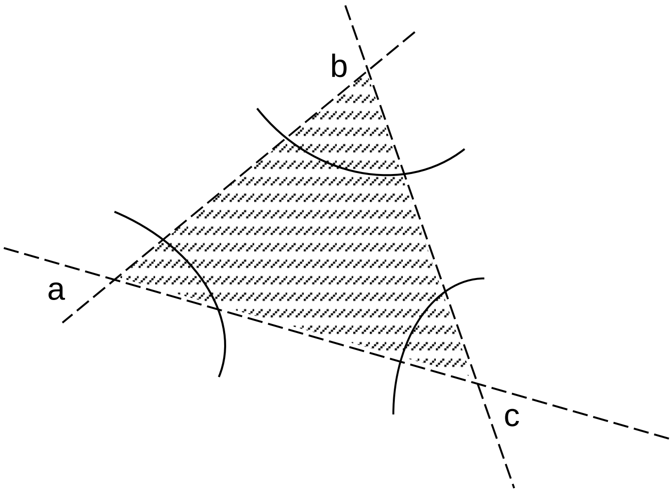
Trigonometría

Introducción

Se denomina triángulo "abc" a la región del plano obtenida por la intersección de tres semiplanos. Semiplano de borde R_{ab} que contiene al punto c, semiplano de borde R_{bc} que contiene al punto a y semiplano de borde R_{ca} que contiene al punto b.



En esta región podemos señalar tres puntos que se denominan vértices del triángulo: a, b, c. Los segmentos que comprenden esos puntos que se denominan lados ab; bc; ca. Y los ángulos interiores que quedan determinados, a los cuales se los puede designar con la misma letra que se señalan los vértices respectivos.

Es importante recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, dato muy útil en el momento de resolver algunos problemas.

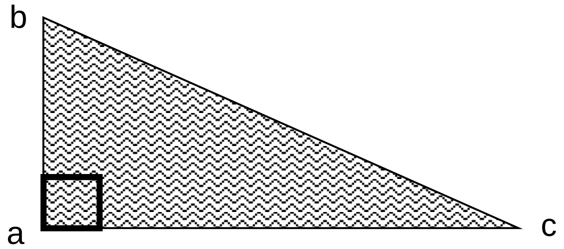
Sistemas de medición de ángulos:

Si bien los ángulos pueden medirse en distintos sistemas, nos interesa el sistema sexagesimal y el sistema radial, y el modo de pasar de uno a otro. Seguramente ya los conoces a ambos, recordemos algunas equivalencias:

Grados sexagesimales	Radianes
90º	$\pi / 2$
180º	π
270º	$3\pi / 2$
360º	2π

Es suficiente con establecer una regla de tres simples para expresar una medida angular dada en un sistema, en el otro.

Según la amplitud de los ángulos interiores se puede clasificar a los triángulos como **obtusángulos,** aquellos que poseen un ángulo interior que mide más de 90º, **acutángulo** es aquel cuyos tres ángulos exteriores miden menos de 90º, en esta oportunidad queremos destacar aquel que posee un ángulo recto, es decir un ángulo que mide exactamente 90º, que recibe el nombre de **triángulo rectángulo**:



En un triángulo rectángulo a los lados que subyacen al ángulo recto se los denomina catetos, al otro lado restante, opuesto al mencionado ángulo recto, hipotenusa.

Teorema de Pitágoras

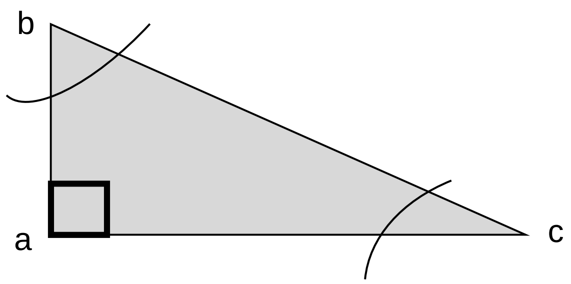
El cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Se puede demostrar.

En referencia a la figura presentada: Si A denominamos a la medida de la hipotenusa, B y C a las medidas de los catetos ac y ab respectivamente, podemos expresar el teorema como sigue:

$$\mathbf{A^2 = B^2 + C^2}$$

Razones trigonométricas

Es posible establecer determinadas relaciones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, se las suele denominar razones trigonométricas.



En esta figura que representa un triángulo rectángulo podemos observar que la **hipotenusa** se corresponde con el lado **bc**. Los ángulos interiores b y c son agudos, es decir miden menos de 90º.

