CAPÍTULO IV: **Aproximación de funciones**

SERIES DE POTENCIAS

1- *Definición*

Llamamos serie de potencias a una serie de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$

Donde x es una variable, y c_n es el coeficiente que le corresponde a cada término. Ese coeficiente puede ser constante o depender de n.

Por ejemplo:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$ donde **c_n = 1/ n!** (depende de n)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$ donde **c_n = 1/3** (es constante)

La serie de potencias se puede presentar en una forma más general, como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

La llamamos serie de potencias en (x-a), o serie de potencias centrada en a.

Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n = 0 + (x-1) + 2(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + \ldots$ centrada en 1

En el estudio de series vamos a abarcar dos puntos importantes:

a) **Para qué valores de x converge la serie.**

b) **Si converge, cuál es su suma**

Dado que los términos de la serie dependen de x, podemos ver que su suma, si existe, será una función de esta variable o sea S = f(x), cuyo dominio será el conjunto de valores de x, para los cuales converja la serie.

2- *Convergencia de una serie de potencias:*

Si x toma un valor fijo, la serie se reduce a una serie numérica, cuyas características y convergencia fueron estudiadas precedentemente.

Veremos ahora cómo hallar los valores de x para los cuales la serie resulta convergente, según que la serie tenga coeficiente constante o que dependa de n:

- ✓ **Si c_n = c (cte) para todo n** la serie de potencias se transforma en una serie de potencias geométrica. Por ejemplo:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ donde c = 1 y **x** es la razón

Si queremos averiguar para qué valores de x esta serie es convergente, aplicamos el criterio visto para series geométricas, cuya convergencia estará dada por | r | < 1, en este caso sería | x | < 1, es decir para

-1< x < 1. Si le damos a x valores entre 1 y -1, la serie numérica obtenida es convergente, La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(x)^n$ es convergente en el intervalo] -1 , 1 [.

El intervalo formado con los valores de x para los que la serie es convergente se llama **intervalo de convergencia de la serie.**

Si la serie no es geométrica porque el coeficiente c_n depende de n, para hallar los valores de x para los cuales converge la serie, recurrimos al criterio de la razón o criterio de D'Alambert.

Ejemplos:

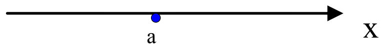
Determinar los valores de x, para los cuales converge cada una de las siguientes series:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}$ n! x^n Donde: $a_n = n!x^n$ y $a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$

Aplicamos el criterio:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)x\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left|x\right| = \infty$$

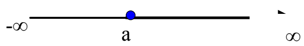
Esta serie diverge para todo x ≠ 0. La serie original converge si x = 0 (serie nula), esto también se cumple para la serie $\sum_{n=0}^{\infty}$ n! $(x-a)^n$ solo converge si x = a, o sea en su centro.



2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ donde : $a_n = \frac{x^n}{n!}$ y $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Aplicamos el criterio:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{|n+1|} = 0$ → | x | = 0 como este valor es menor a 1, concluimos que la serie converge para todo x.



3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n3^n}$ Tenemos: $a_n = \frac{(-1)^n x^n}{n3^n}$ y $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$

Aplicamos el criterio:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n3^n}{(n+1)3^{n+1}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{(n+1)3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{3}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{x}{3}\right|$$

para que la serie sea convergente deberá ser $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ por lo tanto -1< x/3 <1 , esto se cumple para

-3 < x < 3 . Estamos seguros que la serie converge en este intervalo, pero el criterio no decide en los puntos extremos del intervalo x = -3 y x = 3, este caso se analiza reemplazando a x en la serie por estos valores, obteniéndose una serie numérica.

Si x = -3 nos queda: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ corresponde a la serie armónica que es divergente.

