3.2: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Para pensar

1.

- Seguramente usted ha tenido Matemática desde los cinco años (por lo menos), por eso creemos que es la persona indicada para decirnos para qué sirve la Matemática...
- ¡No, por favor, pare...! ¡Era sin malas palabras...!
- Piense qué objetivo persigue el estudio de los entes matemáticos. Piense en qué ayuda la Matemática a las otras ciencias, por ejemplo, a la Física, a la Economía, entre otras...
- ¿Se dio cuenta?
- La Matemática busca describir la realidad mediante modelos, es decir, presenta mediante fórmulas, enunciados o algún otro objeto matemático, una descripción de algún fenómeno.
- Un modelo es una simplificación de la realidad...
- El modelo describe, en general, uno o algunos de los aspectos intervinientes en un fenómeno y se torna más complejo a medida que se involucran más variables.

Un modelo probabilístico es un modelo matemático que describe el comportamiento de una variable aleatoria que cumple determinadas condiciones.

Presenta una estructura matemática basada en una función de densidad que depende de los valores de la variable aleatoria, y de otras cantidades que caracterizan a una población en particular y que se denominan parámetros del modelo.

En el proceso de modelado, es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Seleccionar el modelo más apropiado.
2. Ajustar el modelo (calcular el valor de sus parámetros).
3. Verificar el modelo.
4. Decidir su aceptación o volver al paso 1.

Para ejecutar el paso 1, podemos optar por una amplia gama de modelos de probabilidad, desarrollados para representar distintos tipos de variables y diferentes fenómenos aleatorios. Por lo tanto, el problema se reduce a elegir el modelo más apropiado para el caso en estudio.

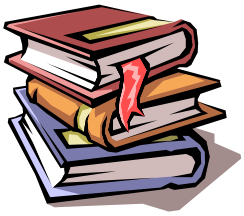
Para ejecutar el paso 2, es necesario recopilar una muestra representativa de la población en estudio y calcular las cantidades necesarias como para evaluar los parámetros del modelo.

Pero nosotros no desarrollaremos modelos, nuestro interés se centrará en seleccionar y utilizar modelos ya estudiados, es decir, trabajaremos sobre problemas reales usando los modelos que ya fueron exitosos en situaciones del tipo de las que se plantean en el problema que se nos presenta. Por esto es importante que, ante una situación concreta, siga las siguientes recomendaciones:

- Frente a un problema concreto, analice detenidamente todas sus características, es decir, pregúntese:
  - ¿Qué dice el problema?
  - ¿Qué se está planteando?
  - ¿Cuál es el experimento?
  - ¿Cuáles son los resultados posibles?
  - ¿La realización del experimento supone que los eventos involucrados sean dependientes o independientes?
  - ¿Cuál es la variable en estudio?
  - ¿Es discreta o es continua?
  - ¿Qué valores puede tomar la variable?
- Proponga un modelo apropiado, es decir, que se adecue a las condiciones planteadas en su problema.
- Verifique que se cumplan todos los supuestos del modelo.
- Plantee la solución del problema en términos de probabilidades.
- Recuerde que en el caso de variables aleatorias discretas, es fundamental diferenciar si la probabilidad deseada incluye o no el valor particular de la variable. Es decir, $P(X \geq x)$ no es lo mismo que $P(X > x)$ y $P(X \leq x)$ es distinto de $P(X < x)$.
- Utilice las tablas provistas por la bibliografía para calcular probabilidades. Ahorrará tiempo y evitará errores de cálculo.

Entonces, nuestra próxima tarea es conocer distintos modelos de probabilidad para variables discretas y analizar sus características.

Distribuciones discretas



Actividad bibliográfica

- Lea las páginas 116 a 139 del libro *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias* de Devore, donde se estudian cuatro modelos de distribuciones de probabilidad. Ellas son: Distribución **binomial**, **hipergeométrica**, **binomial negativa** (con su caso particular, la distribución **geométrica**) y **Poisson**.
  Tenga en cuenta las siguientes recomendaciones al estudiar este material:
  - Página 116: En el apartado 3.4, el autor usa la letra S para indicar el evento "que se obtenga un éxito al realizar el experimento". Si bien la utilización de esta letra es válida, es preferible dejarla para representar el espacio muestral. Usualmente se utiliza la letra E para indicar el evento que incluye a los éxitos y F para el de los fracasos.
  - Página 116: El término *chícharo* es típico de América Central y hace referencia a lo que nosotros conocemos como arvejas o, en otros lugares guisantes.
  - Página 117: Después del enunciado del Ejemplo 3.28 aparece la expresión:
    P(S al segundo intento)= P(SS) + P(FS) = P(segundo D / primer S) P(primer S) + P(segundo S) / primer F) P(primer F)
    En esta expresión aparecen dos errores:
    1. Donde dice "segundo D" debe decir, "segundo S"
    2. En el último término dice "segundo S)" pero el paréntesis está demás, debe decir "segundo S"

    Entonces la expresión correcta sería:
    P(S al segundo intento)= P(SS) + P(FS) = P(segundo S / primer S) P(primer S) + P(segundo S / primer F) P(primer F)
  - Página 117: En el tercer renglón del enunciado del Ejemplo 3.29 dice "el i-ésimo conductor está registrado" pero debe decir "el i-ésimo conductor está **asegurado**".
  - Página 120: No lea el apartado *Uso de tablas binomiales* porque éste se refiere a las tablas que provee el libro de Devore. En su lugar debe leer nuestra sección **Uso de tablas**, que está a continuación, ya que hemos armado nuestras propias tablas en Excel, para que se ajusten a las necesidades del curso.
  - Página 123: En el ejercicio 52 b se define *curva característica de operación*. Este concepto es muy importante y será utilizado nuevamente

Distribuciones discretas

en otras unidades. Deténgase en este concepto y resuelva el ejercicio completo.

- Página 125: El rango de la variable aleatoria hipergeométrica también se puede dar como:
  $x = 0, 1, 2, ..., n$ si $n \leq M$
  $x = 0, 1, 2, ..., M$ si $n \geq M$
- Página 127: Al terminar el Ejemplo 3.36 comienza el párrafo que dice: "Suponga que el tamaño [...] con la proporción de la población, *MIN*, dando el estimado". Evidentemente, hay un error de tipeo, porque donde dice MIN debe decir **M/N**.
- Página 127: Advierta la relación entre lo expuesto como *Aproximaciones de probabilidades hipergeométricas* y la regla dada en la página 118. Tenga en cuenta los casos en los que no es conveniente aplicar esta regla.
- Página 127: Si la variable binomial negativa X está definida como el *número de fracasos que preceden al r-ésimo éxito*, los posibles valores de X son 0, 1, 2, ... Pero en ingeniería es usual definir la variable binomial negativa como la *cantidad de veces que hay que realizar el experimento hasta que se obtengan r éxitos*, en este caso, no es posible que la variable tome el valor cero, porque no tiene sentido pensar que no hice el experimento (X=0) y obtuve r éxitos. Por esto, si se desean r éxitos, serán necesarios, por lo menos r ensayos para obtenerlos, por lo que los posibles valores de X serán r, r+1, r+2, ...
- Página 128: Al cambiar el rango de la variable binomial negativa, es decir, al considerar que los posibles valores de X son r, r+1, r+2, ..., la función de probabilidad de masa quedará:
  $$\mathbf{nb(x;\ r,\ p) = P(X=x;\ r,\ p) = \binom{x-1}{r-1} .\ p^r\ .\ q^{x-r}} \qquad x=r, r+1, r+2, ...$$
- Página 128: Al cambiar el rango de la variable binomial negativa, la esperanza y la varianza se deben calcular como:
  $\mathbf{E(X) = r/p}$
  $\mathbf{Var(X) = r.q/p^2}$
- Página 128: Dentro del ejemplo 3.37 se habla sobre un caso particular de la distribución binomial negativa, la distribución **geométrica**, que se da para el valor de r = 1. Preste atención a este caso particular, ya que sus aplicaciones son de sumo interés.
- Página 128: Por lo dicho anteriormente, la función de probabilidad de masa para la distribución geométrica quedará:
  $$\mathbf{g(x;\ p) = P(X=x;\ p) = p\ .\ q^{x-1}} \qquad x = 1, 2, 3, ...$$

- Página 128: También, al cambiar el rango de la variable binomial negativa, la esperanza y la varianza de la distribución geométrica se deben calcular como:
  $E(X) = 1/p$
  $Var(X) = q/p^2$
- Página 130: Aclaramos que λ también puede ser una tasa por unidad de longitud, de volumen, etcétera.
- Página 130: Después de la expresión (3.19), en el párrafo que dice: "Si los dos términos de la expresión (3.19) se multiplican por e^{-2} y después e^{-2} se coloca dentro de la suma,... ", debe reemplazar los e^{-2} por $\mathbf{e}^{-\lambda}$, quedando la expresión correcta como: "Si los dos términos de la expresión (3.19) se multiplican por $\mathbf{e}^{-\lambda}$ y después $\mathbf{e}^{-\lambda}$ se coloca dentro de la suma,... ".
- Página 131: Al concluir con el Ejemplo 3.38 aparece la expresión: "La probabilidad de que la trampa contenga al menos cinco criaturas es", pero hay un error, debería decir: "La probabilidad de que la trampa contenga **a lo sumo** cinco criaturas es".
- Página 131: Nosotros consideraremos que la aproximación es confiable si $n \geq 20$ y $p \leq 0{,}05$.
  La aproximación es óptima cuando n es mayor o igual que 100.

Uso de tablas

Las tablas provistas por la cátedra, le serán de suma utilidad para facilitar el cálculo de probabilidades.

Hemos elaborado nuestras propias tablas usando Excel, el motivo de este trabajo es que las hemos adecuado a nuestros objetivos de estudio.

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

A continuación se presenta una parte de la tabla, más precisamente, las primeras diez columnas y la última de la primera página, con las primeras veinte filas.

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

	p	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,40**	**0,50**	
n	x									x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	1
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	1
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	3

n	x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1296	0,0625	0
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,4096	0,4219	0,4116	0,3456	0,2500	1
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,1536	0,2109	0,2646	0,3456	0,3750	2
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0256	0,0469	0,0756	0,1536	0,2500	3
	4		0,0000	0,0001	0,0016	0,0039	0,0081	0,0256	0,0625	4

1. Comencemos analizando el título de la tabla...

- La tabla tiene la letra D para indicar que corresponde a una **distribución de probabilidad** y el número uno indica su lugar, o sea, ésta es la primera tabla.
- Se indica a qué distribución corresponde: **DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**.
- Y luego aparece **f(x)**, esto nos indica que los valores de la tabla corresponden a la función de probabilidad de masa, es decir, f(x) = P(X=x).

2. Analicemos sus partes...

- En toda tabla aparecen los *parámetros* que caracterizan a la distribución en cuestión y los posibles valores que puede tomar la variable X para los distintos valores que tomen los parámetros.
- En este caso, los parámetros de la distribución binomial son **n** y **p**.

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

n	p / x	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,40**	**0,50**	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	1
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	1
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	3

- En el encabezado aparece la letra **p**, que es la *probabilidad de éxito* en la distribución binomial, y a continuación varios valores de p.

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

n	p / x	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,40**	**0,50**	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	1
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	1
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	3

- Esta tabla presenta dos **columnas matrices** (y una tercera, la última, donde se repite la segunda para una mejor lectura de la tabla).

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

n	x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	1
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	1
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	3

- Las columnas matrices son las dos primeras, donde aparecen distintos valores para **n**, que es la *cantidad de veces que se realiza el experimento*, y los posibles valores de la variable **X**, según la cantidad de veces que se hizo el experimento. Por ejemplo, para el caso de n = 3, es decir, al realizar tres veces el experimento, la variable X, definida como la *cantidad de éxitos al realizar n veces el experimento*, puede tomar los valores 0, 1, 2, 3.

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

n	x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	1
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	1
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	3

- Reconocidas las partes de la tabla (encabezados de columnas y columnas matrices), analizaremos el **cuerpo** de la tabla propiamente dicho.
- En el cuerpo de esta tabla se indican los valores de la función de probabilidad de masa, **f(x)**, es decir, la probabilidad de que la variable X tome un particular valor x, para los parámetros n y p, en una distribución binomial.

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

n	x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	1
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	1
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	3

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar un particular valor de la función de probabilidad de masa, f(x).
   - Así, por ejemplo, la probabilidad de que la variable binomial X tome el valor 2, para n = 3 y p = 0,25, es 0,1406.

Tabla D.1: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: f(x)

n	p / x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,2000	0,2500	0,3000	0,4000	0,5000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,5000	1
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0625	0,0900	0,1600	0,2500	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4219	0,4410	0,4320	0,3750	1
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1406	0,1890	0,2880	0,3750	2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0156	0,0270	0,0640	0,1250	3

Tabla D.2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: F(x)

A continuación se presenta una parte de la tabla, más precisamente, las primeras diez columnas y la última de la primera página, con las primeras veinte filas.

Tabla D.2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: F(x)

n	p / x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8400	0,7500	1
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,6480	0,5000	1
	2	1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9360	0,8750	2
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1296	0,0625	0
	1	0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,4752	0,3125	1
	2	1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8208	0,6875	2
	3		1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9744	0,9375	3
	4			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	4

1. Comencemos analizando el título de la tabla...
   - Ya sabemos que usamos la letra D para indicar que corresponde a una **distribución de probabilidad** y el número dos indica su lugar, o sea, ésta es la segunda tabla.

- Se indica a qué distribución corresponde: **DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**.
- Y luego aparece **F(x)**, esto nos indica que los valores de la tabla corresponden a la función de probabilidad acumulada, es decir, $P(X \leq x)$.

2. Analicemos sus partes...

- Como en la tabla D.1, en esta tabla aparecen distintos valores para los parámetros de la distribución binomial y los posibles valores que toma la variable binomial X, en esas condiciones.
- A continuación se indica el caso en que n = 3.

Tabla D.2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: F(x)

n	x \ p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8400	0,7500	1
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,6480	0,5000	1
	2	1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9360	0,8750	2
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3

- En el **cuerpo** de esta tabla se indican los valores de la función de probabilidad acumulada, **F(x)**, es decir, la probabilidad de que la variable X tome valores menores o iguales a un particular valor x, para los parámetros n y p, en una distribución binomial.

Tabla D.2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: F(x)

n	x \ p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8400	0,7500	1
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,6480	0,5000	1
	2	1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9360	0,8750	2
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar un particular valor de la función de probabilidad acumulada, F(x).

- Así, por ejemplo, la probabilidad de que la variable binomial X tome un valor menor o igual que 2, para n = 3 y p = 0,25, es 0,9844.
- Podemos verificar, comparando con la tabla D.1, que para n=3 y p=0,25:
  $F(x=2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0{,}4219 + 0{,}4219 + 0{,}1406 = 0{,}9844$

Tabla D.2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: F(x)

n	p / x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	x
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0
	1	0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8400	0,7500	1
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0
	1	0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,6480	0,5000	1
	2	1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9360	0,8750	2
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3

Tabla D.3: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: f(x)

A continuación se presenta una parte de la tabla D.3, más precisamente, las primeras cinco columnas y las últimas cinco columnas de la primera página, con las primeras trece filas.

Tabla D.3: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: f(x)

$\lambda=\mu$ / x	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	$\lambda=\mu$ / x
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	1
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	2
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	3
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	4
5		0,0000	0,0000	0,0001	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	5
6				0,0000	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	6
7					0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	7
8					0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	8
9					0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	9
10					0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	10

1. Comencemos analizando el título de la tabla...
   - Es la tabla D.3, ya sabemos que así se indica el tipo de tabla y su orden.
   - La tabla corresponde a la **DISTRIBUCIÓN de POISSON**.
   - Y luego aparece **f(x)**, esto nos indica que los valores de la tabla corresponden a la función de probabilidad de masa, es decir, f(x) = P(X=x).

2. Analicemos sus partes...
   - Como en toda tabla aparecen los *parámetros* que caracterizan a la distribución en cuestión y los posibles valores que puede tomar la variable X para los distintos valores que tomen los parámetros.
   - En este caso, tenemos un solo parámetro, es el valor del parámetro de ocurrencia, que a su vez, es la media, indicado como $\lambda = \mu$.
   - En el **encabezado de columnas** aparecen distintos valores de $\lambda = \mu$.

