Capítulo III: SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

SUCESIONES

1- DEFINICIÓN

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos, y cuyo codomino son números reales. Se las representa con notación de subíndice en vez de notación funcional f(n).

Una sucesión, se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido:
$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n \ldots$ Los valores funcionales: $a_1, a_2, a_3 \ldots$ se llaman términos de la sucesión, siendo a_1 el primer término y a_n el término enésimo.

Notación: $\{ a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots\}$ o simplemente $\{a_n\}$

Ejemplos:

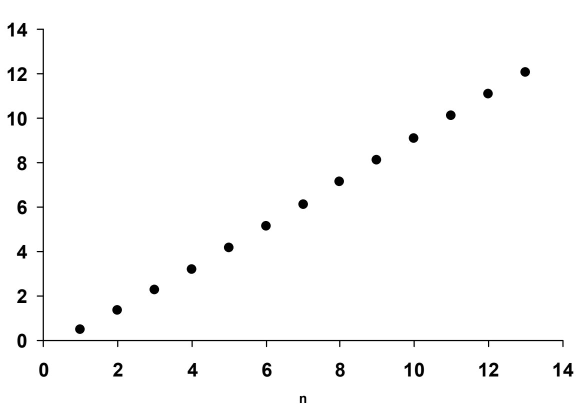
- ✓ Dados los término de una sucesión 1, 4, 7 ,10,13 … se puede establecer un patrón, observamos que el término enésimo lo podemos escribir como $a_n = 3n - 2$ para $n \geq 1$.
  La notación para esta sucesión puede ser: $\{ 1, 4, 7 \ldots 3n-2 \ldots\}$ escribiendo los términos ó $\{3n-2\}$ empleando la fórmula de definición del término enésimo. Nosotros utilizaremos esta última notación de la forma: $\{ a_n \} = \{3n-2\}: 1, 4, 7, 10, 13 \ldots$

- ✓ Hallar una sucesión cuyos cinco primeros términos sean: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.....$
  Según la ley de formación, tenemos $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$
  $$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots$$

2- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

Como es una función se puede representar gráficamente. En el eje de abscisas se marcan los números naturales y en el eje de ordenadas los números reales.

Ejemplo: $\{ a_n \} = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$



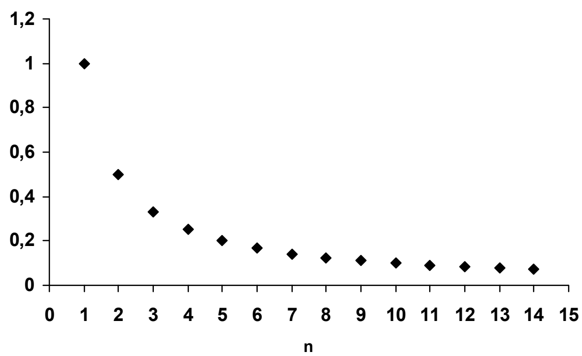
n	a_n
1	0,5
2	1,33333333
3	2,25
4	3,2
5	4,16666667
6	5,14285714
7	6,125
8	7,11111111
9	8,1
10	9,09090909
11	10,0833333
12	11,0769231
13	12,0714286
14	13,0666667

Observe que como el dominio son enteros positivos la gráfica es un conjunto de punto.

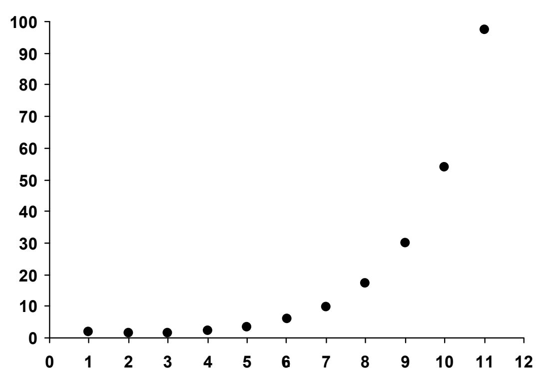
3- SUCESIONES MONÓTONAS

Una sucesión es monótona cuando la relación entre sus términos es siempre la misma
Si $a_n \leq a_{n+1}$ sucesión *monótona creciente no en forma estricta*
Si $a_n < a_{n+1}$ sucesión *monótona creciente*
Si $a_n \geq a_{n+1}$ sucesión *monótona decreciente no en forma estricta*
Si $a_n > a_{n+1}$ sucesión *monótona decreciente*

