* u = (2-i, i, 1+i) , v = (2, 2, i)

---

10. Investigue si el conjunto {f1, f2, f3} tal que f1(x) x-1, f2(x) = x+1, f3(x) = x^2 es un conjunto generador del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos. Justifique su respuesta.

11- En el espacio M_{2x2} ($\mathbb{C}$) de matrices cuadradas complejas, se tienen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} (3,1) & (2,0) \\ (-1,0) & (3,-1) \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} (2,1) & (1,3) \\ (0,2) & (-1,-1) \end{pmatrix}$$

Investigue si son linealmente independientes.

¿Podrían estas dos matrices ser generadoras del espacio vectorial M2x2 ($\mathbb{C}$)? Justifique su respuesta.

---

12. Analice las siguientes cuestiones y responda justificando sus respuestas:

a) Una matriz real no cuadrada puede contener en todas las filas y/o sus columnas vectores linealmente independientes?
b) y si fuera una matriz real cuadrada escalonada y reducida a triangular?

13. Halle una base y la dimensión de los siguientes espacios o subespacios vectoriales reales:

a) El subespacio de M_{2x2} (IR) de las matrices simétricas con elementos reales.

b) El subespacio de $\boldsymbol{P_3}$ (IR) $S = \{ p \,/\, p \in \boldsymbol{P_3}(IR) \wedge p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, con $a + b = 0 \}$

---

14. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos $\boldsymbol{P}_2$ (IR) se tiene el vector: $p(x) = -2 + x + 2x^2$, expresado así en la base canónica. Determine las componentes del mismo en la base $B = \{f, f', f''\}$ si usted sabe que $f(x) = 1- 2x + 3x^2$ y f' y f'' las derivadas primera y segunda de f.

---

15. En el espacio vectorial de las matrices reales M_{2x2} (IR) se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ está expresada en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, determine las componentes de A en la base canónica de M_{2x2}.
