4 - Pruebas no paramétricas

22 July 2020 01:04

Algunas pruebas de hipótesis dependen del supuesto de normalidad, otras siguen siendo aproximadamente validos cuando se aplican a grandes muestras, incluso si la distribución de la población no es normal.
Las técnicas hacen suposiciones sobre la composición de los datos de la población

- *Tiene distribución normal (los mas eficientes)*
- *Distintas poblaciones tienen la misma varianza*
- *Los datos se miden en una escala de intervalos o en una escala de razón*

Las pruebas no paramétricas son contrastes válidos bajo un amplio rango de distribuciones de población. Generalmente son válidos sin importar la distribución y no necesitan suposiciones requeridas por otras técnicas respecto a la composición de los datos poblacionales.

Se verán procedimientos no paramétricos para *contrastar* la igualdad de los parámetros de centralización de dos distribuciones poblacionales.

Estas pruebas son de uso común, como por ejemplo:

1. Cuando no se cumplen las suposiciones requeridas por otras técnicas usadas (generalmente llamadas paramétricas)
2. Cuando es necesario un tamaño de prueba chico y no cumple ciertas suposiciones clave.
3. Cuando se necesita convertir datos cualitativos a información útil para la toma de decisiones (opiniones o sentimientos)

Ventajas sobre las pruebas paramétricas:

- *Fáciles* de usar y entender
- *Eliminan* la necesidad de *suposiciones* respectivas de pruebas paramétricas
- Se pueden usar con *muestras pequeñas*
- Se pueden usar con *datos cualitativos*

Desventajas sobre las pruebas paramétricas:

- A veces, *ignoran/desperdician/pierden* información
- *No* son tan *eficientes o poderosas*
- *Mayor* probabilidad de Error Tipo II (no rechazar una hipótesis nula falsa)

Importante: Aunque las pruebas no paramétricas no hacen suposiciones sobre la distribuciones la población que se muestrea, *muchas veces se apoyan en distribuciones muestrales como la normal o chi-cuadrada*.

Prueba de signo

Alternativa no paramétrica a:

- Prueba t unimuestral
- Prueba t para muestras apareadas
- Pruebas para muestras de gran tamaño

Se aplica en el muestreo de una población simétrica, de forma que la probabilidad de obtener un valor mayor o menor es 0.5

Hipótesis Nula:
- $\mu = \mu_0$

Hipótesis Alternativa:
- $\mu \neq \mu_0$
- $\mu > \mu_0$
- $\mu < \mu_0$

En la muestra de tamaño **n** se reemplaza cada valor muestral por un signo
- +: si $x - \mu_0 > 0$ Es mayor
- -: si $x - \mu_0 < 0$ Es menor
- None: $x = \mu_0$ Es igual

Después se prueba una Hipótesis Nula tomando los signos como resultado de ensayos binomiales con $p = \frac{1}{2}$

$$B\left(n, x, \frac{1}{2}\right) = \cdots$$

Siendo x el numero de éxitos
Siendo n el numero de signos (+ o -)

En los casos para muestras apareadas se reemplazan pares de valores por un signo
- +: si $x_1 - x_0 > 0$ El primer valor es mayor
- -: si $x_1 - x_0 < 0$ El primer valor es menor
- None: $x_1 = x_0$ Los dos valores son iguales

Hipótesis Nula:
- $\mu_1 - \mu_0 = 0 \quad (p = \frac{1}{2})$

Hipótesis Alternativa:
- $\mu_1 - \mu_0 \neq 0$
- $\mu_1 - \mu_0 > 0$
- $\mu_1 - \mu_0 < 0$

Prueba de suma de rangos

Existen dos pruebas U y H:

- Prueba U o de Wilcoxon: Es una alternativa *no paramétrica* de la prueba **t-bimuestral**
- Prueba H: Es una *generalización* de la prueba U para **k** muestras aleatorias independientes provenientes de *poblaciones idénticas*

Prueba U o de Wilcoxon:

La Hipótesis Nula que se desea probar es que las dos muestras provienen de poblaciones idénticas.
Se intenta probar si la diferencia entre las medias de las muestras es significativa.
Hipótesis Nula: $\mu_1 = \mu_2$

Para ello se toman los valores de ambas muestras y se los pone en *orden* de mayor a menor, teniendo en cuenta de que muestra provienen.
A cada valor se le *asigna un rango*, valor que equivale a su posición dentro del vector ordenado.
En caso de haber mas de un numero con el mismo valor, el rango para todos los números es el *promedio* de los rangos.