Pongamos atención ahora al **ángulo interior c**, respecto de él, el lado ab es opuesto y a su medida la designamos B y el lado ca es adyacente y a su medida la designamos C, además como ya dijimos la medida de la hipotenusa la designamos A, con estas consideraciones podemos establecer razones trigonométricas:

En este triángulo rectángulo:

$$\text{sen (c)} = \frac{B}{A}$$

El seno del ángulo c es el cociente entre la medida del lado opuesto y la medida de la hipotenusa

$$\cos \text{(c)} = \frac{C}{A}$$

El coseno del ángulo c es el cociente entre la medida del lado adyacente y la medida de la hipotenusa

$$\text{tg (c)} = \frac{B}{C}$$

La tangente del ángulo c es el cociente entre la medida del lado opuesto y la medida del lado adyacente.

Podemos destacar que el seno, el coseno y la tangente de un ángulo son números reales.

Si ahora ponemos atención al **ángulo interior b**, respecto de él podemos decir que el lado opuesto es ac, cuya medida designamos como C, el ángulo adyacente es ba, cuya medida hemos designado como B, la hipotenusa sigue siendo bc, cuya medida designamos como A.

Entones podemos establecer otras razones trigonométricas de manera similar:

En este triángulo rectángulo:

$$\text{sen (b)} = \frac{C}{A}$$

El seno del ángulo b es el cociente entre la medida del lado opuesto y la medida de la hipotenusa

$$\cos \text{(b)} = \frac{B}{A}$$

El coseno del ángulo b es el cociente entre la medida del lado adyacente y la medida de la hipotenusa

$$\text{tg (b)} = \frac{C}{B}$$

La tangente del ángulo b es el cociente entre la medida del lado opuesto y la medida del lado adyacente.

Podemos también establecer relaciones entre estas razones, por ejemplo:

$$\text{sen (c)} = \frac{B}{A} = \cos \text{(b)}$$

$$\cos (c) = \frac{C}{A} = \text{sen } (b)$$

$$\text{tg } (c) = \frac{B}{C} = [\text{ tg } (b)\ ]^{-1}$$

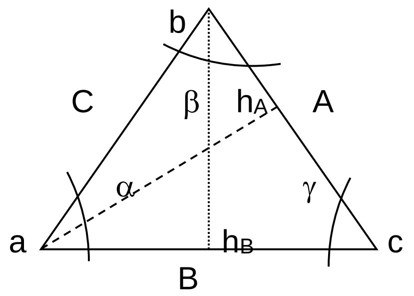
Siempre que tengamos un triángulo rectángulo podemos establecer las razones trigonométricas, debemos establecer bien respecto de qué ángulo estamos indicándolas.

Estas razones nos permiten calcular algún elemento que sea desconocido de un triángulo rectángulo y de esta forma resolver algunos problemas.

Los siguientes teoremas, también poseen demostración y son aplicables en numerosos problemas.

Teorema del seno:

En todo triángulo existe proporcionalidad entre la medida de los lados y el seno del ángulo opuesto al mismo.



$$\frac{\text{sen } \alpha}{A} = \frac{\text{sen } \beta}{B} = \frac{\text{sen } \gamma}{C}$$

Trazamos en el triángulo abc una de las alturas, por ejemplo h_B , quedan determinados dos triángulos rectángulos en los cuales resulta que:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{h_B}{C}$ y $\text{sen } \gamma = \dfrac{h_B}{A}$

despejando en ambos h_B resulta: $h_B = \text{sen } \alpha \ .\ C$ y $h_B = \text{sen } \gamma \ .\ A$

por lo tanto: $\text{sen } \alpha \ .\ C = \text{sen } \gamma \ .\ A$

de donde: $\boxed{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{A} = \dfrac{\text{sen}\,\gamma}{C}}$

Del mismo modo, si trazamos la altura sobre el lado bc anotada h_A , quedan determinados dos triángulos rectángulos, en los cuales:

$\text{sen } \beta = \dfrac{h_A}{C}$ y $\text{sen } \gamma = \dfrac{h_A}{B}$

despejando en ambos h_A resulta: $h_A = \text{sen } \beta \ .\ C$ y $h_A = \text{sen } \gamma \ .\ B$

