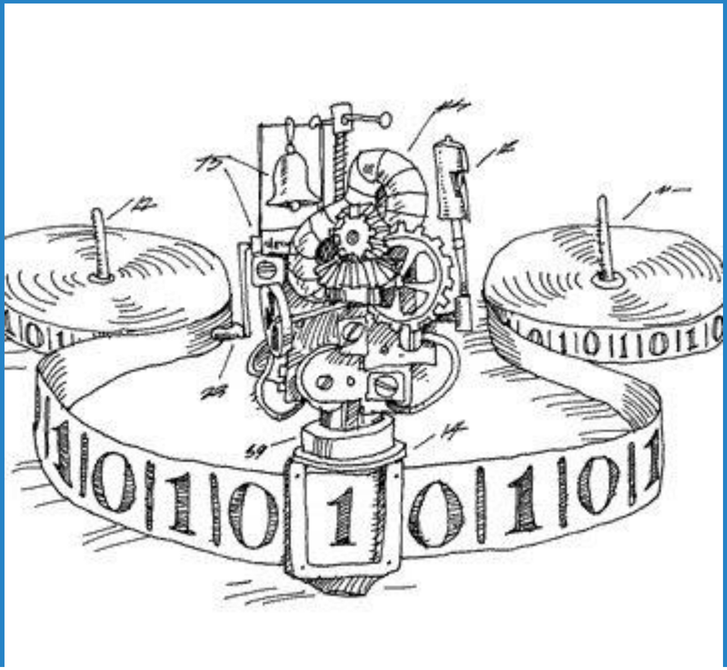


MÁQUINAS DE TURNING

Dr. Ing. Alfredo Iglesias
Mg. Ing. Nora Costa

TEMAS

Dispositivos para el reconocimiento de lenguajes.

Definición formal.

Lenguajes asociados.

Configuraciones.

Construcción de una Máquina de Turing

Diagramas de estados para la función de transición.

Tipos de Máquinas de Turing.

Implementación de una máquina de Turing a partir de un autómata finito determinista.

Máquina de Turing como Aceptadores de Lenguajes.

Bibliografía.

Ejercicio.

ALAN TURING

Padre de la computación.

Desde hace años (30) estudió una maquina abstracta que poseía la misma capacidad de las computadoras actuales.

Su objetivo era determinar la frontera entre lo que puede y no puede hacer una computadora, estos estudios son aplicables hoy en día a nuestros PCs.

Es una de las bases de la inteligencia artificial.

- Un ejemplo son los sistemas de gestión tecnológica, que poseen un grado de inteligencia para hacer las cosas.
- La búsqueda de patrones, utiliza autómatas.
- Un ejemplo de un autómata, es cuando se interactúa con una computadora en cualquier juego, donde el oponente es la computadora, como en el juego de ajedrez, el oponente es un autómata programado.

DISPOSITIVOS PARA RECONOCIMIENTO DE LENGUAJES

Tipos de dispositivos para reconocimiento de lenguajes:

- Autómatas finitos: son menos potentes, tiene menor capacidad para aceptar lenguajes.
- Autómatas de pila: contienen una pila para "recordar" la cantidad de información necesaria para el reconocimiento de los lenguajes independientes de contexto. El acceso a la información se limita a la cima de la pila.
- Un tercer tipo de dispositivo para reconocimiento de lenguajes es:
- Máquinas de Turing: utilizan una cinta infinita.

DISPOSITIVOS PARA RECONOCIMIENTO DE LENGUAJES

Autómatas de pila

- Utilizan una pila (dispositivo de almacenamiento de memoria)
- Para acceder a los datos debajo de la pila se debe sacar el dato de la cima.
- Al leer el último elemento de la entrada, la pila estará vacía.
- Ej. $\{a^n b^n c^n\}$ al leer las ces que contiene la entrada perdemos el recuento de la cantidad de ces (pila vacía)
- Necesidad de recorrer la pila.

Cinta infinita

- Colección de celdas de almacenamiento que se extiende infinitamente en ambas direcciones.
- Cada celda almacena un único símbolo.
- La colección no tiene una celda primera ni última. (capacidad de almacenamiento ilimitado)
- Permite acceder a los contenidos de las celdas en cualquier orden.
- Se le asocia a la cinta una cabeza de lectura/escritura que se mueve sobre la cinta, por cada movimiento leerá o escribirá un símbolo.

DEFINICIÓN FORMAL

Definición: una máquina de Turing es una 7-tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, \cancel{b}, F, \delta)$ donde:

- Q es el conjunto finito de estados
- Σ es un alfabeto de entrada
- Γ es el alfabeto de la cinta
- $s \in Q$ es el estado inicial
- $\cancel{b} \in \Gamma$ es el símbolo blanco (no está en Σ)
- F es el conjunto de estados de aceptación
- $\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L,R\}$ es una función parcial que se llama función de transición

DEFINICIÓN FORMAL

El valor inicial de todas las celdas de la cintas es ~~b~~.

