Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Sea **f** una función real, polinómica de grado 1, la expresión **f(x) = 0** se llama **ecuación entera de grado 1 o de primer grado** con una incógnita asociada a **f**.

Ejemplo: Dada la función polinómica $f(x) = 3x - 4$ su ecuación asociada es $\mathbf{3x - 4 = 0}$

Resolver una ecuación de primer grado es hallar el valor que debe tomar la variable **x** para que su imagen por la función **f** sea 0, este valor de **x** se denomina **raíz** de la función, o bien raíz de la ecuación asociada.

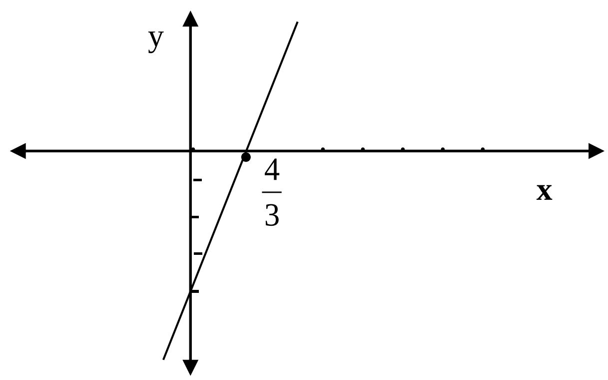
En el ejemplo anterior es:

$x = 4/3$ es la raíz de la función ya que $f(4/3) = 0$

Gráficamente la raíz de la ecuación de 1° grado representa la abscisa del punto de intersección entre la gráfica de la función **f** y el eje x.

$f(x) = 3x - 4 = 0$ la raíz es $x = 4/3$

x	y
0	-4
2	2
4/3	0



Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen la misma solución.
Ej: $2x - 3 = 0$ y $-x + 3/2 = 0$ son equivalentes por que la raíz de ambas es $x = 3/2$

Propiedades

a) Si a ambos miembros de una ecuación se le suma un mismo polinomio T con respecto a la variable, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ej:

$3x - 1 = 0$ su raíz es $x = 1/3$

Sumando $T(x) = x + 2$ a ambos miembros se obtiene:

$4x + 1 = x + 2$ cuya raíz es $x = 1/3$

<u>Nota:</u>

Esta propiedad también es válida si sustituimos un mismo polinomio T en ambos miembros.

b) Si ambos miembros de una ecuación se multiplica por una misma constante $k \neq 0$ y real, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ej: $3x-1 = 0$ cuya raíz e $x = 1/3$
Multiplicando ambos miembros por $k = -2$ se obtiene
$-6x + 2 = 0$ cuya raíz es $x = 1/3$

Resolución de una ecuación de primer grado

Resolvemos la ecuación de 1º grado:
$4x - 5 = 0$ sumando a ambos miembros el opuesto aditivo de 5 nos queda:
$4x - 5 + 5 = 0 + 5$
$4x = 5$ multiplicando ambos miembros por el inverso multiplicativo de 4 nos queda:
$4x \cdot \frac{1}{4} = 5 \cdot \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ **$x = 5/4$ que es la raíz de la ecuación**

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

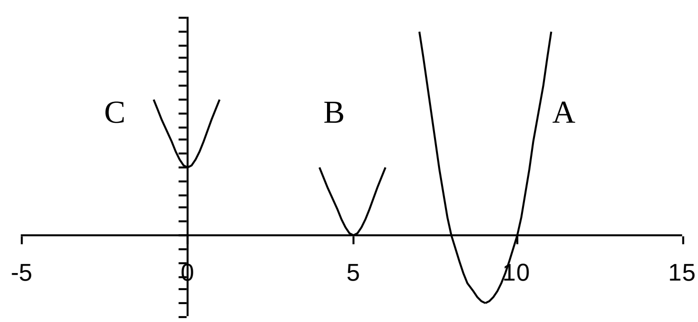
La expresión $a x^2 + b x + c = 0$ con $a \neq 0$ es la ecuación de 2° grado asociada a la función polinómica de grado dos $f(x) = a x^2 + b x + c$ cuya gráfica es una parábola.

Resolver una ecuación de segundo grado es hallar los valores que debe tomar la variable **x** para que su imagen por la función f sea 0.
Toda ecuación cuadrática tiene a lo sumo dos raíces que pueden o no ser números reales.