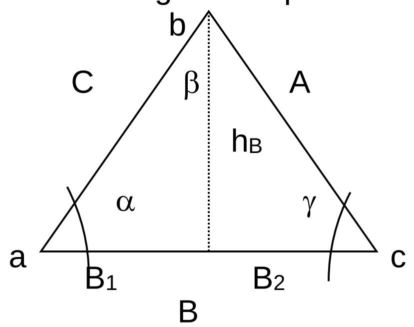
por lo tanto: $\text{sen } \beta \ .\ C = \text{sen } \gamma \ .\ B$

de donde: $\boxed{\dfrac{\text{sen}\,\beta}{B} = \dfrac{\text{sen}\,\gamma}{C}}$

Observando ambas expresiones resulta: $\dfrac{\text{sen } \alpha}{A} = \dfrac{\text{sen } \beta}{B} = \dfrac{\text{sen } \gamma}{C}$

Teorema del coseno:

En todo triángulo el cuadrado de la medida de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos, menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.



$A^2 = B^2 + C^2 - 2.B.C. \cos \alpha$

$B^2 = A^2 + C^2 - 2.A.C. \cos \beta$

$C^2 = A^2 + C^2 - 2.A.C. \cos \gamma$

Trazamos una de las alturas del triángulo, por ejemplo h_B , el lado ac queda dividido en dos, cuyas medidas están indicadas por B1 y B2, hemos determinados dos triángulos rectángulos en uno de los cuales aplicando Teorema de Pitágoras resulta:

$h_B^2 = A^2 - B_2^2$, pero a su vez $B_2 = B - B_1$ por lo tanto $h_B^2 = A^2 - (B - B_1)^2$,

además $h_B = \text{sen}\,\alpha \,.\, C$ y $B_1 = \cos \alpha \,.\, C$

<u>entonces sustituyendo resulta:</u>

$\text{sen}^2 \alpha \,.\, C^2 = A^2 - (B - \cos \alpha \,.\, C)^2$, desarrollando el cuadrado sería:

$\text{sen}^2 \alpha \,.\, C^2 = A^2 - B^2 + 2 \cos \alpha \,.\, B \,.\, C - \cos^2 \alpha \,.\, C^2$

$\text{sen}^2 \alpha \,.\, C^2 + \cos^2 \alpha \,.\, C^2 = A^2 - B^2 + 2 \cos \alpha \,.\, B \,.\, C$

$(\text{sen}^2 \alpha \,. + \cos^2 \alpha) \,.\, C^2 = A^2 - B^2 + 2 \cos \alpha \,.\, B \,.\, C$

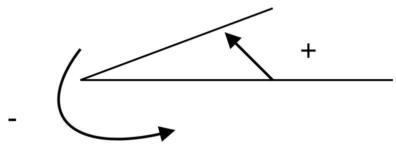
De aquí: $\boxed{A^2 = B^2 + C^2 - 2 \,.\, B \,.\, C \,.\, \cos \alpha}$

De la misma manera se demuestra para los otros dos lados.

Introducción al estudio de Funciones trigonométricas:

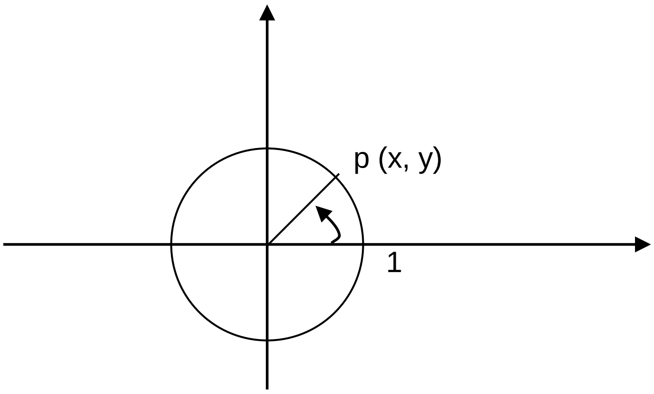
Ángulos orientados:

Se llaman ángulos orientados aquellos a los cuales se les ha considerado un sentido de giro, el que puede ser positivo (contra de las agujas de un reloj) o en sentido negativo (coincidiendo con el de las agujas de un reloj).
Un mismo ángulo se puede considerar medido en sentido positivo por ejemplo + 60º y en sentido negativo – 300º