Si x = 3 reemplazamos: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ es una serie armónica alternada, por lo tanto en x = 3 la serie converge, no así en x = -3

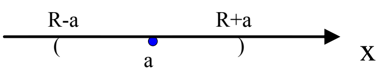
En los ejemplos vistos, el conjunto de valores para los que x converge son:

Ejemplo 1, converge solo en un punto, en el **ejemplo 2**, el intervalo es infinito y en el último ejemplo lo hace en un intervalo finito. Vamos a resumir con el siguiente teorema que hace referencia a la forma general de la serie, centrada en a.(en los ejemplos vistos a = 0)

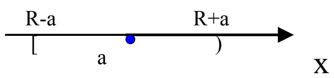
> *Para una serie de potencias dada* $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ *solo hay tres posibilidades:*
>
> 1. *La serie solo converge cuando x = a*
> 2. *La serie converge para todo x*
> 3. *Hay un número positivo R tal que la serie converge si* $|x-a|<R$ *y diverge si* $|x-a|>R$

El número R del punto 3, se denomina ***radio de convergencia*** de la serie de potencias.
Para los casos 1 y 2 decimos por convención que R es 0 ó R es ∞ respectivamente.
Al intervalo con centro en x = a y radio R se le llama ***intervalo de convergencia,*** podemos decir, que este intervalo consta de todos los valores de x, para los cuales la serie converge.
Existen cuatro posibilidades para este intervalo:

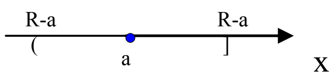
1- Intervalo abierto
(R-a , R+a)



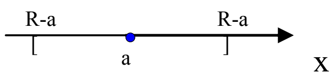
2- Intervalo semiabierto
[R-a , R+a)



3- Intervalo semiabierto
(R-a , R+a]



4- Intervalo cerrado
[R-a , R+a]



Ejemplo:

Determinar en la siguiente serie de potencias **a)** Radio de convergencia

b) Intervalo de convergencia.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-5)^{n-1}}{n5^n}$ De la serie obtenemos: $a_n=\frac{(-1)^n(x-5)^{n-1}}{n5^n}$ y $a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{(n+1)5^{(n+1)}}$

Calculamos $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^n n5^n}{(n+1)5^{(n+1)}(x-5)^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x-5)}{(n+1)5}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \lim_{n\leftarrow\infty}\left|\frac{x-5}{5}\right| = \left|\frac{x-5}{5}\right|$

Esta serie es convergente, para los valores de x, que verifiquen: $\left|\frac{x-5}{5}\right| < 1$

Esto es para $-5 < (x-5) < 5$ o sea para $0 < x < 10$

a) Como el centro de la serie es a = 5, el radio de convergencia es R = 5
b) Para determinar el intervalo de convergencia, reemplazamos x = 0 y x = 10 en la serie original.

Para x = 0 nos queda: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-5)^{n-1}}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{5n}$

Serie de términos negativos armónica, por lo tanto diverge.

Para x = 10 nos queda: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5)^{n-1}}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n}$ Serie armónica alternada, por lo tanto converge.

Intervalo de convergencia: (0,10]

Una forma más simple de determinar la convergencia, es a partir del criterio de D'Alambert modificado para series de potencias, trabajamos con el ejemplo anterior y luego enunciamos el criterio.

Si en lugar de calcular el límite del valor absoluto del cociente de los términos a_n y a_{n+1}, trabajamos con los coeficientes c_n y c_{n+1} correspondientes a cada uno, obtenemos:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n5^n}{(n+1)5^{(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)5}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \lim_{n\leftarrow\infty}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ como $1/5 = L < 1$ por el criterio la serie numérica converge. Si comparamos este resultado con el obtenido en el punto anterior, vemos que R = 1/L = 5, es decir podemos obtener de una forma más sencilla el radio de convergencia de la serie.

Criterio del cociente aplicado a series de potencias:

Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *si*

1. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L \neq 0$ *entonces el radio de convergencia es R=1/L*
2. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$ *entonces el radio de convergencia es R*
3. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \infty$ *entonces el radio de convergencia es R= 0*

Con este criterio, obtenemos el radio de convergencia, para completar el estudio debemos encontrar el intervalo de convergencia.

