MODELO DE ESPECIES EN COMPETENCIA

Otro de los modelos poblacionales clásicos es el de *Especies en Competencia*, donde se analiza la evolución de dos poblaciones en el tiempo y la forma en que interactúan entre sí.

A diferencia del modelo *depredador-presa*, en éste el comportamiento de las poblaciones no consiste en que una sea depredadora de la otra, sino que se trata de dos especies independientes que compiten por el mismo alimento o hábitat, de manera que la presencia de cada una de las especies influye negativamente sobre la otra, dado que el alimento o espacio es limitado para ambas.

Una situación típica sería la de dos poblaciones de microorganismos que parasitan simultáneamente a un mismo ser vivo, por ejemplo, un molusco. Como la clave del modelo es que el alimento es limitado para que lo compartan ambas especies parásitas, no pueden coexistir en crecimiento simultáneamente, de manera que si una de ellas crece la otra debe decrecer necesariamente.

Las poblaciones se designarán nuevamente como x(t) é y(t), que compiten en un mismo entorno por un único alimento, de manera que las ED del modelo serán:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{ax} - \mathbf{bxy} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{ky} - \mathbf{cxy} \end{cases} \qquad (1)$$

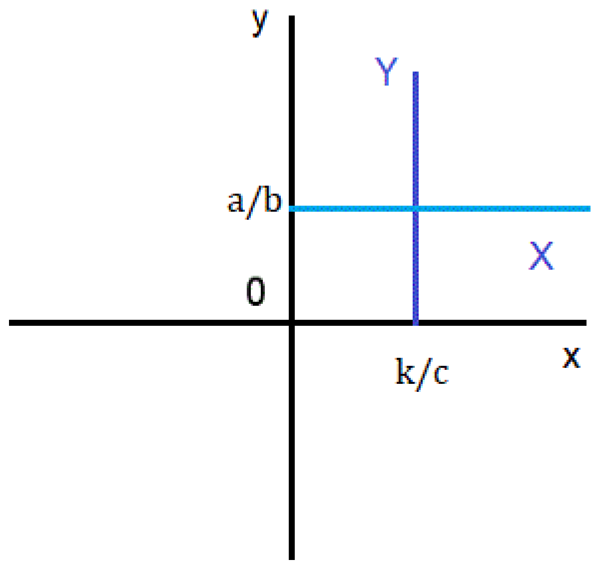
Los términos no lineales se restan en ambas ecuaciones indicando la reducción de población que implica para cada especie la competencia de la otra. En este caso los términos no lineales no representan encuentros sino *presencia* negativa de la otra especie.

Las especies parásitas que actúan sobre el molusco no se depredan entre sí, pero ambas fagocitan de su organismo. Al igual que el modelo depredador-presa, hay también dos puntos críticos que son el origen (x=0, y=0) y (x=k/c; y=a/b), porque para cualquiera de estos dos pares de valores las ecuaciones (1) se anulan simultáneamente, a saber:

$$\begin{cases} x' = a\,0 - b00 = 0 \\ y' = k0 - c00 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = a\dfrac{k}{c} - b\dfrac{k}{c}\dfrac{a}{b} = 0 \\ y' = k\dfrac{a}{b} - \dfrac{ck}{c}\dfrac{a}{b} = 0 \end{cases}$$

Si se traslada el origen de un sistema de coordenadas a este segundo punto crítico y se definen las coordenadas traslacionales, resulta:



donde:

$X = x - \frac{k}{c}$

$Y = y - \frac{a}{b}$

Luego, las ecuaciones referidas al sistema trasladado quedan:

$\mathbf{X' = - b\frac{k}{c}\ Y - b\ XY}$

$\mathbf{Y' = - c\frac{a}{b} X - c\ XY}$

que es un sistema cuasilineal, cuyo sistema lineal asociado, conforme a las condiciones de Lyapunov, es:

$$\begin{cases} X' = -b\,\frac{k}{c}\,Y \\ Y' = -c\,\frac{a}{b}\,X \end{cases} \qquad (2)$$

por lo tanto, la ecuación característica resultará:

$\det\{[A] - [\lambda I]\} = 0$

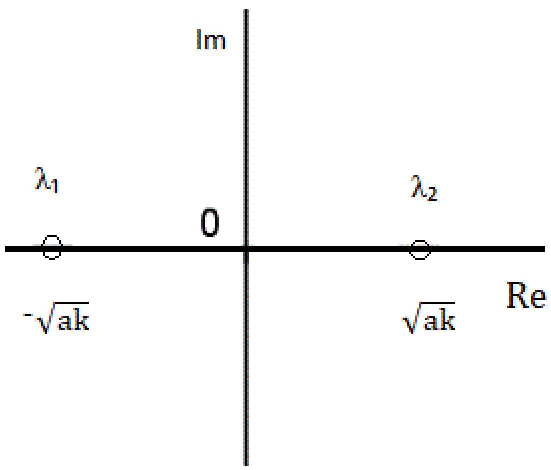
$$\det\left\{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{bk}{c} \\ -\frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right\} = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{bk}{c} \\ -\frac{ca}{b} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{ca}{b}\frac{bk}{c} \Rightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{\lambda^2 - ak = 0}}$$

y de aquí las raíces son:

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ak}$

que son dos raíces reales distintas y de signo opuesto. En el plano complejo se verían así:



Lo que significa que el punto crítico en el origen del sistema trasladado será un punto Silla de montar o montura, tanto para el sistema linealizado como para el sistema cuasilineal.

Igual que se había hecho antes, las soluciones para el sistema linealizado trasladado se pueden obtener a partir de las ecuaciones implícitas, a saber:

$$\frac{\frac{dX}{dt}}{\frac{dY}{dt}} = \frac{-\frac{bk}{c}Y}{-\frac{ac}{b}X}$$

$\frac{dX}{dY} = \frac{b^2kY}{ac^2X} \Rightarrow ac^2\, X\, dX = b^2\, k\, Y\, dY$

Entonces, integrando miembro a miembro:

$ac^2 X^2 = b^2 k Y^2 + K_1$

donde K_1 es una constante arbitraria, positiva, de integración

Esta solución representa una familia de hipérbolas con centro de simetría en el origen del sistema trasladado, que dependen paramétricamente del valor de K_1. En el sistema cuasilineal las ecuaciones dan lugar a trayectorias ligeramente deformadas, particularmente porque las asíntotas dejan de ser rectilíneas y pasan a ser curvas.

Si se pretende encontrar la solución correspondiente al sistema cuasilineal hay que retornar a las ecuaciones 1 y dividirlas miembro a miembro:

de manera que dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-cxy+ky}{ax-bxy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx+k)}{x(a-by)} \Rightarrow \frac{a-by}{y}\, dy = \frac{-cx+k}{x}\, dx$$

Integrando miembro a miembro resulta:

$$\int \frac{a}{y}\, dy - \int b\, dy = \int - c\, dx + \int k \frac{1}{x}\, dx$$

$a \ln y - by = - cx + k \ln x + c_1$;

donde c_1 es una constante arbitraria de integración, operando:

$\ln (y^a/x^k) = - cx + by + c_1$

$\underline{\mathbf{y^a e^{-by} = K x^k e^{-cx}}}$ ③

siendo $K=e^{c_1}$

con mayor precisión, se puede calcular el valor de la constante K en función de las condiciones iniciales, siendo:

$x(0) = x_o$

$y(0) = y_o$

de manera que:

$K= [(y_o)^a e^{cx_o}/(x_o)^k e^{by_o}]$

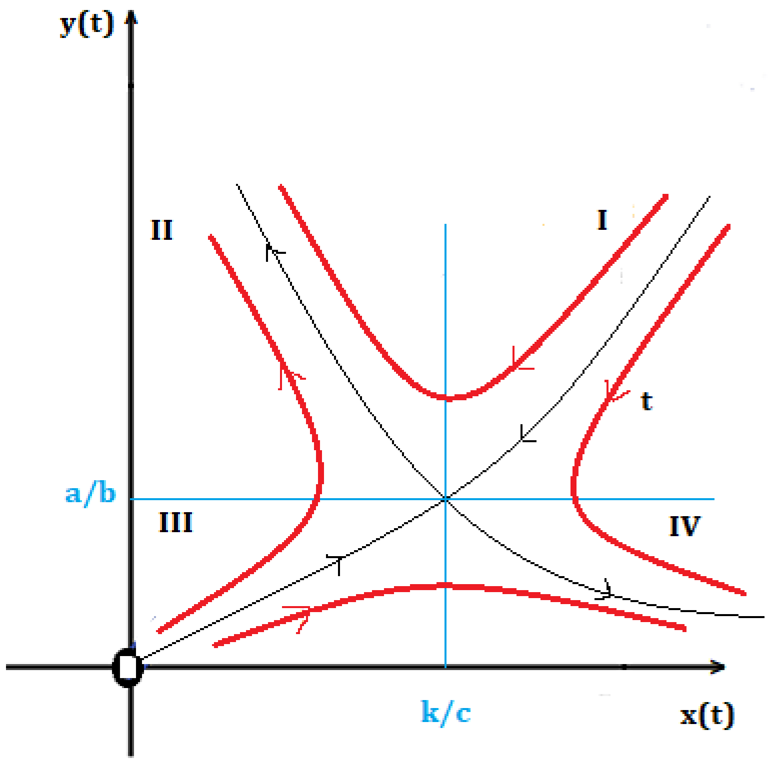
Retrato fásico

El diagrama de fase se encuentra claramente en el primer cuadrante, dado que las poblaciones no pueden ser negativas.

El punto de cruce de las asíntotas coincide con el punto crítico, de manera que se encuentra en las coordenadas:

$x_o = k/c$

$y_o = a/b$



Las líneas que pueden trazarse desde las coordenadas del punto crítico y paralelas a cada eje dividen al primer cuadrante en cuatro regiones, I, II, III y IV.

Las asíntotas, como ocurre siempre para una silla de montar, son dos pares de líneas, uno de ellos convergente hacia el punto de cruce y el otro divergente. Por tratarse de un sistema no lineal las asíntotas no son semirrectas sino líneas curvadas.

En las dos ramas de hipérbolas que se observan en la región (I) ambas poblaciones comienzan, a la derecha del gráfico, con un valor alto de individuos. Pero en los dos casos las poblaciones son decrecientes, vale decir que en esta zona del retrato tienen pendiente negativa.

Esto es consecuencia de la competencia entre ambas y por tratarse de poblaciones numerosas el alimento compartido resulta escaso para las dos, por lo cual se produce mortandad elevada de individuos de las dos especies.

Sin embargo, al ingresar en la región (II) la población x(t) sigue decreciendo, pero la y(t) comienza a crecer a partir de la inflexión de la curva superior en coincidencia con la coordenada del punto crítico.

Desde el punto de vista modélico, se interpreta que la población y(t) se vuelve *dominante* y por lo tanto prevalece.

Sus individuos se alimentan bien y la especie aumenta en número, en detrimento de la población x(t), que sigue disminuyendo. El fenómeno se conoce como *dominancia*, en este caso de la especie y(t) sobre la x(t).

Si se hubiera observado la otra rama que comenzó en (I); la cual ingresa en la región (IV) al superar la coordenada correspondiente del punto crítico, se puede ver el efecto contrario. Aquí la población x(t) comienza a crecer, mientras que la y(t) sigue decreciendo. La dominancia en esta parte corresponde a x(t).

En cada región del diagrama la dominancia se alterna, de manera que x(t) prevalece en dos regiones é y(t) en las dos restantes.

En general, la dominancia depende de los valores de los coeficientes [a, b, c y d] que son determinados por la población inicial, la tasa de reproducción, el volumen de alimento consumido y la velocidad de ingestión de alimento.

También la conformación de las regiones está determinada por los valores de los coeficientes [a, b, c y d].

Una situación recíproca a la de la región (I) se produce en la región (III), en la cual ambas poblaciones comienzan a evolucionar desde un número muy bajo de individuos y, por lo tanto, ambas son crecientes por abundancia de alimento disponible.

Pero al llegar a la coordenada del punto crítico, en ambos casos hay una población que sigue creciendo mientras que la otra comienza a decrecer.

HB 2020