SISTEMAS AUTÓNOMOS

PARTE A: SISTEMAS LINEALES

➢ *DEFINICIÓN:*

Se dice que un sistema es autónomo cuando la variable **tiempo** está en forma **implícita** en el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

Surgen de: **x'' (t) = G (x, x')**

Hacemos **y = x' → y'= G (x, y)**

F y G son diferenciables en una región R del plano

Nos garantiza la existencia de las derivadas y la continuidad de la función

➢ *REPRESENTACIÓN GRÁFICA:*

- En forma paramétrica a cada punto del plano corresponderá un valor de x t e y t.
- Para cada condición inicial la representación es una curva en el plano llamada trayectoria, el plano recibe el nombre de ***plano de fase***.
- El conjunto de las trayectorias proporciona el ***retrato de fase*** del sistema.

➢ *ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS LINEALES*

Analizar el retrato de fase obtenido

- **En forma gráfica y analítica para t→ ±∞**
- **Estabilidad del sistema**
  - **Los puntos críticos**
  - **Clasificación**

PUNTO CRÍTICO:

Un punto crítico es aquel en que las derivadas se anulan simultáneamente. En un punto crítico se pueden presentar valores máximos de la función, mínimos o un punto silla. Veremos cada uno de los casos en el contexto de sistemas autónomos.

Los puntos críticos se clasifican en:

a) **Nodo**
b) **Punto silla**
c) **Centro o foco**
d) **Punto espiral**

En los sistemas lineales el único punto crítico es el origen.

El punto crítico se obtiene resolviendo el sistema $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$

En los sistemas autónomos la variable tiempo está en forma implícita, por eso no podemos utilizar el método de la transformada de Laplace para obtener la solución. Según la forma del sistema, se puede resolver reemplazando una ecuación en la otra (sustitución), integración directa o método de autovectores. Este último método se presenta cuando el sistema es de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \quad \text{con} \quad a, b, c, d \neq 0$$

Hallar la solución de los siguientes sistemas autónomos

a) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2\,x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

El segundo miembro es función de la variable que está derivada, esto permite integrar miembro a miembro para obtener la solución

$$\int \frac{dx}{x} = \int 2\,dt \Rightarrow \ln(x) = 2\,t + c \quad \text{despejo } x(t) = e^{2t+c} = C_1 e^{2t}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dt \Rightarrow \ln(y) = t + c \quad \text{despejo } y(t) = e^{t+c} = C_2 e^{t}$$

Para obtener el gráfico se puede establecer, si es sencillo, la relación x (t) e y(t)

En el ejemplo: $x(t) = c\,[y(t)]^2$

Para graficar las trayectorias tenemos en cuenta la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad \text{despejamos} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

En el ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{2}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

Integramos miembro a miembro

$$2\ln y = \ln x + c \quad \Rightarrow \quad y^2 = x\,c$$

Análisis de la solución:

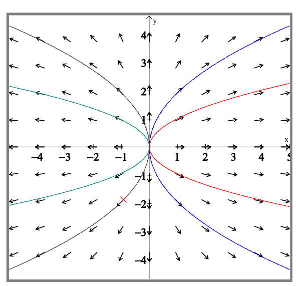
El punto crítico es (0,0) por tratarse de un sistema lineal.

Si se analiza el gráfico las trayectorias se alejan del punto crítico, este punto recibe el nombre de ***NODO***, El sistema puede ser estable o inestable, esto depende del comportamiento para el tiempo tendiendo a infinito.

Para hacer el análisis en forma analítica:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} c_1 e^{2t} = \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} c_2 e^{t} = \infty$$



$y^2 = x\,c$

Cuando t aumenta las trayectorias se alejan del punto crítico, se dice entonces que en ese nodo el *sistema es inestable*

b) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 4y \end{cases}$$

En este caso para encontrar la solución podemos derivar la primera ecuación y reemplazar en la segunda:

X'(t) = y(t)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -4\frac{dx}{dt} + 5x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0$$