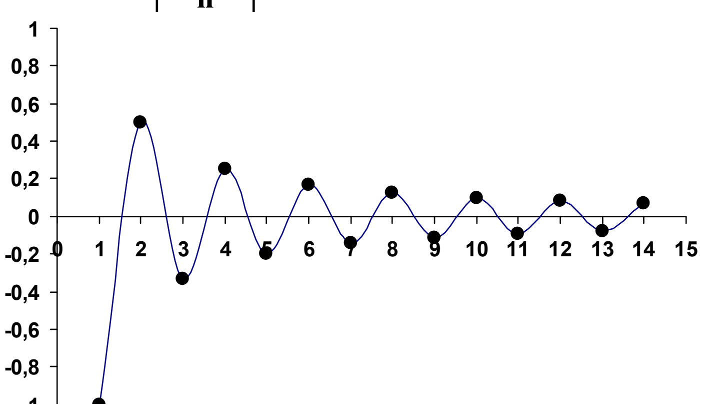
Ejemplo 1: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ decreciente $\forall n \in N$



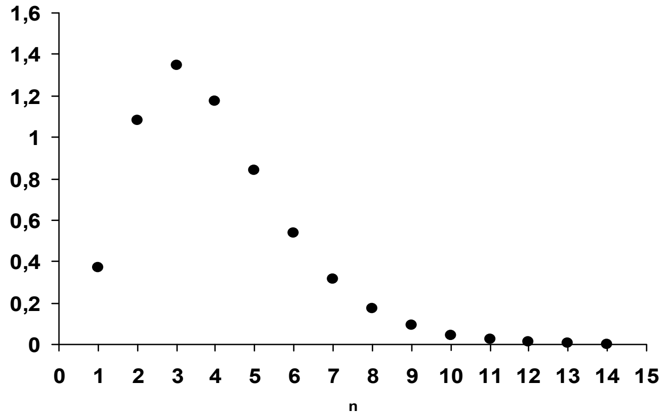
Ejemplo 2: $\{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{2n-1}\right\}$ creciente $\forall n \in N$



Ejemplo 3: $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ ni crece ni decrece, es OSCILANTE, NO ES MONÓTONA



Ejemplo 4: $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^3}{e^n}\right\}$



Esta sucesión es decreciente $\forall \mathbf{n} > \mathbf{3}$

4- <u>SUCESIONES ACOTADAS</u>

- **Sucesión acotada superiormente:**

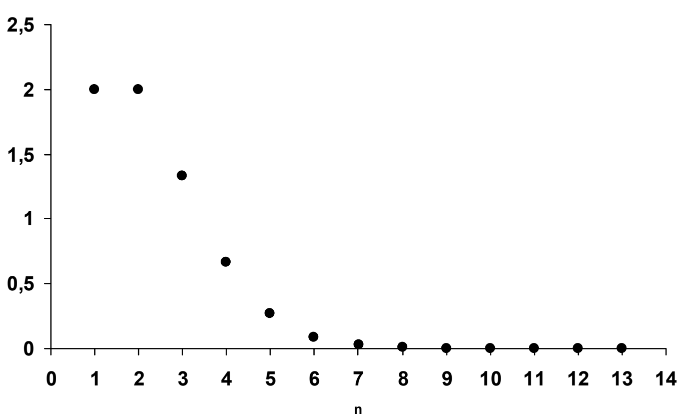
Una sucesión es *acotada superiormente* si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n. El número M se dice es una *cota superior* de la sucesión. Si una sucesión tiene cota superior, tiene infinitas cotas superiores.

- **Sucesión acotada inferiormente:**

Una sucesión es *acotada inferiormente* si existe un número real N tal que $a_n \geq N$ para todo n. El número N se dice es una *cota inferior* de la sucesión. Si una sucesión tiene cota inferior, tiene infinitas cotas inferiores.

