ALGEBRA LINEAL

ESPACIOS MÉTRICOS

DRA. ANA MARÍA NUÑEZ

PRONÓSTICO DE TRAYECTORIAS

Según la primera ley de Kepler, un cometa debe tener una órbita elíptica, parabólica o hiperbólica (ignorando la atracción gravitacional de los planetas).
En coordenadas polares adecuadas, la posición (r, ϑ) de un cometa satisface una ecuación de la forma $r = \beta - e(r \cdot \cos\theta)$ donde β es una constante y e es la *excentricidad* de la órbita.

Las observaciones de un cometa recientemente descubierto proporcionan datos con los cuales es posible determinar el tipo de órbita y pronosticar su trayectoria.

El cometa Halley apareció por última vez en 1986 y reaparecerá en 2061.

Del libro Algebra Lineal y sus Aplicaciones de David C. Lay

ESPACIOS MÉTRICOS

En el ejemplo visto lo importante es conocer a qué distancia pasará de la Tierra, por ello comenzaremos por definir la función distancia

COMENCEMOS POR CONSIDERAR UN CONJUNTO NO VACÍO
A CUYOS ELEMENTOS DENOMINAREMOS "*PUNTOS*"
Y EL CUERPO K DE LOS NÚMEROS REALES

EN SIMBOLOS!!

ESPACIO MÉTRICO

Función Distancia

E → Conjunto de "puntos"

Todo par ordenado de "*puntos*" → Vector de V (K)

Una Función → $\underbrace{\text{Par de "}\textit{puntos}\text{"}}_{\text{VECTOR}}$ → Escalar → Distancia

Verificando las condiciones:

$$
\begin{cases}
d(a,b) \geq 0 \wedge \left(d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b\right) \\
d(a,b) = d(b,a) \\
d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)
\end{cases}
$$

K* = *IR

"E" ES UN ESPACIO MÉTRICO → ***V (IR)* Espacio vectorial asociado**

ESPACIOS METRICOS

FUNCIÓN DISTANCIA:

En el espacio geométrico IR^2 o IR^3 ustedes saben calcular la distancia entre dos puntos!!!

RECORDAMOS

Determine la distancia entre los puntos del plano IR^2 dados:

$$a = (-1, 2) \quad b = (2, -3)$$

A TRABAJAR

Calculamos y representamos en forma gráfica!!!

ESPACIOS MÉTRICOS

SEGUIMOS CONSIDERANDO EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES

K = IR

Y UN CONCEPTO QUE USTEDES CONOCEN!!!!

FUNCIÓN NORMA

SIN EMBARGO AHORA DEBEMOS GENERALIZAR A LOS DEMÁS ESPACIOS VECTORIALES REALES

ESPACIO VECTORIAL REAL

V (IR)

Función Norma

Una Función → Vector → Escalar

$$\| \ \| : V \to IR$$

$$u \to \|u\|$$

Verificando las condiciones:

$$\begin{cases} \|u\| \geq 0 \wedge \left(\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0} \right) \\ \|t.u\| = |t|.\|u\| \quad (t \in IR) \\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \end{cases}$$

V (*IR*) ESPACIO NORMADO

V (*IR*) ESPACIO NORMADO

Función Norma

$$\|-u\| = \|u\| \qquad\qquad \|u - v\| = \|v - u\|$$

$$\|u\| = 1 \quad u \ \textit{es un vector normado}$$

$$\|u\| \neq 1 \quad u \ \textit{se puede normalizar} \qquad u' = \frac{1}{\|u\|}.u \ \Rightarrow \ \|u'\| = 1$$

Siempre es posible definir una distancia
inducida por una norma
tal que $d(u, v) = \|u - v\|$

TODO ESPACIO NORMADO ES TAMBIÉN MÉTRICO

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos con el práctico

- Problema 1.Considere la norma p definida en IR^n (IR) dada por:

$$\| (x_1,\ldots, x_n) \|_p = + (| x_1|^p + \ldots + | x_n |^p)^{1/p} \quad \text{para } p = 1, 2, \ldots, n$$

Para p = 4

Determine la veracidad de: si $u = (-1, 1,-1,1)$ entonces $\| u \|^4 = (4)^{1/4}$

Calcule a partir de esta norma la distancia de u a v si se sabe que:

$u = (-1, 1, -1, 1)$ $v = (0, 2, -1, 2)$

ESPACIO NORMADO

K = IR

Función Norma

Ejemplos de normas matriciales: M_{nxm}

norma matricial uno

$$\|A\|_1 = máximo \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \; (j = 1,2,\ldots,m) \right\}$$

norma matricial infinito

$$\|A\|_\infty = máximo \left\{ \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \; (i = 1,2,\ldots,n) \right\}$$

norma Fröbenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2}$$

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos un ejemplo

- Considere la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Halle la norma de A para cada una de las funciones normas recién ejemplificadas.

A trabajar ...!!!

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos con el práctico

- Problema 2. Se tienen en M_{3x3} (IR) las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1.2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine la norma infinito de cada una de ellas e indique si son normadas.

b) Si no son normadas normalícelas.

c) Determine la distancia de A a B a partir de la distancia inducida por esa norma.

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIOS NORMADOS

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 3. . En el espacio vectorial de las funciones continuas sobre un intervalo [a, b]: $C_{[a,b]}$ (IR), se define una función norma como sigue:

$$|| f ||_\infty = \max \{ | f(x) |; x \text{ de } [a,b]\}.$$

Considere el intervalo [-1,1] y las siguientes funciones f, g definidas de él en IR tal que: $f(x) = x^2 + x – 1$ y $g(x) = - x^2 + 2$

a) Determine la norma de ambas funciones.
b) Calcule la distancia de f y g inducida por esta norma.

