29/08/2017

Submatriz:

Se entiende por submatriz de orden pxp aquella que se obtiene de una matriz mayor de orden nxn eliminando filas y/o renglones. Por ejemplo, dada la matriz M:

M = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ tenemos algunas submatrices como: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; $[9]$

- Submatriz Principal: Es aquella matriz que se obtiene de otra eliminando la mismas filas y las mismas columnas. En el ejemplo: $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
- Submatriz Principal Primera: Es cuando se elimina de una matriz las (n-r) filas últimas y columnas últimas. En el ejemplo: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $[2]$

En general una submatriz M se indica como: $M^{\frac{j_1 j_2 \cdots j_p}{i_1 i_2 \cdots i_p}}$ Por ejemplo:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{51} & \dots & \dots & \dots & a_{55} \end{bmatrix} => M^{\frac{2,3,5}{1,2,4}} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{bmatrix}$$

- Menor: Es el determinante de la submatriz: $\left|M^{\frac{2,3,5}{1,2,4}}\right|$
- Menor Complementario: Es el determinante de la matriz formada por las filas y columnas que no están en la matriz del menor. En el ejemplo: $\left|M^{\frac{1,4}{3,5}}\right|$
- Menores Principales: Es el determinante de submatrices formadas por las mismas filas y columnas. Por ejemplo: $\left|M^{\frac{1,3,5}{1,3,5}}\right|$

Resulta útil pensar en una matriz ya sea considerando sus vectores columnas o sus vectores filas como submatrices. Por ejemplo:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, donde si sus vectores columna (submatrices) son: $C_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, la matriz A nos queda expresada como $A = [C_1 \quad C_2 \quad C_3]$. Y si sus vectores fila (submatrices) son: $F_1 = [2 \quad 1 \quad 3]\ y\ F_2 = [1 \quad 0 \quad 4]$, la matriz A nos queda expresada como $A = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$.

O bien la podemos expresar a través de las submatrices $A_{11} = [2 \quad 1]$; $A_{21} = [1 \quad 0]$; $A_{12} = [3]\ y\ A_{22} = [4]$. Donde la matriz A nos queda expresada como $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$.

Se entiende por matriz particionada o matriz por bloques o matriz separada aquella matriz que se obtiene de atravesar con líneas punteadas la matriz principal ya sea vertical y/u horizontalmente, podemos considerar entonces:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & A_{2c} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & \cdots & A_{rc} \end{bmatrix}$$

Donde $A_{1j}, A_{2j,} \dots, A_{rj}$ tienen el mismo número de columna y $A_{i1},\ A_{i2}, \dots, A_{ic}$ tiene el mismo número de fila.

La aplicación fundamental de considerar este tipo de partición es que permite ver el sistema en forma más compacta, da la posibilidad de que un gran sistema se pueda incorporar a un ordenador, veremos además que facilita ciertas operaciones que se pueden hacer con matrices como también facilita el cálculo de sus determinantes.

Por ejemplo: $A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$ son matrices que las particionamos a A como $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}\ y\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ y particionamos a B como $R = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\ y\ S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, nos quedan las matrices $A = \begin{bmatrix} I_2 & P_{2x3} \\ O_{2x2} & Q_{2x3} \end{bmatrix}\ y\ B = \begin{bmatrix} R_{2x2} \\ S_{3x2} \end{bmatrix}$ de tal forma que podemos realizar el producto entre las matices de forma más sencilla como :

$$A.B = \begin{bmatrix} I.R + P.S \\ Q.S \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 5 & 9 \\ 11 & 9 \\ \hline 4 & -2 \\ 13 & 14 \end{array}\right]$$

Se pueden operar matrices por bloques con diferentes condiciones como por ejemplo el sumar matrices por bloques se puede cuando estas matrices por bloque son del mismo orden y cuando además las submatrices son del mismo orden. Por ejemplo:

$$Si\ B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rc} \end{bmatrix} => \ A + B = C\ considerando\ a\ la\ matriz\ A\ antes\ declarada$$

Se puede afectar una matriz bloque por un escalar k.

$$Entonces, kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & \cdots & kA_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{r1} & \cdots & kA_{rc} \end{bmatrix}$$

Finalmente el producto de matrices por bloques se puede realizar cuando las matrices sean compatibles (EL número de filas de la primera matriz debe ser igual al número de columnas de la segunda matriz).