Ej:

Arena I: 0.63 0.17 0.35 0.49 0.18 0.43 0.12 0.20 0.47 1.36 0.51 0.84 0.32 0.40 0.45
Arena II: 1.13 0.54 0.96 0.26 0.39 0.88 0.92 0.53 1.01 0.48 0.89 1.07 1.11 0.58

0.12	0.17	0.18	0.2	0.26	0.32	0.35	0.39	0.4	0.43	0.45	0.47	0.48
I	I	I	I	II	I	I	II	I	I	I	I	II
0.49	0.51	0.53	0.54	0.58	0.63	0.84	0.88	0.89	0.92	0.96	1.01	1.07
I	I	II	II	II	I	I	II	II	II	II	II	II
1.11	1.13	1.36										
II	II	I										

Si los rangos 9, 10 y 11 tienen el mismo valor. El nuevo rango para todos los valores será: $\frac{9+10+11}{3} = 10$

En lugar de las medias, se pueden comparar las sumas de los rangos asignados a los valores de las dos muestras, tomándose en cuanta de manera apropiada una posible diferencia de tamaños.
Se toman las dos sumas, R1 y R2. Luego se toman dos estadísticos que ayudaran a ver si la diferencia es demasiado grande para rechazar la Hipótesis Nula

$$U1 = n1 \cdot n2 + \frac{n1 \cdot (n1+1)}{2} - R1 \qquad U2 = n1 \cdot n2 + \frac{n2 \cdot (n2+1)}{2} - R2$$

Se selecciona el **menor** de los dos como el estadístico U (en este caso U1). Según la Hipótesis Nula de que las dos muestras provienen de poblaciones idénticas, puede comprobarse que

$$\mu_{U1} = \frac{n1 \cdot n2}{2}$$

$$\sigma_{U1} = \sqrt{\frac{n1 \cdot n2 \cdot (n1 + n2 + 1)}{12}}$$

De la distribución muestral.
Estas aproximaciones pierden precisión cuando hay rangos iguales, pero su numero es muy pequeño

La distribución muestral de U1 puede aproximarse mediante una distribución normal con $n_1 \; y \; n_2 \; > 8$ y que la Hipótesis Nula se puede fundamentar en el estadístico

$$z = \frac{U1 - \mu_{U1}}{\sigma_{U1}}$$

Prueba H o de Kruskal-Wallis:

Generalización de la prueba U para **k** *muestras aleatorias independientes* provenientes de *poblaciones idénticas*.
Las observaciones se clasifican conjuntamente.

R_i es la suma de los rangos ocupados por las n_i observacionesde la *i-ésima* muestra
$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

La prueba se funda en el estadístico:

$$H = \frac{12}{n\cdot(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(R_i)^2}{(n_i)} - 3\cdot(n+1)$$

Cuando $n_i > 5$ para toda **i** y cuando H_0 es verdadera, la distribución muestral de **H** es aproximada a la distribución **chi-cuadrada** con
$\nu = k - 1$ grados de libertad

Pruebas de aleatoriedad

Se quiere saber que *seguridad* hay de que una muestra sea aleatoria. Una de las pruebas se fundamenta en el orden en que fueron obtenidos los datos (número de **corridas**)

Corrida: Es una *sucesión de símbolos idénticos* contenidos entre símbolos diferentes o ninguno de todos

$$\underbrace{A\,A}_{1}\;\underbrace{B\,B}_{2}\;\underbrace{A\,A}_{3}\;\underbrace{B\,B\,B}_{4}\;\underbrace{A}_{5}\;\underbrace{B\,B\,B}_{6}\;\underbrace{A\,A\,A\,A}_{7}\;\underbrace{B\,B\,B}_{8}$$