3- *Suma de una serie de potencias*

- ✓ **Representación de funciones como serie de potencias. Series geométricas**

En la introducción del tema dijimos que la suma de la serie debería ser una función de x, cuyo dominio es el intervalo de convergencia. En este punto aprenderemos a encontrar dicha función a partir de una serie de potencias geométrica dado que en este tipo de series, si converge, podemos hallar su suma con la fórmula vista en series numéricas.

También trataremos el problema inverso; dada una función hallar su desarrollo en serie.

¿Para que nos sirve expresar una función conocida en forma de una cantidad infinita de términos? Veremos que esto es útil para integración de funciones, que no sería posible de otra manera. Para la resolución de ecuaciones diferenciales, para aproximar o representar funciones mediante polinomios, lo que se aplica en computación.

Ejemplo 1:

Vimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ converge en el intervalo]-1,1[

Pero, a qué converge? Es decir cuál es la suma de la serie? Como la serie es geométrica utilizamos la fórmula para series geométricas $S = \dfrac{a}{1-r}$ y la suma de la serie del ejemplo es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{si } -1 < x < 1$$

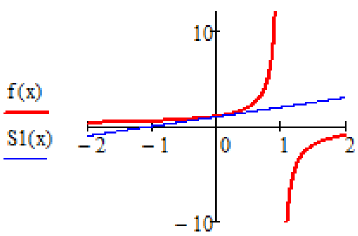
¿Qué significa que esta serie converge a la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\forall x \in]-1,1[$?

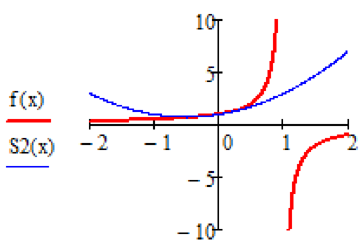
La serie de potencias converge a la función f(x), si y solo la sucesión de sumas parciales converge a f (por definición de convergencia de una serie).

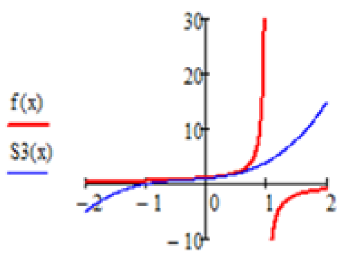
Las sumas parciales de una serie de potencias son polinomios, en el ejemplo:

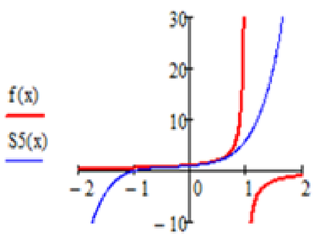
$S_0 = 1$ $\qquad$ $S_1 = 1 + x$ $\qquad$ $S_2 = 1 + x + x^2$ $\qquad$ $S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$

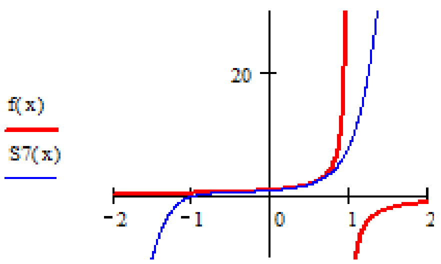
$S_4 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ $\qquad$ $S_5 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ $\qquad$ $S_6 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