<u>Matriz por Bloques Cuadrada:</u>

Se llama así a aquella matriz cuadrada que además en su partición por bloques tiene como submatrices de la diagonal principal matrices cuadradas. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Donde ● Es una matriz cuadrada por bloques y ● No es una matriz cuadrada por bloques.

<u>Matriz Cuadrada por Bloques Triangular:</u> Es una matriz cuadrada con los elementos debajo de la diagonal principal nulas. Planteamos A como una matriz de orden *n* cuadrada por bloques triangular superior y a B como una matriz de orden *n* cuadrada por bloques triangular inferior.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \ddots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Matriz Cuadrada diagonal por Bloques:</u> Es una matriz cuadrada que con todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal nulos.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Por otro lado una matriz cuadrada triangular por bloques permite facilitar el cálculo del determinante como lo veremos en el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces el det(A) = det (A_{11}) . det(A_{22}) y de forma genérica para este tipo de matrices cuadrada triangular por bloques el det(A) = det (A_{11}) . det(A_{22})….. det(A_{nn}).

Para el ejemplo: $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 13\,.\,29 = 377$

<u>**Matrices Complejas:**</u>

Una matriz es compleja cuando alguna de sus entradas es un número complejo.

$$A_{mxn} = a_{ij}\ es\ compleja \Leftrightarrow \exists\, a_{ij} \in \text{₵}$$

En el comjunto de números complejos cada elemento Z=a+bi tiene su conjugado $\overline{Z}$ = a-bi, su opuesto –Z = Z^{-1} = -a-bi y su simétrico Z^{s} = -a+bi.

La primera operación que las diferencia a estas matrices es la conjugación: Para calcular el conjugado de una matriz se calculan los conjugados de sus elementos. $\overline{A}_{mxn} = (\overline{a}_{ij})$. Por ej.:

29/08/2017

$$A = \begin{bmatrix} 2-3i & 2 \\ 4+i & -i \end{bmatrix} donde\ su\ conjugada\ \overline{A} = \begin{bmatrix} 2+3i & 2 \\ 4-i & i \end{bmatrix}$$

Una particularidad de las matrices complejas es que la conjugación y traspocición (cambio de filas por columnas) se conmutan. $\overline{(A^T)}$ = ($\overline{A}$)^T = A^H (Hemitica de una matriz). Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2+8i & 3+5i & 4 \\ 6i & -i & 8+i \end{bmatrix};\ A^T = \begin{bmatrix} 2+8i & 6i \\ 3+5i & -i \\ 4 & 8+i \end{bmatrix}; \overline{A} = \begin{bmatrix} 2-8i & 3-5i & 4 \\ -6i & i & 8-i \end{bmatrix};$$

$$\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 2-8i & -6i \\ 3-5i & i \\ 4 & 8-i \end{bmatrix}$$

<u>Popiedades:</u>

1. $(A^H)^H = A$
   $A = a_{ij} \Rightarrow A^T = a_{ji} \Rightarrow A^H = (\overline{a}_{ji}) \Rightarrow (A^H)^T = (\overline{a}_{ij}) \Rightarrow (A^H)^H = a_{ij} = A$.
2. $(Z . A)^H = \overline{Z} . A^H$ $\quad Z \in ₵$
3. $(A + B)^H = A^H + B^H$
4. $(A . B)^H = B^H . A^H$
5. $(\overline{\overline{A}}) = A$
6. $(\overline{Z . A}) = \overline{Z} . \overline{A}$ $\quad Z \in ₵$
7. $(\overline{A + B}) = \overline{A} + \overline{B}$
8. $(\overline{A . B}) = \overline{A} . \overline{B}$
9. $A^T + B^T = (A + B)^T$
10. $(Z . A)^T = Z . A^T$ $\quad Z \in ₵$
11. $(A . B)^T = B^T . A^T$
12. $(A^T)^T = A$

<u>Matrices Hermíticas, Antihermíticas, Unitarias y Normales</u>

Se dice que una atriz A es hermítica si se verifica que $A^H = A$ y es antihermítica si se verifica que $A^H = - A$. (Simil matrices simétricas en números IR)

Para que una mariz sea hermítica se debe cumplir que todos los elementos de la diagonal principal sean reales puros y ademas se debe verificar que $a_{ij} = \overline{a}_{jI}$. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & -i \\ 2-i & 0 & 3+i \\ i & 3-i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & i \\ 2+i & 0 & 3-i \\ -i & 3+i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{(A^T)} = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & -i \\ 2-i & 0 & 3+i \\ i & 3-i & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{(A^T)} = A \Rightarrow A\ es\ hermítica.$$

Para que una matriz sea antihermítica se debe cumplir que los elementos de la diagonal principal sean imaginarios puros y que los que ocupan posiciones homologas de la diagonal principal sean complejos simétricos $a_{ij} = (a_{ij})^S$.