La función de transición transforma pares (q, σ) formados por:

- estado actual
- símbolos de la cinta

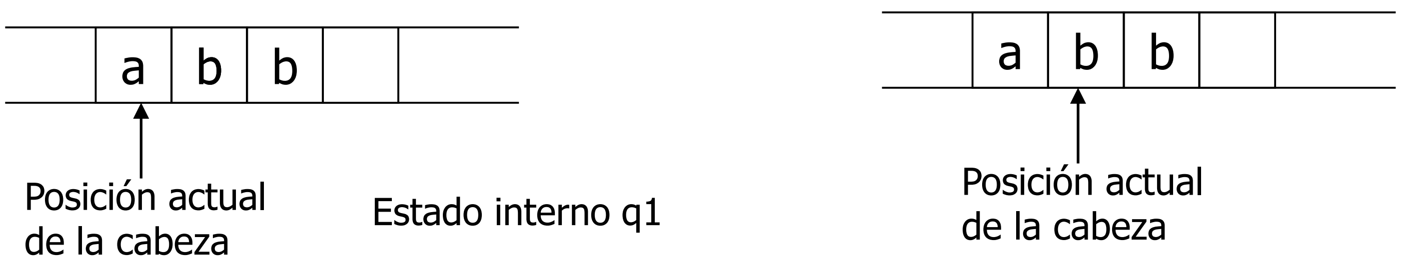
en ternas (p,t,X),

- p estado siguiente
- t símbolo escrito en la cinta
- X movimiento de lectura/escritura de la cabeza, puede ser L o R según el movimiento sea hacia la izquierda o derecha.

DEFINICIÓN FORMAL

Ejemplo: $\delta(q1,a) = (q5, b, R)$

- Esta transición provoca que la máquina de Turing cambie de configuración



- Las transiciones dependen del estado actual y del contenido de la celda sobre la que se encuentre la cabeza de lectura/escritura.

DEFINICIÓN FORMAL

Σ es el alfabeto de entrada y Γ es el alfabeto de la cinta.

- Una palabra $w \in \Sigma^*$ de entrada de largo n es colocada en las posiciones 1, . . ., n de la cinta.
- Las posiciones siguientes (n + 1, n + 2, . . .) contienen el símbolo ~~b.~~

DEFINICIÓN FORMAL

- Los estados de F son utilizados como estados de aceptación.
- Una palabra w es aceptada por una máquina M si y sólo si la ejecución de M con entrada w se detiene en un estado de F.

LENGUAJES ASOCIADOS A LAS MÁQUINAS DE TURING

Pueden reconocer:

- Lenguajes regulares
- Lenguajes independientes de contexto.
- Otros tipos de lenguajes.

MÁQUINAS DE TURING

Ejemplo 1:

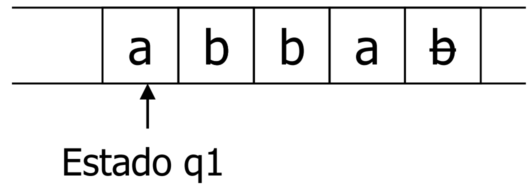
- máquina de Turing definida por:
  - $Q = \{q1, q2\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $\Gamma = \{a, b, \cancel{b}\}$
  - $s = q1$
  - $F = \{q2\}$
  - δ dado por:
    - $\delta(q1,a)=(q1,a,R)$
    - $\delta(q1,b)=(q1,a,R)$
    - $\delta(q1,\cancel{b})=(q2,\cancel{b},L)$

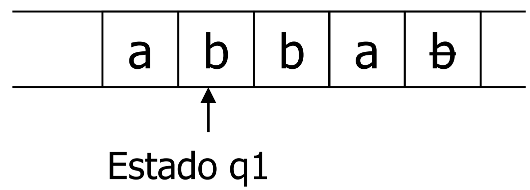
MÁQUINAS DE TURING

Supongamos que w=abba

La máquina:

- Comienza en el estado q1.
- Si el contenido de la celda de la cinta sobre la que se encuentra la cabeza de lectura escritura es a se aplica δ(q1,a)=(q1,a,R).
- Sobrescribe la a con otra a.
- Se mueve una celda a la derecha y permanece en el estado q1.

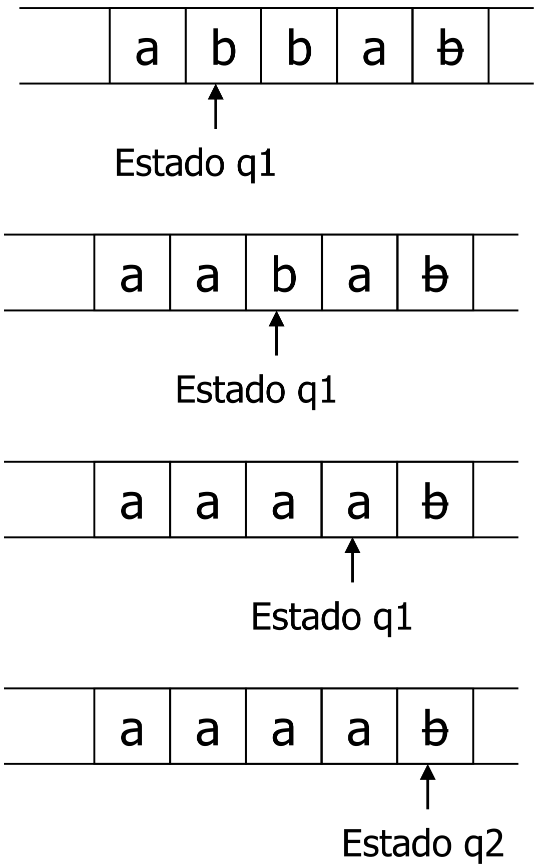




MÁQUINAS DE TURING

La máquina:

- La b se sustituye por la a por la transición $\delta(q1,b)=(q1,a,R)$
- Si la máquina de Turing se encuentra en blanco (ƀ) se mueve una celda a la izquierda y se pasa al estado final q2.



