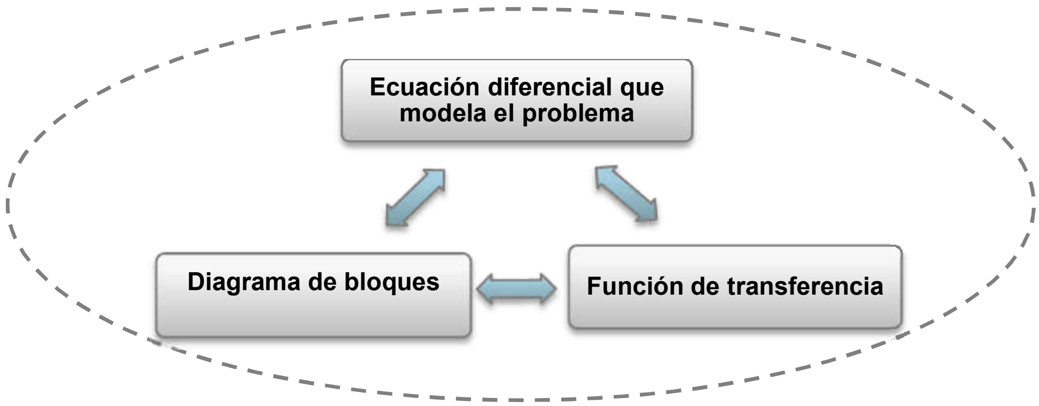
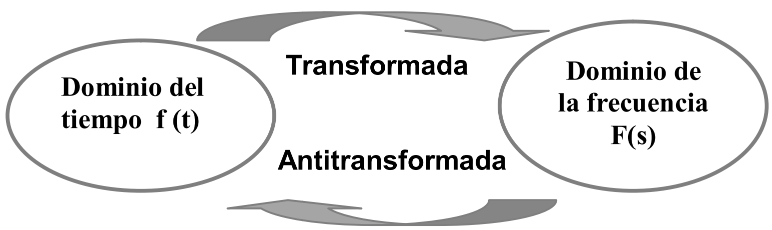
CLASE 2

EL modelo en el espacio de estado se puede obtener a partir de:



FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Se define como la relación de la trasformada de Laplace de la salida (función respuesta), a la transformada de Laplace de la entrada (función excitadora), bajo la suposición de condiciones iniciales cero. Es una expresión que relaciona la salida y la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo, en términos de los parámetros del sistema y constituye una propiedad del mismo, independiente de la función excitadora.



$y(t) = C\,u(t)$ $\qquad$ $Y(s) = G(s)\,U(s)$

- La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, sin embargo no brinda ninguna información respecto a la estructura física del sistema.
- Sistemas físicamente distintos pueden tener la misma función de transferencia. Los sistemas equivalentes, siempre tienen la misma función de transferencia
- El conocimiento de la función de transferencia permite el estudio de la respuesta del sistema a diversas formas de entrada, con lo cual se puede lograr una mejor comprensión de la naturaleza del sistema.
- La función de transferencia se puede obtener experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la respuesta del sistema. Esto se conoce como identificación de sistemas, para lo cual existen una multitud de métodos.

REPASO DE TRANSFORMADA DE LAPLACE:

- **Transformada de la derivada enésima**

$$\mathcal{L}[f^{n}(t)] = s^{n} F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

- **Transformada de la derivada segunda**

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^{2} F(s) - s f(0) - f'(0)$$

Bajo condiciones iniciales nulas $\Rightarrow$ $\mathcal{L}[f^{n}(t)] = s^{n} F(s)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}[f''(t)] = s^{2} F(s)$

- **Transformada de una integral**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Integrar en el dominio S, equivale a dividir la función f (t) transformada por la variable s.

EJEMPLO 1:

Hallar la función de transferencia

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = u(t)$$

Transformamos miembro a miembro:

a) Si queremos resolver una ecuación diferencial $\rightarrow \mathcal{L}[f''(t)] = s^{2} F(s) - s f(0) - f'(0)$

$$s^2 Y(s) - s\, y(0) - y'(0) - 4[s\, Y(s) - y(0)] - 5Y(s) = U(s)$$ **Necesitamos las condiciones de contorno y (0) e y' (0)**

b) Para encontrar la función de transferencia no tenemos en cuenta las condiciones iniciales

$$s^2 Y(s) - 4\, s\, Y(s) - 5Y(s) = U(s) \;\Rightarrow\; H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$Y(s)\left(s^2 - 4\, s - 5\right) = U(s) \;\; \text{despejo} \;\; \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{U(s)}{U(s)\left(s^2 - 4\, s - 5\right)} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 - 4\, s - 5}$$

EJEMPLO 2:

A partir de la función de transferencia, encontrar la ecuación diferencial que modela el problema

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} \quad \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 6}$$

Debemos hallar la ecuación diferencial:

$$s^2 Y(s) + 4s\ Y(s) + 6Y(s) = U(s)$$

Antitransformamos miembro a miembro:

$$y''(t) + 4y'(t) + 6y(t) = u(t)$$

Conocida la función de transferencia se puede encontrar la ecuación diferencial que modela un sistema y a partir de la ecuación diferencial, obtener las ecuaciones de estado.