Una matiz compleja cuadrada es unitaria si $A^H = A^{-1}$ (A^H sea a inversa de la matriz), entonces, $A.A^H = A^H.A = I$ (Simil a matrices ortogonales en números IR) .Por ejemplo:

$$A = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^H = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A.A^H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}.\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A.A^H = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Una matriz cuadrada compleja es normal cuando se verifica que $A.A^H = A^H.A$ (La matriz unitaria es un caso especial de la normal). Por ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} \rightarrow C.C^H = C^H.C = \begin{bmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{bmatrix}$$

<u>Factorización de matrices:</u>

<u>Método de Crout/Doolittle:</u>

Este método permite la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando la factorización de matrices. Lo que hace este método es descomponer la matriz A en dos matrices L (Lower) y U (Upper), donde L es una matriztriangular inferior donde los elementos de la diagonal principal son unitarios y U es una matriz triangular superior. Por ende, el método consiste en encontrar L y U a partir de la matriz A.

$$\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U} \text{ donde } \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Una vez encontradas las matrices que componen a A. El sistema de ecuaciones A . X = B se resuelve como L . U . X = B, donde si agrupamos L . (U . X) = B y defnimos U . X = Z podemos resolver primero L . Z = B para obtener Z y luego U . X = Z para obtener X. Por ejemplo:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 4X_3 + X_4 = 21 \\ 2X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 4X_4 = 52 \\ 3X_1 + 10X_2 + 8X_3 + 8X_4 = 79 \\ 4X_1 + 12X_2 + 10X_3 + 6X_4 = 82 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 & 8 \\ 4 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix} = L.U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Para L . Z = B

$$\begin{cases} X_1 = 21 \\ 2X_1 + X_2 = 52 \\ 3X_1 + X_2 + X_3 = 79 \\ 4X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 82 \end{cases}$$

$$L.Z = B \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 6 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Luego hacemos U . X = Z

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 4X_3 + X_4 = 21 \\ 4X_2 - 2X_3 + 2X_4 = 10 \\ -2X_3 + 3X_4 = 6 \\ -6X_4 = -24 \end{cases}$$

$$U.X = Z \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

<u>Cómo facorizar una matriz:</u>

Para el caso de conocer los elementos de una matriz A orden 3x3:

$$A = L.U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Vamos haciendo la multiplicación de las matrices L y U, luego despejamos y obtenemos los nueve valores correspondientes:

1°Fila x 1° Columna = $u_{11} = a_{11}$
1°Fila x 2° Columna = $u_{12} = a_{12}$
1°Fila x 3° Columna = $u_{13} = a_{13}$
2°Fila x 1° Columna = $l_{21}u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = {}^{a_{21}}/_{u_{11}} \Rightarrow l_{21} = {}^{a_{21}}/_{a_{11}}$

2°Fila x 2° Columna = $l_{21}\, u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12}$

2°Fila x 3° Columna = $l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$

3°Fila x 1° Columna = $l_{31}u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = {}^{a_{31}}/_{u_{11}} \Rightarrow l_{31} = {}^{a_{31}}/_{a_{11}}$

3°Fila x 2° Columna = $l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = {}^{(a_{32} - l_{31}u_{12})}/_{u_{22}}$

3°Fila x 3° Columna = $l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$

Una forma práctica de obtener las matrices L y U la veremos a continuación. Supongamos que queremos factorizar la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{bmatrix}$$

Para buscar U primero eliminamos los elementos por debajo de a_{11}:

$-2F_1 + F_2 = F'_2$
$F_1 + F_3 = F'_3$
$-4F_1 + F_4 = F'_4$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & * & 1 & 0 \\ 4 & * & * & 1 \end{bmatrix}$$

Mientras tanto para armar la matriz L colocamos los opuestos de los multiplicadores utilizados en las operaciones de fila en la posición correspondiente. Luego continuamos con los mismos pasos eliminando los elementos por debajo de a_{22} y a_{33} hasta obtener ambas matrices.

$-3F_2 + F_3 = F'_3$
$-F_3 + F_4 = F'_4$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & * & 1 \end{bmatrix}$$

$-F_3 + F_4 = F'_4$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$