Gráficamente las raíces de la ecuación cuadrática representan las abscisas de los puntos de intersección entre la gráfica de la función f y el eje de las x.

Esto sugiere que según el ejemplo que se tome se pueden presentar los siguientes casos:

- Dos raíces reales distintas (gráfica A)
- Dos raíces reales repetidas (gráfica B)
- Dos raíces complejas conjugadas (gráfica C)



Forma de resolución de la ecuación de segundo grado

Dada la ecuación cuadrática $a x^2 + b x + c = 0$
Para hallar las raíces se aplica la siguiente fórmula:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática : $a x^2 + b x + c = 0$

Realizando un análisis de las posibles soluciones de x_1 y x_2 vemos que dependen del valor: $\sqrt{b^2 - 4ac}$, ya que el argumento $b^2 - 4 a c$ puede ser nulo, mayor que cero o menor que cero, a este argumento $b^2 - 4 a c$ se lo denomina discriminante.

Si $b^2 - 4 a c \rangle 0$ entonces la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales distintas

Si $b^2 - 4 a c = 0$ entonces la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales coincidentes ($x_1 = x_2$)

Si $b^2 - 4 a c \langle 0$ entonces la ecuación cuadrática no tiene raíces reales, tiene dos raíces complejas distintas (conjugadas)

Ejemplo: $x^2 - x - 6 = 0$
Observando la ecuación vemos que $a = 1$ $b = -1$ $c = -6$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 . 1 . (-6)}}{2 . 1} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 . 1 . (-6)}}{2 . 1} = -2$$

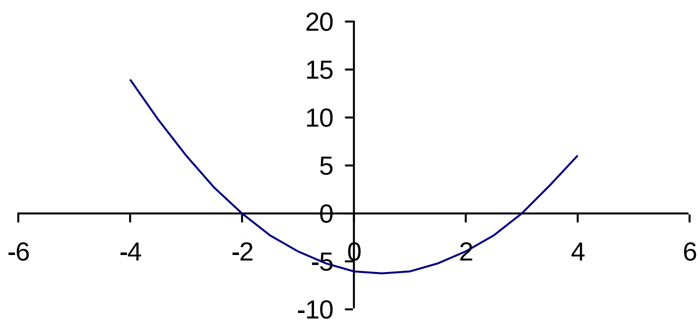
Gráficamente:

$V = (x_v, y_v)$ vértice

$x_v = \frac{-b}{2a}$

$x_v = 1/2$

$y_v = f(x_v)$



Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Dada la ecuación $a x^2 + b x = 0$ cuyas raíces son por ejemplo $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$
Se observa que:

- $x_1 + x_2 = 3 + (-2) = 1$ o sea $\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$
- $x_1 . x_2 = 3 . (-2) = -6$ o sea $\mathbf{x_1 . x_2 = c/a}$

En toda ecuación de 2° grado la suma de las raíces es igual al opuesto del coeficiente del término lineal dividido el coeficiente del término cuadrado y el producto de las mismas es igual al término independiente dividido el coeficiente del término cuadrático, lo que nos permite reconstruir una ecuación cuadrática conociendo sus raíces.

Ej: Reconstruir la ecuación si sus raíces son: $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$

$x_1 + x_2 = -b/a \Rightarrow 5 + (-2) = 3 \Rightarrow$ si $a = 1$ $-b = 3 \Rightarrow b = -3$
$x_1 . x_2 = c/a \Rightarrow 5 . (-2) = -10 \Rightarrow$ si $a = 1$ $c = -10$

Luego la ecuación es: $\mathbf{x^2 - 3x - 10 = 0}$

Factorización de la ecuación cuadrática

Toda ecuación cuadrática $a x^2 + b x + c = 0$ puede factorizarse de la siguiente manera:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Es decir expresar a la ecuación cuadrática como producto de factores

Ejemplo: $2x^2 - 3x + 1 = 0$
Resolviendo la ecuación resulta: $x_1 = 1$ y $x_2 = ½$, como a = 2 entonces la ecuación factorizada resulta:

$$2(x - 1)(x - ½) = 0$$

Inecuaciones:

Definición:

Dada una función polinómica de grado uno f(x) = ax + b, puede interesarnos conocer cuáles son los valores de **x** para los que el valor de la función es mayor o menor (mayor o igual o menor o igual) a un cierto valor. Es decir:

$f(x) = ax + b > c$ o $f(x) = ax + b < c$
$f(x) = ax + b \geq c$ o $f(x) = ax + b \geq c$

Estas desigualdades se llaman **inecuaciones polinómicas de primer grado.**

Resolver una inecuación es encontrar los valores que debe tomar la **x** para que se verifique la desigualdad. Para poder resolver una inecuación debemos conocer las siguientes propiedades.

