➢ ESPECIES EN COMPETENCIA

Es bastante frecuente en la naturaleza que la lucha por la existencia entre dos especies similares, que compiten por el mismo alimento y un mismo espacio vital, ambos limitados, termina casi siempre con la completa extinción de una de las especies. Este fenómeno fue descubierto por Darwin en 1859 y se conoce como principio de exclusión competitiva.

> ***Debido a que las especies de un mismo género presentan usualmente, aunque en forma invariante, mucha mayor similitud en hábitat, constitución y siempre en estructura, la lucha entre ellos será por lo general más intensa si llegan a competir entre sí que si lo hacen con especies de géneros distintos.***

La explicación biológica está basada en la idea de *nicho ecológico* que es el que indica la ubicación característica de una especie dada en la comunidad, cuáles son sus hábitos, alimentación y modo de vida con los cuales tiene ventaja sobre sus competidores Si dos especies tienden a ocupar el mismo nicho, la lucha por la supervivencia será muy intensa y el resultado puede ser la extinción de la especie más débil.

EJEMPLO1: Ecuación del modelo general de especies en competencia

El siguiente sistema analizar la estabilidad en sus puntos críticos

$$\begin{cases} x'(t) = 5x - x\,y \\ y'(t) = 5y - x\,y \end{cases}$$

Ambas especies disminuyen con la frecuencia de encuentros

PUNTOS CRÍTICOS:

$x(5 - y) = 0 \rightarrow x = 0$ e $y = 5$

$y(5 - x) = 0 \rightarrow y = 0$ y $x = 5$ **Los puntos críticos son: (0,0) y (5,5)**

- **Punto crítico (0,0):**

Como (0,0) es el punto crítico del sistema lineal, verificamos que las funciones:

$P(x,y) = -x.y$ y $Q(x,y) =- x\,y$ cumplan con las condiciones de Liapunov.

Sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x \\ y'(t) = 5y \end{cases}$$

Para el análisis de la estabilidad, tenemos en cuenta la matriz característica, y su determinante.

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \qquad \text{Det } [\lambda I - A] = \lambda^2 - 10\lambda + 25$$

Raíces coincidentes positivas, se trata de un nodo inestable

- **Punto crítico (5,5):**

Como no corresponde al punto crítico del sistema lineal, debemos buscar un sistema lineal equivalente cuyo punto crítico sea (0,0). Para ello hacemos una traslación de ejes al punto (5,5) de manera que resulta $u = x - 5$ y $v = y - 5$.

Reemplazamos en el sistema, siendo $x'(t) = u'(t)$ e $y'(t) = v'(t)$

$u'(t) = 5(u + 5) - (u+5)(v+5) = 5u + 25 - u\,v - 5v - 5u + 25$

$v'(t) = 5(v + 5) - (u+5)(v+5) = 5v + 25 - u\,v - 5v - 5u + 25$

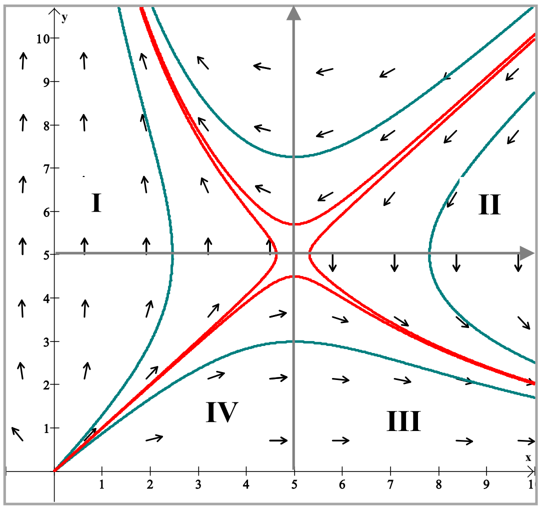
Donde P (u, v) = - u v y Q (u, v) = - u v , funciones cuyas derivadas primeras son continuas y satisfacen las condiciones de Liapunov.