"UNA SUCESIÓN ES *ACOTADA* SI ES ACOTADA SUPERIOR E INFERIORMENTE"

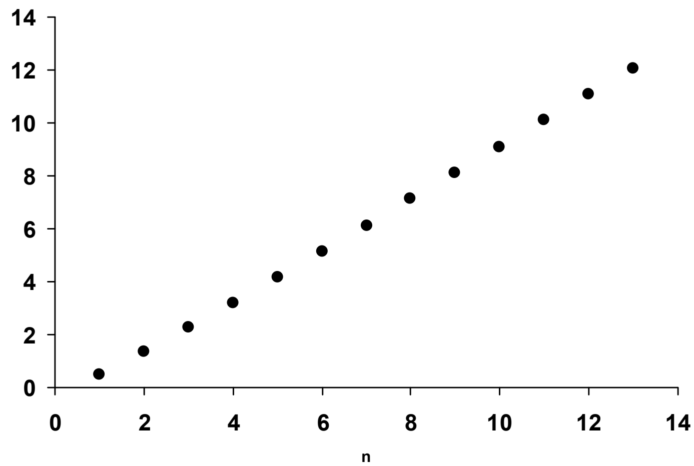
Ejemplo 1 : $\{\mathbf{a_n}\} = \left\{\dfrac{\mathbf{2^n}}{\mathbf{n!}}\right\}$ está acotada superiormente en 2 , e inferiormente en 0



En el gráfico se puede ver que n! crece más rápidamente que 2^n

Ejemplo 2: $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n^2}{n+1} \right\}$

Esta sucesión sólo tiene cota inferior en 0 , pero no tiene cotas superiores, decimos entonces que está acotada inferiormente , por lo tanto NO ES ACOTADA



5- LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Definición:

Sea L un número real. Se dice que el límite de una sucesión $\{a_n\}$ es L, y se denota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

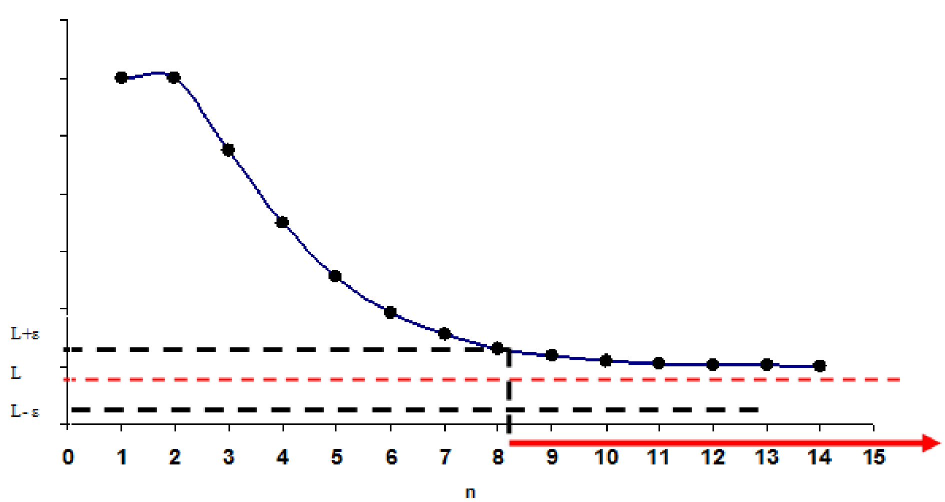
si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, siempre que $n > N$.

Simbólicamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon, \exists N > 0 : |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall\, n > N$$

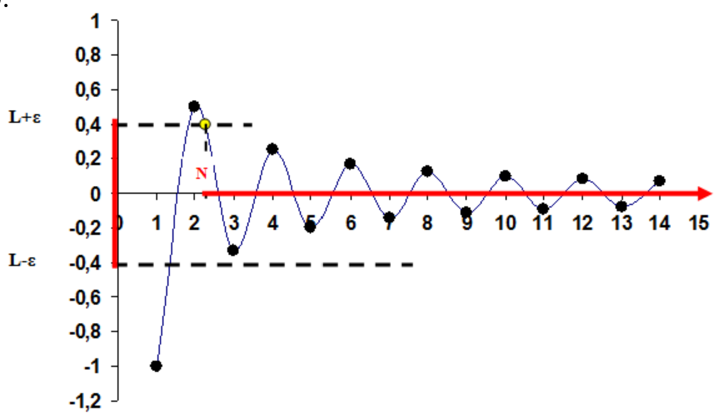
Es decir que para todo ε, siempre se puede encontrar un número N, tal que para todo $n > N$, a_n está dentro del entorno con centro en L y amplitud ε

Gráficamente



Si al proyectar para encontrar el N, corta en varios puntos a la gráfica, se toma el valor mayor

Por ejemplo:



Cuando una sucesión tiene límite se dice que es CONVERGENTE, y si no lo tiene, se dice que es DIVERGENTE