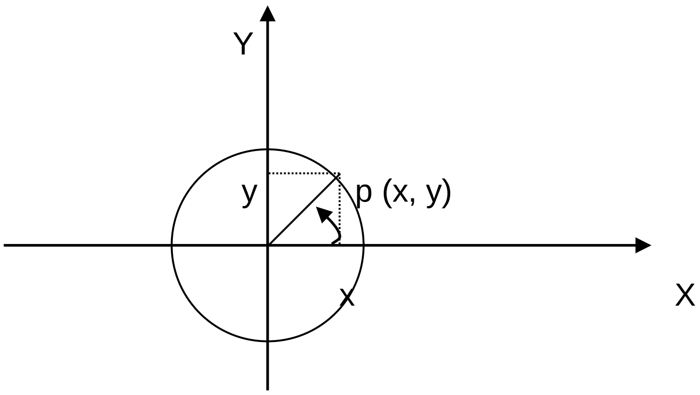
Funciones trigonométricas:

Para definirlas recurriremos a una circunferencia centrada en un par de ejes cartesianos ortogonales, cuyo radio es una unidad.



En ella marcamos un ángulo cualquiera medido en sentido positivo.
El lado del ángulo intersecta a la circunferencia en un único punto p = (x, y)

Observemos la gráfica:



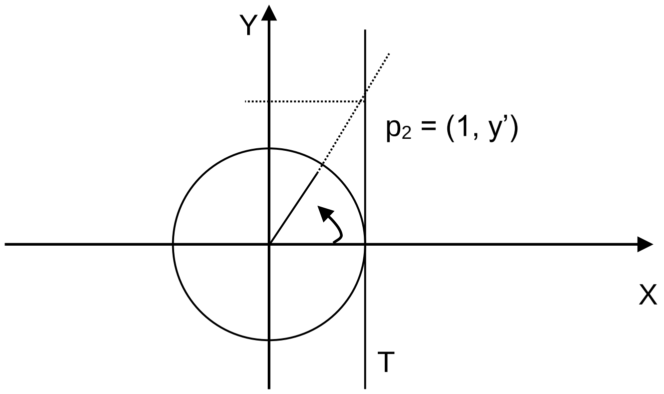
Denominaremos al ánguloα, en este caso en el primer cuadrante, medido en sentido positivo desde el eje de abscisas, marcamos el punto p = (x, y) y sus coordenadas, ya dijimos que es el punto de intersección entre el lado del ángulo y la circunferencia trigonométrica.

Definimos entonces:

cos α es la abscisa x del punto p

sen α es la ordenada y del punto p

Ubicamos ahora un único punto p2 que se obtiene intersectando la prolongación del lado del ángulo con la recta T, paralela la eje Y, y tangente a la circunferencia en (1, 0), sus coordenadas son p_2 = (1, y').



Se define entonces:

tg α es la ordenada y' del punto p_2

Ahora vamos a definir las funciones, es decir relaciones que verifican las condiciones de existencia y unicidad respecto a lo mencionado anteriormente.

Analicemos el caso de seno y coseno del ángulo, para cada ángulo siempre va a existir ese punto p de intersección del lado con la circunferencia, por lo tanto siempre van a existir sus coordenadas reales (x, y) únicas para dicho punto, en consecuencia se define:

$\text{sen} : IR \to IR$ $\quad\quad$ $\cos : IR \to IR$
$\alpha \to \text{sen}\ \alpha$ $\quad\quad$ $\alpha \to \cos \alpha$

Si analizamos tangente y cotangente la situación es diferente, veamos primero la recta T, cuando el ángulo mida $\pi / 2$, $3\pi / 2$, etc., el lado del ángulo va a ser paralelo a la recta T, lo que imposibilita hallar el punto de intersección de ambos. Si consideramos la recta C sucede lo mismo para ángulos que midan π , 2π , etc., entonces para definirlas como funciones necesitamos modificar el dominio, ya que debe cumplirse la unicidad y la existencia:

$\text{tg} : D \to IR$ $\quad\quad$ $\text{cotg} : D' \to R$
$\alpha \to \text{tg}\ \alpha$ $\quad\quad$ $\alpha \to \text{cotg}\ \alpha$

Siendo:

$$D = \{ x / x \in IR \ \wedge \ x \neq (2n + 1).\frac{\pi}{2} \ , n \in Z \}$$

$$D' = \{ x / x \in IR \ \wedge \ x \neq n.\pi \ , n \in Z \}$$

En el caso de la secante y la cosecante, hay que trazar una recta R perpendicular al lado del ángulo y tangente a la circunferencia en p, cuando el ángulo mida $\pi / 2$, $3\pi / 2$, etc., no es posible hallar el punto de intersección con el eje X p4, cuando el ángulo mida π , 2π , etc., no es posible hallar el punto de intersección con el eje Y p5, en consecuencia:

$\sec : D \to IR$ $\quad\quad$ $\text{cosec} : D' \to IR$
$\alpha \to \sec \alpha$ $\quad\quad$ $\alpha \to \text{cosec}\ \alpha$

Siendo los conjuntos D y D' los definidos con anterioridad.