Propiedades de las desigualdades

a) Si en ambos miembros de una desigualdad sumamos o restamos un mismo número real, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido

En símbolos:

$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$

Ej:

$3 < 8 \Rightarrow 3 + 2 < 8 + 2$

$1 > -3 \Rightarrow 1 - 4 > -3 - 4$

b) Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número real positivo, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

En símbolos:

$a < b \Rightarrow a.c < b.c$ si $c > 0$

$a < b \Rightarrow a : c < b : c$ si $c > 0$

Ej:

$11 > 9 \Rightarrow 11 . 4 > 9 . 4$

$4 < 10 \Rightarrow 4 / 2 < 10 / 2$

c) Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número real negativo, se obtiene otra desigualdad de **distinto** sentido.

En símbolos:

$a < b \Rightarrow a.c > b.c$ si $c < 0$

$a < b \Rightarrow a : c > b : c$ si $c < 0$

Ej:

$4 < 12 \Rightarrow 4 / (-2) > 12 / (-2)$

Forma de resolución

1) $2x-3 > 0$ sumamos en ambos miembros + 3:

$2x - 3 + 3 > 0 + 3$

$2x > 3$ multiplicamos ambos miembros por ½

$2x . ½ > 3 . ½$

$\mathbf{x > 3/2}$

Hemos obtenido el conjunto solución: **S = {x : x ∈ IR , x > 3/2** }

Otra forma de expresar el conjunto solución es usando la notación de **intervalo:** S =] 3/2 , ∞ [

2) $-2x + 5 \geq 6$ restamos 5 en ambos miembros:

$-2x + 5 - 5 \geq 6 - 5$

$-2x \geq 1$ dividimos por (-2) ambos miembros:

$-2x / (-2) \leq 1 / (-2)$

$\mathbf{x \leq -1/2}$

Observe que al dividir por un número negativo se invierte la desigualdad

Hemos obtenido el conjunto solución:

S = {x : x ∈ R , x ≤ - 1 / 2 }=] - ∞ , - 1 / 2 [

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones Lineales con dos incógnitas:

Ya hemos visto que si f es una función polinómica de grado 1, entonces la expresión f(x) = 0 es la ecuación de 1° grado asociada.
De igual modo si g es una función polinómica de dos variables de grado 1 del tipo ax+by+c, entonces la expresión g((x,y))= 0 es la ecuación asociada con dos incógnitas.

Por ejemplo:

g((x,y)) = 4x –3y es la función polinómica de dos variables
4x – 3y = 0 es la ecuación asociada con dos incógnitas

La solución de esta ecuación es el conjunto de pares (x,y) que verifican la igualdad.
En el ejemplo:

El par (x,y) = (1 , 4 /3) es una solución
El par (x,y) = (3, 4) es otra solución

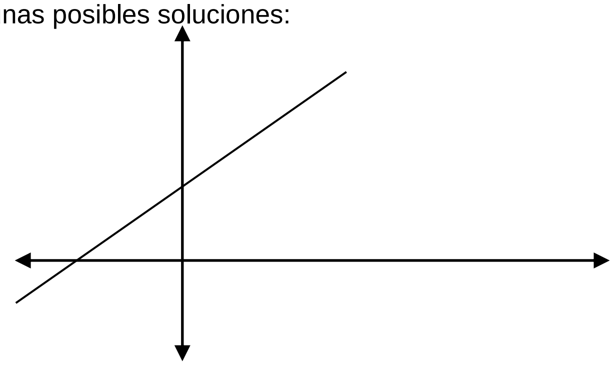
En realidad vemos que pueden haber infinitas soluciones. Para calcular las soluciones es conveniente despejar una de las variables de la ecuación y obtener los distintos valores de la otra.