La utilidad de la función de transferencia aplicada a modelos en el espacio de estado, es su utilización en sistemas donde la ecuación diferencial que lo modela no tiene solución analítica sencilla. También se utilizará en otros capítulos donde su cálculo tiene ventajas con respecto a la obtención de la ecuación diferencial.

Función de transferencia a partir del modelo en el espacio de estado:

Partimos de la forma matricial de la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = A\ x(t) + B\ u(t)$$
$$y(t) = C\ x(t)$$

Transformamos miembro a miembro

$s\ X(s) - x(0) \rightarrow$ **transformada de Laplace de la derivada primera, para función de transferencia** $x(0) = 0$

$$s\ X(s) = A\ X(s) + B\ U\ (s)$$
$$Y(s) = C\ X\ (s)$$

Debemos despejar X(s) para reemplazarla en la ecuación que nos da la salida, es importante tener en cuenta que se trata de matrices, por lo tanto tenemos que respetar su orden en el producto

$$sX(s) - A\ X(s) = B\ U(s)$$

Para sacar X(s) factor comun, mutiplicamos s por la matriz identidad para que sea de orden nx n

$$[sI - A\ ]\,\underbrace{[X(s)]} = B\,\underbrace{[U(s)]}$$

Matrices de orden nx1

Matriz de orden nxn

Para despejar en matrices debemos mutiplicar miembro a miembro por la inversa de $[sI - A]$

$$\underbrace{[sI - A]^{-1}\ [sI - A]}_{\text{Matriz unidad}}\ X(s) = [sI - A]^{-1} B\ U(s)$$

$X(s) = [sI - A]^{-1} B\ U(s)$ **Reemplazamos en Y(s)** $\Rightarrow Y(s) = \{[C]\ [SI] - [A])^{-1}\ [B] + D\}\ U(s)$

Para un sistema con una sola entrada y una sola salida, Y(s) y U(s) son magnitudes escalares, luego se podría dividir miembro a miembro por U(s) en la última expresión y se obtiene:

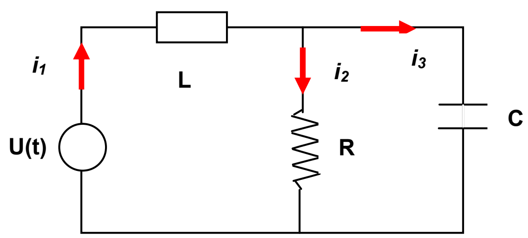
Y(s)/U(s) = H(s) siendo $H(s) = [C]\,[SI-A]^{-1}\,[B] + [D]$

Si se considera nula la Matriz de Proalimentación o alimentación directa

$$\boxed{H(s) = [C]\,[SI-A]^{-1}\,[B]}$$

EJEMPLO 3:

Hallar la función de transferencia del siguiente circuito eléctrico y la ecuación diferencial que lo modela.



Modelo en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t)$$

Matriz de salida:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 = V_c$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad \textbf{Debemos calcular} \quad \begin{bmatrix} s & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s+\frac{1}{RC} \end{bmatrix}^{-1} \qquad [sI-A]^{-1} = \frac{[\text{cofactores}]^T}{\det[sI-A]}$$

$$\begin{bmatrix} s & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s+\frac{1}{RC} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s+\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s \end{bmatrix}^T \frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)} = \begin{bmatrix} s+\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s \end{bmatrix} \frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s \end{bmatrix} \frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 LC + s\frac{L}{R} + 1}$$

$$Y(s)s^2LC + Y(s)s\frac{L}{R} + Y(s) = U(s)$$

Antitransformamos miembro a miembro:

$$y''(t)LC + y'(t)\frac{L}{R} + y(t) = u(t) \quad \textbf{si se normaliza} \quad y''(t) + y'(t)\frac{1}{CR} + y(t)\frac{1}{LC} = \frac{u(t)}{LC}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE CORRESPONDE AL CIRCUITO ELÉCTRICO