Tabla D.3: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: f(x)

$\lambda=\mu$ / x	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	$\lambda=\mu$ / x
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	1
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	2
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	3

4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	4
5		0,0000	0,0000	0,0001	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	5
6				0,0000	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	6
7					0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	7
8					0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	8
9					0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	9
10					0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	10
11					0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	11
12						0,0001	0,0002	0,0006	12
13						0,0000	0,0001	0,0002	13
14							0,0000	0,0001	14
15								0,0000	15

- Esta tabla presenta dos **columnas matrices**, la primera y la última, que se repiten para una mejor lectura de la tabla. Estas columnas presentan los posibles valores de la variable de Poisson X para los valores del parámetro.

Tabla D.3: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: f(x)

$\lambda=\mu$	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	$\lambda=\mu$
x									x
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	1
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	2
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	3
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	4
5		0,0000	0,0000	0,0001	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	5
6				0,0000	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	6
7					0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	7
8					0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	8
9					0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	9
10					0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	10
11					0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	11
12						0,0001	0,0002	0,0006	12
13						0,0000	0,0001	0,0002	13
14							0,0000	0,0001	14
15								0,0000	15

- Una vez que hemos reconocido las partes de la tabla en sus encabezados de columnas y columnas matrices, analizaremos el **cuerpo** de la tabla propiamente dicho.
- En el cuerpo de esta tabla se indican los valores de la función de probabilidad de masa, **f(x)**, es decir, la probabilidad de que la variable X tome un particular valor x, f(x) = P(X=x), para el parámetro $\lambda = \mu$, en una distribución de Poisson.

Tabla D.3: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: f(x)

$\lambda=\mu$	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	$\lambda=\mu$
x									x
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	1
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	2
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	3
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	4
5		0,0000	0,0000	0,0001	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	5
6				0,0000	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	6
7					0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	7
8					0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	8
9					0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	9
10					0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	10
11					0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	11
12						0,0001	0,0002	0,0006	12
13						0,0000	0,0001	0,0002	13
14							0,0000	0,0001	14
15								0,0000	15

Distribuciones discretas

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar un particular valor de la función de probabilidad de masa, f(x).
   - Así, por ejemplo, la probabilidad de que la variable de Poisson X tome el valor 7, para $\lambda = \mu = 3$, es 0,0216.

Tabla D.3: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: f(x)

λ = μ x	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	λ = μ x
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	1
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	2
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	3
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	4
5		0,0000	0,0000	0,0001	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	5
6				0,0000	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	6
7					0,0099	**0,0216**	0,0385	0,0595	7
8					0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	8
9					0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	9
10					0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	10
11					0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	11
12						0,0001	0,0002	0,0006	12
13						0,0000	0,0001	0,0002	13
14							0,0000	0,0001	14
15								0,0000	15

Tabla D.4: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: F(x)

A continuación se presenta una parte de la tabla D.4, más precisamente, las primeras cinco columnas y las últimas cinco columnas de la primera página, con las primeras diecisiete filas.

Tabla D.4: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: F(x)

λ = μ x	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	λ = μ x
0	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	1
2	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	2
3	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	3
4	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	4
5	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	5
6	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	6
7	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	7
8	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	8
9	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	9
10	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	10
11	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	11
12		1,0000	0,9999	0,9997		1,0000	0,9999	0,9997	12
13			1,0000	0,9999			1,0000	0,9999	13
14				1,0000				1,0000	14

1. Comencemos analizando el título de la tabla...
   - Estamos frente a la tabla D.4, o sea, es la cuarta tabla correspondiente a una **distribución de probabilidad**.

- Se indica a qué distribución corresponde: **DISTRIBUCIÓN DE POISSON**.
- Y luego aparece **F(x)**, esto nos indica que los valores de la tabla corresponden a la función de probabilidad acumulada, es decir, $P(X \leq x)$.

2. Analicemos sus partes...
   - Como en la tabla D.3, en esta tabla aparecen distintos valores del parámetro de la distribución de Poisson y los posibles valores que toma la variable de Poisson X.

Tabla D.4: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: F(x)

$\lambda = \mu$ / x	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	$\lambda = \mu$ / x
0	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	1
2	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	2
3	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	3
4	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	4
5	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	5
6	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	6
7	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	7
8	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	8
9	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	9
10	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	10
11	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	11
12		1,0000	0,9999	0,9997		1,0000	0,9999	0,9997	12
13			1,0000	0,9999			1,0000	0,9999	13
14				1,0000				1,0000	14

- En el **cuerpo** de esta tabla se indican los valores de la función de probabilidad acumulada, **F(x)**, es decir, la probabilidad de que la variable X tome valores menores o iguales a un particular valor x, para un determinado parámetro λ, en una distribución de Poisson.

Tabla D.4: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: F(x)

$\lambda = \mu$ / x	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	$\lambda = \mu$ / x
0	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	1
2	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	2
3	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	3
4	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	4
5	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	5
6	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	6
7	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	7
8	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	8
9	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	9
10	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	10
11	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	11
12		1,0000	0,9999	0,9997		1,0000	0,9999	0,9997	12
13			1,0000	0,9999			1,0000	0,9999	13
14				1,0000				1,0000	14

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar un particular valor de la función de probabilidad acumulada, F(x).
   - Así, por ejemplo, la probabilidad de que la variable de Poisson X tome un valor menor o igual que 7, para $\lambda = 3$, es 0,9881.

- Podemos verificar, comparando con la tabla D.3, que:
  F(x=7; λ = 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) =
  = 0,0498 + 0,1494 + 0,2240 + 0,2240 + 0,1680 + 0,1008 + 0,0504 + 0,0216 =
  = 0,9881

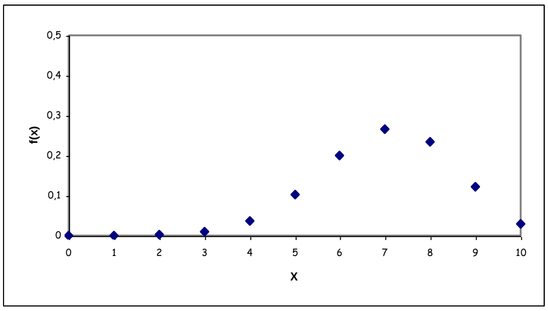
Tabla D.4: DISTRIBUCIÓN DE POISSON: F(x)

$\lambda=\mu$ / x	0,1	0,2	0,3	0,4	2,5	3	3,5	4	$\lambda=\mu$ / x
0	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0
1	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	1
2	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	2
3	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	3
4	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	4
5	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	5
6	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	6
7	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	7
8	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	8
9	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	9
10	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	10
11	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	11
12		1,0000	0,9999	0,9997		1,0000	0,9999	0,9997	12
13			1,0000	0,9999			1,0000	0,9999	13
14				1,0000				1,0000	14

Gráficas de las distribuciones discretas de probabilidad

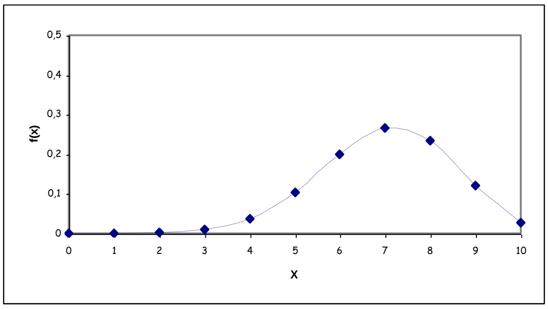
Realizaremos el análisis de las gráficas de las distribuciones estudiadas para observar su comportamiento al ir variando sus parámetros.

Sabemos que las gráficas de la función de probabilidad de masa para distribuciones de variables discretas tienen un aspecto como el siguiente:



Para observar mejor el comportamiento de la función y su variabilidad a lo largo del rango de la variable, uniremos los puntos (x, f(x)) mediante una línea de puntos, como se ve en el siguiente gráfico, aunque esto no es correcto al representar funciones con variables aleatorias discretas. Si usted tuviera que representar una de estas funciones NO debe unir los puntos, nosotros lo hemos hecho sólo con fines didácticos:

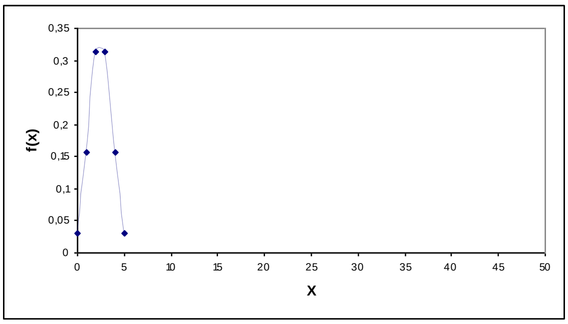
Distribuciones discretas



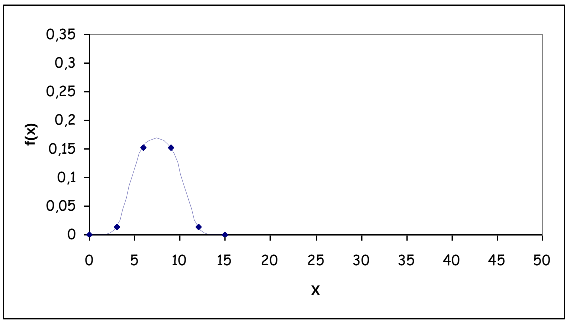
Distribución binomial

- p = 0,5 con distintos valores de n

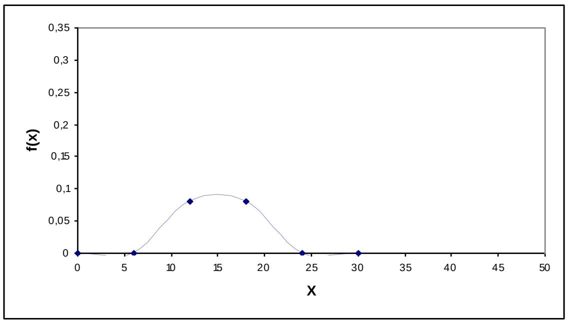
n = 5



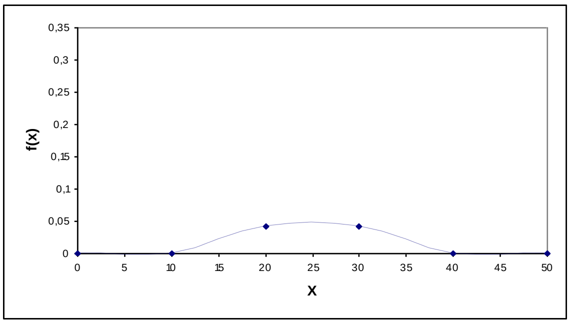
n = 15



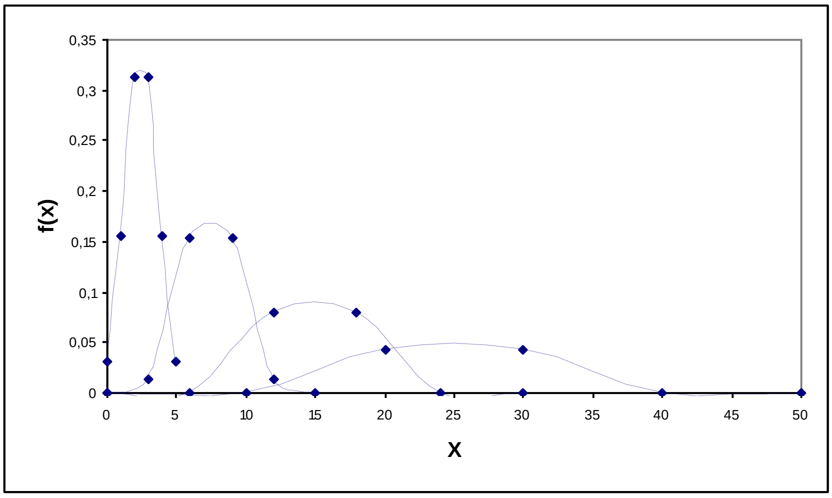
n = 30



n = 50

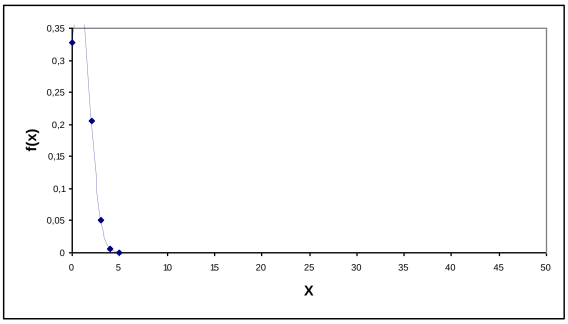


En resumen...

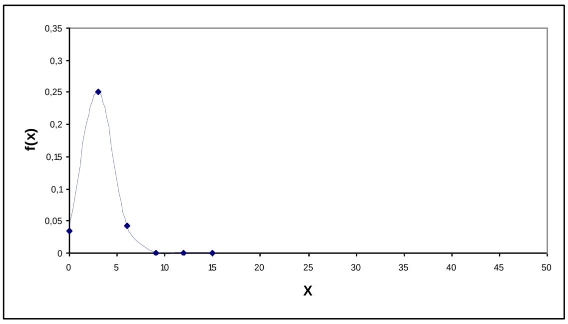


- **p < 0,5 con distintos valores de n**

n = 5; p = 0,2

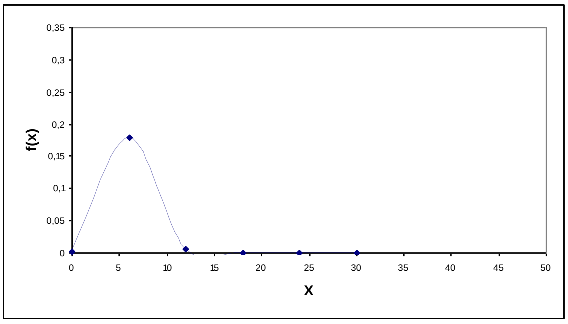


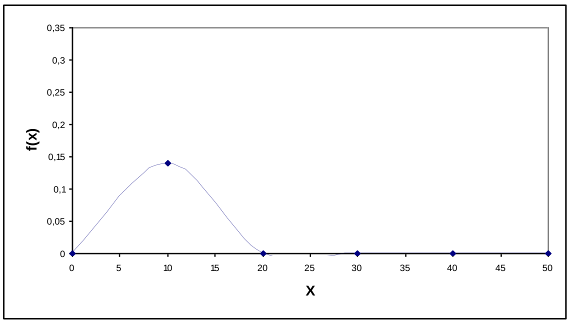
n = 15; p = 0,2



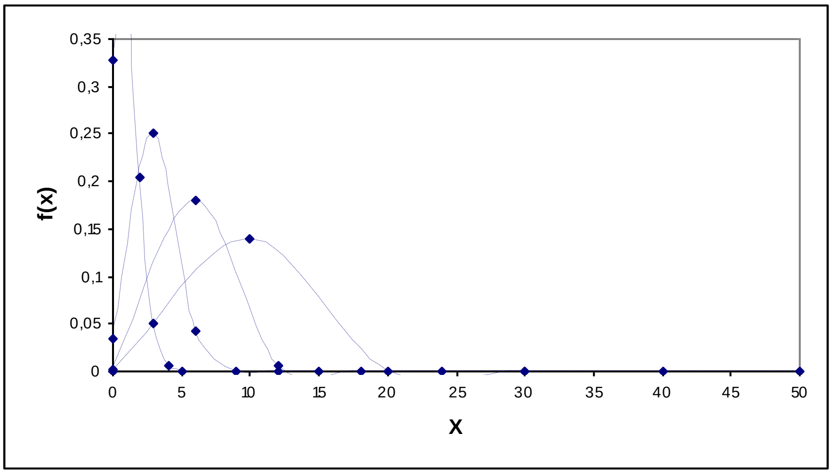
n = 30; p = 0,2

n = 50; p = 0,2



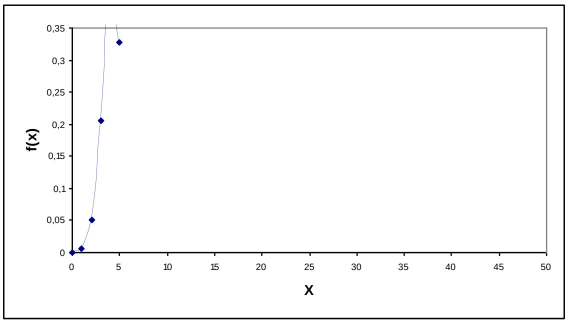


En resumen...