- **Forma práctica de cálculo del límite de una sucesión**

Teorema:
Sea f(x) una función de variable real tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = L$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que f(n) = a_n para toda n natural, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Este teorema nos da la forma práctica de calcular el límite de una sucesión, buscando la función real asociada, y calculando el límite con los métodos vistos en Cálculo I.
Ejemplo:
Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{n^2+1}\right\}$ la función asociada es $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ Luego $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$

La sucesión $\{a_n\}$ CONVERGE a 1

b) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{2^n-1}\right\}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2^x-1}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ Aplicamos regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x.\ln 2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^x(\ln 2)^2} = 0$$

La sucesión $\{a_n\}$ CONVERGE a 0

c) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$ La sucesión $\{a_n\}$ DIVERGE

Pero no siempre es posible encontrar la función real asociada, por ejemplo:

$\{a_n\} = \left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\}$ o $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$

Para estos casos podemos aplicar las siguientes propiedades:

- **Propiedades del límite de una sucesión**

I) Propiedad del valor absoluto

Dada una sucesión $\{a_n\}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplo:

$\{a_n\} = \left\{(-1)^n . \dfrac{1}{n}\right\}$ En este caso no es posible encontrar una función asociada, pero podemos aplicar la propiedad vista:

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ La sucesión converge a cero

NOTA: Si el límite del valor absoluto NO da cero, no se puede asegurar nada!!

II) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes y L_1 y L_2 sus límites respectivamente, entonces:
La suma, resta o producto de dos sucesiones convergentes da otra sucesión convergente:

$\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n + b_n\} = L_1 + L_2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n . b_n\} = L_1 . L_2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n - b_n\} = L_1 - L_2$

b) Si c es una constante: $\lim\limits_{n\to\infty} \{c.a_n\} = c.L_1$

c) Si la sucesión $\{\mathbf{b_n}\}$ no tiene ningún término nulo y además $L_2 \neq 0$, entonces, el cociente de dos sucesiones convergentes da otra sucesión convergente: $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{L_1}{L_2}$

Ejemplos de aplicación de las propiedades

Ejemplo 1:

$$\{\mathbf{a_n}\} = \left\{\mathbf{1 + (-1)^n . \frac{1}{n}}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + (-1)^{\mathbf{n}} . \frac{1}{\mathbf{n}}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} (-1)^{\mathbf{n}} . \frac{1}{\mathbf{n}} = 1 + 0 = 1$$

Ejemplo 2:

$$\{\mathbf{a_n}\} = \left\{\frac{\mathbf{(-1)^n + 1}}{\mathbf{n}}\right\}$$

$$\{\mathbf{a_n}\} = \left\{\frac{(-1)^n + 1}{n}\right\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 + 0 = 0 \quad \text{Luego converge a cero}$$

Nota: Otra posibilidad también puede ser analizar el comportamiento de los términos de la sucesión, en forma separada para los términos de orden par o impar. Si todos tienden al mismo número, ese es el límite, si no, la sucesión es divergente:

Por ejemplo:

$$\{\mathbf{a_n}\} = \left\{\mathbf{(-1)^n + \frac{1}{n}}\right\}$$

Si n es par: $\{\mathbf{a_n}\} = \left\{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{n}\right\}$ L = 1

Si n es impar: $\{\mathbf{a_n}\} = \left\{(-\mathbf{1}) + \frac{\mathbf{1}}{n}\right\}$ L = - 1

Como da valores distintos la sucesión es DIVERGENTE

III) **Teorema**: Si la sucesión es acotada y monótona entonces es convergente

Este teorema es la condición suficiente para ser convergente pero no necesaria

Ejemplo:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$$

Veamos si es monótona: comparemos a_n con a_{n+1}

$$\{a_{n+1}\} = \left\{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right\} \quad y \quad \{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$$

$a_n \underset{?}{\ldots\ldots\ldots} a_{n+1}$ (vamos a analizar si es menor o mayor)

$$\frac{2^n}{n!} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$ Hacemos pasaje de términos para poder simplificar

$$\frac{(n+1)!}{n!} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2^{n+1}}{2^n}$$ nos queda: $n+1 \rightarrow$ ***Comparamos*** $\rightarrow 2$

Concluimos que para todo $n \geq 2$ $n+1 > 2$ por lo tanto $a_n > a_{n+1}$ y decimos que es monótona

Veamos ahora si es acotada, para ello calculemos algunos términos y veamos su comportamiento:

1	2
2	2
3	1,33333333
4	0,66666667
5	0,26666667
6	0,08888889
7	0,02539683
8	0,00634921
9	0,00141093
10	0,00028219
11	5,1307E-05

Vemos que todos los términos están entre 0 y 2, por lo tanto SI está acotada.