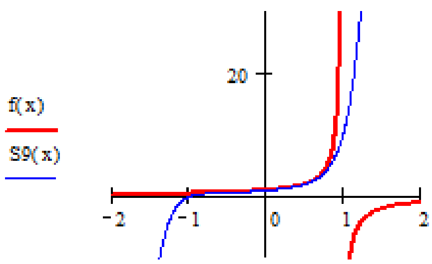






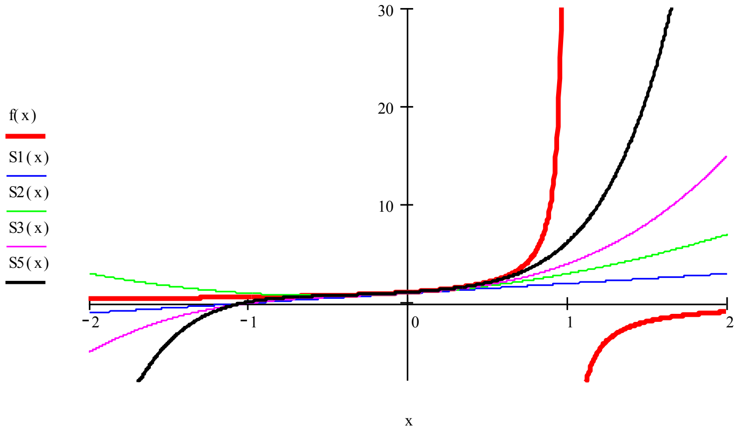






Vemos que al aumentar el grado de los polinomios la gráfica de estos se aproxima cada vez más a la gráfica de la función f, pero sólo en el intervalo]-1,1[. Por eso decimos que la sucesión de sumas parciales converge a f, y por lo tanto la serie converge a f en dicho intervalo.

Si graficamos varias sumas parciales a la vez nos queda:



Vemos que las gráficas de los distintos polinomios se aproximan cada vez más a la gráfica de f, en el intervalo]-1,1[

Ejemplo 2:

Dada $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ encontrar f(x)

Si comparamos con la expresión de la serie geométrica, en el ejemplo la razón es r = $(-x^2)$

Calculamos la suma de la serie S $= \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}$ La serie representa a f(x) = $\dfrac{1}{1+x^2}$

$\left|(-x^2)\right| = \left|x^2\right| < 1$ esto es $x^2 < 1$ ó $|x| < 1$ El intervalo de convergencia es]-1 , 1[

Entonces s = f(x) = $\dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x$ en el intervalo]-1 , 1[

Ahora veremos el proceso inverso, dada una función, cuál es su desarrollo en forma de serie geométrica. Esto no será posible para todo tipo de funciones, esta limitación está dada por c = cte (coeficiente constante)

Ejemplo 3:

Hallar la serie que representa a la función f(x) = $\dfrac{1}{3-x}$, sabemos que esta función responde a la suma de la serie geométrica $s = \dfrac{c}{1-r}$ para $|r| < 1$

Llevamos f(x) a esta forma para compararla con S, y determinar el coeficiente y la razón.

f(x) = $\dfrac{1}{3-x} = \dfrac{1}{3\left(1-\dfrac{x}{3}\right)} = \dfrac{1/3}{1-\dfrac{x}{3}}$ tenemos c = 1/3 y r = $\dfrac{x}{3}$

Es una serie centrada en cero, y es convergente para -3 < x < 3

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$ representa a f(x) en el intervalo]-3, 3[

La serie representa a f(x) en el intervalo de convergencia, esto quiere decir que podemos calcular el valor de la función para x comprendida en dicho intervalo.

¿Si queremos calcular el valor de f(x) para otro x? Podemos hacerlo si cambiamos el centro de la serie.

f(x) = $\frac{1}{3-x}$ podemos calcular su valor para $-3 < x < 3$ .Si queremos hallar f(5), la serie obtenida, no sería válida. Lo podremos hacer, si cambiamos el centro de la serie, para ello sumamos y restamos el valor donde se desea calcular la serie, a la x en el denominador.

f(x) = $\frac{1}{3-x+5-5}$ agrupamos de manera conveniente para obtener una serie con centro en 5.

$$f(x) = \frac{1}{-2-(x-5)} = \frac{1}{-2\left[1-\left(-\frac{x-5}{2}\right)\right]} = \frac{-1/2}{1-\left(-\frac{x-5}{2}\right)}$$

Si f(x) representa la suma de la serie, obtenemos c = -1/2 y $r = -\frac{x-5}{2}$

