MATRICES SIMÉTRICAS CONGUENTES

Se dice que una matriz B es congruente a otra A si existe una matriz no singular P tal que:

$$B = P^T . A . P$$

La congruencia es una relación de equivalencia.

Si la matriz A es simétrica significa que A = A^T , entonces podemos hacer:

$$B^T = (P^T . A . P)^T = P^T . A . (P^T)^T = P^T . A . P = B$$

Por lo tanto si A es simétrica B también lo es.

Las matrices diagonales son simétricas. Se puede demostrar que únicamente matrices simétricas son congruentes a matrices diagonales.

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA

El procedimiento para diagonalizar una matriz bajo congruencia consiste en una secuencia de pasos, pero siempre teniendo en cuenta que la matriz A a diaginalizar debe ser simétrica.

1°. Se debe construir una matriz que conste de dos bloques, uno a izquierda que contiene a la matriz A, otro bloque a la derecha que contiene a la matriz identidad y es del mismo orden que A.

$$\left(A \quad \vdots \quad I\right)$$

2°. A través de realizar operaciones entre filas y/o realizar operaciones entre columnas se debe obtener una matriz de dos bloques, en el bloque izquierdo una matriz diagonal, en el bloque derecho una matriz que partiendo de la identidad ha resultado de las operaciones mencionadas.

Hay que considerar que las operaciones entre filas afectarán a la matriz en sus dos bloques, pero las operaciones entre columnas solamente afectaran al bloque que se ubica a la izquierda.

$$F_j^{'} \rightarrow k . F_i + F_j \qquad\qquad C_j^{'} \rightarrow k . C_i + C_j$$

Se deben intercalar las operaciones entre filas para anular a los elementos que están debajo del pivote a_{ii} para luego operar entre columnas y lograr anular los elementos a la derecha del pivote y así sucesivamente.

3°. Una vez que se ha obtenido en el bloque izquierdo una matriz diagonal “D”, en el bloque derecho se ha obtenido una matriz a la cual se designa “Q”.

$$\left(D \quad \vdots \quad Q\right)$$

La matriz D es diagonal y la matriz Q es triangular.

Luego se debe considerar que $P = Q^T$ Por lo cual podemos hacer: ***$D = P^T . A . P$***

O lo que equivale a hacer ***$D = Q . A . Q^T$***

La matriz diagonal es congruente a la matriz simétrica original por el algoritmo de diagonalización bajo congruencia.

Ejemplo:

Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ se puede observar que es simétrica.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{-2 } F_1 + F_2 \text{ / 3 } F_1 + F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{-2 } C_1 + C_2 \text{ / 3 } C_1 + C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \text{-2 } F_2 + F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \text{-2 } C_2 + C_3 \quad \sim \quad (D \;\vdots\; Q)$$

Se ha diagonalizado bajo congruencia a la matriz A:

Por lo tanto: $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Que verifica: $D = P^T . A . P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

La matriz D (o si se lo prefiere llamarla B) es una matriz diagonal congruente a la matriz A por este algoritmo.

$D = P^T . A . P$

DIAGONALIZACIÓN Y FORMAS CUADRÁTICAS

Las **Formas Cuadráticas** surgen de una diversidad de problemas relativos a distintos contextos y áreas de conocimiento.

Por ejemplo una ecuación de la forma: $\mathbf{A\,x^2 + 2\,B\,xy + C\,y^2 + Dx + Ey + F = 0}$

En la cual los coeficientes A, B, C no son nulos a la vez se denomina **Ecuación Cuadrática**.

En ese ejemplo a la expresión: $\mathbf{F\,(x, y) = A\,x^2 + 2\,B\,xy + C\,y^2}$

Se la denomina **FORMA CUÁDRATICA** asociada.

Ejemplo: $2\,x^2 + y^2 - 12\,x - 4\,y + 18 = 0$ es una **Ecuación Cuadrática** y tiene asociada la **Forma Cuadrática**: $F\,(X, y) = 2\,x^2 + y^2$

Es decir en la Forma Cuadrática se tienen solamente los términos de grado dos.

En este otro caso: $\mathbf{A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + 2D\,x\,y + 2E\,x\,z + 2F\,y\,z + G\,x + H\,y + I\,z + J = 0}$

(Siendo al menos uno de los coeficientes A, B, C, D, E, F no nulo) la ecuación cuadrática tiene asociada una **Forma Cuadrática**:

$$F\,(x, y, z) = \mathbf{A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + 2D\,x\,y + 2E\,x\,z + 2F\,y\,z}$$

Observemos algo: todos los términos son de grado dos, pero hay varios términos cruzados, es decir hay términos donde hay un producto entre dos variables diferentes.