CONFIGURACIONES

Las configuraciones representadas se determinan por:

- El estado actual
- El contenido de la cinta
- La posición de la cabeza de lectura/escritura

CONFIGURACIONES

Representación más conveniente:

- (q_i,$w_1\underline{\sigma}w_2$)
  - q_i estado actual.
  - w_1 cadena de la cinta que precede a la celda sobre la que se encuentra la cabeza de entrada/salida.
  - $\underline{\sigma}$ símbolo de la cinta sobre el que se encuentra la cabeza de entrada/salida.
  - w_2 cadena que hay a continuación de la cabeza de entrada/salida.

CONFIGURACIONES

Ejemplo 1:

- máquina de Turing definida por:
  - $Q = \{q1, q2\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $\Gamma = \{a, b, \cancel{b}\}$
  - $s = q1$
  - $F = \{q2\}$
  - δ dado por:
    - $\delta(q1,a)=(q1,a,R)$
    - $\delta(q1,b)=(q1,a,R)$
    - $\delta(q1,\cancel{b})=(q2,\cancel{b},L)$
  - Supongamos que w=abba

Configuración inicial

- $(q1,\underline{a}bba)$

Configuración segunda

- $(q1,a\underline{b}ba)$

CONFIGURACIONES

Otra notación:

- Una cadena:

$a_1\ a_2 \dots a_{k-1} q_1 a_k \dots a_n$

- Representa a la configuración:

$(qi,\ w\underline{a}_k u)$

La cabeza de entrada/salida se coloca sobre la celda que contiene a_k y el estado actual es q1.

Las primeras dos configuraciones del ejemplo 1 son:

- q1abba
- aq1bba

CONFIGURACIONES

DIS (descripciones instantáneas): son las configuraciones de una máquina de Turing.

Para indicar el paso de una configuración a otra se utiliza el símbolo: ⊢.

Las notaciones $\vdash^*$ y $\vdash^+$ significan "cero o más" y "una o más".

Ejemplo 1:

(q1,$\underline{a}$bbaƀ) ⊢ (q1,$\underline{a}$bbaƀ) ⊢
(q1,aa$\underline{b}$aƀ) ⊢ (q1,aa$\underline{a}$aƀ) ⊢
(q1,aaaa$\underline{ƀ}$) ⊢ (q1,aaa$\underline{a}$ƀ)

(q1abbaƀ) ⊢ (aq1bbaƀ) ⊢
(aaq1baƀ) ⊢ (aaaq1aƀ) ⊢
(aaaaq1ƀ) ⊢ (aaaq2aƀ)

CONFIGURACIONES

Ejemplo 2:

- máquina de Turing definida por:
  - $Q = \{q1, q2, q3\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $\Gamma = \{a, b, \cancel{b}\}$
  - $s = q1$
  - $F = \{q3\}$
  - δ dado por:
    - $\delta(q1,a)=(q1,a,L)$
    - $\delta(q1,b)=(q1,b,L)$
    - $\delta(q1,\cancel{b})=(q2,\cancel{b},R)$
    - $\delta(q2,a)=(q3,a,L)$
    - $\delta(q2,b)=(q3,b,L)$
    - $\delta(q2,\cancel{b})=(q3,\cancel{b},L)$

CONFIGURACIONES

Ejemplo 2:

- Supongamos que aababb
- máquina de Turing definida por:
  - $Q = \{q1, q2, q3\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $\Gamma = \{a, b, \cancel{b}\}$
  - $s = q1$
  - $F = \{q3\}$
  - δ dado por:
    - $\delta(q1,a)=(q1,a,L)$
    - $\delta(q1,b)=(q1,b,L)$
    - $\delta(q1,\cancel{b})=(q2,\cancel{b},R)$
    - $\delta(q2,a)=(q3,a,L)$
    - $\delta(q2,b)=(q3,b,L)$
    - $\delta(q2,\cancel{b})=(q3,\cancel{b},L)$

$(q1, \cancel{b}aab\underline{a}bb) \vdash (q1, \cancel{b}aa\underline{b}abb) \vdash$
$(q1, \cancel{b}a\underline{a}babb) \vdash (q1, \cancel{b}\underline{a}ababb) \vdash$
$(q1, \underline{\cancel{b}}aababb) \vdash (q2, \underline{\cancel{b}}aababb) \vdash$
$(q3, \underline{\cancel{b}}aababb)$

$\cancel{b}aabq1abb \vdash \cancel{b}aaq1babb \vdash$
$\cancel{b}aq1ababb \vdash \cancel{b}q1aababb \vdash$
$q1\cancel{b}aababb \vdash q2\cancel{b}aababb \vdash$
$q3\cancel{b}aababb$

CONSTRUCCIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING

Ejemplo:

- Queremos construir una máquina que verifique si el número de 0s en una palabra es par:

CONSTRUCCIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING

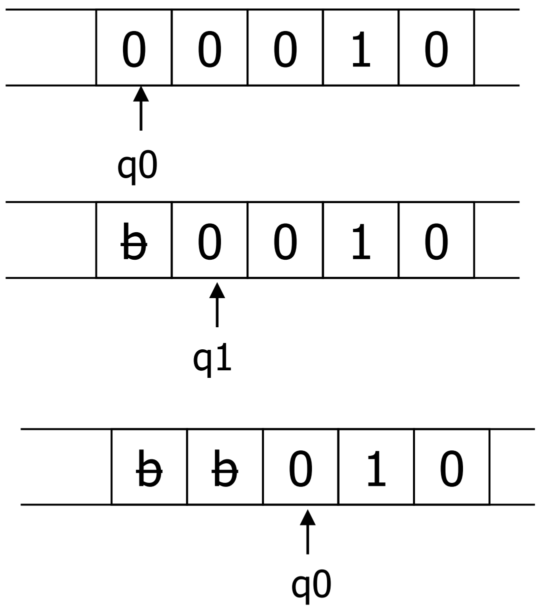
Ejemplo:

- $Q = \{q_0, q_1\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\Gamma = \{0, 1, \cancel{b}\}$
- $s = q_0$
- $F = \{q_0\}$
- δ dado por:
  - $\delta(q_0,0)=(q_1,\cancel{b},R)$
  - $\delta(q_0,1)=(q_0,\cancel{b},R)$
  - $\delta(q_1,0)=(q_0,\cancel{b},R)$
  - $\delta(q_1,1)=(q_1,\cancel{b},R)$

CONSTRUCCIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING

Ejemplo:

- Supongamos que w = 00010:



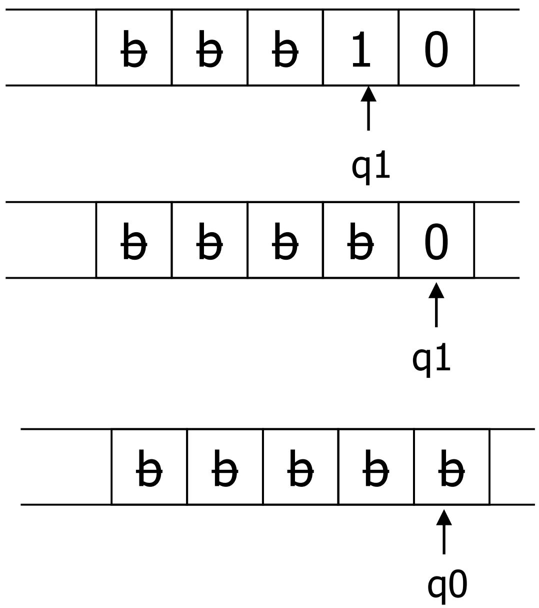
$\delta(q_0,0)=(q_1,\text{ƀ},R)$

$\delta(q_1,0)=(q_0,\text{ƀ},R)$

CONSTRUCCIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING

Ejemplo:

- Supongamos que w = 00010:



$\delta(q_1,0)=(q_1,\text{ƀ},R)$

$\delta(q_1,1)=(q_1,\text{ƀ},R)$

$\delta(q_1,0)=(q_0,\text{ƀ},R)$

La máquina acepta w = 00010, por lo tanto, tiene un número par de 0s.

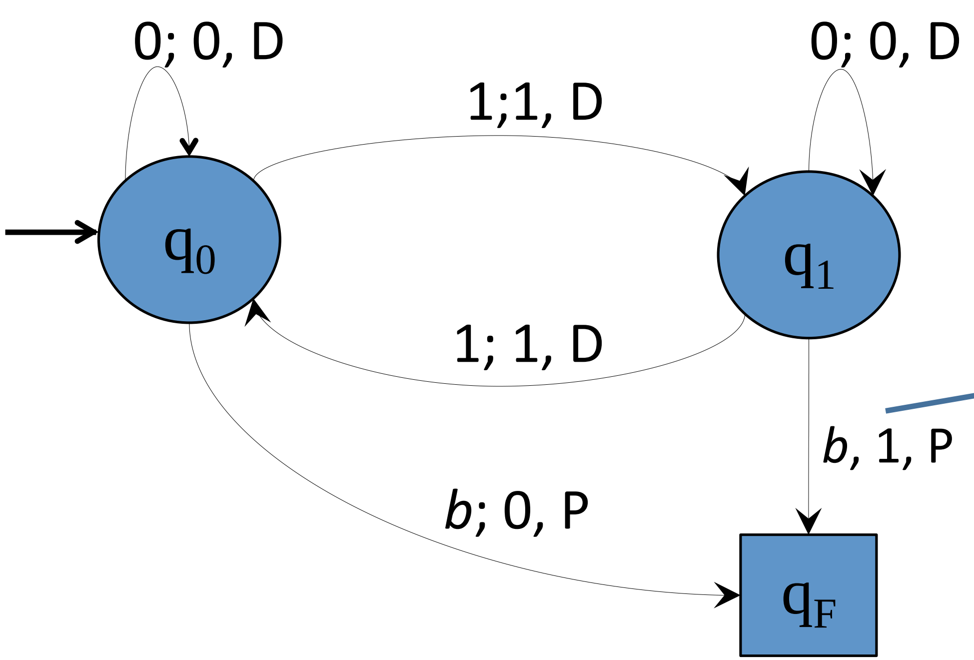
DIAGRAMA DE ESTADOS PARA LA FUNCIÓN DE TRANSICIÓN

La función de transición también puede describirse en forma de diagrama de estados:

- Los nodos representan estados.
- Los arcos representan transiciones de estados.
- Cada arco es etiquetado con los prerrequisitos y los efectos de cada transición:
  - Símbolo inicial,
  - Símbolo que se reescribe,
  - Dirección del movimiento del cabezal.