Convergente para: $\left|\frac{x-5}{2}\right| < 1$; $-2 < x-5 < 2$ ó $3 < x < 7$

La serie correspondiente es : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(x-5)^n$ teniendo en cuenta el producto de potencias de igual base, se ha agrupado ½ con $(½)^n$, lo mismo para la potencia de la unidad

SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

Se ha encontrado hasta ahora, el desarrollo en serie para cierta clase de funciones, que corresponden a solo a aquellas que presentan la forma de la suma de una serie geométrica. Extenderemos lo visto a otras funciones. Esto nos obliga a preguntarnos ¿Qué funciones tienen representación en series de potencias? ¿Cómo podemos encontrar dichas representaciones?

Serie de Taylor y de Maclaurin

Definición:

Si una función f tiene infinitas derivadas sucesivas en un entorno que contiene al punto x = a, se llama **Serie de Taylor de f en a,** a la serie de potencias dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$ **Serie de Taylor**

La suma parcial de grado n se anota Sn , y está dada por el polinomio:

$$Sn = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Llamado **polinomio de Taylor**

En particular si a = 0 se llama **Serie de Maclaurin de f**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.x^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.x + \frac{f''(a)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.x^3 + \ldots$$ **Serie de Maclaurin**

Y la suma parcial sería el polinomio:

$$Sn = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}.x^n$$ Llamado polinomio de Maclaurin

Hemos visto que la forma general de una serie de potencias es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

Vemos que si queremos representar una función f(x) en serie de potencias, debemos encontrar en cada caso los coeficientes de la serie para hacer la combinación lineal.

Comenzaremos suponiendo que f es cualquier función representable por una serie de potencias con centro

en a: $f(x) = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \ldots + c_n (x-a)^n + \ldots \qquad |x-a| < R \qquad (\text{I})$

A cada término de la serie, le corresponde un coeficiente c_n.

Debemos hallar una expresión para el cálculo de c_0, c_1 ...c_n.

Para empezar si x = a en la ecuación (I), todos los términos después del primero se anulan y obtenemos:

$f(a) = c_0$

Por tratarse de una serie de potencias, se cumple que podemos derivarla término a término, dentro de su intervalo de convergencia.

$f'(x) = c_1 + 2c_2 (x-a) + 3 c_3 (x-a)^2 + \ldots + n c_n (x-a)^{n-1} + \ldots \qquad |x-a| < R \qquad (\text{II})$

Si en (II), hacemos x = a, nos queda:

$f'(a) = c_1$

Derivamos (II)

$f''(x) = 2c_2 + 3.2c_3 (x-a) + 4.3c_4 (x-a)^2 + \ldots + n(n-1)c_n (x-a)^{n-2} + \ldots \qquad |x-a| < R \qquad (\text{III})$

Si x = a $f''(a) = 2 c_2 = 2!\, c_2$ (reemplazamos por porque 2! = 2)

Despejando $\mathbf{c_2 = \frac{f''(a)}{2!}}$

Vamos a derivar una vez más, para poder hallar una expresión para c_n

Derivamos (III)

$f'''(x) = 3.2c_3 + 4.3.2c_4 (x-a) + 5.4.3.2 (x-a)^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n (x-a)^{n-3} + \ldots \qquad |x-a| < R$

$f'''(a) = 3.2\, c_3 = 3!\, c_3$

Despejando: $\mathbf{c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}}$

observando los coeficientes obtenidos, vemos que si queremos calcular c_n, tendremos que derivar n veces a f, y luego sustituir x por a para anular los términos restantes. Al derivar en forma sucesiva aparece el factor n! $\mathbf{c_n = \frac{f^n(a)}{n!}}$

Esta fórmula es válida para n = 0, si adoptamos las convenciones $f^0(a) = f(a)$ corresponde a la función sin derivar y 0! = 1. Quedando así demostrado el teorema.