<u>Generalizando a n variables:</u>

En general una Forma Cuadrática en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ con las constantes $C_{i\,j}$ no todas nulas es un polinomio donde cada término es de grado dos y lo podemos expresar:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum C_{i\,j}\, x_i\, x_j$$

La Forma Cuadrática está diagonalizada si se puede expresar como sigue:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{11}\, x_1^2 + C_{22}\, x_2^2 + \dots + C_{nn}\, x_n^2$$

Es decir que cada término de la **Forma Cuadrática diagonalizada** es de grado dos pero <u>no hay ningún término cruzado</u>.

<u>Representación matricial:</u>

La Forma Cuadrática puede expresarse en forma matricial, para cierto $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$$F(X) = X^t \,.\, A \,.\, X$$

En un ejemplo dado anteriormente: **F (X) = F(x, y) = 2 x^2 + y^2** = $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si consideramos la Forma Cuadrática:

$F(x, y, z) = A x^2 + B y^2 + C z^2 + 2D\, x\, y + 2E\, x\, z + 2F\, y\, z$

Se puede expresar en forma matricial: $F(X) = X^t . A . X$

En donde: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$

La matriz A es simétrica tal como la hemos definido y contiene los coeficientes de cada término de la Forma Cuadrática en cierto orden.
En la diagonal principal se pueden observar los coeficientes de aquellos términos que no son cruzados. Los demás elementos de la matriz resultan la mitad de los que corresponden a los términos cruzados.

Es importante establecer que la matriz A que representa a la Forma Cuadrática, tal como la acabamos de definir es siempre simétrica, sin embargo, pueden existir otras matrices no simétricas que también representan a la misma Forma Cuadrática, pero que no son de interés en este apartado.
Por ejemplo:

$F(X, y, z) = x^2 - 6\, x\, y + 8\, y^2 - 4\, x\, z + 10\, y\, z + 7\, z^2$ puede representarse a través de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 8 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ o bien de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ en ambos casos el produto $X^T . A . X$ resultará en la Forma Cuadrática dada.

Nos interesan las matrices simétricas que representan a las Formas Cuadráticas, ya que son las que podremos diagonalizar.

Diagonalización de una Forma Cuadrática

Se tiene una Forma Cuadrática en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, representada matricialmente
F (X) = X^T. A . X (siendo A una matriz simétrica)

Es posible realizar un cambio de variables de tal forma que se considere **X = P.Y** para $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y de este modo obtener:

$$\mathbf{F\ (Y) = (P.Y)^T .\ A\ .\ (P.Y)}$$

Trabajando algebraicamente resulta: $\mathbf{F\ (Y) = Y^T .\ (P^T .\ A\ .\ P)\ .\ Y}$

Como A es una matriz simétrica tal que $\mathbf{B = P^T .\ A\ .\ P}$ donde B es una matriz diagonal, congruente con A bajo congruencia, resulta ser la representación matricial de la Forma Cuadrática diagonalizada en las nuevas variables $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\mathbf{F\ (Y) = Y^T .\ B\ .\ Y}$$

En conclusión:

Se dice que la sustitución lineal X = P.Y diagonaliza la Forma Cuadrática F (X) si la matriz representativa de F (Y) es una matriz diagonal.

La matriz $\mathbf{B = P^T .\ A\ .\ P}$ es congruente a la matriz A quien es matriz simétrica, por lo cual hay un teorema que se puede demostrar que dice:

Sea $\mathbf{F\ (X) = X^T .\ A\ .\ X}$ una Forma Cuadrática real, con A simétrica, entonces siempre existe una sustitución lineal X = P.Y que diagonaliza a F.

Ejemplo:

F (x, y, z) = $x^2 + 4\,x\,y + 5\,y^2 - 6\,x\,z - 8\,y\,z + 8\,z^2$

La matriz A que la representa es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ dada en el primer ejemplo de este tema (página 2), la cual diagonalizamos bajo congruencia resultando:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = P^T .\ A\ .\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Como dijimos que X = P.Y entonces F puede diagonalizarse mediante la sustitución lineal siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{entonces:} \quad \begin{pmatrix} x_1 = y_1 - 2y_2 + 7y_3 \\ x_2 = \quad y_2 - 2y_3 \\ x_3 = \quad y_3 \end{pmatrix}$$

Trabajando con la matriz B representativa de esta sustitución lineal para la Forma Cuadrática se obtiene la expresión diagonalizada de la misma:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 - 5\, y_3^2 = F\,(Y)$$

MATRICES SIMÉTRICAS Y FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS POSITIVAS

Dada una matriz real simétrica A, se dice que **la matriz A es definida positiva** si se verifica:

$$X^T . A . X > 0$$

Para todo vector columna X de IR^n.

Del mismo modo se dice que la **Forma Cuadrática F es definida positiva** si ***F (u) > 0*** para todo vector no nulo de IR^n

Esto significa que una matriz simétrica A o su Forma Cuadrática representativa es definida positiva, si cualquier representación diagonal tiene solamente entradas positivas.