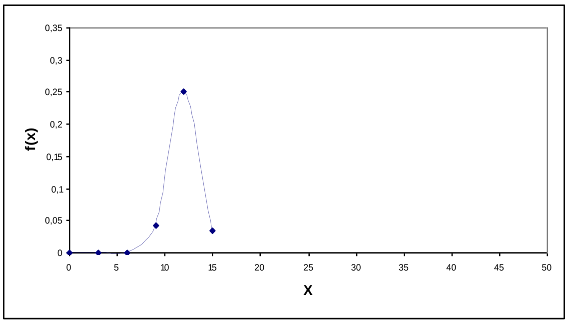


- **p > 0,5 con distintos valores de n**

n = 5; p = 0,8

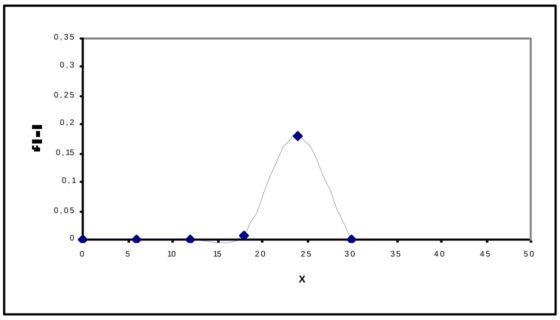


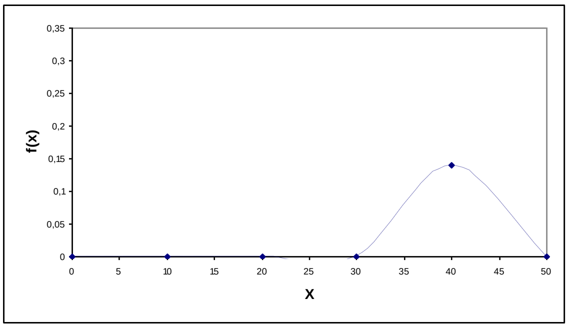
n = 15; p = 0,8



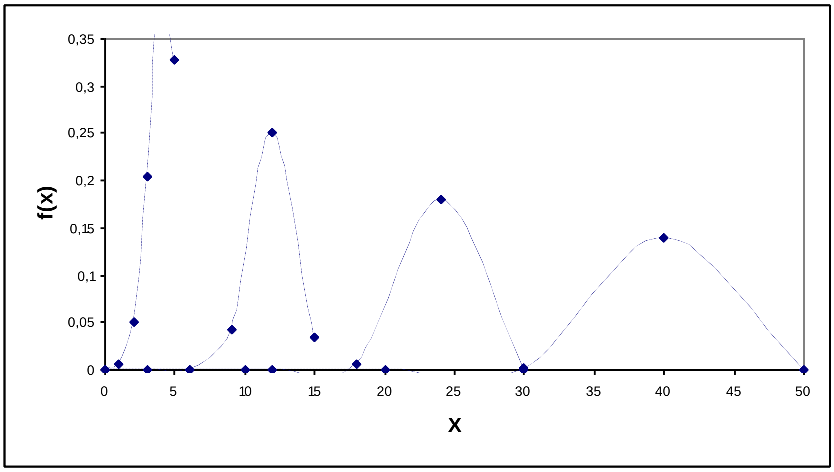
n = 30; p = 0,8

n = 50; p = 0,8



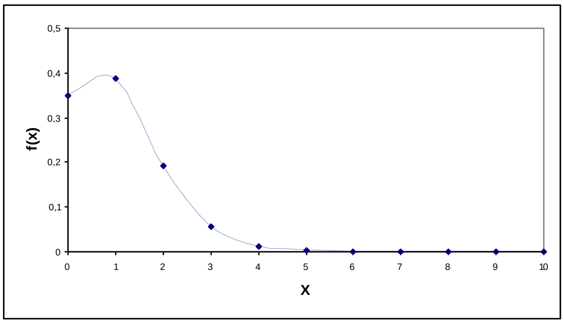


En resumen...

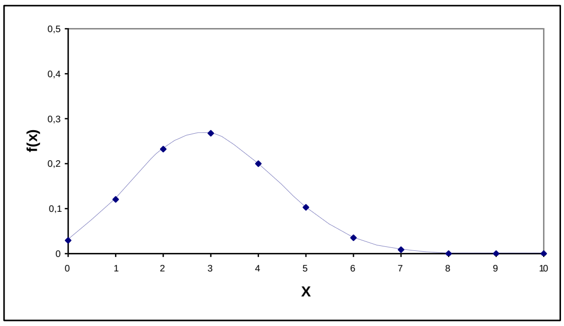


- **n = 10 y distintos valores de p**

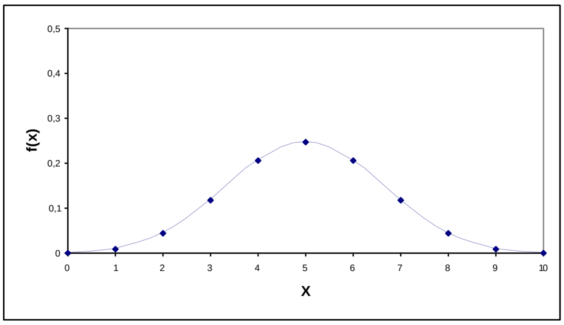
p = 0,1



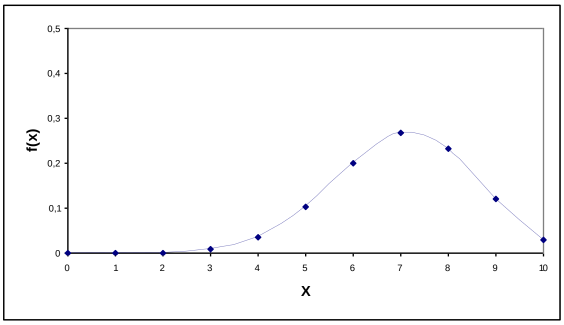
p = 0,3



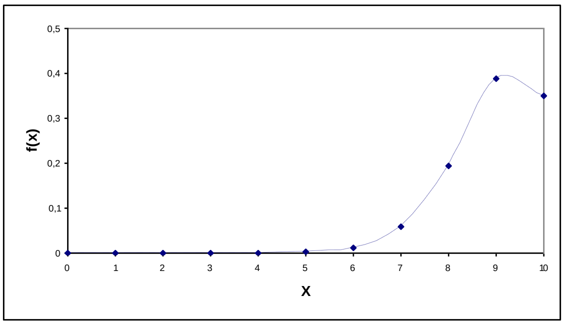
p = 0,5



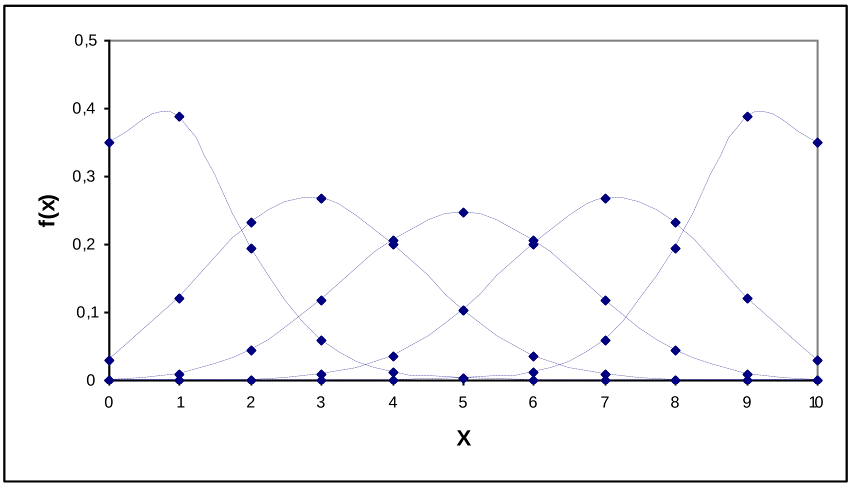
p = 0,7



p = 0,9

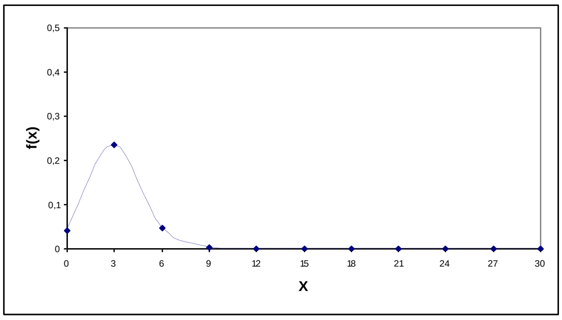


En resumen...

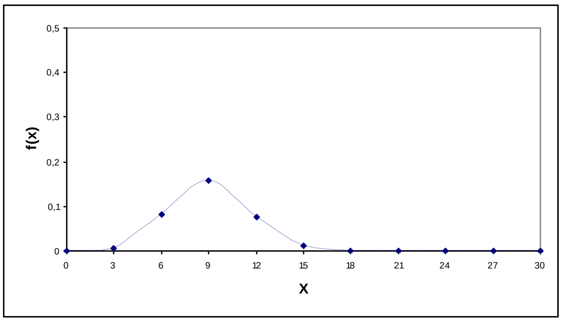


- **n = 30 y distintos valores de p**

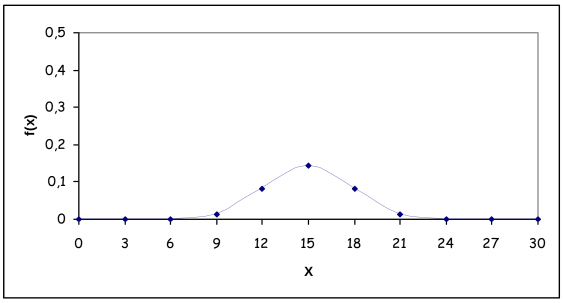
p = 0,1



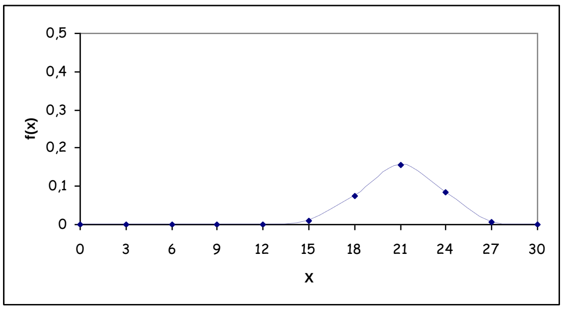
p = 0,3



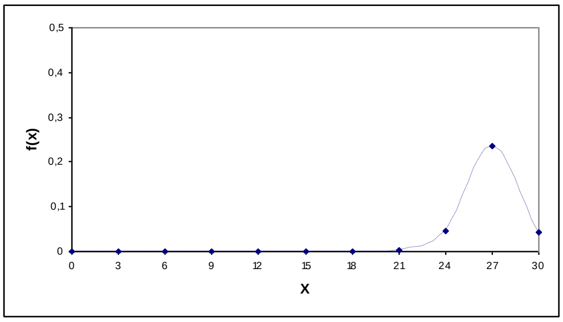
p = 0,5



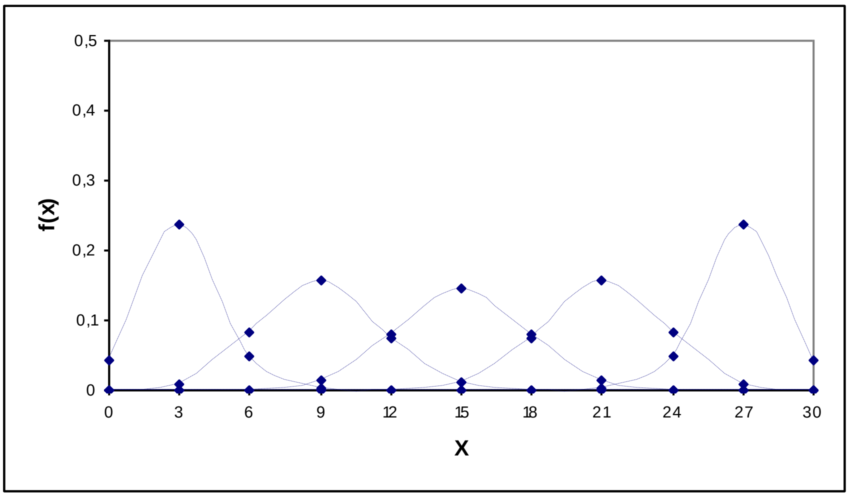
p = 0,7



p = 0,9

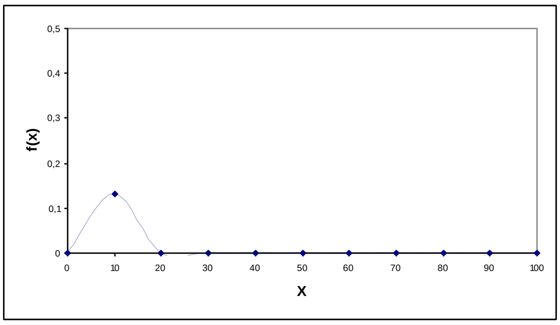


En resumen...

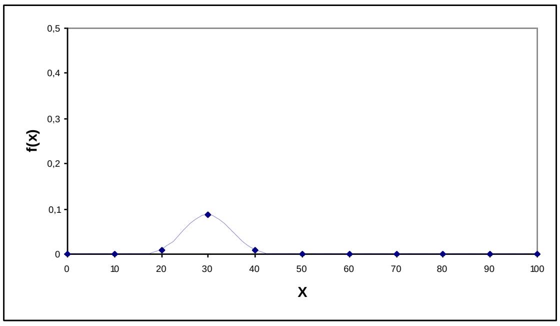


- **n = 100 y distintos valores de p**

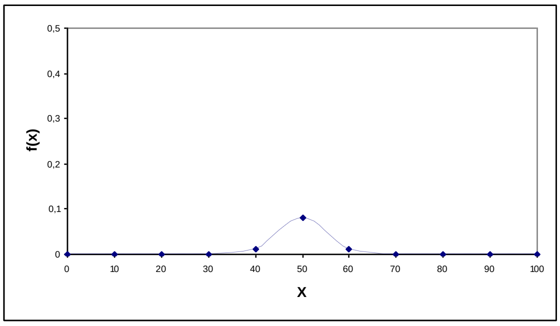
p = 0,1



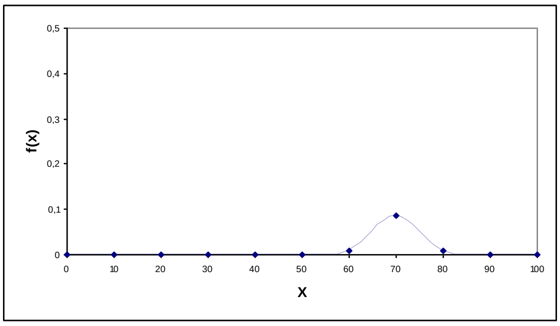
p = 0,3



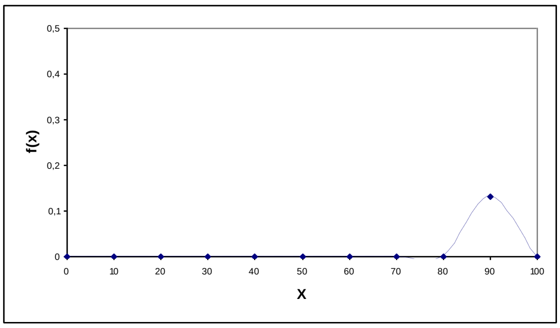
p = 0,5



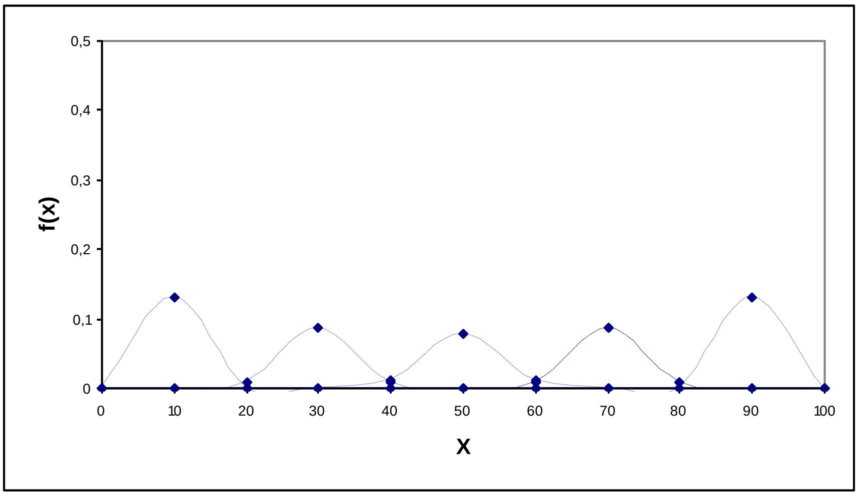
p = 0,7



p = 0,9



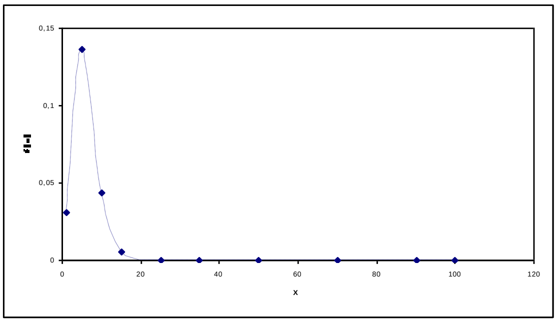
En resumen...