El sistema linealizado es:

$$\begin{cases} u'(t) = -5\,v \\ v'(t) = -5\,u \end{cases}$$

$$[\lambda\, I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -5 \\ -5 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{Det } [\lambda\, I - A] = \lambda^2 - 25$$

Cuyas raíces son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -5$, reales de distinto signo, se trata de un punto silla inestable del sistema linealizado.



REGIÓN	x(t) ; y(t)	x'(t)	y'(t)
I	x< 5; y > 5	Negativo	Positivo
II	x > 5; y > 5	Negativo	Negativo
III	x< 5; y < 5	Positivo	Negativo
VI	x< 5; y < 5	Positivo	Positivo

Cuando la derivada de una función es positiva la función es creciente, y cuando es negativa la función decrece

La población inicial de cada una de las poblaciones, es la que determina cuál especie será dominante, suponiendo que todas sus características son similares, como tasa de reproducción, volumen de alimento consumido y velocidad de ingestión.

Análisis del comportamiento de las poblaciones

Considerando la trayectoria que se encuentra “arriba” del gráfico, ambas especies competidoras comienzan con una gran población, que va decreciendo en el tiempo, debido al alto número de individuos que deben compartir el mismo alimento limitado; en dicha región una de las especies será dominante.

En la región I, la especie “y” vuelve a crecer, mientras la “x” sigue decreciendo, y para un tiempo suficientemente grande podría tender a desaparecer.

En la región IV, ambas poblaciones arrancan con un número muy pequeño de individuos se alejan del punto crítico (0,0) y tienden al punto (5,5) ambas comienzan a crecer al encontrar suficiente cantidad de alimento para las dos.

Pero al ingresar en la región I, para la trayectoria de la “izquierda”, solamente la especie “y” sigue creciendo, mientras que la “x” vuelve a decrecer y tenderá a desaparecer para un tiempo $t \to \infty$.

En la otra curva que nace en la región IV, trayectoria “inferior”, la situación se invierte y luego del crecimiento simultáneo, la especie “x” se convierte en dominante y sigue creciendo al ingresar en la región III, mientras que la “y” decrece y tiende a desaparecer en esta región.

Entre las regiones II y III, trayectoria de la “derecha” del gráfico, la situación es inversa a la primera considerada, dado que ambas especies comienzan con una población elevada en II, pero la “x” resulta dominante, de modo que la “y” decrece sostenidamente para tender a desaparecer en III.

EJEMPLO2: Ecuación logística aplicada al modelo de especies en competencia

$$\begin{cases} x'(t) = a_1\,x - b_1\,x^2 \\ y'(t) = a_2\,y - b_2\,y^2 \end{cases}$$ Ecuación logística

En estas ecuaciones, las poblaciones en ausencia de la otra especie (no figura el término xy) tienen un crecimiento limitado dado por la ecuación logística. De no figurar el término x^2 o y^2 ambas crecerían sin límite (el término x^2 se interpreta como una competencia entre la misma especie).

En las ecuaciones anteriores, vamos a suponer que hay otra especie y compiten por el alimento disponible en el ambiente común; esto contrasta con el caso que una especie depreda a la otra. Vamos a suponer también que la competencia (número de encuentros) tiene el efecto de una tasa de declinación de ambas poblaciones proporcional al producto x y. Las ecuaciones para este modelo son:

Ecuación logística para el modelo de especies en competencia

$$\begin{cases} x'(t) = a_1\,x - b_1\,x^2 - c_1xy \\ y'(t) = a_2\,y - b_2\,y^2 - c_2xy \end{cases}$$

Una población se extingue con la frecuencia de encuentros

Si en el sistema visto para la ecuación logística de depredador presa, hacemos un cambio de signo en la segunda ecuación, nos queda:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x - x^2 - x\,y \\ y'(t) = 2y - x\,y \end{cases}$$

Solo la población x(t) compite consigo misma

Tenemos ahora un modelo de especies en competencia, aunque no figure el término y^2 en la segunda ecuación. Si buscamos los puntos críticos de este sistema no lineal, veremos que estos no cambian, pero si lo hará sustancialmente el comportamiento en cada uno de ellos.