Lo visto lo podemos generalizar en el siguiente teorema:

TEOREMA I:

Si la serie de potencias centrada en a, converge a f(x), esto es si

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = f(x) \qquad \text{si } |x-a| < R$$

Entonces los coeficientes de la serie están dados por la fórmula: $c_n = \dfrac{f^n(a)}{n!}$

Volvamos al ejemplo de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sabemos que se puede representar como serie de potencias geométrica de razón (- x) es decir que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ converge a $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

El teorema nos asegura que los coeficientes de dicha serie deben tener la forma $\mathbf{c_n = \dfrac{f^n(a)}{n!}}$

Calculemos estos coeficientes en a = 0, y comparemos con los términos de la serie.

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$	f(0) = 1	c_0 = 1
$f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$	f ’(0) = -1	$c_1 = \dfrac{-1}{1} = -1$
$f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$	f ”(0) = 2	$c_2 = \dfrac{2}{2!} = 1$
$f'''(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4}$	f”’(0) = -6	$c_3 = \dfrac{-6}{3!} = -1$

Al comparar vemos que efectivamente los coeficientes si tienen la forma de la serie de Maclaurin de f centrada en x = 0

🕮 **Importante !**

Para cualquier función que tenga infinitas derivadas sucesivas en un intervalo que contiene al punto **a**, siempre se puede encontrar la serie de Taylor de esa función (o la de Maclaurin si a = 0)

Para que la serie de Taylor o Maclaurin, converja a la función que la genera, se debe cumplir el siguiente teorema:

<u>TEOREMA II</u>

Si una función tiene derivadas de todo orden en un intervalo I centrado en a entonces la igualdad

$$\mathbf{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}$$

se cumple si y sólo si

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0} \qquad \textit{en todo x de I}$$

Siendo **$R_n(x)$ el residuo de Taylor**

Demostración:

Como en toda serie, se puede expresar a la serie de potencias de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$

$$= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

Donde $R_n(x)$ se llama resto o residuo de la serie, y se puede estimar con la siguiente fórmula

$|R_n(x)| < \left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|.\text{máx}\left|f^{n+1}(z)\right|$ con $a < z < x$

El cálculo del resto es complicado y no es objetivo de este curso de Cálculo

Si llamamos $P_n(x)$ (polinomio de Taylor de grado n) a la suma parcial de grado n , entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n = P_n(x)+R_n(x)$$

La serie de Taylor de f en x = a , converge a f , en el intervalo I que contiene al punto a, si y solo si

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n = P_n(x)+R_n(x)$ para todo $x \in I$

Lo que significa que $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$ (limite de la sucesión de sumas parciales)

Pero como $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Entonces aplicando límite a cada término

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x)-P_n(x)] = \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} P_n(x) =$$

$\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$ por ser f(x) constante en el límite

$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ por ser la suma de la serie

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ quedando así demostrado

No es objetivo de este curso que el alumno calcule el resto. Vamos a trabajar con funciones que son de aplicación en ingeniería y su residuo o resto es nulo. Tales funciones son entre otras: exponencial, sen mx,

cos mx ; e^{mx} y las que pueden obtenerse mediante suma, producto y cociente de estas funciones, por ejemplo tg(mx).

Ejemplo 1:

Hallar los siete primeros términos de la serie de Maclaurin correspondiente a la función senx.

f(x) = sen x	f(0)=0	$c_0 = \frac{0}{0!} = 0.$
f ’(x) = cos x	f ’ (0) = 1	$c_1 = \frac{1}{1!}.$
f ’’(x) = - sen x	f ’’ (0) = 0	$c_2 = \frac{0}{2!} = 0.$
f ’’’(x) = - cos x	f ’’’(0) = -1	$c_3 = \frac{-1}{3!}$

$f^{IV}(x) = \text{sen } x$ $\quad f^{IV}(0) = 0$ $\quad c_4 = \frac{0}{4!} = 0.$

$f^{V}(x) = \cos x$ $\quad f^{V}(0) = 1$ $\quad c_5 = \frac{1}{5!}$

$f^{VI}(x) = -\text{sen } x$ $\quad f^{VI}(0) = 0$ $\quad c_6 = \frac{0}{6!} = 0.$