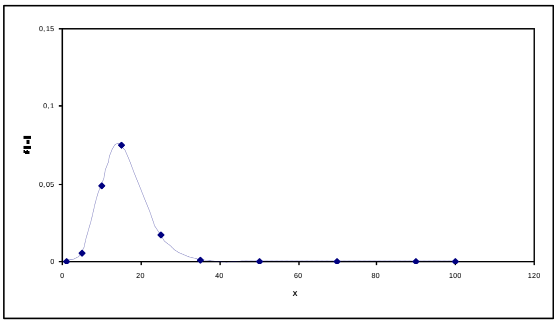
Distribución binomial negativa

- **p = 0,5 con distintos valores de r**

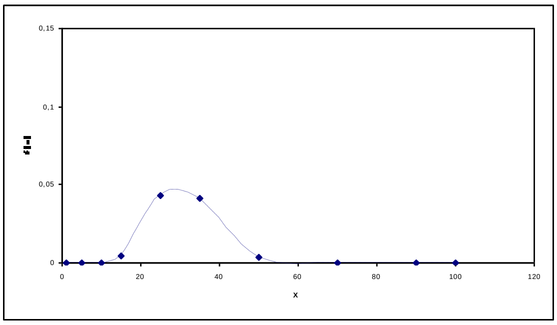
r = 5



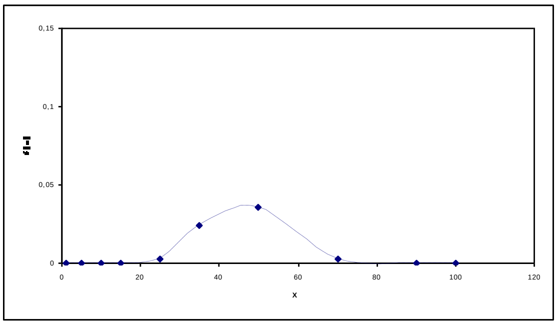
r = 15



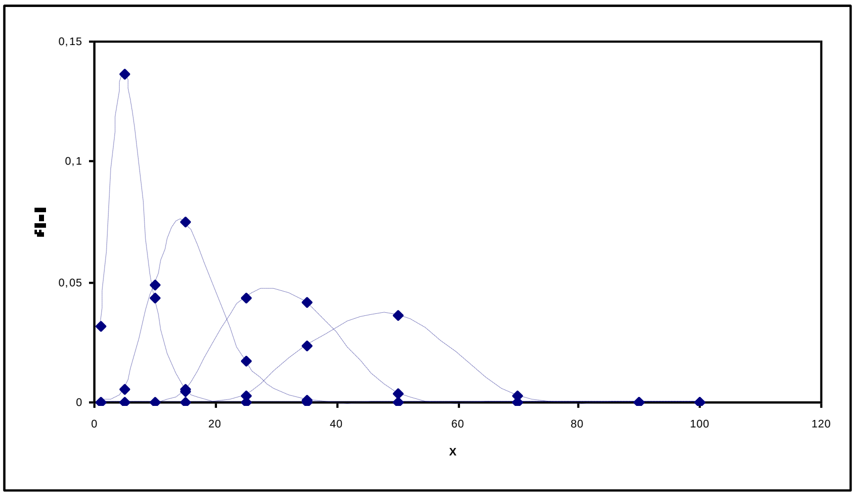
r = 30



r = 45

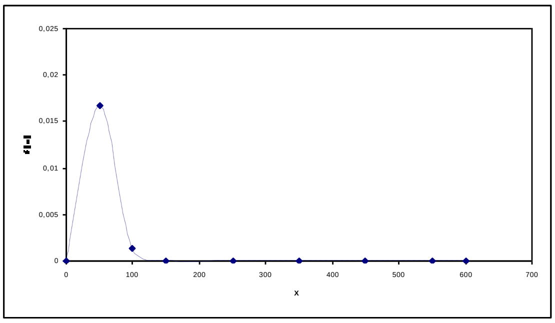


En resumen...

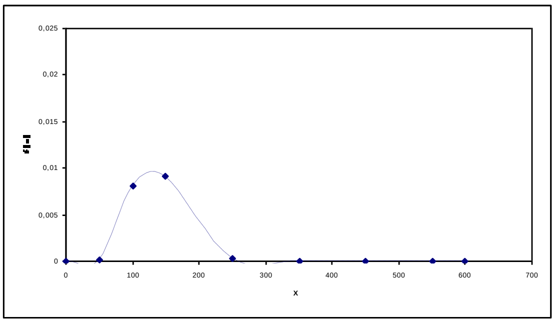


- **p < 0,5 cor distintos valores de r**

r = 5

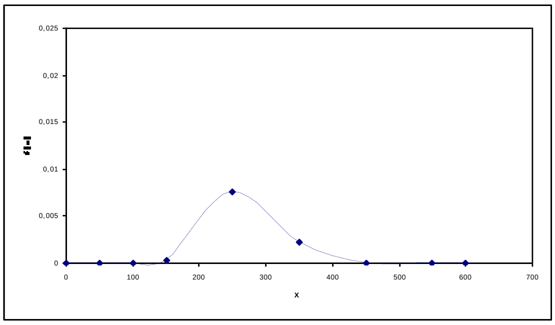


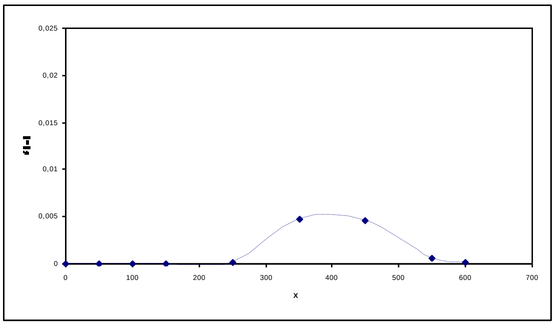
r = 15



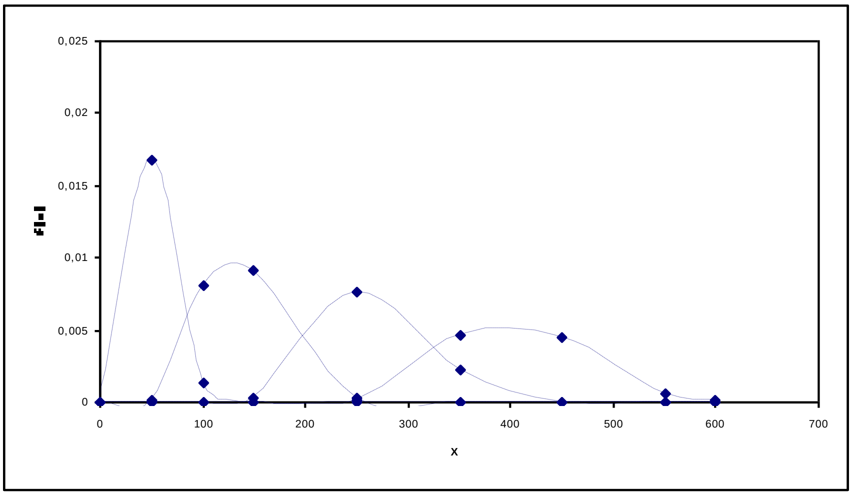
r = 30

r = 45



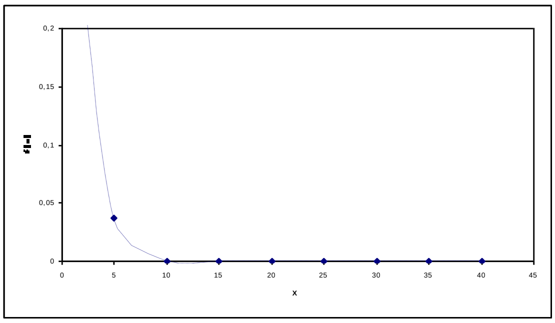


En resumen...

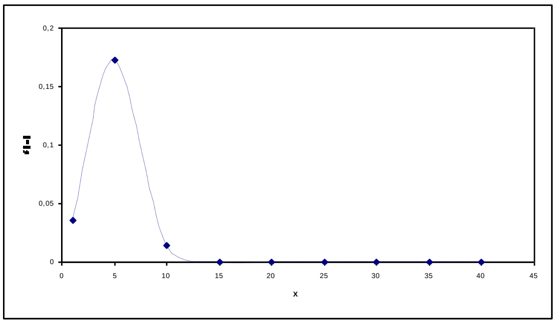


- **p > 0,5 cor distintos valores de r**

r = 5

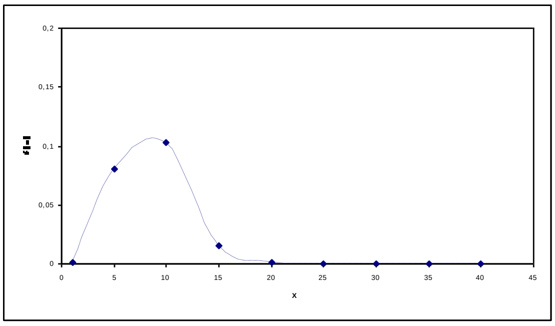


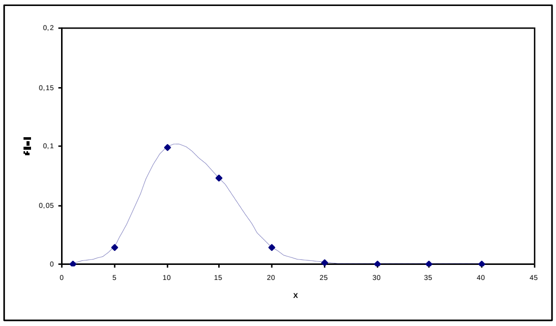
r = 15



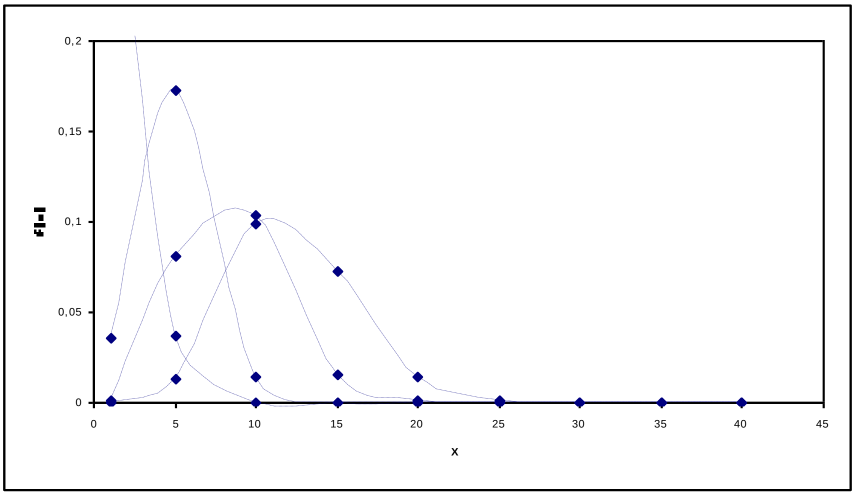
r = 30

r = 45



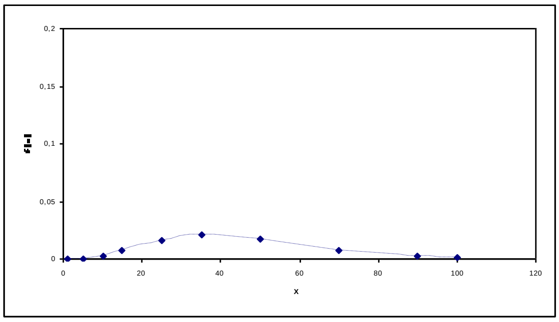


En resumen...

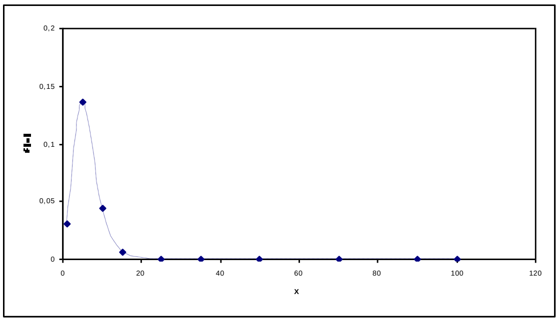


- **r = 5 y distintos valores de p**

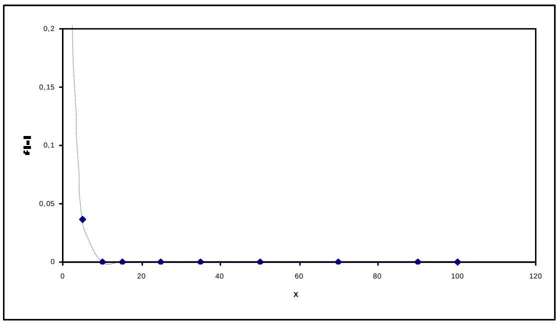
p = 0,1



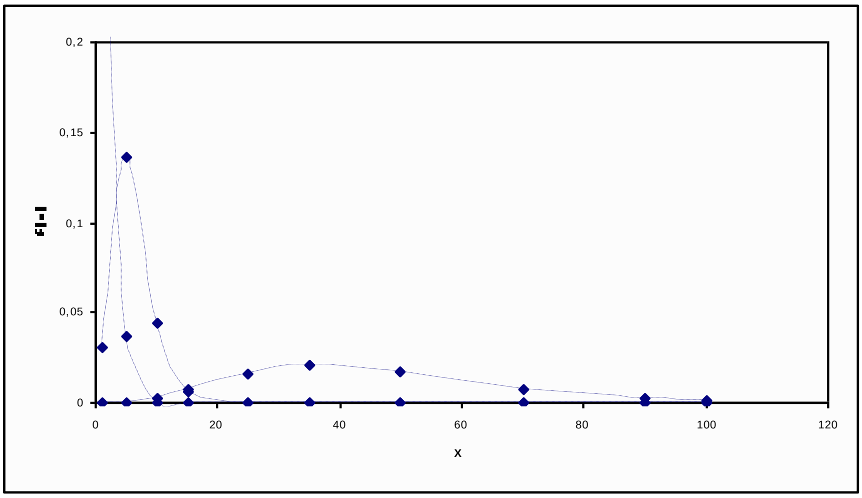
p = 0,5



p = 0,8

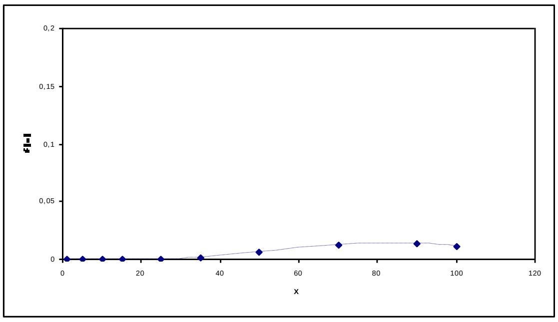


En resumen...