- **Punto crítico (0,0):**

Como (0,0) es el punto crítico del sistema lineal.

Sistema lineal asociado:

$x'(t) = 5x$

$y'(t) = 2y$

Para el análisis de la estabilidad, tenemos en cuenta la matriz característica, y su determinante.

$$[\lambda\, I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Det } [\lambda\, I - A] = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Ecuación característica: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 2$, reales de igual signo, se trata de un nodo, como las raíces son positivas el sistema es en ese punto inestable.

Para graficar las trayectorias, tenemos en cuenta que la solución de la ecuación diferencial es de la forma $x(t) = x_0\,e^{5t}$ e $y(t) = y_0\,e^{2t}$ por lo tanto las trayectorias salen a lo largo del eje y, y salen a lo largo del eje x.

- **Punto crítico (2,3):**

Buscamos el sistema lineal equivalente cuyo punto crítico sea (0,0). Resulta $u = x - 2$ y $v = y - 3$.

Reemplazamos en el sistema, siendo $x'(t) = u'(t)$ e $y'(t) = v'(t)$

$u'(t) = 5\,(u+2) - (u+2)^2 - (u+2)(v+3) = -2u - 2v - u\,v$

$v'(t) = 2(v+3) - (u+2)\,(v+3) = -3u - u\,v$.

$$\begin{cases} u'(t) = -2u - 2v \\ v'(t) = -3u \end{cases}$$ sistema lineal asociado

$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix}$ Det $[\lambda I - A] = \lambda^2 + 2\lambda - 6$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = -1 + \sqrt{7}$ y $\lambda_2 = -1 - \sqrt{7}$

Reales de distinto signo es un punto silla, es inestable.

- **Punto crítico (5,0):**

Hacemos una traslación de ejes al punto (5,0) de manera que resulta $u = x - 5$ y $v = y$.

Reemplazamos en el sistema, siendo $x'(t) = u'(t)$ e $y'(t) = v'(t)$

$u'(t) = 5(u+5) - (u+5)^2 - (u+5)v = -5u - 5v - u^2 - uv$

$v'(t) = 2v - (u+5)v = -3v - uv$

El sistema linealizado es:

$$\begin{cases} u'(t) = -5u - 5v \\ v'(t) = -3v \end{cases} \Longrightarrow [\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda+5 & 5 \\ 0 & \lambda+3 \end{bmatrix} \qquad \text{Det } [\lambda I - A] = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -5$, reales negativas por lo tanto el punto (5,0) es un nodo estable. Las trayectorias según x e y se acercan al punto, esto significa que una de las poblaciones tiende a extinguirse. Estamos en el caso de la supervivencia de una sola especie.

Podemos determinar si el modelo, responde a una coexistencia pacífica, a la supervivencia de una sola especie (como en el ejemplo citado) o si ambas poblaciones pueden crecer sin cota alguna o decrecer a cero.

Ecuación logística aplica a ambas especies

Se tienen en cuenta los coeficientes que aparecen en el modelo de especies en competencias.

$x'(t) = a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy = x(a_1 - b_1 x - c_1 y) = 0 \Longrightarrow$ Ecuación de la recta: $y = -(b_1/c_1)x + a_1/c_1$

$y'(t) = a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy = y(a_2 - b_2 y - c_2 x) = 0 \Longrightarrow$ Ecuación de la recta: $y = -(c_2/b_2)x + a_2/c_2$

Entre paréntesis, tenemos las ecuaciones de dos rectas, al igualarlas a cero obtendremos cuatro puntos críticos, (0,0), $(0, a_2/b_2)$, $(a_1/b_1, 0)$ y el cuarto que será la intersección de las dos rectas, lo llamamos (x_E, y_E), la estabilidad de este último punto dependerá de la orientación relativa de las rectas consideradas.