Según el teorema, por ser monótona y acotada, aseguramos que es CONVERGENTE.
Si queremos saber cuál es el límite, como es decreciente, el límite es la mayor de las cotas inferiores , en este caso CERO.

Nota: este resultado era esperable, ya que el FACTORIAL DE UN NÚMERO SIEMPRE CRECE MUCHO MÁS RÁPIDAMENTE QUE CUALQUIER EXPONENCIAL

SERIES NUMÉRICAS

1- DEFINICIÓN : Series infinitas

Se llama serie numérica infinita o simplemente serie numérica, a la suma de los infinitos términos de una sucesión. Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ se llama serie infinita en donde a_1, a_2, ...se llaman términos de la serie.

2- CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA:

Como se trata de infinitos términos, para hallar la suma de una serie infinita, consideramos la siguiente **sucesión de sumas parciales:**
$S_1=a_1$; $S_2=a_1+a_2$; $S_3=a_1+a_2+a_3$; …; $S_n = a_1+a_2+…+a_n$

Para la serie $\sum a_n$, la **n-ésima suma parcial** ($S=S_n$ suma de la serie) viene dada por $S_n=a_1+a_2+…+a_n$
Si $\{S_n\}$ converge a S diremos que la serie $\sum a_n$ converge. Si $\{S_n\}$ diverge, diremos que la serie es divergente.

Ejemplos: Dadas las siguientes series hallar sus cuatro primeras sumas parciales:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + ...$

$S_1 = 3$ $\quad S_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ $\quad S_3 = \frac{9}{2} + \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$ $\quad S_4 = \frac{21}{4} + \frac{3}{8} = \frac{45}{8}$

Los términos de la sucesión son: $3 \ , \frac{9}{2} \ , \frac{21}{4} \ , \frac{45}{8} \ ...$

El término enésimo de la sucesión lo podemos escribir como $\mathbf{S_n = \frac{3\ (2^n - 1)}{2^{n-1}}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\,(2^n - 1)}{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3 \left(2 - \frac{2}{2^n}\right) = 6$ Por lo tanto la serie converge a 6

b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ...$ podemos observar que el término enésimo de la serie es

$a_n = \frac{1}{n^2}$ para $n = 1, 2, 3, 4 ...$

$S_1 = 1$ $\quad S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ $\quad S_3 = \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$ $\quad S_4 = \frac{49}{36} + \frac{1}{16} = \frac{205}{144}$

En este ejemplo para determinar si la serie converge, debemos encontrar el **término enésimo de la sucesión de sumas parciales**, en la mayoría de los casos es muy difícil su cálculo, por ello veremos criterios para determinar el comportamiento de la serie.

3- CRITERIO DEL TÉRMINO N-ÉSIMO PARA LA DIVERGENCIA

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge

En el caso del ejemplo del punto b, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ en este caso el criterio no decide, dado que asegura la divergencia si el límite es distinto de cero.

En general analizar el carácter de una serie y su suma, requiere de un análisis complejo, esto requiere primero clasificar la serie como:

a) Series geométricas
b) Serie de términos positivos
c) Serie de términos no nulos
d) Series alternadas

Segundo, analizar cuál es el método más conveniente para determinar su convergencia o divergencia, y por último hallar su suma o una aproximación de este valor.

4- SERIES GEOMÉTRICAS

La serie geométrica, nos permite analizar en forma sencilla su convergencia, y si converge podemos hallar su suma.

Definición:

Una serie geométrica es una serie numérica que tiene la siguiente forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a.r^n = a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \dots + a.r^n + \dots}$$

Donde **r** es un número real llamado **razón,** y **a** es un número real no nulo llamado **coeficiente** de la serie**,** y **n** es un número entero positivo**.**

Por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 + 3.\frac{1}{2} + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$$

La razón es $r = \frac{1}{2}$

Observe que cada término se obtiene multiplicando al anterior por la razón **r**

Nota: no necesariamente **n** debe empezar siempre de cero, eso depende del término enésimo de la serie, por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^4 + \dots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

Convergencia De Una Serie Geométrica

Una serie geométrica de razón r, diverge si $|r| \geq 1$ y converge si $|r| < 1$.