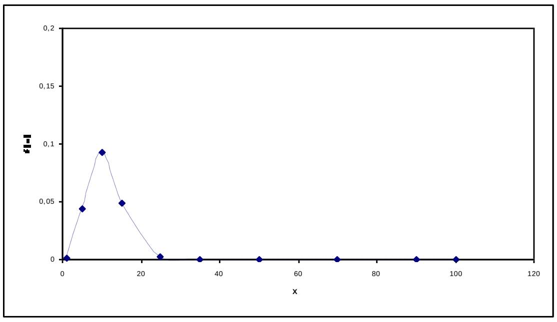


- **r = 10 y distintos valores de p**

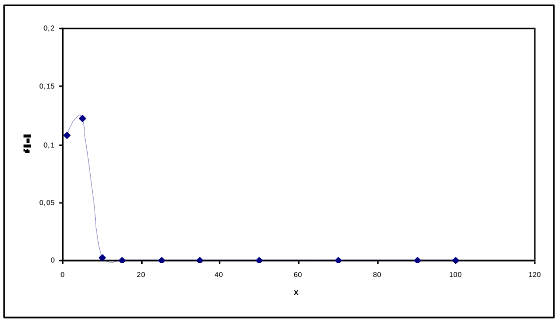
p = 0,1



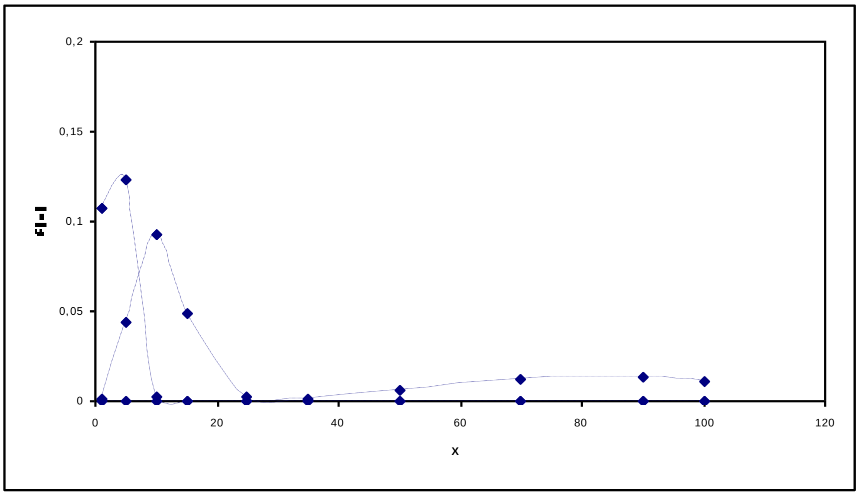
p = 0,5



p = 0,8

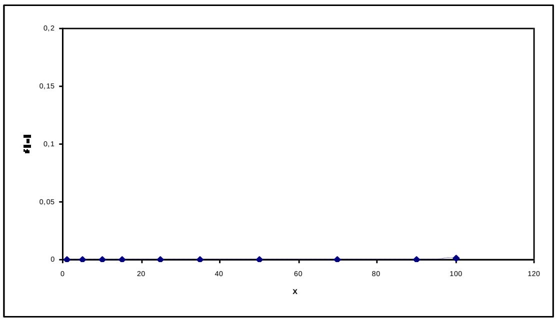


En resumen...

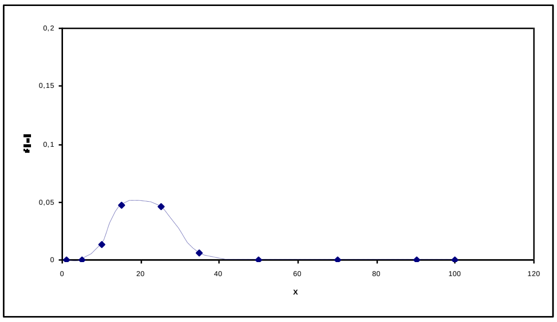


- **r = 20 y distintos valores de p**

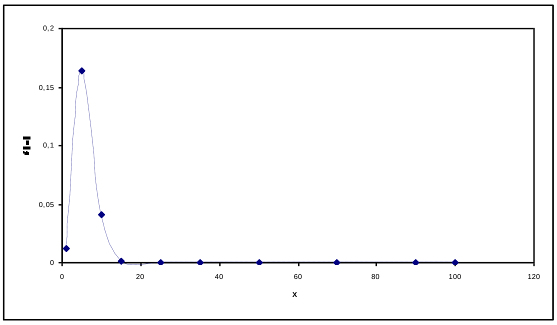
p = 0,1



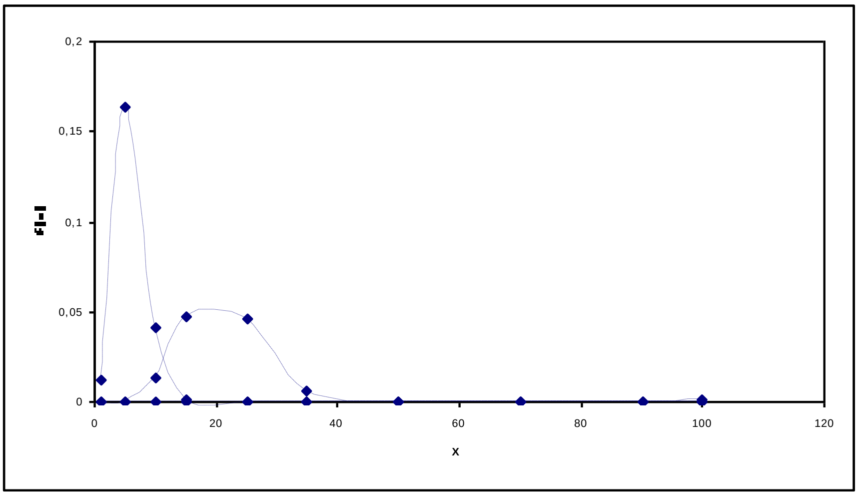
p = 0,5



p = 0,8

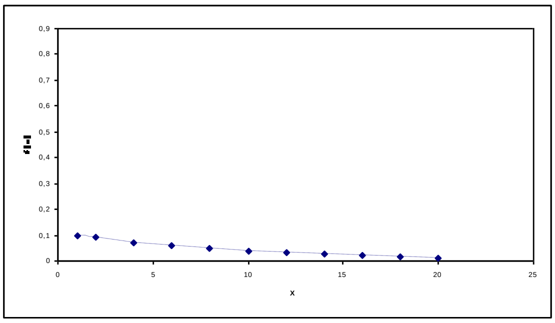


En resumen...

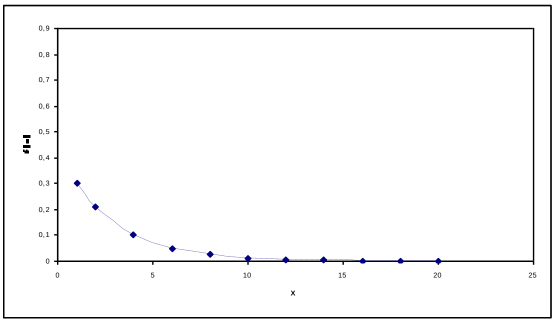


Distribución geométrica

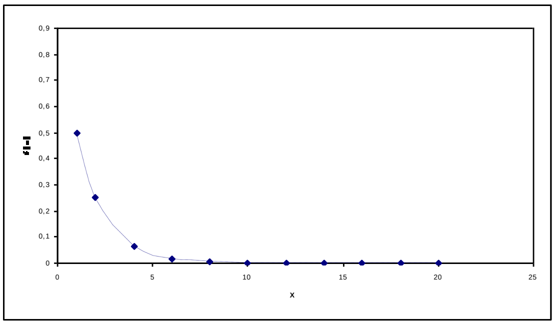
p = 0,1



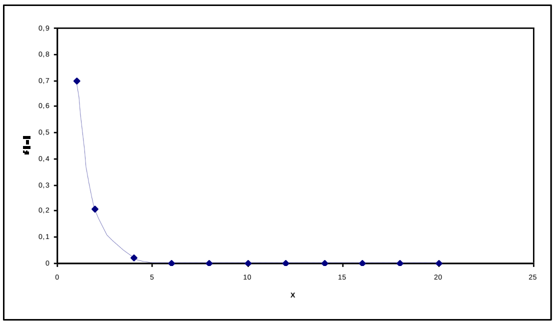
p = 0,3



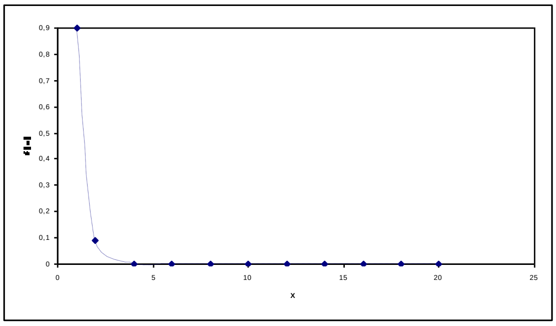
p = 0,5



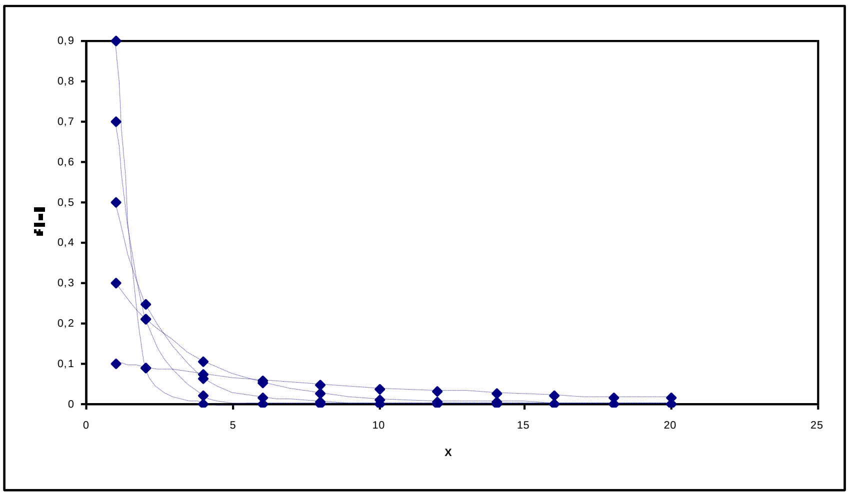
p = 0,7



p = 0,9



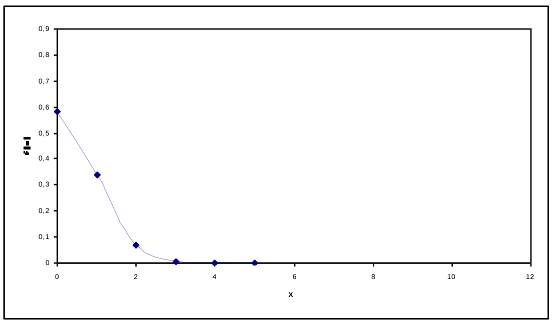
En resumen...



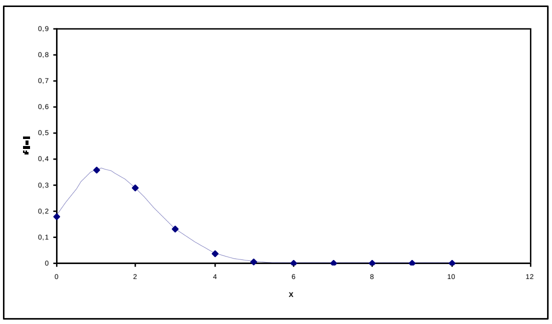
Distribución hipergeométrica

- **N = 100, M = 10 y distintos valores de n (p = M/N = 0,10)**

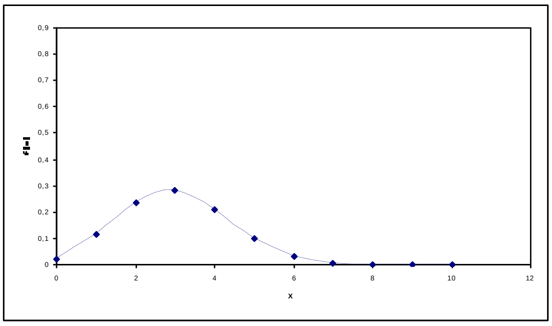
n = 5



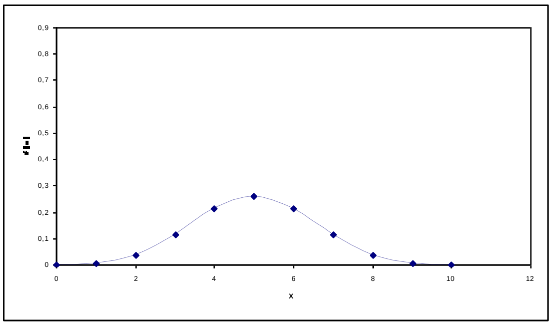
n = 15



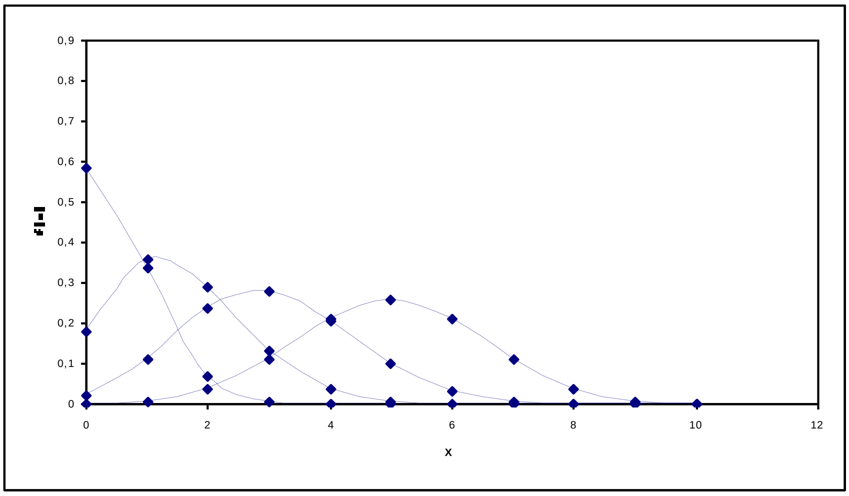
n = 30



n = 50

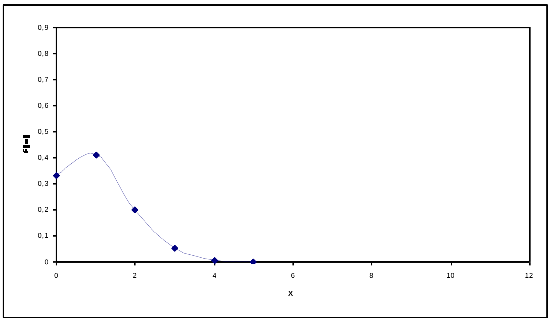


En resumen...

