UNIVERSIDAD DE MENDOZA **FACULTAD DE INGENIERÍA**

CÀLCULO III **Ciclo lectivo 2018**

TRABAJO PRÁCTICO N°1

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Objetivo

- ✓ Identificar y clasificar las ecuaciones diferenciales ordinarias
- ✓ Resolver las ecuaciones diferenciales atendiendo a su estructura
- ✓ Resolver problemas físicos utilizando ecuaciones diferenciales adecuadas

Conocimientos previos necesarios

- Casos de factorización
- Métodos de derivación
- Métodos de integración

Ejercicio N°1

La formulación de problemas relacionados a física ,química, biología ,economía entre otras disciplinas requiere la elaboración de un modelo matemático que pueden contener variables y sus razones de cambio ,este tipo de ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales y resolverlas es hallar aquella función que satisfaga la ecuación diferencial
Ejemplo :La tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo ,de un bote costero ,es proporcional al cuadrado de dicha velocidad. Plantear la ecuación diferencial que corresponda al ejemplo

$$\frac{dv}{dt} = Kv^2$$

Ejercicio N°2 Para encontrar el método adecuado para solucionar estas ecuaciones diferenciales, o sea hallar su solución, debemos analizar algunas características .
Definir :

- ✓ Orden de una ecuación diferencial
- ✓ Grado de una ecuación diferencial
- ✓ Homogeneidad
- ✓ Linealidad

Con estos conceptos analizar las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $\cos x.y' - tgx.y = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} - 3\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2} = 0$

c) $\mathrm{v}^2 \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{v}}{\mathrm{dt}^2} - \mathrm{t}\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + 8\mathrm{v} - \cos\mathrm{t} = 0$

d) $(\dfrac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^3})^2 + \mathrm{x}\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + e^y.\mathrm{y} = \mathrm{x}^3$

Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

Ejercicio nº 3 Encontrar la solución o soluciones de una ecuación diferencial es hallar una función que la verifique o sea que la satisfaga.

En cada uno de los siguientes problemas, verifique que la función que se da es una solución de la ecuación diferencial:

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \text{solución } y = e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x} \Rightarrow y = e^{3x} + 10e^{2x}$$

$$sen2t\,\frac{d\ a}{dt} - 2\cos 2t.a = 6\cos 2t.sen2t \Rightarrow \text{solución } y = 4\text{sen}2t$$

Ejercicio N°4 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales mencionando el método utilizado

$$a)\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

$$b)\frac{dy}{dx} = tgy$$

$$c)\frac{ds}{dt} = \frac{(2t+1).(2s-1)}{2(t^2+t)}$$

$$d)\frac{dt}{du} = \frac{t.u+u+3t+3}{t.u+2u-t-2}$$

$$e)x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$$

$$f)\frac{dy}{dt} = 2e^{-2t+3y}$$

$$h)\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

Ejercicio N°5 Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales resolver por el método adecuado analizando la linealidad o la no linealidad reducible a lineales (Método de Bernoulli)

a) $y' + 100y = 0$

b) $2z' - xz = 0$

c) $(2x+5).\frac{dy}{dx} + 10y = 10(2x+1)$

d) $(1+x^2).y' + 3xy = 6x$

e) $y' + (ctgx)y = 2\cos ecx$

f) $y' + y = xy^2$

g) $y' - 3y = x.y^{-4}$

h) $x^3 y' + x^2\ y = x^7 y^{3/4}$

i) $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$

Ejercicio N°6 Hallar la solución particular es hallar aquella única función que cumple con la/las condiciones impuestas, matemáticamente se encuentra hallando las constantes esenciales

Hallar la solución particular en los ejercicios dados con las condiciones mostradas

Ejercicio 4 Punto b $y(0)=1$

h $T(0)=T_0$

Ejercicio 5 Punto e $y(\pi/2)=1$

c $y(0)=0$

Aplicaciones a casos de ecuaciones diferenciales de primer orden

PLANTEAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE MODELIZA EL PROBLEMA Y RESOLVER

Ejercicio N°6 Se deja caer una piedra en un lago calmo lo que provoca ondas y círculos .Si el radio del círculo que toma cuando está creciendo a un ritmo constante de 0,3 m/seg , es de 1,2 m ¿A qué ritmo está cambiando el área A de la región circular perturbada.