La sospecha de falta de aleatoriedad está en el *orden de aparición*
Si una sucesión contiene n_1 simbolos de un tipo y n_2 de otro (**ninguno** menor a 10), entonces la distribución muestral del número de corridas u, puede aproximarse mediante una distribución muestral con:

$$\mu_u = \frac{2\cdot n_1\cdot n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2\cdot n_1\cdot n_2\cdot(2\cdot n_1\cdot n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2\cdot(n_1 + n_2 - 1)}}$$

La prueba de Hipótesis Nula de que el arreglo de los símbolos (y la muestra) es aleatoria, puede fundamentarse en el estadístico

$$z = \frac{u - \mu_u}{\sigma_u}$$

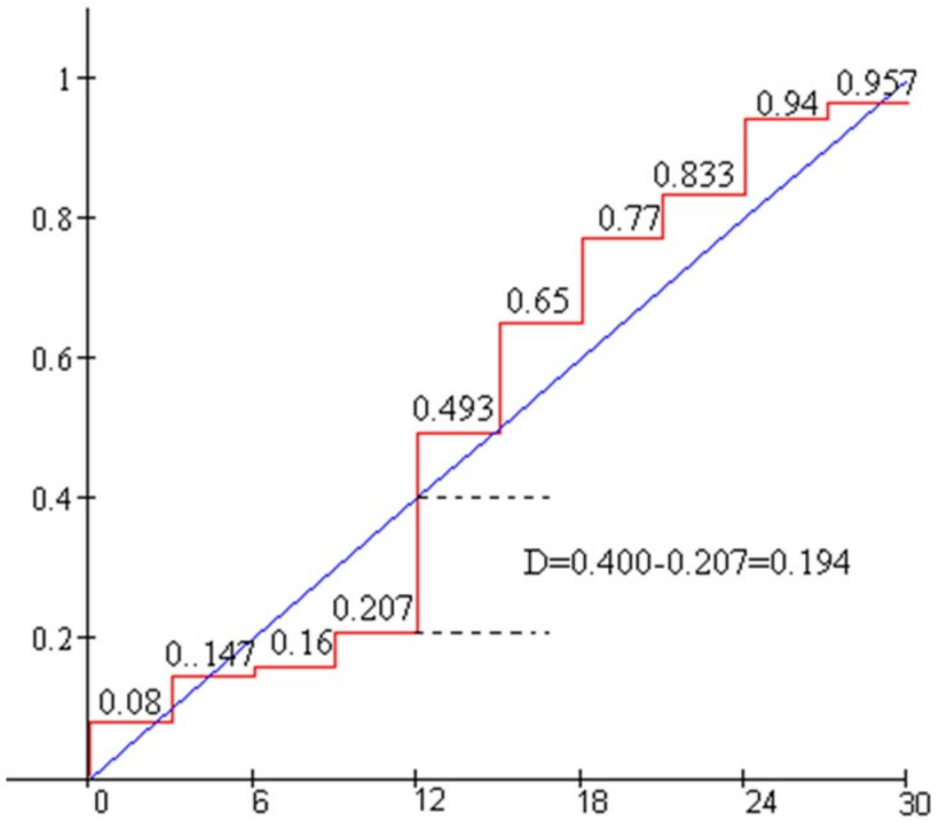
Con distribución *aproximadamente normal*
La Hipótesis Nula se rechaza si $z < -z_\alpha$ ó $z > z_\alpha$

La prueba también se puede usar para probar la aleatoriedad de muestras que constan de datos numéricos, contando secuencias por encima y por debajo de la **mediana** (**a** y **b**). Usado en el control de calidad

Pruebas de Kolmogórov-Smirnov

Se utiliza para ver *diferencias* entre distribuciones acumuladas, pero **no** es aplicable a las discretas. Esta es mas efectiva que la prueba χ^2 en muestras mas *pequeñas*.

La *prueba unimuestral* es una prueba de Bondad de Ajuste. Se fundamenta en la *diferencia absoluta máxima* **D** entre los valores de la *distribución acumulada* de una muestra aleatoria de tamaño **n** y una *distribución teórica* determinada. Para decidir si esta diferencia es *mayor* que la razonablemente esperada con un nivel de significación α
Se utiliza una tabla para ver los valores críticos de **D**



TAMAÑO DE LA MUESTRA (N)	NIVEL DE SIGNIFICANCIA PARA D = MAX [$F_0(X)$ - $S_n(X)$]				
	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433