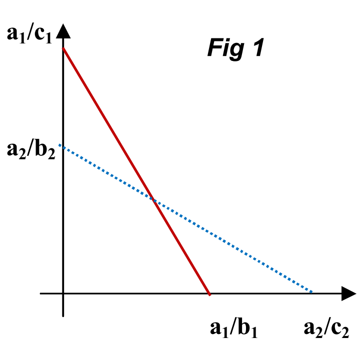


Fig 1

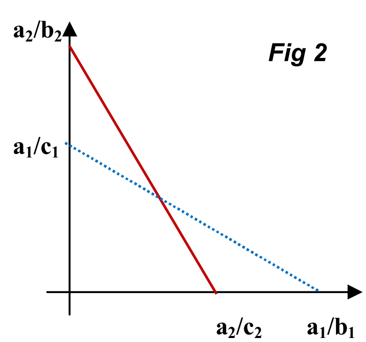


Fig 2

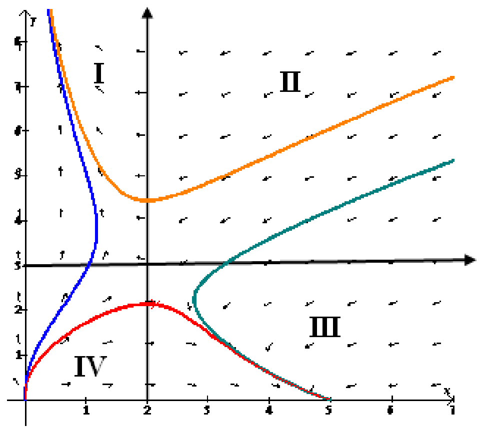
En la figura 1: $\dfrac{a_2/b_2}{a_2/c_2} < \dfrac{a_1/c_1}{a_1/b_1}$ esto es $c_1 c_2 < b_1 b_2$

En la figura 2: $\dfrac{a_2/b_2}{a_2/c_2} > \dfrac{a_1/c_1}{a_1/b_1}$ esto es $c_1 c_2 > b_1 b_2$

Estas condiciones, tienen una interpretación natural. Las constantes b_1 y b_2 representan el efecto inhibitorio de cada población en su propio crecimiento (debido a limitaciones de alimento o espacio), c_1 y c_2 representan el efecto de la competencia de las dos poblaciones.

Para 1: Si $c_1 c_2 < b_1 b_2$ la competencia es pequeña comparada con la inhibición, entonces (x_E, y_E) es un punto asintóticamente estable, al cual se aproxima cada población cuando $t \to \infty$, es el caso de coexistencia pacífica.

Para 2: Si $c_1 c_2 > b_1 b_2$ la competencia es grande con respecto a la inhibición, el punto (x_E, y_E) es un punto crítico inestable, para $t \to \infty$ una población tenderá a cero, lo que significa que no pueden coexistir y una de ellas se extingue.



Análisis del gráfico:

Las trayectorias en azul y naranja son las que tienden al punto silla (2,3) y luego se alejan indefinidamente del punto.

Las trayectorias graficadas en rojo, y verde son las que se acercan a (2,3) y luego tienden al punto (5,0), que representa la extinción de una población.

Ejemplo de coexistencia pacífica

Consideremos dos poblaciones que satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{cases} x'(t) = 60x - 3x^2 - 4xy = x(60 - 3x - 4y) \\ y'(t) = 42y - 3y^2 - 2xy = y(42 - 3y - 2x) \end{cases}$$

En este sistema $b_1 = b_2 = -3$, $c_1 = -4$ y $c_2 = -2$ si hacemos el producto $8 < 9$ significa que la competencia es menor que la inhibición.

Los puntos críticos del sistema son: (0,0), (0,14), (20,0) y (12,6).

Si analizamos cada uno de ellos, veremos qué (0,0) es un nodo inestable; (0,14) es un punto silla inestable del sistema linealizado, con trayectorias que entran a lo largo del eje y mientras que las trayectorias que se alejan lo hacen a lo largo de la recta que pasa por el punto y tiene pendiente -14/23

El punto (20,0) es también un punto silla, en este caso las trayectorias entran a lo largo del eje x, en cambio las que se aleja se encuentran a lo largo de la recta que pasa por (20,0) con pendiente -31/40

El punto (12,6), presenta la posibilidad de coexistencia pacífica por tratarse de un nodo asintóticamente estable