Universidad de Mendoza
Facultad de Ingeniería

Algebra Lineal

TRABAJO PRACTICO

ESPACIOS METRICOS

OBJETIVOS:

- *Reconocer los espacios métricos, normados y pre-hilbertianos relacionando las normas y distancias inducidas por el producto interior.*
- *Conocer los espacios complejos con producto interno.*
- *Ampliar el estudio de bases a bases ortogonales y ortonormadas.*
- *Aplicar los conceptos mencionados a la resolución de problemas.*

PARTE A: PARA TRABAJAR EN CLASE

1. Considere la norma p definida en IR^n (IR) dada por:

$$\| (x_1,\dots, x_n) \|_p = +\left(| x_1|^p + \dots + | x_n |^p \right)^{1/p} \text{ para } p = 1, 2, \dots, n$$

Para p = 4

a) Determine la veracidad de: si u = (-1, 1,-1,1) entonces $\| u \|^4 = (4)^{1/4}$

b) Calcule a partir de esta norma la distancia de u a v si se sabe que:

u = (-1, 1, -1, 1) v = (0, 2, -1, 2)

2. Se tienen en M_{3x3} (IR) las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1.2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine la norma infinito de cada una de ellas e indique si son normadas.

b) Si no son normadas, normalícelas.

c) Determine la distancia de A a B a partir de la distancia inducida por esa norma.

3. En el espacio vectorial de las funciones continuas sobre un intervalo [a, b]: $C_{[a,b]}$ (IR), se define una función norma como sigue:

$$\| f \|_\infty = \max \{ | f(x) | ; x \text{ de } [a,b] \}.$$

Considere el intervalo [-1,1] y las siguientes funciones f, g definidas de él en IR tal que:

$f(x) = x^2 + x - 1$ y $g(x) = - x^2 + 2$

a) Determine la norma de ambas funciones.
b) Calcule la distancia de f y g inducida por esta norma.

---

4. Considere el siguiente producto escalar real dado en forma matricial:

$$\langle u, v\rangle = \langle (a, b, c), (d, e, f)\rangle = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

a) Muestre que se verifica el axioma de positividad de producto escalar:

$$\langle u, u\rangle \geq 0 \wedge \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$$

b) Calcule el producto escalar entre u = (-1, 2, -2) y v = (1, -1, 2)

---

5. Considere el siguiente producto escalar definido en el espacio vectorial de las funciones reales: $\mathbf{C}_{[-1,1]}(\boldsymbol{R})$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x). g(x) dx$$

Y las funciones: $p(x) = x^2 - 1$ $q(x) = (x - 1)^2$

a) Calcule el producto escalar entre ellas e indique si son ortogonales, justifique su respuesta.

b) Determine la distancia de p a q a partir de la distancia inducida por el producto dado.

---

6. Demuestre que en un espacio normado y prehilbert real:

a) Dos vectores son ortogonales si se verifica que: $\|u + v\| = \|u - v\|$

b) $\langle u + v, u - v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$

---

7. Demuestre en el espacio unitario $C^2(C)$ con producto hermítico canónico, que se verifica el axioma: $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

Sabiendo que $\langle u, v\rangle = z_1.\overline{w_1} + z_2.\overline{w_2}$ siendo $u = (z_1, z_2)$ $v = (w_1, w_2)$

---

8. Considere las matrices complejas:

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} -1 - i & 1 + i \\ -2 & -1 + 3i \end{pmatrix}$$

a) Halle el producto entre A y B para el producto hermítico usual

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

b) Determine la distancia entre A y B inducida por este producto.

---

9. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres **P₃(*R*)** se tiene el producto interior:

$$\langle f,\ g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$$

Investigue si los siguientes vectores constituyen una base, en caso afirmativo analice si es ortonormada u ortogonal: {f1, f2, f3, f4} siendo: f1(x) = 1, f2(x) = x, f3(x) = x^2, f4(x) = x^3

---

10. Sea C*[a, b] el espacio vectorial de las funciones definidas en [a, b] con valores complejos, en él se define el siguiente producto interno:

$$\langle f,\ g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t).\overline{g(t)}dt$$

Y las funciones f(t) = $2.t^2 - t\ i$ y g(t) = $t - 2t\ i$

a) Analice si son funciones ortogonales, justifique su respuesta.

b) Determine la distancia entre ellas a partir de la distancia inducida por este producto.

PARTE B: PARA TRABAJAR SOLOS Y DISCUTIR EN CONSULTA

1. Demuestre:

Si la distancia de dos vectores u, v es igual a la distancia de u a –v, entonces u y v son ortogonales.

---

2. Demuestre en el espacio complejo C^2(C) que el producto hermítico:

$\langle u, v \rangle = \ 2.\overline{z_1}.w_1 + \ + \bar{z}_1.w_2 + \overline{z_2}.w_1 + \ + \bar{z}_2.w_2$ siendo $u = (z_1,\ z_2)$ $\quad v = \ (w_1,\ w_2)$

Verifica los siguientes axiomas:

a) $\langle u, u \rangle \ \geq 0 \ \wedge \ \langle u, u \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ u = \vec{0}$

b) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

3. Se tiene el espacio vectorial de las funciones continuas C[a, b] (IR) y el producto:

$$\langle f,\ g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$$

a) Considere las funciones f(x) = sen (x), g(x) = cos (x) de C[-1, 1] (IR) e investigue si son ortogonales y si son normadas para el producto dado. Justifique su respuesta.

b) Sea la función $h(x) = x^3$ de C[-1, 1] (IR), analice cuál de las funciones definidas en el ítem anterior está más cerca de ella para la distancia inducida por este producto. Justifique su respuesta.

---

4. Demuestre que en un espacio normado y prehilbert real:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2.(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

---

5. Considere el siguiente producto dado en IR^3(IR):

$$\langle u,v\rangle = \langle (a,b,c),(d,e,f)\rangle = \begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} d\\ e\\ f\end{pmatrix}$$

a) Verifique el axioma: $\langle u,u\rangle \geq 0 \wedge \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

b) Investigue si el siguiente conjunto conforma una base ortogonal o normada. Justifique sus repuestas. {(1, -2, 1), (1, 0, -1), (2, -1, 0)}

---

6. Sea C*[a, b] el espacio vectorial de las funciones definidas en [a, b] con valores complejos y el siguiente producto interno:

$$\langle f,\ g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t).\overline{g(t)}dt$$

Investigue si las siguientes funciones son ortogonales o si son normadas, justifique sus respuestas.

$f(t) = t^2 - t\,i$ y $g(t) = 2t - 2t\,i$