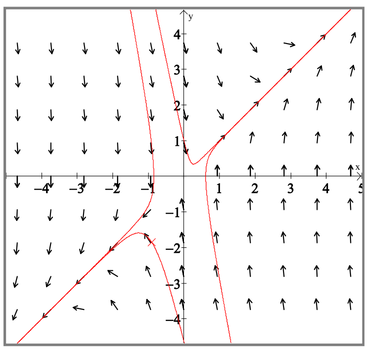
Raíces de la ecuación x_1= -5 x_2= 1 **Solución:**

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t} \\ y(t) &= -5c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{t\to\infty} c_1 e^{-5t} + \lim_{t\to\infty} c_2 e^{t} \\ \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{t\to\infty} -5c_1 e^{-5t} + \lim_{t\to\infty} c_2 e^{t} \end{aligned}\right\} \text{ un límite da cero y el otro } \infty$$

El punto crítico recibe el nombre de **PUNTO SILLA**; el sistema en ese punto es inestable

Lo importante para la estabilidad, es que no solo se aproximen al punto crítico, sino que permanezcan cerca de él



Se observa en el gráfico que los vectores se acercan al punto crítico y luego se alejan. El punto crítico recibe el nombre de **PUNTO SILLA**; el sistema en ese punto es inestable

c) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x \end{cases}$$

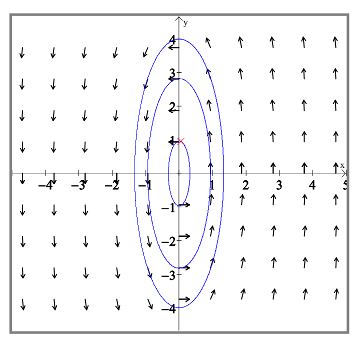
Hacemos para resolverlo la sustitución: x'(t) =y(t)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -9x \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0 \quad \text{raíces } x_1 = -3j \quad x_2 = 3j$$

Solución:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\cos(3t) + c_2\text{sen}(3t) \\ y(t) &= 3\,c_1\text{sen}(3t) - 3\,c_2\cos(3t) \end{aligned}$$

En este caso el punto crítico (0,0) recibe el nombre de *centro*



En el límite para el tiempo tendiendo a infinito, las funciones seno y coseno oscilan entre el valor 1 y -1. El sistema en este caso es estable.

Si la solución es compleja, el punto crítico es un foco, estable si la parte real es negativa (la parte real es una exponencial decreciente)

➢ *ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA SOLUCIÓN*

Se han visto distintos ejemplos para analizar el comportamiento de la solución. Si se quiere hacer un análisis cualitativo de la misma debemos preguntar:

- ➢ **Se puede clasificar el punto crítico sin resolver el sistema.**
- ➢ **Se puede saber si se trata de un sistema estable**

Para analizar el sistema en forma cualitativa, es necesario saber cuál es la forma que adopta la solución del sistema de esta manera podemos justificar su clasificación sin resolverlo

Para un sistema completo con $a, b, c, d \neq 0$

1. **Se parte de la forma general del sistema autónomo**

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

2. **Se plantea la ecuación matricial que representa al sistema de segundo orden**

$\boxed{1}$ **X' (t) = A.X (t)**

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

3. **Para hallar el punto crítico, se debe resolver el sistema homogéneo:**

[A].[X (t)] = [0]

4. **Para resolver el sistema, por tratarse de una ecuación diferencial de segundo orden, su solución siempre es una exponencial.**

X(t) = K e $^{\lambda t}$ $\boxed{2}$ siendo $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ reemplazando 2 en 1: **λ K e $^{\lambda t}$ = A K e $^{\lambda t}$**

Se iguala a cero teniendo en cuenta que A es una matriz de orden nxn; K un vector columna de orden nx1 y λ un escalar, para hacer el producto matricial, se debe respetar el orden de las matrices por eso λ se multiplica por la matriz identidad:

$$\boxed{[\lambda I - A]_{2x2}\,[K]_{2x1} = [0]_{2x1}}$$

- **Si el vector K es el vector nulo, se obtiene la solución trivial del sistema.**
- **Para obtener soluciones distintas el determinante del sistema igual a cero det [λI - A] = 0 esta es la llamada *ecuación característica* del sistema.**
- **Los valores de λ que satisfacen la ecuación se denominan autovalores o valores propios, y los vectores correspondientes a cada valor propio se denominan autovectores o vectores propios**