Ejercicio N°7 Si la arista de un cubo crece a razón de 2 cm/seg ¿A qué velocidad cambia el volumen del cubo en el instante en que la arista mide 5 cm?.

Ejercicio N°8 Si bombeo aire en el interior de un globo a razón de 4,5 pg^3/mm .Calcular el ritmo de cambio de radio del globo cuando el radio es de 2 pg

Ejercicio N°9 Un avión vuela por una trayectoria que lo llevará a la vertical de una estación de radar .Si está decreciendo a razón de 400 millas/h cuando S0 10 millas ¿Cuál es la velocidad del avión si la altura del avión es 5000 millas y se mantiene constante ?

Ejercicio N°10 Un hombre de 1,5 m de altura se aleja de la base de un poste a rapidez constante ,el poste mide 4 m y la rapidez de la sombra respecto a la cabeza del hombre es de 0,75 m/seg .¿A qué rapidez se aleja la punta de la sombra de los pies cuando esta se encuentra a 6m de la base del poste .

Ejercicio N°11 en la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algún tema es proporcional a la cantidad que queda por memorizar .Suponga quer M representa la cantidad total de un tema que se debe memorizar y P la que ya se ha memorizado¿ cuál sería la velocidad de aprendizaje?

Ejercicio N°12 En una ciudad que tiene una población fija P la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han contraído una enfermedad es proporcional al número de personas enfermas por el número de las que no lo están

ENCONTRAR LA SOLUCIÓN PARTICULAR

Ejercicio N°13 La población P(t) del suburbio de una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P)$$

$$P(0) = 5000$$

En donde t se mide en meses ¡Cuál es el valor límite de la población? ¿En qué momento será la población igual a la mitad de su valor límite?

Ejercicio N°14 Un cultivo tiene una cantidad de bacterias P0. Cuando t=1h la cantidad de bacterias es 3/P0 .Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias P(t) en el momento t calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microrganismos

Ejercicio N°15 La rapidez con que cierto medcamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = A - Bx \qquad x(0)=0$$

Donde A y B son constantes positivas .La función x(t) que describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera t .Encontrar el límite de x .¿Cuánto tarda la concentración en alcanzar este valor límite?

Ejercicio N°16 La sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de 5 °C .Mientras se encontraba realizando la autopsia de una víctima se asesinato ,el propio forense es asesinado .A las 10 AM el ayudante del forense descubre el cadáver a una temperatura de 23 °C A las 12 AM su temperatura es de 17 °C .Suponiendo que el forense tenía vida la temperatura normal es de 37 °C ,calcular a qué °C?hora fue asesinado

Ejercicio N°17 El agua a temperatura de 100 °C se enfría en 10 min a 80 °C ,en un cuarto cuya temperatura es de 20°C Encuentre l temperatura del agua después de 20 min ¿Cuándo la temperatura será de 40°C y cuándo de 26?.

Ejercicio N°18 Un reactor nuclear transforma el Uranio 238 que es relativamente estable en el isótopo de Plutonio 239 Después de 15 años se determina que el 0,043 % de la cantidad inicial A0 de Plutonio se ha desintegrado :Determinemos el período de desintegración de este isótopo si la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad restante

Ejercicio N°19 Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de carbono 14 Determinar la edad del fósil

Autoevaluación

Ejercicio nº 1 En cada uno de los problemas determine el orden de la ecuación diferencial dada y diga también si la ecuación es lineal o no lineal

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{d^3y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\cos 2x)y = x^3$$

.