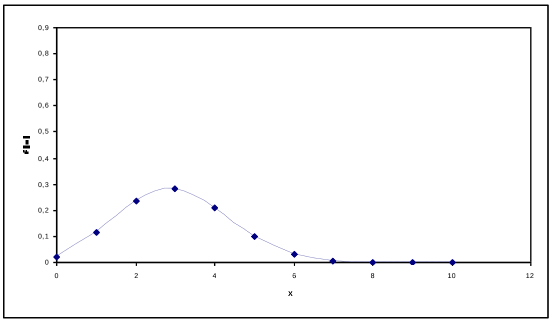


- N = 100, n = 10 y distintos valores de M

M = 10 (p = M/N = 0,10)

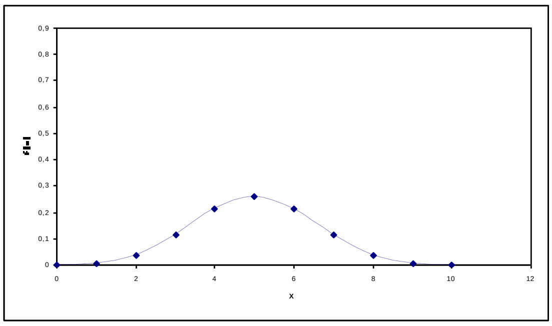


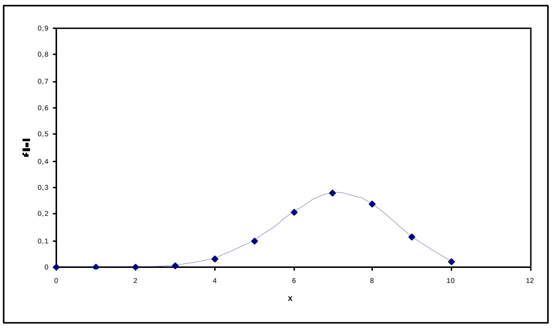
M = 30 (p = M/N = 0,30)



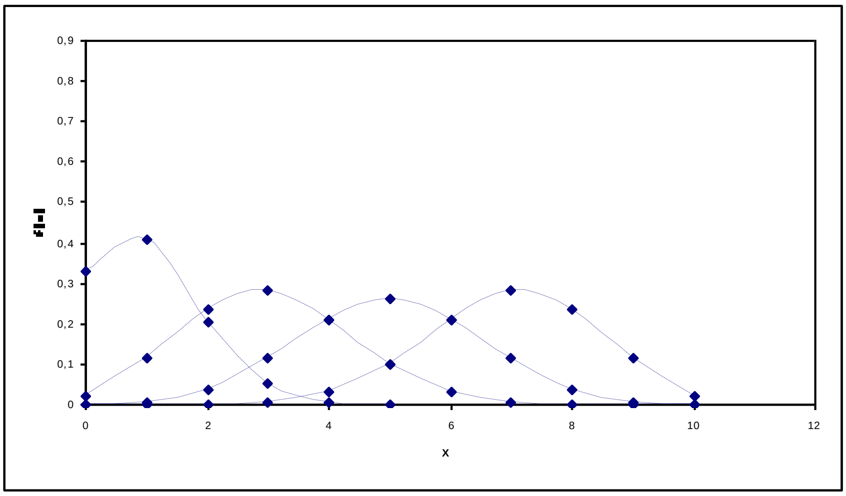
M = 50 (p = M/N = 0,50)

M = 70 (p = M/N = 0,70)



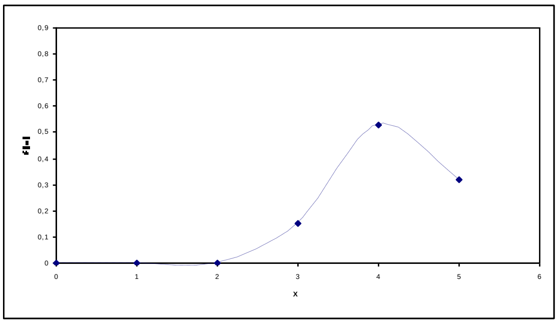


En resumen...

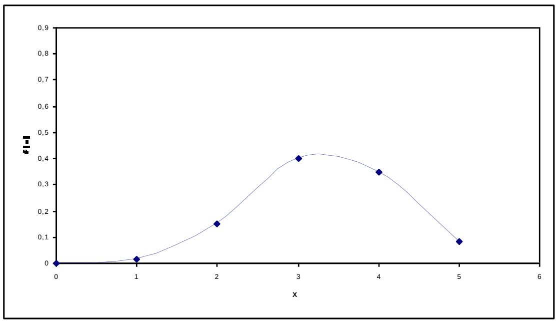


- **M = 10, n = 5 y distintos valores de N**

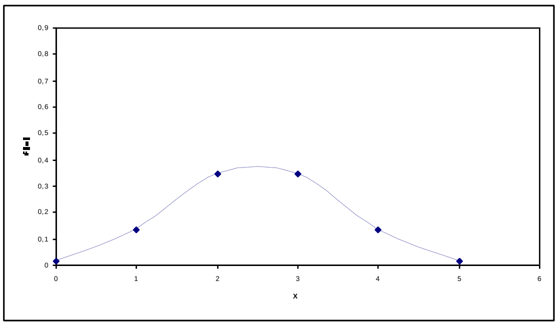
N = 12 (p = M/N = 0,83…)



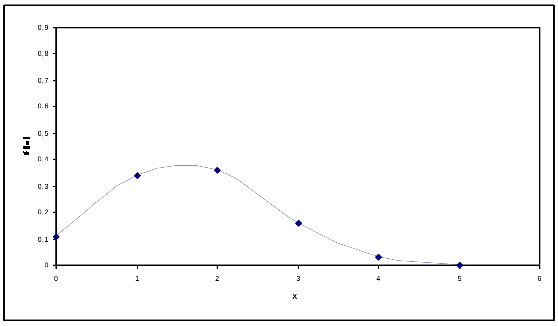
N = 15 (p = M/N = 0,66…)

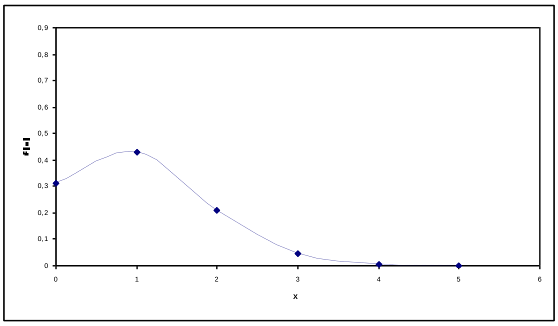


N = 20 (p = M/N = 0,50)

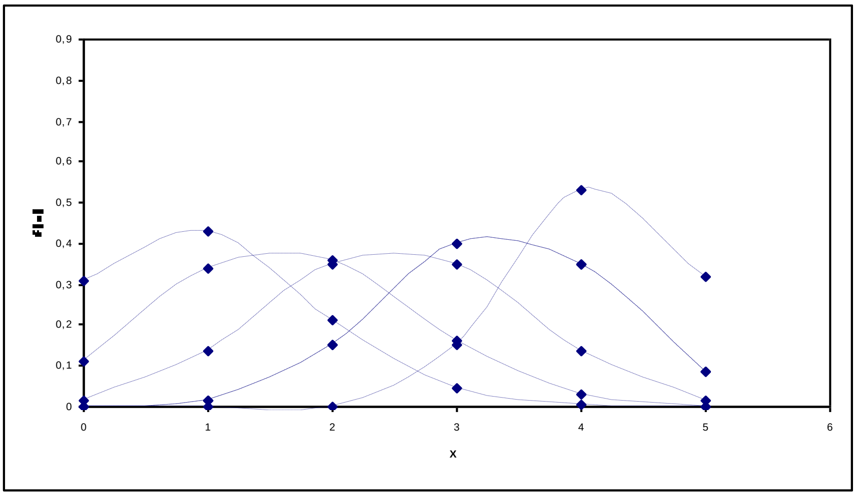


N = 30 (p = M/N = 0,33...) N = 50 (p = M/N = 0,20)



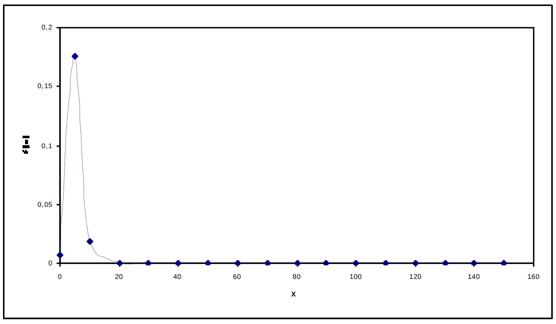


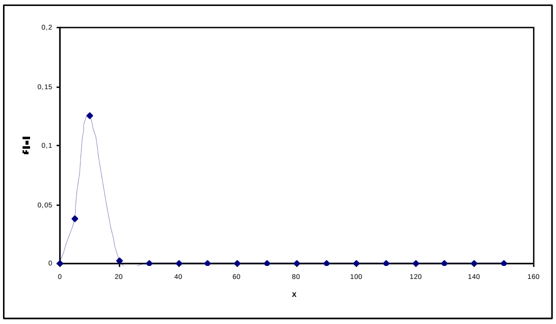
En resumen...



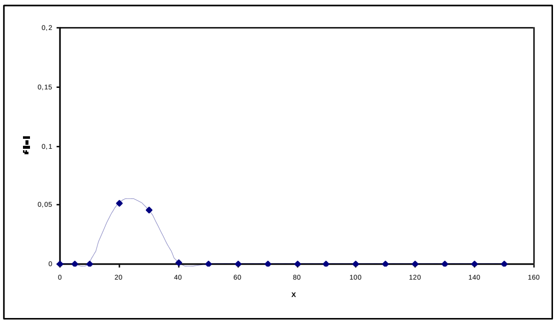
Distribución de Poisson

$\lambda = 5$ $\lambda = 10$

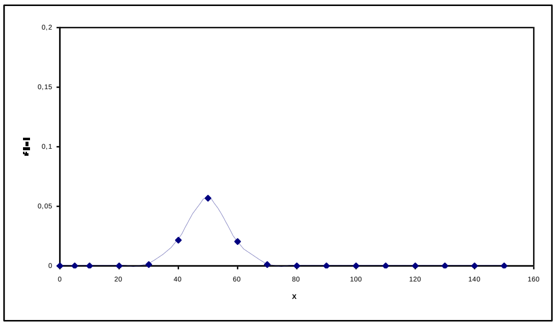




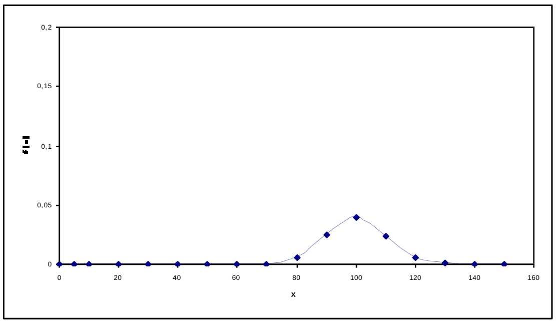
$\lambda = 25$



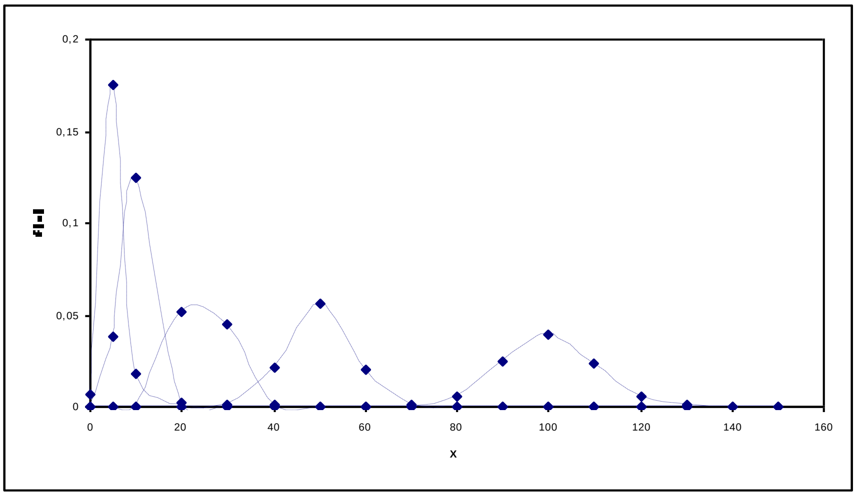
λ = 50



λ = 100



En resumen...



Para pensar

1. Analice el comportamiento de cada una de las distribuciones, según la variación de sus parámetros:

Distribución binomial

- Cuando p = 0,5, para cualquier valor de ....., la distribución es .... respecto del eje x = ...
- Cuando p < 0,5, la distribución es .... y a medida que el valor de .... aumenta se hace más ....

- Cuando p > 0,5, la distribución es .... y a medida que el valor de .... aumenta se hace más ....
- En general, para valores de p ...... 0,5, la distribución es .... y a medida que el valor de .... aumenta se hace más ....
- Para valores grandes de n, la distribución es ....
- En general, para distintos valores de n, la distribución es .... y a medida que el valor de .... aumenta se hace más ....

Distribución binomial negativa

- En general, para cualquier valor de p, la distribución es .... y, a medida que .... aumenta se hace más ....
- Para p = 0,5, la distribución tiende a ser .... y, a medida que .... aumenta se hace más ....

Distribución geométrica

- Cualquiera sea el valor de p, la distribución es ....
- A medida que p aumenta, la distribución es más ....

Distribución hipergeométrica

- Cuando n tiende a infinito, para cualquier valor de ..... y de ...., la distribución tiende a ser .... respecto al eje x = ...
- Cuando p = M/N = 0,5, la distribución es .... respecto al eje x = ...
- Cuando p = M/N < 0,5, la distribución es .... y a medida que el valor de .... aumenta se hace más ....
- Cuando p = M/N > 0,5, la distribución es .... y a medida que el valor de .... aumenta se hace más ....

Distribución de Poisson

- Para valores pequeños de λ, la distribución es ....
- En general, a medida que el valor de λ aumenta, la distribución se hace ...., respecto a x = ...

Ejercicios integradores

1. Defina las condiciones para que una variable aleatoria corresponda a:

a) una distribución binomial.
b) una distribución de Poisson.
c) una distribución hipergeométrica.
d) una distribución binomial negativa.
e) una distribución geométrica.

Vamos a resolver cada ítem.

a) una distribución binomial.

- *Variable discreta*
- *Ensayos dicotómicos o dicotomizables*
- *Hay n ensayos, donde n es constante*
- *Los ensayos son independientes*
- *Todos los ensayos tienen la misma probabilidad de éxito (p)*

b) una distribución de Poisson.

- *Variable discreta*
- *Ensayos dicotómicos o dicotomizables*
- *Hay un parámetro o tasa de ocurrencia que se indica con λ, donde λ=n.p*
- *Regla práctica para aproximar binomial por Poisson, es:*
  - $n \geq 20$ y $p \leq 0{,}05$
  - $n \geq 30$ y $p \leq 0{,}10$
  - *la aproximación es excelente cuando* $n \geq 100$ *si* $n.p \leq 10$

c) una distribución hipergeométrica.

- *Variable discreta*
- *Ensayos dicotómicos o dicotomizables*
- *Hay n ensayos dependientes (muestra sin reemplazo)*

d) una distribución binomial negativa.

- *Variable discreta*
- *Ensayos dicotómicos o dicotomizables*
- *Hay n ensayos, donde n no es constante*
- *Los ensayos son independientes*
- *Todos los ensayos tienen la misma probabilidad de éxito (p)*
- *Se usa para calcular la probabilidad de que en el x-ésimo ensayo ocurra el r-ésimo éxito*

e) una distribución geométrica.

- *Variable discreta*
- *Ensayos dicotómicos o dicotomizables*
- *Hay n ensayos, donde n no es constante*
- *Los ensayos son independientes*
- *Todos los ensayos tienen la misma probabilidad de éxito (p)*
- *Se ensaya hasta encontrar un éxito (el primero). Es una binomial negativa con* $x = 1$

2. Una industria suministra un producto químico a diez plantas manufactureras. La probabilidad de que cualquiera de las plantas llame y haga un pedido en un determinado día es 0,2, y es la misma para las diez plantas. Calcule la probabilidad de que, en un día determinado, el número de plantas que llamen para hacer un pedido sean:

Distribuciones
discretas

a) a lo sumo tres.
b) por lo menos tres.
c) exactamente tres.

X: "Cantidad de plantas manufactureras que hacen un pedido en un día determinado"
X ~ Binomial (n = 10 ; p = 0,2)

a) a lo sumo tres.

$$\mathbf{P(X \leq 3)} = \binom{10}{0} 0{,}2^0\, 0{,}8^{10-0} + \binom{10}{1} 0{,}2^1\, 0{,}8^{10-1} + \binom{10}{2} 0{,}2^2\, 0{,}8^{10-2} +$$
$$+ \binom{10}{3} 0{,}2^3\, 0{,}8^{10-3} = 0{,}1074 + 0{,}2684 + 0{,}3020 + 0{,}2013 =$$
$$= \mathbf{0{,}8791} \rightarrow \mathbf{87{,}91\,\%}$$

La probabilidad de que a lo sumo tres plantas manufactureras hagan un pedido en un determinado día es de 0,8791.

b) por lo menos tres.