En el último ejemplo visto la matriz diagonal B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ representativa de la Forma Cuadrática diagonalizada, **no es positiva**, porque posee una entrada negativa: “-5” en el tercer vector columna.

Ejemplo: F (x, y, z) = $x^2 + 2\,y^2 - 4\,x\,z - 4\,y\,z + 7\,z^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \underset{F_3 \to 2.F_1 + F_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}} \sim \underset{C_3 \to 2.C_1 + C_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}} \sim \underset{F_3 \to F_2 + F_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{C_3 \to C_2 + C_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = B$$

En este ejemplo la matriz A representativa de la Forma Cuadrática es definida positiva, ya que su matriz congruente representativa diagonal B tiene solamente entradas positivas 1, 2, 1, entonces podemos asegurar que la **Forma Cuadrática F es definida positiva**.

VALORES Y VECTORES PROPIOS O CARACTERÍSTICOS

Sea f un endomorfismo en el espacio vectorial V (K), y A su matriz asociada en cierta base B
$f: \ V \rightarrow V$
$u \rightarrow f(u)$ tal que $A . [u] = [f(u)]$

Un ***vector u*** de V, no nulo, es un ***vector propio*** o característico del endomorfismo f, si y sólo si existe un escalar λ tal que $\boldsymbol{f(u) = \lambda . u}$, lo que equivale a que $\boldsymbol{A . [u] = \lambda [u]}$

u es un vector propio relativo al ***escalar*** $\boldsymbol{\lambda}$ que recibe el nombre de ***valor propio***.

- Si u es un vector propio del endomorfismo f relativo al valor propio λ, resulta que todo vector linealmente dependiente de u también es un vector propio correspondiente al mismo valor propio λ.

Demostración:
f es un endomorfismo y u es un vector propio de él relativo al valor propio λ, por lo tanto:

$$f(u) = \lambda . u$$

Busquemos ahora la imagen de v por f:

$$f(v) = f(t .u) = t . f(u) = t . (\lambda. u) = \lambda . (t. u) = \lambda . v$$

Lo que indica que v también es un vector propio relativo al valor propio λ : $\boldsymbol{f(v) = \lambda. v}$

- Como u es no nulo, el conjunto de los vectores linealmente dependientes a él, $\boldsymbol{v = t . u}$, determinan un subespacio de V:

$$U = \{ v / v \in V \ \wedge \ v = t . u , t \in K \}$$

Este ***conjunto que contiene a los vectores propios*** generados por el vector propio u, es un subespacio vectorial de V que recibe el nombre de ***espacio propio o característico*** del endomorfismo f, respecto al valor propio λ.

- Veamos ahora de qué forma se pueden determinar los valores, vectores y espacios propios:

f es un endomorfismo en V del cual conocemos su matriz asociada A y queremos hallar los vectores que hacen posible: $\boldsymbol{A . [u] = \lambda [u]}$ ($A \in M_{nxn}$)
Esta expresión la podemos escribir:

$$\boldsymbol{A . [u] = \lambda. I. [u]} \qquad \text{(I es la matriz identidad en } M_{nxn} \text{)}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A . [u] - \lambda. I. [u] = 0} \qquad \text{(0 es la matriz nula)}$$

O bien:

$$\boldsymbol{(A - \lambda. I) . [u] = 0}$$

Para que el vector u, ***no nulo***, verifique esta última expresión para algún λ, que es un sistema de ecuaciones homogéneo, debe verificarse que:

$$\boldsymbol{det (A - \lambda. I) = 0}$$

Lo que equivale a decir que el sistema homogéneo admite solución no nula.

La expresión: ***det (A - λ. I) = 0*** se conoce como ecuación característica, los escalares λ que la satisfacen son los valores propios.

Sustituyendo los valores propios λ en el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\boldsymbol{(A - \lambda . I) . [u] = 0}$$

se obtienen los vectores propios y espacios característicos respectivos.

Ejemplo:

Sea f un endomorfismo en IR^3 cuya matriz asociada en la base canónica es A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

1º- Buscar los valores propios a partir de la ecuación característica: ***det (A - λ. I) = 0***

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda . I = \lambda . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $A - \lambda . I = \begin{pmatrix} 3 - & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda . I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) - 0 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Resolviendo la ecuación característica obtuvimos los valores propios del endomorfismo dado:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 3 \text{ y } \lambda_2 = -1}$$

2º- Buscar los vectores propios relativos a los valores propios hallados anteriormente, para ello planteamos el sistema homogéneo: ***(A - λ. I) . [u] = 0***

$(A - \lambda . I).[u] = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ multiplicando matricialmente resulta:

$\begin{cases} (3-\lambda).x + 0.y = 0 \\ 8.x + (-1-\lambda).y = 0 \end{cases}$ Sustituimos a λ por los valores propios encontrados