$f^{VII}(x) = -\cos x$ $\quad f^{VII}(0) = -1$ $\quad c_7 = \frac{-1}{7!}$

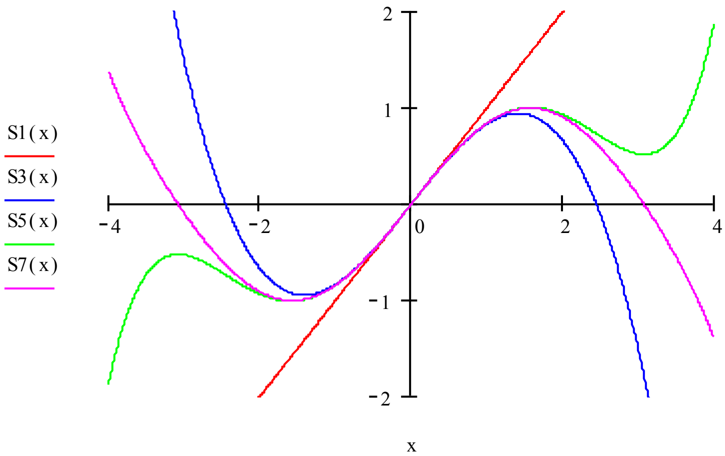
Observamos que solo aparecen las potencias impares con signos alternados, el término enésimo es:

$c_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ la serie correspondiente al sen x centrada en cero es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}(x)^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}.x^3 + \frac{1}{5!}.x^5 - \frac{1}{7!}.x^7 + \ldots$$

Si hacemos las gráficas de las sumas parciales, deben aproximarse cada vez más, a la gráfica de f.

$S_1 = x$ $\quad S_3 = x - \frac{x^3}{3!}$ $\quad S_5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad S_7 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$



Vemos como la suma de los términos de la serie se aproximan a la función sen x, para valores próximos a cero

Ejemplo 2:

Obtener el desarrollo en serie de Taylor para f(x) = cos x, alrededor de x = π/4

$f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $c_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\cos x)' = -\text{sen } x$; $f'(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\cos x)'' = -\cos x$ $\quad f''(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2.2!}$

$(\cos x)''' = \text{sen } x$ $\quad f'''(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $c_3 = \frac{\sqrt{2}}{2.3!}$

Por los signos, que no son alternados, para generalizar hay que expresarlo como suma de dos sumatorias, una para los términos pares y otra para los términos impares:

Para los pares:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2.}\frac{1}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}$$

Para los impares:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}.(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}$$

Sumando las dos:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{(2.n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}.\frac{\sqrt{2}}{2}.(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2.2!}.(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{2.3!}.(x-\frac{\pi}{4})^3+\ldots$$

<u>Ejemplo 3</u>:

Las series numéricas se puede multiplicar y dividir como los polinomios. Por ejemplo:

*Encuentre el desarrollo en serie de Maclaurin de f(x)=$e^x.\sqrt[3]{x}$

Sabemos que $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\ (1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)$$

$$f(x)=x^{1/3}+x^{4/3}+\frac{x^{7/3}}{2!}+\frac{x^{10/3}}{3!}+\frac{x^{13/3}}{4!}+\ldots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1/3}}{n!}$$

<u>Aplicaciones de las series</u>: Resolución de integrales

<u>Ejemplo 4</u>:

Calcular $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ con un error menor que 0,01

Esta integral, no la podemos evaluar con los métodos de integración vistos, como sabemos que una serie se puede integrar término a término en su intervalo de convergencia, desarrollamos en serie de Maclaurin el integrando. Esto está resuelto en el ejemplo 2 – a) y la serie obtenida es

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\frac{(-x^2)^4}{4!}+\ldots$$

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\ldots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1 (1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\ldots)dx$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\ldots$$

Sumando los cuatro primeros se obtiene: $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.74$