En el caso de ser convergente su suma está dada por

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Demostración:

a) **Si r = 1** la serie nos queda $\sum_{n=0}^{\infty} a.1^n = a + a + a + a + a + ...$

Debemos analizar entonces la sucesión de sumas parciales $\{ S_n \}$, y ver si es convergente o no, es decir debemos calcular el limite de la suma parcial enésima:

$S_n = a + a + a + a + a + a.. a + a = n . a$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n.a = \infty$ por lo tanto la sucesión de sumas parciales DIVERGE, y la serie geométrica de razón igual a 1 también.

b) **Si r = - 1** la serie nos queda $\sum_{n=0}^{\infty} a.(-1)^n = a - a + a - a + a - ....$

Debemos analizar la sucesión de sumas parciales $\{ S_n \}$, y ver si es convergente o no, es decir debemos calcular el limite de la suma parcial enésima:

$\{S_n\}$: **a ,0, a, 0 , …** como es oscilante , la sucesión es DIVERGENTE

Por lo tanto la serie geométrica de razón r = - 1, también

c) **Si $| r | \neq 1$**

Analizamos la sucesión de sumas parciales, para ello buscamos la enésima suma parcial para poder calcular su límite:

$S_n = a + a . r + a . r^2 + a . r^3 + ... + a . r^{n-1}$

Multiplicamos ambos miembros por r :

$r . S_n = a . r + a . r^2 + a . r^3 + a . r^4 + ... + a . r^n$

restamos miembro a miembro

$S_n - r . S_n = a + a . r + a . r^2 + a . r^3 + ... + a . r^{n-1} - (a . r + a . r^2 + a . r^3 + a . r^4 + ... + a . r^n)$

$S_n - r . S_n = a - a . r^n$

$S_n . (1 - r) = a . (1 - r^n)$

$$S_n = \frac{a.(1-r^n)}{1-r} \quad (1)$$

Podemos expresar la serie como:

$S = S_n + R_n$ donde S_n es la enésima suma parcial y R_n se llama resto de la serie $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} +$

En (1) $S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a\,r^n}{1-r} = S - R_n$

Vamos ahora a calcular su límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} R_n = S - \lim_{n\to\infty} R_n$$

Si demostramos que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a\,r^n}{1-r}$$

Analizamos el segundo límite del segundo miembro:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a\,r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n$$

Si $r > 1$ el límite no existe, dado que es ∞

Si $r < 1$ el límite es cero

Por lo tanto para $r < 1$ el resto de la serie es nulo y $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{a}{1-r}$

Este criterio es de mucha utilidad ya que cuando tenemos una serie geométrica, no necesitamos buscar la suma parcial enésima, solamente debemos ver el valor de la razón:

Ejemplos:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2.\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ **es convergente porque** $|r| = \frac{2}{3} < 1$ **y su suma es** $S = \frac{2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^n} = 4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \ldots$ **es convergente porque** $r = \frac{2}{3} < 1$ **y su suma es**

$$S = S = \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = 12$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3.\left(\frac{5}{2}\right)^n$ **es divergente porque** $r > 1$

5- SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS:

Criterio Integral:

Si f es positiva, continua y decreciente para x ≥1 y a_n=f(n), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\int_1^{\infty} f(x)dx$ o convergen ambas o divergen ambas.

P-serie

Una serie de terminos positivos de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$... se llama p- serie con p > 0. Si p=1 se conoce como serie armónica: $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots}$.

Criterio de convergencia:

- si 0< p ≤1 la serie **diverge**
- si p > 1 la serie **converge**

Criterio de comparación directa:

- Sean 0< a_n ≤ b_n para todo n
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Criterio de comparación en el límite

Supongamos a_n, b_n >0 y $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$ donde L es finito y positivo. Entonces, las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes

6- SERIES ALTERNADAS

Son series cuyos términos alternan en signo, por ejemplo las series geométricas:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ =-a_1+a_2-a_3+a_4... y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ =a_1-a_2+a_3-a_4...

Criterio de las series alternadas

Si $a_n > 0$, las series alternadas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ convergen, supuesto que verifican estas dos condiciones:

1) $a_{n+1} < a_n$, para todo n
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

7- SERIES DE TÉRMINOS NO NULOS

Puede contener términos positivos y negativos, pero no necesariamente alternados.

Criterio del cociente o de D´Alambert

Sea $\sum a_n$ una serie con términos no nulos

1) $\sum a_n$ **converge** si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
2) $\sum a_n$ **diverge** si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$
3) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ **el criterio no decide**

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie con términos no nulos

1) $\sum a_n$ converge si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
2) $\sum a_n$ si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
3) Si $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ el criterio no decide

------- --