Si λ = λ₁ = 3 $\Rightarrow \begin{cases} (3-3).x + 0.y = 0 \\ 8.x + (-1-3).y = 0 \end{cases} \Rightarrow 8.x - 4.y = 0 \Rightarrow y = 2.x$

Por lo tanto los vectores u = $\begin{pmatrix} x \\ 2.x \end{pmatrix}$ son solución del sistema para $\lambda = \lambda_1 = 3$, de aquí que:

U_1 { u / u = $\begin{pmatrix} x \\ 2.x \end{pmatrix} \in IR^2$ } es el espacio propio relativo al valor propio $\lambda_1 = 3$, un vector propio relativo a este mismo escalar sería por ejemplo: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

***Si* $\lambda = \lambda_2 = -1$** $\Rightarrow$ $\begin{cases} (3-(-1)).x + 0.y = 0 \\ 8.x + (-1-(-1)).y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} 4.x = 0 \\ 8.x = 0 \end{matrix} \Rightarrow$ x = 0

Por lo tanto los vectores u = $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ son solución del sistema para $\lambda = \lambda_2 = -1$, de aquí que:

U_2 = { u / u = $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in$ IR^2 } es el espacio propio relativo al valor propio $\lambda_2 = -1$, un vector propio relativo a este mismo escalar sería por ejemplo: $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

DIAGONALIZACIÓN POR VECTORES PROPIOS

Dada una matriz cuadrada A asociada a un endomorfismo f en V:

(1) - ***La matriz A es diagonalizable*** si existe una matriz ***P inversible***, tal que se verifique que:

$\boldsymbol{P^{-1} . A . P = D}$, siendo D una matriz diagonal.

Procedimiento para diagonalizar una matriz a partir de los vectores propios:

1º se buscan los vectores propios del endomorfismo f
2º se forma con ellos una matriz P
3º se analiza si P es inversible, en caso afirmativo se determina P^{-1}
4º se realiza la multiplicación matricial P^{-1}. A . P = D
Esta matriz D tiene en su diagonal principal los valores propios del endomorfismo f.

Si P no es inversible entonces es imposible diagonalizar a la matriz A.

Ejemplo:

Retomemos el ejemplo anterior, teníamos un endomorfismo en IR^2 cuya matriz asociada es A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, dijimos que los vectores : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eran vectores propios relativos a los valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$
Formamos con ellos una matriz P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, analizamos si P es inversible, det (P) = 1, por lo tanto existe P^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Esto implica que A es diagonalizable, realizamos la multiplicación matricial: P^{-1}. A . P = D = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, observemos que en la diagonal están los valores propios del endomorfismo.

Teorema 1:
Si la matriz A, asociada al endomorfismo f de V_n, tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.

Teorema 2:
Si el endomorfismo f de V_n tiene n vectores propios linealmente independientes, A es diagonalizable.

(2) ***Diagonalización ortogonal:***
Una matriz cuadrada A, asociada a un endomorfismo f en V, es ***ortogonalmente diagonalizable*** si existe una matriz P tal que: $P^t \,.\, A \,.\, P = D$ sea diagonal.

A es diagonalizable ortogonalmente si es ***simétrica***, es decir que $\boldsymbol{A^t = A}$

Procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica a partir de los vectores propios:

1º Se hallan los valores propios relativos al endomorfismo f
2º Se determinan vectores propios correspondientes a los valores propios
3º Se ortonormalizan dichos vectores propios
4º Se forma con los vectores ya ortonormalizados un matriz P y se realiza la multiplicación matricial: $P^t \,.\, A \,.\, P$
La matriz que se obtiene es diagonal.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ una matriz asociada a un endomorfismo en IR^2, y tal que $A^t = A$

Buscamos los valores propios a partir de la ecuación característica: det ($A - \lambda. I$) = 0

$$A - \lambda. I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda. I) = (3-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Los valores propios son: $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$

Buscamos vectores propios relativos a estos valores propios:
$(A - \lambda. I) \,.\, [u] = [0]$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda).x + y = 0 \\ x + (3-\lambda).y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema para $\lambda_1 = 4$ resulta que un vector propio puede ser $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y para el valor $\lambda_2 = 2$ un vector propio sería por ejemplo $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tenemos que normalizar a estos vectores:

$< u_1 , u_2 > = 0$, por lo cual son ortogonales

$\| u_1 \| = \sqrt{2}$ y $\| u_2 \| = \sqrt{2}$ por lo tanto no son normados

los normalizamos: $u_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $u_2' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Armamos una matriz con ellos: $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Si hacemos $P^t . A . P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que es una matriz diagonal

En conclusión A es ortogonalmente diagonalizable.

P es una matriz ortogonal ya que: $P^T = P^{-1}$ (la inversa coincide con la traspuesta)