Imagen (intervalos de variabilidad) de las funciones trigonométricas:

$-1 \leq \cos x \leq 1$ $\quad$ $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ $\quad$ $-\infty < \text{tg } x < +\infty$

$I = [-1, 1]$ $\quad$ $I = [-1, 1]$ $\quad$ $I = (-\infty, +\infty)$

Relación entre las imágenes por las funciones trigonométricas:

1. De ángulos congruentes:

Dos ángulos orientados se dicen congruentes si sus medidas difieren en un múltiplo entero de 2π

$$\alpha' = \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

La imagen por una función trigonométrica para los ángulos congruentes es la misma:

$\text{sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + 2k\pi)$ $\quad$ $\sec \alpha = \sec (\alpha + 2k\pi)$
$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2k\pi)$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = \text{cosec } (\alpha + 2k\pi)$
$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha + 2k\pi)$ $\quad$ $\text{ctg } \alpha = \text{ctg } (\alpha + 2k\pi)$

2. De ángulos opuestos:

Dos ángulos orientados se dicen opuestos si la suma de sus medidas es cero.

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

La relación entre las imágenes por una función trigonométrica para los ángulos opuestos es la siguiente:

$\text{sen } \alpha = - \text{sen } (-\alpha)$ $\quad$ $\sec \alpha = \sec (-\alpha)$
$\cos \alpha = \cos (-\alpha)$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = - \text{cosec } (-\alpha)$
$\text{tg } \alpha = - \text{tg } (-\alpha)$ $\quad$ $\text{ctg } \alpha = - \text{ctg } (-\alpha)$

3. Ángulos que difieren en π:

Dos ángulos orientados se dice que difieren en π si la resta de sus medidas es π.

$$\alpha' - \alpha = \pi \quad \Rightarrow \alpha' = \alpha + \pi$$

La relación entre las imágenes por una función trigonométrica es la siguiente:

$\text{sen } \alpha = - \text{sen } (\alpha + \pi)$ $\quad$ $\sec \alpha = - \sec (\alpha + \pi)$
$\cos \alpha = - \cos (\alpha + \pi)$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = - \text{cosec } (\alpha + \pi)$
$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha + \pi)$ $\quad$ $\text{ctg } \alpha = \text{ctg } (\alpha + \pi)$

4. Ángulos suplementarios:

Dos ángulos orientados se dicen suplementarios si la suma de sus medidas es π.

$$\alpha' + \alpha = \pi \quad \Rightarrow \alpha' = \pi - \alpha$$

La relación entre las imágenes por una función trigonométrica para los ángulos suplementarios es la siguiente:

$\text{sen } \alpha = \text{sen } (\pi - \alpha)$ $\quad$ $\sec \alpha = - \sec (\pi - \alpha)$
$\cos \alpha = - \cos (\pi - \alpha)$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = \text{cosec } (\pi - \alpha)$
$\text{tg } \alpha = - \text{tg } (\pi - \alpha)$ $\quad$ $\text{ctg } \alpha = - \text{ctg } (\pi - \alpha)$

5. Ángulos complementarios:

Dos ángulos orientados se dicen complementarios si la suma de sus medidas es $\frac{\pi}{2}$

$$\alpha' + \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\alpha' + \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

La relación entre las imágenes por una función trigonométrica para los ángulos complementarios es la siguiente:

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\sec\alpha = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\operatorname{cosec}\alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Teoremas del seno y coseno de la suma de las medidas de dos ángulos:

Se puede demostrar que:

1) $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$

2) $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

Las funciones trigonométricas de la suma y diferencia de las medidas de dos ángulos:

Identidades:

De las fórmulas que acabamos de ver para el seno y coseno de la suma de dos amplitudes angulares y de las identidades fundamentales se pueden deducir otras (todas demostrables) que pueden servirte en el momento de resolver algunos problemas, como por ejemplo:

1) $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b$

2) $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

3) $\operatorname{tg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

4) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

5) $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

6) $\operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

7) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

8) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

9) $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

10) $\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

11) $\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

12) $\text{tg } a + \text{tg } b = \text{sen}(a + b) \cdot \sec a \cdot \sec$