$\mathbf{P(X \geq 3)} = P(X = 3) + P(X = 4) + ... + P(X = 10)$

Aunque también podemos calcularla así:

$$\mathbf{P(X \geq 3)} = 1 - P(X < 3) =$$
$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) =$$
$$= 1 - 0{,}1074 - 0{,}2684 - 0{,}3020 = \mathbf{0{,}3222} \rightarrow \mathbf{32{,}22\%}$$

¿Cómo se obtuvieron los valores 0,1074; 0,2684 y 0,3020?
Estos valores se obtienen de las tablas de probabilidades discretas, en este caso en particular, de la tabla D.1.

La probabilidad de que por lo menos tres plantas manufactureras hagan un pedido en un determinado día es de 0,3222.

c) exactamente tres.

$$\mathbf{P(X = 3)} = \binom{10}{3} 0{,}2^3\, 0{,}8^{10-3} = \mathbf{0{,}2013} \rightarrow \mathbf{20{,}13\%}$$

La probabilidad de que tres plantas manufactureras hagan un pedido en un determinado día es de 0,2013.

3. Una compañía de exploración petrolera va a perforar diez pozos, y cada uno de ellos tienen una probabilidad 0,1 de producir petróleo en forma comercial. A la compañía le cuesta $10.000 perforar cada pozo. Un pozo comercial saca petróleo por valor de $500.000.
Calcule:

a) la probabilidad de que exactamente cuatro pozos produzcan en forma comercial.
b) la probabilidad de que al menos dos pozos produzcan en forma comercial.

c) la probabilidad de que más de cinco pozos produzcan en forma comercial.
d) la ganancia que espera obtener la compañía por los diez pozos.
e) la desviación estándar de las ganancias de la firma.

X: "Cantidad de pozos que producen en forma comercial"
$X \sim \text{Binomial}\,(n = 10 \;\; ; \;\; p = 0{,}1)$

Calcule:

a) la probabilidad de que exactamente cuatro pozos produzcan en forma comercial.
$\mathbf{P(X = 4)} = f(4) = (\text{por tabla})\ \mathbf{0{,}0112} \rightarrow \mathbf{1{,}12\%}$
La probabilidad de que exactamente cuatro pozos produzcan en forma comercial es de 0,0112.

b) la probabilidad de que al menos dos pozos produzcan en forma comercial.
$\mathbf{P(X \geq 2)} = f(2) + f(3) + \ldots + f(10) =$
$= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) =$
$= (\text{por tabla})\ 1 - 0{,}7361 = \mathbf{0{,}2639} \rightarrow \mathbf{26{,}39\%}$
La probabilidad de que al menos dos pozos produzcan en forma comercial es de 0,2639.

c) la probabilidad de que más de cinco pozos produzcan en forma comercial.
$\mathbf{P(X \geq 6)} = f(6) + f(7) + \ldots + f(10) =$
$= 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) =$
$= (\text{por tabla})\ 1 - 0{,}9999 = \mathbf{0{,}0001} \rightarrow \mathbf{0{,}01\,\%}$
La probabilidad de que más de cinco pozos produzcan en forma comercial es de 0,0001.

d) la ganancia que espera obtener la compañía por los diez pozos.
En principio deberíamos pensar en calcular cuántos pozos se espera que produzcan en forma comercial, es decir,
$\mathbf{E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}1 = 1}$ ***pozo***
Se espera que 1 pozo produzca en forma comercial con un costo total de 1 . \$10.000 = \$10.000 para cada pozo, o sea, la empresa invertirá \$100.000 en diez pozos, y como se espera que sólo un pozo produzca en forma comercial, sacará petróleo por un valor de \$500.000, es decir, se recaudarán 1 . \$500.000 = \$500.000.
Por lo tanto la utilidad esperada será:
\$500.000 - \$100.000 = ***\$400.000***

De otra forma, podemos plantear el problema analizando la variable 'utilidad'.
Sea X: "Cantidad de pozos que producen en forma comercial"
Sea U: "utilidad obtenida al perforar n pozos"

Distribuciones discretas

La utilidad será la diferencia entre lo invertido ($10.000 por pozo) y las ganancias de los pozos que produzcan en forma comercial ($500.000 por pozo), o sea, la utilidad es:

U = X.$500.000 - n.$10.000 *(En este problema n = 10)*

Ahora la pregunta es, ¿cuánto espero ganar, cuánta utilidad espero tener en estas condiciones?

La respuesta la dará el cálculo de la esperanza de la variable 'utilidad'.

Luego,

E(U) *= E(X.$500.000 - n.$10.000) = $500.000 . E(X) – n . $10.000 =*
= $500.000 . E(X) – 10 . $10.000 = $500.000 . 1 - $100.000 =
= ***$400.000***

La ganancia que espera obtener la compañía por los diez pozos es de $400.000.

e) la desviación estándar de las ganancias de la firma.

Recordemos que si calculamos la ganancia como la diferencia entre lo obtenido por la venta del petróleo de los pozos que producen en forma comercial (V) y lo invertido (I), al calcular la varianza de la variable ganancia (que es una variable diferencia entre V e I) NO es correcto hacerlo por la diferencia de las varianzas, sino que la fórmula sería:

Var (V - I) = Var (V) + Var (I)

V = $500.000 . X

I = $10.000 . n *(n es la cantidad de pozos perforados)*

Entonces quedaría:

Var (V - I) *= Var ($500.000 . X - $10.000 . n) =*
= Var ($500.000 . X) + Var ($10.000 . n)
= Var ($500.000 . X) + Var ($10.000 . 10)

(Aplicando propiedades de la varianza y calculando la varianza de X: Var(X) = n . p . q = 10 . 0,1 . 0,9 = 0,9)

$= (\$500.000)^2 \,.\, Var(X) + 0 =$
$= 2{,}5 \,.\, 10^{11} \,.\, 0{,}9 + 0 = \mathbf{2{,}25 \,.\, 10^{11}}$

Aunque hay una forma más sencilla, después de haber planteado el inciso d de este problema:

Si se plantea el problema analizando la variable 'utilidad':

U = X.$500.000 - n.$10.000 *(En este problema n = 10)*

Podemos plantear fácilmente la varianza de la variable 'utilidad' y de ahí es sencillo obtener la desviación estándar.

Luego,

Var(U) $= Var(X.\$500.000 - n.\$10.000) = (\$500.000)^2 . Var(X) =$
$= \$^2\ 2{,}5 \,.\, 10^{11} \,.\, 0{,}9 = \$^2\ 2{,}25 \,.\, 10^{11}$

(No se asuste, pero al elevar $al cuadrado quedan $\$^2$)

Entonces, ***D.E.(U)*** *=* ***$474.341,65***

Distribuciones discretas

La desviación estándar de las ganancias de la empresa es de $474.341,65

4. El sistema de dirección de un misil trabaja en forma correcta con una probabilidad *p* cuando se pone a funcionar. Se instalan sistemas de respaldo independientes, pero idénticos, en el misil de modo que la probabilidad de que al menos un sistema trabaje en forma correcta cuando se necesite sea no menor que 0,99. Sea *n* el número de sistemas de dirección en el misil. ¿Qué tan grande debe ser n para alcanzar la probabilidad especificada de que al menos trabaje un sistema de dirección si p = 0,9?, ¿y si p = 0,8?

X: "Cantidad de sistemas que trabajan en forma correcta"

$X \sim \text{Binomial}(n\ ;\ p)$

$$\mathbf{P(X \geq 1)} = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = 1 - q^n \geq 0{,}99$$

$$1 - q^n \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -q^n &\geq 0{,}99 - 1 \\ -q^n &\geq -0{,}01 \\ q^n &\leq 0{,}01 \\ n.\log q &\leq \log 0{,}01 \\ \mathbf{n} &\geq \mathbf{\log 0{,}01 / \log q} \end{aligned}$$

(se cambia el signo porque log q < 0)

- *Si p = 0,9, entonces n ≥ log 0,01 / log 0,1, o sea, n ≥ 2.*
  Luego, $\mathbf{n \geq 2}$
- *Si p = 0,8, entonces n ≥ log 0,01 / log 0,2, o sea, n ≥ 2,86.*
  Luego, $\mathbf{n \geq 3}$

5. Un comprador de grandes cantidades de instrumentos de precisión ha adoptado un plan para aceptar un envío de éstos y que consiste en inspeccionar una muestra aleatoria de 100 instrumentos provenientes del lote. Si encuentra no más de dos instrumentos defectuosos en la muestra, acepta el lote; de otra forma, lo rechaza. Si se envía al comprador un lote que contiene un 1% de instrumentos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea aceptado? Suponga la independencia.

X: "Cantidad de instrumentos de precisión defectuosos"

$X \sim \text{Binomial}(n=100\ ;\ p=0{,}01) \rightarrow$ se aproxima a $\rightarrow$ Poisson (λ=n.p = 100.0,01=1)

$\mathbf{P(X \leq 2)} = F(2) =$ (por tabla) $\mathbf{0{,}9197} \rightarrow \mathbf{91{,}97\%}$

La probabilidad de que el lote sea aceptado es de 0,9197.

6. El jefe de planta de una importante empresa está estudiando la proporción de piezas defectuosas producidas por una máquina. Los resultados de las investigaciones realizadas revelan que existe una probabilidad igual a 0,0755 de que, al seleccionar aleatoriamente una muestra de 20 piezas del proceso de producción, se encuentre que más de 2 sean defectuosas.

De continuar produciéndose en las mismas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que, al seleccionar aleatoriamente 10 piezas del proceso de producción, se encuentre que más de una sea defectuosa?

X: "Cantidad de piezas defectuosas producidas por una máquina, entre las 20 piezas muestreadas en el proceso de producción"

$X \sim$ Binomial (n = 20 ; p=?)

¿Cómo podemos saber cuál es el valor de p? Obviamente, debemos encontrarlo con la información dada…

Sabemos que $P(X > 2) = 0{,}0755$ y como esta probabilidad es la de una variable discreta, podemos pensar que fue obtenida como $1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2)$, es decir, $P(X > 2) = 0{,}0755 = 1 - F(2) = 1 - 0{,}9245$, por lo que $F(2) = 0{,}9245$… Y como la muestra es de tamaño 20, ¡está en la tabla de Binomial para F(x)!

Buscamos cuál es el valor de p, cuando F(x) = 0,9245 en una distribución binomial con n = 20 y x = 2

Tabla D.2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: F(x)

n	x \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,25	0,4	0,5	0,6	0,75	0,8	0,9	0,95	0,99	x
…	……														
20	0	0,8179	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
	1	0,9831	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
	2	0,9990	**0,9245**	0,6769	0,2061	0,0913	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2
	3	1,0000	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	5
	6		1,0000	0,9976	0,9133	0,7858	0,2500	0,0577	0,0065	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,4159	0,1316	0,0210	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	7
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,5956	0,2517	0,0565	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	8
	9			1,0000	0,9974	0,9861	0,7553	0,4119	0,1275	0,0039	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	9
	10				0,9994	0,9961	0,8725	0,5881	0,2447	0,0139	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	10
	11				0,9999	0,9991	0,9435	0,7483	0,4044	0,0409	0,0100	0,0001	0,0000	0,0000	11
	12				1,0000	0,9998	0,9790	0,8684	0,5841	0,1018	0,0321	0,0004	0,0000	0,0000	12
	13					1,0000	0,9935	0,9423	0,7500	0,2142	0,0867	0,0024	0,0000	0,0000	13
	14						0,9984	0,9793	0,8744	0,3828	0,1958	0,0113	0,0003	0,0000	14
	15						0,9997	0,9941	0,9490	0,5852	0,3704	0,0432	0,0026	0,0000	15
	16						1,0000	0,9987	0,9840	0,7748	0,5886	0,1330	0,0159	0,0000	16
	17							0,9998	0,9964	0,9087	0,7939	0,3231	0,0755	0,0010	17
	18							1,0000	0,9995	0,9757	0,9308	0,6083	0,2642	0,0169	18
	19								1,0000	0,9968	0,9885	0,8784	0,6415	0,1821	19
	20									1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	20

Por lo tanto, la cantidad de piezas defectuosas producidas por una máquina (que es la variable en estudio) tiene una distribución binomial con parámetros n = 20 y p = 0,05.

¡Y finalmente podemos calcular lo que pide el problema!…

La probabilidad de que, al seleccionar aleatoriamente 10 piezas del proceso de producción, se encuentre que más de una sea defectuosa, se calcula a través de una distribución binomial con n = 10 y p = 0,05, de la siguiente manera:

P(X > 1)** = 1 - F (1) = (por tabla) 1 – 0,9139 = **0,0861** $\rightarrow$ **8,61 %

La probabilidad de que, al seleccionar aleatoriamente 10 piezas del proceso de producción, se encuentre que más de una sea defectuosa, es de 0,0861.

Distribuciones discretas

7. Para determinada industria, el número de accidentes de trabajo es, en promedio, de tres por semana.
Calcule la probabilidad de que en una semana:

a) no ocurran accidentes.
b) ocurra más de un accidente.
c) ocurran menos de cuatro accidentes.
d) ocurran tres accidentes.

X : "Cantidad de accidentes por semana "
$X \sim$ *Poisson* $(\lambda = 3)$

Calcule la probabilidad de que en una semana:

a) no ocurran accidentes.
$\mathbf{P(X = 0)} = f(0) =$ (por tabla) $\mathbf{0{,}0498} \rightarrow \mathbf{4{,}98\%}$
La probabilidad de que en una semana no ocurran accidentes es de 0,0498.

b) ocurra más de un accidente.
$\mathbf{P(X > 1)} = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) =$ (por tabla) $1 - 0{,}1991 =$
$= \mathbf{0{,}8009} \rightarrow \mathbf{80{,}09\%}$
La probabilidad de que en una semana ocurran más de un accidente es de 0,8009.

c) ocurran menos de cuatro accidentes.
$\mathbf{P(X < 4)} = P(X \leq 3) = F(3) =$ (por tabla) $\mathbf{0{,}6472} \rightarrow \mathbf{64{,}72\%}$
La probabilidad de que en una semana ocurran menos de cuatro accidentes es de 0,6472.

d) ocurran tres accidentes.
$\mathbf{P(X = 3)} = f(3) =$ (por tabla) $\mathbf{0{,}2240} \rightarrow \mathbf{22{,}40\%}$
La probabilidad de que en una semana ocurran tres accidentes es de 0,2240.

8. El número de llamadas telefónicas que entran a la central de cierta empresa es de cuatro por minuto, en promedio.
Calcule la probabilidad de que:

a) no lleguen llamadas en determinado período de un minuto.
b) por lo menos lleguen cuatro llamadas en un período de un minuto.
c) por lo menos lleguen dos llamadas en un período determinado de dos minutos.
d) a lo sumo lleguen dos llamadas en un período determinado de dos minutos.

X : "Cantidad de llamadas que entran a la central por minuto "
$X \sim$ *Poisson* $(\lambda = 4)$

Calcule la probabilidad de que:

a) no lleguen llamadas en determinado período de un minuto.

$\boldsymbol{P(X = 0)} = f(0) = \text{(por tabla) } \boldsymbol{0{,}0183} \rightarrow \boldsymbol{1{,}83\%}$

La probabilidad de que no lleguen llamadas en determinado período de un minuto es de 0,0183.

b) por lo menos lleguen cuatro llamadas en un período de un minuto.

$\boldsymbol{P(X \geq 4)} = 1 - P(X < 4) = 1 - F(3) = \text{(por tabla) } 1 - 0{,}4335 =$
$= \boldsymbol{0{,}5665} \rightarrow \boldsymbol{56{,}65\%}$

La probabilidad de que lleguen cuatro llamadas en determinado período de un minuto es de 0,5665.

c) por lo menos lleguen dos llamadas en un período determinado de dos minutos.

X : *"Cantidad de llamadas que entran a la central en dos minutos"*

$X \sim \text{Poisson } (\lambda = 8)$

$\boldsymbol{P(X \geq 2)} = 1 - P(X < 2) = 1 - F(1) = \text{(por tabla) } 1 - 0{,}0030 =$
$= \boldsymbol{0{,}9970} \rightarrow \boldsymbol{99{,}70\%}$

La probabilidad de que lleguen dos llamadas en determinado período de dos minutos es de 0,9970.

d) a lo sumo lleguen dos llamadas en un período determinado de dos minutos.