Ejemplo:
Hallar algunas soluciones para la ecuación

3y – 2x = 7

Despejamos la variable "y" de la ecuación y = (2x+7) / 3
Si tomamos una tabla de valores, vemos algunas posibles soluciones:

x	y
0	7/3
1	3
2	11/3
3	13/3



Si representamos gráficamente en un par de ejes cartesianos el conjunto solución obtenemos una recta.

También puede presentarse el caso en que interese resolver una ecuación lineal con dos incógnitas como el siguiente: f((x, y)) = c, es decir: ax + by = c
El conjunto solución es el conjunto de pares ordenados (x, y) que pertenecen a la recta:

y = $\frac{c - ax}{b}$ con b no nulo.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

El conjunto de dos ecuaciones f((x, y)) = c_1 y g((x, y)) = c_2 se llama sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo:
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas significa hallar el conjunto formado por todos los pares (x, y) que son solución común a ambas ecuaciones . Este conjunto se llama **conjunto solución del sistema.**

Es decir: si S_1 es el conjunto solución de $f((x, y)) = c_1$ y S_2 es el conjunto solución de $g((x,y)) = c_2$, entonces el conjunto solución del sistema es

$$\mathbf{S = S_1 \cap S_2}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema representa una recta en el plano IR x IR, es posible entonces representarlo a partir de las dos rectas. Según las posiciones relativas de ellas, dos rectas en el plano pueden ser secantes (un único punto en común), ser paralelas disjuntas (ningún punto en común) o ser paralelas coincidentes (todos los puntos de la recta son comunes).

Analicemos las distintas posibilidades de solución:

Sistema compatible: es un sistema que tiene solución, es decir que existen puntos comunes a ambas rectas.

Puede ocurrir que:

- sólo **hay un punto en común**, las rectas son secantes, en ese caso se dice que el sistema es **compatible determinado.** El conjunto solución está formado por un sólo par ordenado de reales.
- hay **infinitos puntos en común**, las rectas son paralelas coincidentes, en este caso se dice que el sistema es **compatible indeterminado.** El conjunto solución está formado por infinitos pares ordenados de reales, las dos ecuaciones representan a la misma recta.

Sistema incompatible: significa que es un sistema que **no tiene solución,** es decir no hay puntos comunes. Las dos ecuaciones representan rectas paralelas disjuntas. El conjunto solución es el conjunto vacio.

Representemos gráficamente sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

1) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$

a) despejamos la **y** de cada ecuación:

$y = 2x$ recta A

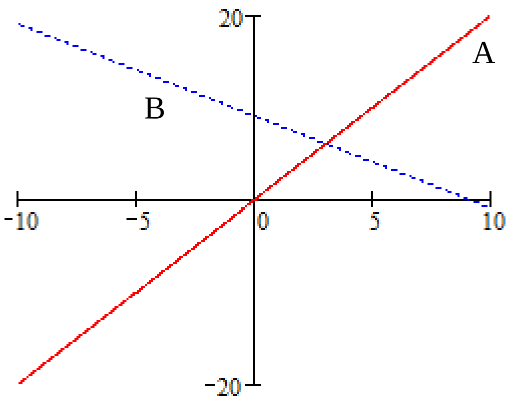
$y = 9 - x$ recta B

b) tomamos una tabla de valores para cada ecuación:

x	y = 2x
-1	-2
1	2
3	**6**
4	8

x	y = 9 - x
-1	10
1	8
3	**6**
4	5

c) representamos en un sistema de ejes cartesianos a las dos rectas:

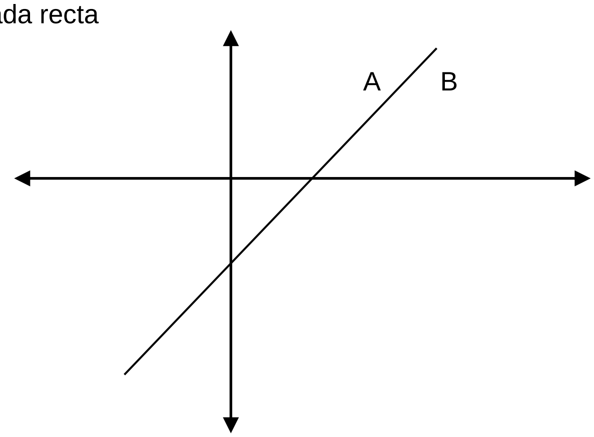


El conjunto solución es $S = \{ (3, 6)$,por lo tanto se trata de un sistema **compatible determinado.**

2) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

a) despejar la **y** de cada ecuación: $y = x - 3$ (A) $y = x - 3$ (B)
b) tomar tabla de valores para cada recta

x	y = x –3
0	–3
1	–2
2	–1
4	2



En este caso las rectas son paralelas coincidentes por lo tanto tiene infinitos puntos en común.

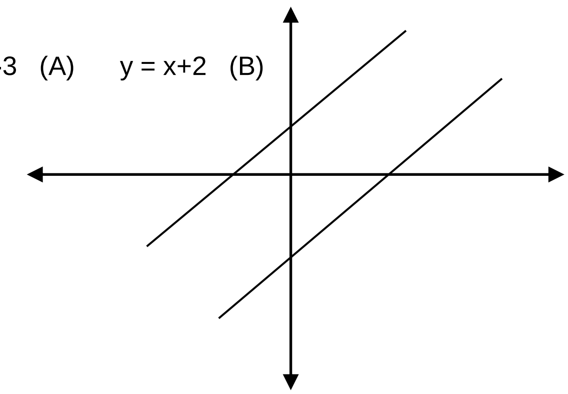
El conjunto solución es S = A = B, por lo tanto es un sistema **compatible indeterminado**.

3) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

a) despejar la **y** de cada ecuación: y = x-3 (A) y = x+2 (B)
b) tomar tabla de valores:

x	y = x – 3
-1	- 4
0	- 3
2	- 1

x	y = x + 2
-1	1
0	2
2	4



Las rectas son paralelas disjuntas, no hay puntos comunes, el conjunto solución es el conjunto vacío y el sistema es **incompatible**.

Métodos de resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado

1) Sustitución

Dado el sistema:

$\begin{cases} 4x + y = 4 & (A) \\ 2x - 3y = -5 & (B) \end{cases}$

a) Despejar **y (ó x)** de A (o de B):

y = -4 x + 4 (1)

Sustituir el valor obtenido en la otra ecuación:

2x – 3(- 4x+4) = - 5

Hemos obtenido por sustitución una ecuación con una incógnita:

2x + 12x – 12 = -5

b) Resolver la ecuación obtenida:

2x + 12x – 12 = -5

14x = - 5 + 12

x = 7 / 14 $\Rightarrow$ **x = 1 / 2**

c) Reemplazar el valor encontrado en la ecuación (1):

y = - 4x + 4

y = - 4.(½) + 4

y = - 2 + 4 $\Rightarrow$ **y = 2**

S = {(½ , 2) } **Sistema compatible determinado**

2) <u>Igualación</u>

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = -1 & (A) \\ 5x + 3y = -5 & (B) \end{cases}$$

a) Despejar **x** (ó y) de ambas ecuaciones:

de A $x = (-1 – y) / 2$ (1)

de B $x = (- 5 - 3y) / 5$ (2)

b) Igualar las ecuaciones obtenidas:

$(-1 – y) / 2 = (-5 - 3y) / 5$

Hemos obtenido por igualación una ecuación con una incógnita.

c) Resolver la ecuación obtenida:

$5.(- 1 – y) = 2.(-5 - 3y)$

$- 5 – 5y = - 10 - 6y$

$- 5y + 6y = - 10 + 5 \Rightarrow$ $\mathbf{y = - 5}$

d) Reemplazamos el valor obtenido en la ecuación

en (1) $x = (-1 – (-5) / 2 \Rightarrow x = 4 / 2 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 2}$

en (2) $x = (- 5 - 3.(- 5)) / 5 \Rightarrow x = 10 / 5 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 2}$

Luego : **S = {(2 - 5) }** **Sistema compatible determinado**

<u>**Nota**</u>**:** Existen otros métodos de resolución, por ejemplo, suma y resta, y determinantes. Pero en este curso sólo revisaremos los métodos de sustitución e igualación.