DIAGRAMA DE ESTADOS PARA LA FUNCIÓN DE TRANSICIÓN

f	0	1	b
$\rightarrow q_0$	$(q_0, 0, D)$	$(q_1, 1, D)$	$(q_F, 0, P)$
q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_0, 1, D)$	$(q_F, 1, P)$
$* \ q_F$			



Nomenclatura:

1º) Símbolo que se lee de la cinta (b)
2º)Símbolo que se sobrescribe en la cinta (1)
3º) Mov. que realiza el cabezal (P)

TIPOS DE MÁQUINAS DE TURING

Que actúa como transductor

- Modifica el contenido de la cinta realizando cierta función.

Que actúa como reconocedor

- Capaz de reconocer un lenguaje L.
- Capaz de aceptar un lenguaje L.

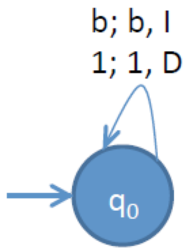
TIPOS DE MÁQUINAS DE TURING

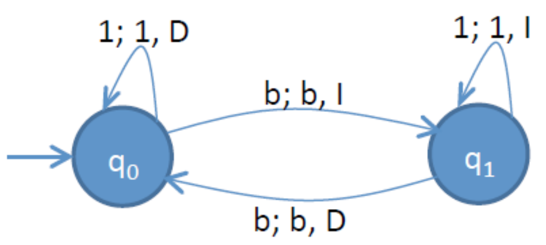
Que actúa como transductor

- Modifica el contenido de la cinta realizando cierta función.
- Ejemplos:
  - MT que sustituye los dígitos por cero,
  - MT que añade un bit de paridad a la entrada
  - MT que duplica el número de 1s que hay en la cinta
- Si la Entrada está bien formada:
  - Debe terminar en un Estado Final
- Si la Entrada no está bien formada:
  - Debe terminar en un Estado No Final.

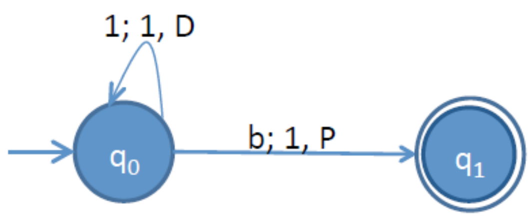
TIPOS DE MÁQUINAS DE TURING

Diferentes MT que no se detienen:





MT que calcula *n+1* considerando el número *n>=0* como una sucesión de *1s*.



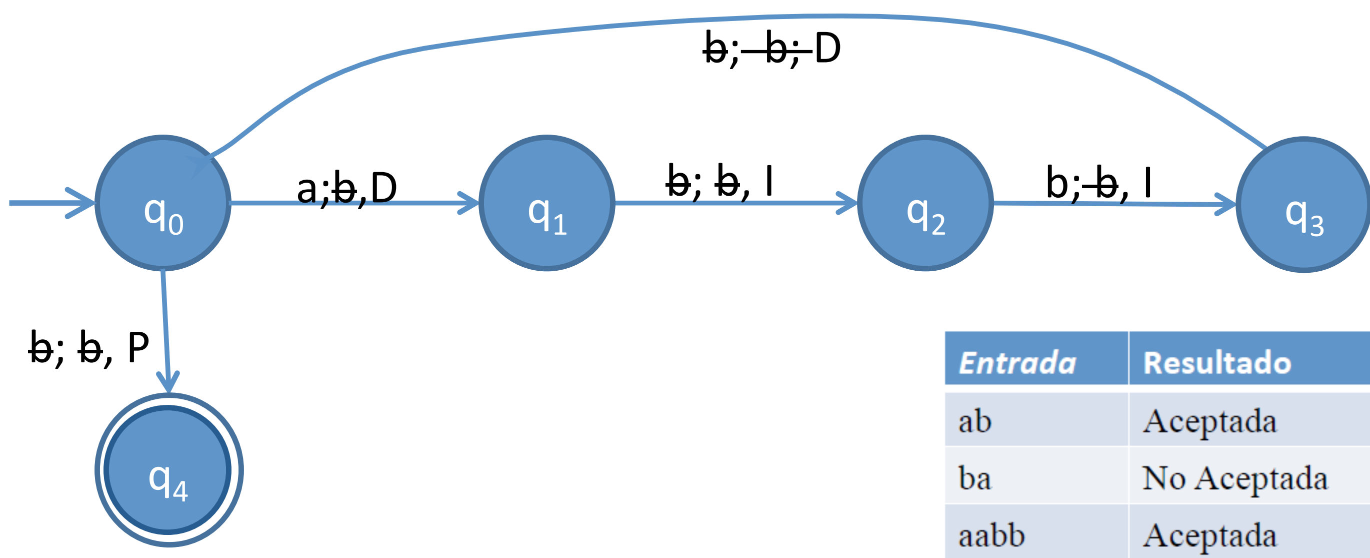
TIPOS DE MÁQUINAS DE TURING

Que actúa como reconocedor

- Capaz de reconocer y de aceptar un lenguaje L.
  - Una MT RECONOCE un lenguaje L, si dada una entrada (w) en la cinta, la MT SIEMPRE se para, y lo hace en un Estado Final si y solo si: $w \in L$.
  - Una MT ACEPTA un lenguaje L, si dada una entrada (w) en la cinta, la MT se para en un Estado Final si y solo si: $w \in L$
    - Así, en este caso, si $w \notin L$, la MT podría no parar.
- Ejemplos:
  - MT que reconoce el lenguaje a^*b^*,
  - MT que acepta el lenguaje $a^nb^nc^n$