$\boldsymbol{P(X \leq 2)} = F(2) = \text{(por tabla) } \boldsymbol{0{,}0138} \rightarrow \boldsymbol{1{,}38\%}$

La probabilidad de que a lo sumo lleguen dos llamadas en determinado período de dos minutos es de 0,0183.

9. Un director de personal selecciona al azar dos empleados para determinado puesto, de entre un grupo de seis; en ese grupo una es mujer y cinco son hombres. Calcule la probabilidad de que sea seleccionada la mujer para uno de los empleos.

X: "Cantidad de mujeres seleccionadas"

$X \sim \text{Hipergeométrica } (N = 6 , M = 1 ; n = 2)$

$$\boldsymbol{P(X = 1)} = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N - M}{n - x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{6 - 1}{2 - 1}}{\binom{6}{2}} = \boldsymbol{0{,}333...} \rightarrow \boldsymbol{33{,}33\%}$$

La probabilidad de que sea seleccionada una mujer para uno de los empleos es de 0,3333.

10. En una línea de montaje operada por robots industriales se pueden instalar cajas de engranajes en un minuto cada una si es que los agujeros de los tornillos se han barrenado en forma correcta en las cajas, y en diez minutos si es que se debe volver a barrenar. Hay veinte cajas de engranajes, y se supone que dos tendrán sus agujeros barrenados en forma incorrecta. Se deben seleccionar cinco cajas de engranajes para que los instalen los siguientes robots. Calcule:

Distribuciones discretas

a) la probabilidad de que todas las cajas de engranajes se ajusten adecuadamente.

b) el valor esperado, la varianza y la desviación estándar del tiempo que se necesita para instalar las cinco cajas de engranajes.

X : "Cantidad de cajas de engranajes defectuosas"

X ~ Hipergeométrica (N = 20 , M =2 ; n =5)

Calcule:

a) la probabilidad de que todas las cajas de engranajes se ajusten adecuadamente.

$$\mathbf{P(X = 0)} = \frac{\binom{M}{x}.\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{2}{0}.\binom{20-2}{5-0}}{\binom{20}{5}} = \mathbf{0{,}5526} \rightarrow \mathbf{55{,}26\%}$$

La probabilidad de que todas las cajas de engranajes se ajusten adecuadamente es de 0,5526.

b) el valor esperado, la varianza y la desviación estándar del tiempo que se necesita para instalar las cinco cajas de engranajes.

Debemos expresar la variable T:

T: "Tiempo total necesario para instalar las cajas"

Siendo T = 10.X + (5 - X) = 10.X + 5 - X = 9.X + 5

E(T) = E(9.X + 5)= 9.E(X) + E(5)

Var(T) = Var(9.X + 5)= 9^2.Var(X) + Var(5)

Vemos que es necesario calcular la esperanza y la varianza de X:

$$E(X) = \frac{M}{N}.\, n = \frac{2}{20}.\, 5 = 0{,}5$$

$$Var\,(X) = \frac{n.M.(N-n).(N-M)}{N^2.(N-1)} = \frac{5.2.(20-5).(20-2)}{20^2.(20-1)} = 0{,}3553$$

Entonces:

E(T) = E(9.X + 5)= 9.E(X) + E(5)= 9 . 0,5 + 5 = **9,5 minutos**

Var(T) = Var(9.X + 5)= 9^2.Var(X)+Var(5)= 81.0,3553+0=**28,78 minutos**^{2}

D.E.(T) = **5,36 minutos**

Así, el tiempo de instalación promedio debe ser de 9,5 minutos con una desviación estándar de 5,36 minutos.

11. Un estudio geológico indica que un pozo de exploración perforado en determinada zona debe encontrar petróleo con una probabilidad de 0,2.
Calcule la probabilidad de que:

a) el primer hallazgo de petróleo se tenga al tercer pozo perforado.

Distribuciones discretas

b) el tercer hallazgo de petróleo se tenga con el quinto pozo perforado.

X : "Cantidad de pozos perforados hasta que se encuentra petróleo en r de ellos"
X ~ Binomial negativa (x; r, p = 0,2)

Calcule la probabilidad de que:

a) el primer hallazgo de petróleo se tenga al tercer pozo perforado.

$$\mathbf{P(X=3,\ r=1)} = \binom{x-1}{r-1} p^r \, . \, q^{x-r} = \binom{3-1}{1-1} 0{,}2^1 \, . \, 0{,}8^{3-1} = \mathbf{0{,}128} \ \rightarrow\ \mathbf{12{,}80\%}$$

Vemos que estamos frente a un caso de distribución geométrica, ya que sólo necesitamos obtener un éxito. Si aplicamos la fórmula de la distribución geométrica, queda:

$$\mathbf{P(X=3)} = p \, . \, q^{x-1} = 0{,}2 \, . \, 0{,}8^{3-1} = \mathbf{0{,}128} \ \rightarrow\ \mathbf{12{,}80\%}$$

La probabilidad de que el primer hallazgo de petróleo se tenga al perforar el tercer pozo es de 0,1280.

b) el tercer hallazgo de petróleo se tenga con el quinto pozo perforado.

$$\mathbf{P(X=5,\ r=3)} = \binom{x-1}{r-1} p^r \, . \, q^{x-r} = \binom{5-1}{3-1} 0{,}2^3 . 0{,}8^{5-3} = \mathbf{0{,}0307} \ \rightarrow\ \mathbf{3{,}07\%}$$

La probabilidad de que el tercer hallazgo de petróleo se tenga al perforar el quinto pozo es de 0,0307.

12. Una empresa de reclutamiento encuentra que el 30% de los aspirantes para determinado puesto en la industria tiene conocimientos avanzados de programación. Se entrevista a los aspirantes uno a uno, para lo cual se seleccionan al azar de entre un grupo.

a) Calcule la probabilidad de que el primer aspirante con conocimientos avanzados de programación sea el quinto entrevistado.

b) Si hay tres puestos en los que se necesitan conocimientos avanzados de programación, calcule la probabilidad de que se encuentre al tercer aspirante calificado en la quinta entrevista.

c) Supóngase que al primer aspirante que se encuentre se le ofrece el puesto y que el aspirante acepta. Si cada entrevista cuesta $30, calcule el valor esperado y la varianza del costo total de las entrevistas hasta que se ocupa el puesto.

d) ¿Dentro de qué intervalo se espera que caiga este costo?

X : "Cantidad de entrevistas realizadas hasta que se encuentra un aspirante con conocimientos avanzados de programación"

a) Calcule la probabilidad de que el primer aspirante con conocimientos avanzados de programación sea el quinto entrevistado.

Distribuciones discretas

$X \sim$ Geométrica $(x;\ p = 0{,}3)$

$P(X = 5) = p \,.\, q^{x-1} = 0{,}3 \,.\, 0{,}7^{4} = \mathbf{0{,}07203} \;\rightarrow\; \mathbf{7{,}203\%}$

Como la distribución geométrica es un caso particular de la binomial negativa, cuando r = 1, lo analizaremos de esta forma:

$$P(X=5,\ r=1) = \binom{x-1}{r-1} p^{r}.\, q^{x-r} = \binom{5-1}{1-1} 0{,}3^{1}.0{,}7^{5-1} = \mathbf{0{,}07203} \;\rightarrow\; \mathbf{7{,}203\%}$$

La probabilidad de que el primer aspirante con conocimientos avanzados de programación sea el quinto entrevistado es de 0,07203.

b) Si hay tres puestos en los que se necesitan conocimientos avanzados de programación, calcule la probabilidad de que se encuentre al tercer aspirante calificado en la quinta entrevista.

$X \sim$ Binomial negativa $(x;\ r = 3;\ p = 0{,}3)$

$$P(X=5,\ r=3) = \binom{x-1}{r-1} p^{r}.q^{x-r} = \binom{5-1}{3-1} 0{,}3^{3}.0{,}7^{5-3} = \mathbf{0{,}07938} \;\rightarrow\; \mathbf{7{,}94\%}$$

La probabilidad de que se encuentre al tercer aspirante con conocimientos avanzados de programación en la quinta entrevista es de 0,07938.

c) Supóngase que al primer aspirante que se encuentre se le ofrece el puesto y que el aspirante acepta. Si cada entrevista cuesta $30, calcule el valor esperado y la varianza del costo total de las entrevistas hasta que se ocupa el puesto.

Debemos definir la variable costo. La indicaremos con C:
C: "Costo total al entrevistar"
Siendo $C = \$30.X$
Entonces, la esperanza y la varianza estarían dadas por:
$\mathbf{E(C)} = E(\$30.X) = \$30.E(X)$
$\mathbf{Var(C)} = Var(\$30.X) = (\$30)^{2}.Var(X)$

Vemos que es necesario calcular la esperanza y la varianza de X:
$E(X) = 1/p = 1/0{,}3 = 3{,}333...$
$Var(X) = q/p^{2} = 0{,}7/(0{,}3)^{2} = 7{,}777...$
Luego:
$\mathbf{E(C)} = E(\$30.X) = \$30.E(X) = \$30 \,.\, 3{,}333... = \mathbf{\$99{,}999...} \approx \mathbf{\$100}$
$\mathbf{Var(C)} = Var(\$30.X) = (\$30)^{2}.Var(X) = \$^{2}900 \,.\, 7{,}777... =$
$= \mathbf{6999{,}999...} \approx \mathbf{\$^{2}7000}$
$\mathbf{D.E.(C)} = \mathbf{\$83{,}67}$
El costo total esperado es de $100 y la varianza del costo total de las entrevistas hasta que se ocupa el puesto es de $\$^{2}7000$, con una desviación estándar de $83,67.

d) ¿Dentro de qué intervalo se espera que caiga este costo?

C quedará dentro de dos desviaciones estándar de su valor promedio cuando menos el 75% de las veces (Teorema de Tchebyshev), entonces:
$100 - 2. $83,67 = - $67,34 y $100 + 2. $83,67 = $267,34
Como el límite inferior es negativo, este extremo no tiene significado. Sin embargo, se puede decir que hay al menos un 75% de posibilidades de que el costo total de las entrevistas será menor que $267,34.

¡A repasar...!

Para autoevaluarse, responda las preguntas que están a continuación. Puede hacerlo con el material de estudio, pero asegurándose que "entiende" cada palabra, a tal punto que usted podría explicarle a un amigo, que no conoce el tema, de manera simple, los conceptos estudiados:

- ☑ **¿Qué es un modelo de probabilidad para variables aleatorias discretas?**
- ☑ **¿Qué caracteriza a la distribución binomial? Es decir...**
  - ✓ **¿Cómo se define la variable binomial?**
  - ✓ **¿Qué características tiene un experimento binomial y los eventos analizados a partir de él?**
  - ✓ **¿En qué rango está definida una variable binomial?**
  - ✓ **¿Cuál o cuáles son los parámetros que la caracterizan?**
  - ✓ **¿Cómo se obtiene el valor de la esperanza y la varianza?**
  - ✓ **¿Se puede trabajar de manera binomial un experimento sin reemplazo?**
  - ✓ **Piense un ejemplo que suponga el uso de la distribución binomial para el cálculo de probabilidades.**
- ☑ **¿Qué caracteriza a la distribución hipergeométrica? Es decir...**
  - ✓ **¿Cómo se define la variable hipergeométrica?**
  - ✓ **¿Qué características tiene un experimento hipergeométrico y los eventos analizados a partir de él?**
  - ✓ **¿En qué rango está definida una variable hipergeométrica?**
  - ✓ **¿Cuál o cuáles son los parámetros que la caracterizan?**

Distribuciones discretas

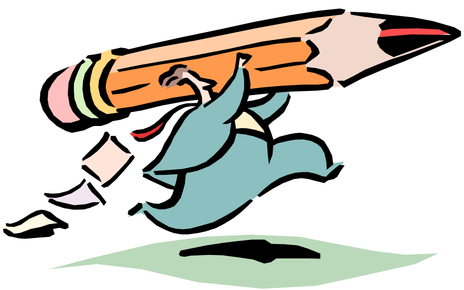
- ✓ ¿Cómo se obtiene el valor de la esperanza y la varianza?
- ✓ ¿Qué es el factor de corrección para población finita?
- ✓ Piense un ejemplo que suponga el uso de la distribución hipergeométrica para el cálculo de probabilidades.

☑ ¿Qué caracteriza a la distribución binomial negativa? Es decir...
- ✓ ¿Cómo se define la variable binomial negativa?
- ✓ ¿Qué características tiene un experimento binomial negativo y los eventos analizados a partir de él?
- ✓ ¿En qué rango está definida una variable binomial negativa?
- ✓ ¿Cuál o cuáles son los parámetros que la caracterizan?
- ✓ ¿Cómo se obtiene el valor de la esperanza y la varianza?
- ✓ ¿Cómo se llama el caso particular en que x=1?
- ✓ Piense un ejemplo que suponga el uso de la distribución binomial negativa para el cálculo de probabilidades.

☑ ¿Qué caracteriza a la distribución de Poisson? Es decir...
- ✓ ¿Cómo se define la variable de Poisson?
- ✓ ¿Qué características tiene un experimento de Poisson y los eventos analizados a partir de él?
- ✓ ¿En qué rango está definida una variable de Poisson?
- ✓ ¿Cuál o cuáles son los parámetros que la caracterizan?
- ✓ ¿Cómo se obtiene el valor de la esperanza y la varianza?
- ✓ ¿Qué caracteriza a un proceso de Poisson?
- ✓ Piense un ejemplo que suponga el uso de la distribución de Poisson para el cálculo de probabilidades.

☑ ¿Existen relaciones entre las distribuciones discretas estudiadas? ¿En qué casos se dan?

☑ ¿Cuáles son las condiciones para que sea adecuada la aproximación de una distribución a otra?



Por favor, no avance al siguiente tema si tiene dudas o no recuerda las nociones aquí volcadas. Pero si se

siente listo para continuar, es hora de empezar a trabajar con las **autoevaluaciones** y las **aplicaciones prácticas**...

Para pensar

1. Analice el comportamiento de cada una de las distribuciones, según la variación de sus parámetros:

   Distribución binomial

   - Cuando p = 0,5, para cualquier valor de **n**, la distribución es **simétrica** respecto del eje x = **n.p** .
   - Cuando p < 0,5, la distribución es **sesgada a derecha** y a medida que el valor de **n** aumenta se hace más **simétrica** .
   - Cuando p > 0,5, la distribución es **sesgada a izquierda** y a medida que el valor de **n** aumenta se hace más **simétrica**.
   - En general, para valores de p ≠ 0,5, la distribución es **sesgada** y a medida que el valor de **n** aumenta se hace más **simétrica**.
   - Para valores grandes de n, la distribución es **simétrica**.
   - En general, para distintos valores de n, la distribución es **sesgada** y a medida que el valor de **n** aumenta se hace más **simétrica**.

   Distribución binomial negativa

- En general, para cualquier valor de p, la distribución es **sesgada a derecha** y, a medida que **r** aumenta se hace más **simétrica**.
- Para p = 0,5, la distribución tiende a ser **simétrica** y, a medida que **r** aumenta se hace más **simétrica**.

Distribución geométrica

- Cualquiera sea el valor de p, la distribución es **sesgada a derecha**.
- A medida que p aumenta, la distribución es más **apuntada**.

Distribución hipergeométrica

- Cuando n tiende a infinito, para cualquier valor de **M** y de **N**, la distribución tiende a ser **simétrica** respecto al eje x = **n.M/N = n.p**.
- Cuando p = M/N = 0,5, la distribución es **simétrica** respecto al eje x = **n.M/N = n.p**.
- Cuando p = M/N < 0,5, la distribución es **sesgada a derecha** y a medida que el valor de **n** aumenta se hace más **simétrica**.
- Cuando p = M/N > 0,5, la distribución es **sesgada a izquierda** y a medida que el valor de **n** aumenta se hace más **simétrica**.

Distribución de Poisson

- Para valores pequeños de λ, la distribución es **sesgada a derecha**.
- En general, a medida que el valor de λ aumenta, la distribución se hace **simétrica**, respecto a x = λ.