Universidad de Mendoza
Facultad de Ingeniería

Algebra lineal

TRABAJO PRACTICO
MATRICES

Objetivos:

- Ampliar el estudio de las matrices y sus aplicaciones a los sistemas de ecuaciones lineales
- Factorizar matrices y aplicar la descomposición a la resolución de sistemas de ecuaciones.

PARTE A: PARA TRABAJAR EN CLASE

1) Demuestre que si A es ortogonal, entonces $|A| = \pm 1$

---

2) Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $det(Adj(A)) = (det(A))^{n-1}$.

---

3) Determine, mediante operaciones elementales, la inversa de una matriz triangular superior de orden 3. Muestre las condiciones para que la inversa exista.

---

4) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i^2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenga las siguientes matrices:

$a)\ A^t$

$b)\ F_{12}(-1) + F_{21}$

$c)\ -(1+i)A$

$d)\ [F_1(-3)]I^t$

---

5) Calcule la inversa de $B = A\,A^T$, usando el hecho que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, para $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

---

6) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Obtenga la descomposición $A = L\,L^T$ donde L es una matriz triangular inferior. Muestre condiciones sobre a, de modo que la descomposición exista.

Sea L una matriz triangular inferior con elementos unitarios en la diagonal principal y sea U una matriz triangular superior.

---

7) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ obtenga, si existe, la descomposición $A = L\,U$ y calcule $U\,x$, donde $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

---

8)

Factorizar las siguientes matrices utilizando el algoritmo de factorización LU.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *c)* $C = \begin{pmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{pmatrix}$

---

9) *Resolver los siguientes sistemas lineales utilizando factorización LU*

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 = 1.984 \\ -2.132x_1 + 4.096x_2 - 7.013x_3 = -5.049 \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 = -3.895 \end{cases}$

---

10) *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *Hallar las divisiones en bloques de A de tamaños (1+3) x (2+1+2) y (2+2) x (3+2)*
b) *Hallar las divisiones en bloques de B de tamaños(2+2+1) x (2+1) y (2+3) x (1+2)*
c) *Encontrar las divisiones compatibles de A con la división en bloques de B de tamaño de modo que puedan multiplicarse.*

---

11) *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *Calcular AB utilizando división en bloques*
b) *Construir otra división en bloques y realizar el producto*

---

12) *Sea A una matriz compleja de tamaño m x n. Probar que* $(A^T) = (A)^T$

---

13) *Sea A una matriz compleja cuadrad. Se pide:*
a) *Probar que la matriz* $A + A^H$ *es hermítica.*
b) *Probar que la matriz* $A - A^H$ *es antihermética*

---

14) *El concepto de matriz traspuesta y matriz simétrica sigue siendo válido para matrices complejas. Obtener las matrices traspuestas y las traspuestas conjugadas de las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 1+i \\ 2i & 0 & 3-2i \\ 1+i & 3-2i & i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1+2i \\ 1-i & 2+3i & 0 \end{pmatrix}$$

PARTE B: PARA TRABAJAR SOLOS Y DISCUTIR EN CONSULTA

---

1) La inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es la misma matriz.

---

2) Para $A = \begin{pmatrix} cos\alpha & 1 \\ 1 & cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, calcule:

$a)$ A^{-1} usando la adjunta

$b)$ $|A^2|$

$c)$ $|(A^t)^{-1}\, A^2|$

$d)$ $5\,A - 3\,(A^{-1})^T$.

---

3) Si $A^2 = A$, entonces $|A| = 1$ ó $|A| = 0$

Determine A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

4) *Resolver, previa descomposición LU, el sistema A x = b. Calcular el determinante de A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

---

5) *Obtener la factorización de Doolittle de la siguiente matriz y resolver el sistema:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -0 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -30 \\ -51 \\ 37 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 9 & 0 \\ -4 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{b} = \begin{pmatrix} -38 \\ 20 \\ -11 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -7 & -2 \\ -4 & -6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 6 & 5 \\ -4 & 8 & -1 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{b} = \begin{pmatrix} 56 \\ 0 \\ 0 \\ 84 \end{pmatrix}$$

---

6) *Descomponiendo en bloques adecuadamente las matrices A y B, efectuar el producto AB, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

7) *Sean A y B matrices hermíticas:*

a) Demostrar dando un ejemplo, que AB no siempre es hermítica.

b) Demostrar que AB es hermítica si y solo si, A y B conmutan