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Según las raíces de la ecuación característica se pueden presentar:

a) **Si λ_1 y λ_2, son raíces reales de igual signo entonces el punto crítico (0,0) es un *nodo***
Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ es estable e inestable si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

b) **Si λ_1 y λ_2, son raíces reales de distinto signo (0,0) es un *punto silla.* El sistema no es estable**

c) **Si λ_1 y λ_2, son raíces imaginarias (0,0) es un *centro.* El sistema es estable**

d) **Si λ_1 y λ_2, son raíces complejas conjugadas entonces el punto crítico (0,0) es *foco* o *punto espiral***
Si la parte real es < 0 el sistema es asintóticamente estable
Si la parte real es > 0 el sistema es inestable.

EJEMPLO

a) Dado el siguiente sistema, clasificar el punto crítico y analizar su estabilidad.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$\det\left[\lambda I - A\right] = \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ **Ecuación característica, raíces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$**

Raíces reales de distinto signo el punto crítico (0,0) es un punto silla, el sistema es inestable

Resolución analítica del sistema utilizando autovectores.

En este caso no se puede aplicar sustitución ni integración directa como en los casos anteriores. Para resolverlo se utiliza el método de autovectores

Del punto anterior se conocen las raíces

Cada valor característico se reemplaza en la ecuación matricial [λI- A] [K] = 0.

PARA $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{se resuelve el sistema} \quad \begin{matrix} -3k_1 - & 3k_2 = 0 \\ -2k_1 - & 2k_2 = 0 \end{matrix}$$

Se ve que $k_1 = - k_2$ como hay dependencia lineal, una de ellas se llama variable libre, puede tomar cualquier valor ya que tiene infinitas soluciones. Ejemplo si $k_2 = -1$,

Se obtiene el autovector $K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

PARA $\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{se resuelve el sistema} \quad \begin{matrix} 2k_1 - & 3k_2 = 0 \\ -2k_1 + & 3k_2 = 0 \end{matrix}$$

$k_1 = 3/2\ k_2$. Ejemplo si $k_2 = 2$, se obtiene el autovector $K_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Los autovectores son linealmente independientes y no permiten encontrar las dos soluciones que debe tener una ecuación diferencial de segundo orden, teniendo en cuenta las constantes arbitrarias c_1 y c_2 la solución queda:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2\, 3\, e^{4t} \\ y(t) = -c_1 e^{-t} + c_2\, 2\, e^{4t} \end{matrix}$$

Para obtener las trayectorias, se analiza el comportamiento de la solución para $t \to \infty$

Los valores de las raíces de la ecuación son reales de distinto signo, esto indica la presencia de un punto silla, si se quiere una gráfica en forma aproximada es importante saber que trayectorias se acercan al punto crítico y cuales se alejan, (para determinar el sentido de las flechas) y de qué forma lo hacen (asíntotas)

Si se observa la solución los términos que contienen a la exponencial decreciente que corresponden al autovector K_1 tienden a cero cuando $t \to \infty$, en cambio los que contienen e^{4t} que corresponden a K_2 crecen sin límite cuando se toma ese límite. Se llama X_2, $-X_2$, X_1 y $-X_1$ a cada semirrecta correspondientes a las asíntotas. **Para $t \to \infty$** la semirrecta X_2 proporciona una de las asíntotas, se analiza $K_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Se ve que ***y(t)= 2/3 x(t)***

X_2 es la ecuación de una semirrecta si $x > 0$ entonces $y > 0$ primer cuadrante

$-X_2$ corresponde a $x < 0$ lo que implica que $y < 0$ y la semirrecta pertenece al tercer cuadrante.

Las semirrectas X_1 y $-X_1$ se obtienen analizando K_1

Para $t \to -\infty$ $K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vemos que $y(t) = -x(t)$

X_1 es la ecuación de una semirrecta, si $x > 0$ entonces $y < 0$ corresponde al cuarto cuadrante. Si $x < 0$ queda $y > 0$ esta es la semirrecta $-X_1$ en el segundo cuadrante.

Para entender el gráfico, primero se dibujan las cuatro asíntotas:

Las trayectorias se acercan al punto crítico por las semirrectas definidas paramétricamente en el primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante por las soluciones X_2, $-X_1$, $-X_2$, X_1 respectivamente.