Ejercicio nº 2 En cada uno de los siguientes problemas , verifique que la función o funciones que se dan son una solución de la ecuación diferencial: y x

$$y'' - y = 0; \quad y_1(x) = e^x, \; y_2(x) = \cosh x$$

$$y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y_1(x) = e^{-3x}, \; y_2(x) = e^x$$

Ejercicio nº 3 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales por integración directa y encontrar la solución particular que satisfaga las condiciones dadas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2+1}; \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-x}; \quad y(0) = 1$$

Ejercicio nº4 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales con el método de separación de variables

$$x \cos x \, dx = \operatorname{cotg} y \, dy$$

$$y' = 1 + x + y^2 + xy^2$$

$$y \ln x \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$$

$$e^{y}\operatorname{sen}2x + \cos 2x(e^{-y} - y)dy = 0$$

Ejercicio nº5 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$y' + y \cos x = \operatorname{sen}x \cos x$$

$$xy' + y - e^{x} = 0$$

Ejercicio nº6 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli

$$xy' - y = x^{3} y^{4}$$

$$xy' + y = -xy^{2}$$

$$y' - y \operatorname{tg}x = - y^{2} \cos x$$

Ejercicio nº7 **E**n los problemas siguientes se describe una función $y = g(x)$ mediante alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x, y)$ cuya solución (o una de sus soluciones) sea g(x).

- La grafica de g es perpendicular a todas las curvas de la forma $y = k+x^2$ en su intersección
- la línea tangente a la grafica de g en (x,y) pasa por el punto (-y,x)

Ejercicio nº8 **E**n los problemas dados, escriba una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación descrita.

- La tasa de cambio de una población P con respecto al tiempo t es proporcional a la raíz cuadrada de P

- En una ciudad que tiene una población fija de P ,la tasa de cambio con respecto al tiempo del numero N de personas que han contraído una enfermedad en proporcional al producto del numero de personas enfermas y al numero de la que no lo están

Para pensar...............

Uno de los métodos más precisos para determinar la edad de los restos arqueológicos es el método de carbono 14 (C^{14}) ,basado en que para cualquier organismo vivo una proporción constante de átomos de carbono está formado por el isótopo radioactivo C^{14} La proporción permanece prácticamente constante durante toda la vida y cuando el organismo muere el C^{14} sigue su proceso de desintegración ,con lo cual la proporción

disminuye .
Un modelo simple para describir el fenómeno supone que la cantidad de átomos que se desintegran es proporcional a la cantidad de átomos presentes ,es decir ,se cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$$

Siendo N (t) la cantidad de C^{14} en una muestra en el tiempo t .Suponiendo que N(0) N_0 calcule la solución del PVI . A $R(t) = \lambda N(t)$ se le llama **tasa de desintegración** y R(0) es la tasa original de desintegración que coincide con la tasa de desintegración de la materia viva .Sabiendo que la edad media del C^{14} (la edad media es el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre la mitad de la sustancia) es aproximadamente de 5.600 años ,resuelve los siguientes casos

a) E nivel del carbón vegetal extraído en las grutas de Lascaux (Francia) en 1950 dio una medida de 0,91 desintegraciones por minuto y gramo ,mientras que a materia viva da 6,68 desintegraciones .Calcule la época e las grutas estuvieron habitadas .
b) En la excavación de Ninpur (Babilonia) en 1951q e carbón vegetal de uan viga dio 4,09 desintegraciones por minuto y gramo Suponiendo que este carbón se formó en la época de Hamurabi.,calcule una fecha probable de la sucesión de Hamurabi.

En una cueva de Sudáfrica se encontró un cráneo humano unto a los restos de una fogata .Los arqueólogo creen que la edad del cráneo es igual a la de la fogata .Sabiendo que solo un 2 % de la cantidad original de C^{14} queda en la madera ,calcular la edad aproximada del cráneo .