TIPOS DE MÁQUINAS DE TURING

MT que reconoce el $L=\{a^n b^n, n>=0\}$



Entrada	Resultado
ab	Aceptada
ba	No Aceptada
aabb	Aceptada
aab	No Aceptada
abb	No Aceptada
aaaabbbb	Aceptada

IMPLEMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING A PARTIR DE UN AUTÓMATA FINITO DETERMINISTA

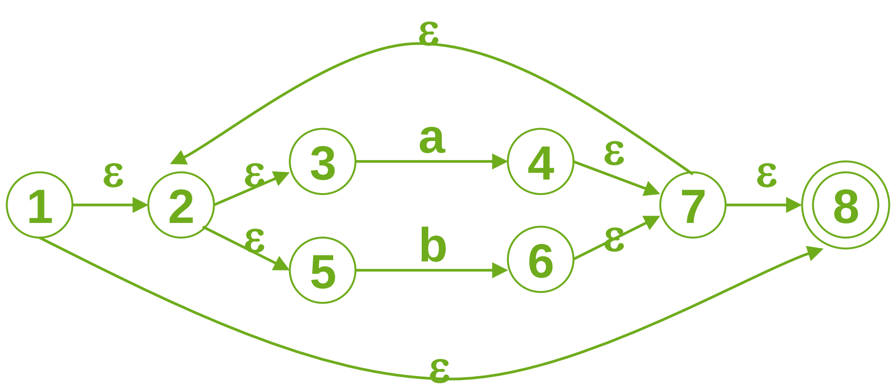
- Construcción de una máquina de Turing que analice una cadena sobre $\{a,b\}^+$ desplazándose por la cinta de izquierda a derecha y reemplace todas las bes que aparezcan por una c. La máquina de Turing debería comenzar con la cabeza sobre el primer símbolo (el más a la izquierda) de la cadena y terminar con la cabeza sobre el blanco final (el blanco que sigue a la a o la c que esté más a la derecha en la cadena).

IMPLEMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING A PARTIR DE UN AUTÓMATA FINITO DETERMINISTA

- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{a, b, c, \cancel{b}\}$
- $s = q_1$
- $F = \{q_2\}$
- δ dado por:
  - $\delta(q_1, a) = (q_1, a, R)$
  - $\delta(q_1, b) = (q_1, c, R)$
  - $\delta(q_1, \cancel{b}) = (q_2, \cancel{b}, R)$

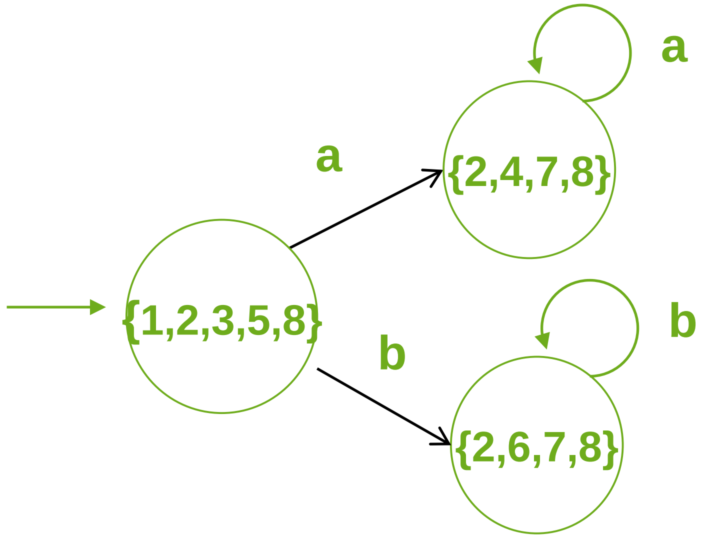
IMPLEMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING A PARTIR DE UN AUTÓMATA FINITO DETERMINISTA

- Creación de las funciones de transición:
  - Expresión regular: (a|b)*
  - Obtener el AFN mediante la Construcción de Thompson



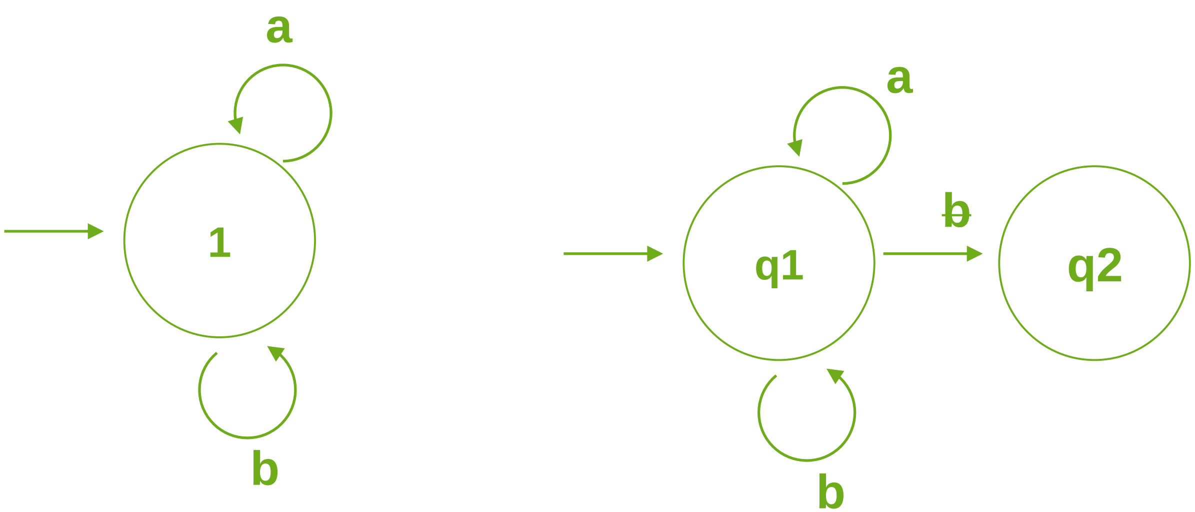
IMPLEMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING A PARTIR DE UN AUTÓMATA FINITO DETERMINISTA

- Creación de las funciones de transición:
  - Obtener a partir del AFN, el AFD mediante cerradura ε y transiciones sobre los caracteres.



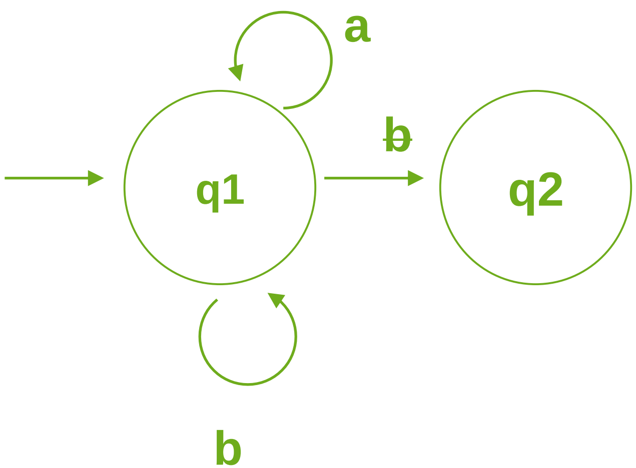
IMPLEMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING A PARTIR DE UN AUTÓMATA FINITO DETERMINISTA

- Creación de las funciones de transición:
  - Minimización del número



IMPLEMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING A PARTIR DE UN AUTÓMATA FINITO DETERMINISTA

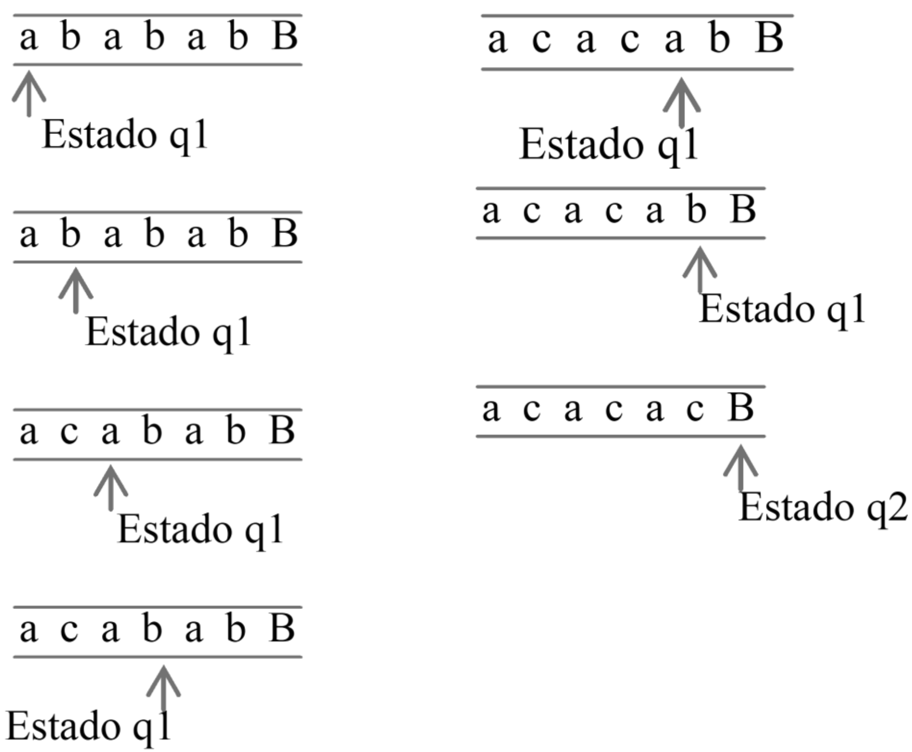
- Creación de las funciones de transición:



$$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$$
$$\delta(q_1,b)=(q_1,c,R)$$
$$\delta(q_1,\cancel{b})=(q_2,\cancel{b},R)$$

IMPLEMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING A PARTIR DE UN AUTÓMATA FINITO DETERMINISTA

Para la cadena ababab



MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

Una máquina de Turing se puede comportar como un aceptador de lenguaje, como un autómata finito o de pila.

MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

Se coloca una cadena w en la cinta.

Se sitúa la cabeza de lectura/escritura sobre el símbolo del extremo izquierdo de la cadena w.

Se inicia la máquina de Turing.

w es aceptada si después de una secuencia de movimientos, la máquina de Turing llega a un estado final y se detiene.

MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

Ejemplo 1: Máquina de Turing que acepta el lenguaje regular a^* sobre $\Sigma = \{a\}$.

- Comenzando con el símbolo más a la izquierda en una cadena,
- realizaremos un análisis hacia la derecha,
- leyendo cada símbolo y comprobando que es una a,
- si lo es realizaremos un desplazamiento hacia la derecha
- si es un blanco aceptamos y paramos,
- si es otro símbolo que no es a ni el blanco paramos en un estado que no es de aceptación.

MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

Ejemplo 1: Máquina de Turing que acepta el lenguaje regular a^* sobre $\Sigma = \{a\}$.

- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a\}$
- $\Gamma = \{a, \cancel{b}\}$
- $s = q_1$
- $F = \{q_2\}$
- δ dado por:
  - $\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$
  - $\delta(q_1,\cancel{b})=(q_2,\cancel{b},L)$

MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

Ejemplo 2: MT M2 que reconoce el lenguaje consistente de todas las cadenas de 0s cuya longitud es una potencia de 2. La MT decide el lenguaje $A = \{ 02n \mid n \geq 0\}$.

MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

M2 = "Sobre la cadena de entrada w:

1. Recorrer la cinta de izquierda a derecha, marcando un cero si y otro no.
2. Si en el paso 1 la cinta contiene sólo un cero, aceptar.
3. Si en el paso 1 la cinta contiene más de un cero y la cantidad de ceros es impar, rechazar.
4. Regresar la cabeza de la cinta hasta la posición más a la izquierda.
5. Ir al paso 1."
   - Q = { q1, q2, q3, q4, q5, qaceptar, qrechazar }
   - Σ = { 0 }
   - Γ = { 0, x, ␣ }
   - δ se describe en el diagrama de estados

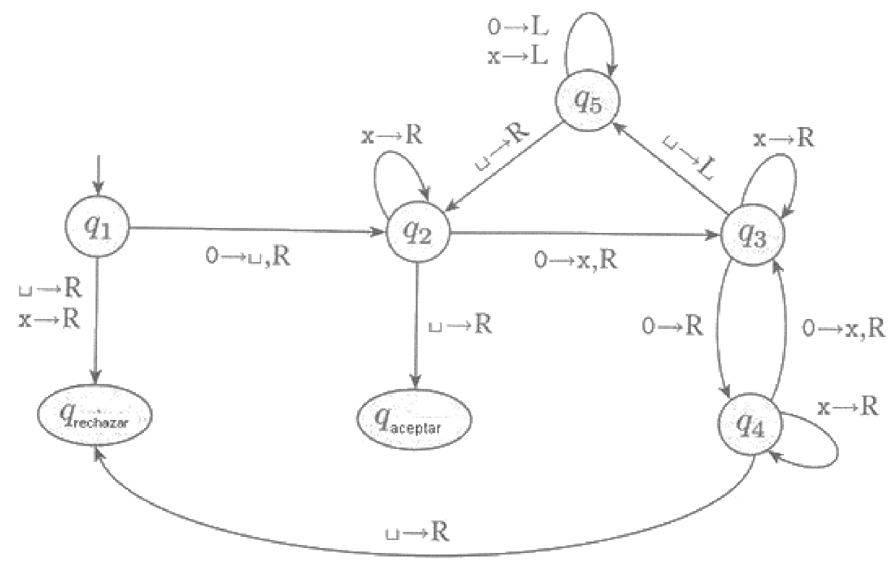
MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

δ se describe en el diagrama de estados

La etiqueta 0 →Ꝋ, R aparece en la transición de q_1 a q_2.

Esto significa que, cuando M2 se encuentra en el estado q_1 con la cabeza de la cinta leyendo un 0, la máquina va al estado q_2, escribe Ꝋ y mueve la cabeza de la cinta a la derecha (R).

En otras palabras $\delta(q_1, 0) = (q_2, ⊔, R)$. Para mayor claridad se usa 0 → R en la transición de q_3 a q_4, lo cual significa que M2 se mueve a la derecha cuando lee un 0 en el estado q_3, pero no altera la cinta, $\delta(q_3, 0) = (q_4, 0, R)$.



MÁQUINA DE TURING COMO ACEPTADORES DE LENGUAJES

Corrida de M2 sobre la cadena de entrada 0000.

$$q_1 0000$$
$$\sqcup q_2 000$$
$$\sqcup \mathrm{x} q_3 00$$
$$\sqcup \mathrm{x}0 q_4 0$$
$$\sqcup \mathrm{x}0\mathrm{x} q_3 \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{x}0 q_5 \mathrm{x} \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{x} q_5 0\mathrm{x} \sqcup$$

$$\sqcup q_5 \mathrm{x}0\mathrm{x} \sqcup$$
$$q_5 \sqcup \mathrm{x}0\mathrm{x} \sqcup$$
$$\sqcup q_2 \mathrm{x}0\mathrm{x} \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{x} q_2 0\mathrm{x} \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{xx} q_3 \mathrm{x} \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{xxx} q_3 \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{xx} q_5 \mathrm{x} \sqcup$$

$$\sqcup \mathrm{x} q_5 \mathrm{xx} \sqcup$$
$$\sqcup q_5 \mathrm{xxx} \sqcup$$
$$q_5 \sqcup \mathrm{xxx} \sqcup$$
$$\sqcup q_2 \mathrm{xxx} \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{x} q_2 \mathrm{xx} \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{xx} q_2 \mathrm{x} \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{xxx} q_2 \sqcup$$
$$\sqcup \mathrm{xxx} \sqcup q_{\text{aceptar}}$$

BIBLIOGRAFÍA

Dean Kelley, Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales, Longman.

EJERCICIO

Crear en grupo una expresión regular sencilla.

Intercambiar con otro grupo la expresión regular.

Crear con la expresión regular obtenida un AFN y luego su correspondiente AFD.

Crear la Máquina de Turning correspondiente al AFD obtenido.