ESPACIOS MÉTRICOS

SEGUIMOS CONSIDERANDO EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES

K = IR

OTRO CONCEPTO QUE USTEDES CONOCEN!!!!

FUNCIÓN PRODUCTO ESCALAR

AHORA DEBEMOS GENERALIZAR EL CONCEPTO A LOS DEMÁS ESPACIOS VECTORIALES REALES

ESPACIO VECTORIAL REAL
V (IR)

Producto escalar

Una Función → Par de vectores → Escalar

$$\langle\ \rangle : VxV \to IR$$

$$(u,v) \to \langle u,v\rangle$$

Verificando las condiciones:

$$\begin{cases} \langle u,u\rangle \geq 0 \wedge \left(\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}\right) \\ \langle t.u,v\rangle = t.\langle u,v\rangle \quad (t \in IR) \\ \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \\ \langle u+w,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle \end{cases}$$

V (*IR*) ESPACIO prehilbertiano

V (*IR*) ESPACIO prehilbertiano

Producto escalar

$$\langle u, v\rangle = 0 \quad \textit{entonces} \quad u, v \textit{ son ortogonales}$$

Siempre es posible definir una norma inducida

por un producto escalar: $\|u\| = +\sqrt{\langle u, u\rangle}$

Siempre es posible definir una distancia inducida

por un producto escalar y una norma:

$$\mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \|u - v\| = +\sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

TODO ESPACIO PREHILBERTIANO ES TAMBIÉN MÉTRICO

ESPACIOS MÉTRICOS

K = IR

ESPACIOS NORMADOS

ESPACIOS PREHILBERT

Trabajamos un ejemplo

- Considere las matrices reales:

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Halle el producto entre A y B para el siguiente producto escalar:

$$\langle A, B \rangle = Tr\ (A^T . B)$$

A trabajar …!!!

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIOS PREHILBERT

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 4. Considere el siguiente producto escalar real dado en forma matricial:

$$\langle u,v\rangle = \langle (a,b,c),(d,e,f)\rangle = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

a) Muestre que se verifica el axioma de positividad de producto escalar:

$$\langle u,u\rangle \geq 0 \wedge \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$$

b) Calcule el producto escalar entre u = (-1, 2, -2) y v = (1, -1, 2)

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIOS NORMADOS Y PREHILBERT

K = IR

Trabajamos con el práctico

Problema 5. Considere el siguiente producto escalar definido en el espacio vectorial de las funciones reales: $\mathcal{C}_{[-1,\,1]}(\boldsymbol{R})$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).\,g(x)dx$$

Y las funciones: p(x) = $x^2 - 1$ q(x) = $(x - 1)^2$

a) Calcule el producto escalar entre ellas e indique si son ortogonales, justifique su respuesta.

b) Determine la distancia de p a q a partir de la distancia inducida por el producto dado.

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIOS NORMADOS Y PREHILBERT

K = IR

Trabajamos con el práctico

- Problema 6. Demuestre que en un espacio normado y prehilbert real:
- a) dos vectores son ortogonales si se verifica que: $\|u+v\| = \|u-v\|$
- b) $\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$

ESPACIOS MÉTRICOS

Y EL SI CONSIDERAMOS EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES

K = $\mathbb{C}$

QUE SUCEDE CON LA

FUNCIÓN PRODUCTO ESCALAR…

Y CON LA DISTANCIA …

ESPACIO COMPLEJO

V (C)

Una Función ➔ Par de vectores ➔ Complejo

$$\langle\ \rangle : VxV \to C$$
$$(u,v) \to \langle u,v \rangle$$

➔ ***Producto hermítico***

Verificando las condiciones

$$\begin{cases} \langle u , u \rangle \geq 0 \wedge \left(\langle u , u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0} \right) \\ \langle z.u , v \rangle = \bar{z}.\langle u , v \rangle \quad (z \in C \ \ y \ \ \bar{z} \ \ su \ \ conjugado \quad) \\ \langle u , v \rangle = \langle \overline{v , u} \rangle \\ \langle u + w , v \rangle = \langle u , v \rangle + \langle w , v \rangle \end{cases}$$

V (*C*) ESPACIO UNITARIO

V ($\mathbb{C}$) ESPACIO UNITARIO

Ejemplo de productos usuales

Canónico en $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}$)

$$u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$
$$v = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

$$\Rightarrow \quad \langle u, v \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \ldots + z_n \overline{w_n}$$

Canónico en M_{nxn} ($\mathbb{C}$)

$$A = (z_{ij}) \quad B = (w_{ij}) \quad \Rightarrow \quad \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

ESPACIOS MÉTRICOS

ESPACIO UNITARIO

K = $\mathbb{C}$

Trabajamos con el práctico

- Problema 7. Demuestre en el espacio unitario C^2 *(C)* que se verifica el axioma:
- $\langle u, v\rangle = z_1.\overline{w_1} + z_2.\overline{w_2}$ siendo $u = (z_1,\ z_2)$ $v = (w_1,\ w_2)$

Problema 8. Considere las matrices complejas:

$$A1 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} -1-i & 1+i \\ -2 & -1+3i \end{pmatrix}$$

Halle el producto entre A y B para el producto hermítico usual $\left\langle A, B \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$

Determine la distancia entre A y B inducida por este producto.

CONSECUENCIAS

F = {u_1, u_2, …, u_n} conjunto de vectores de V(K)

F

Conjunto Normado

$$\|u_i\| = 1 \quad (\forall i = 1,2,\ldots,n)$$

Conjunto Ortogonal

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0$$

$$(\forall i = 1,\ldots,n)(\forall j = 1,\ldots,n)(i \neq j)$$

Conjunto ortonormado

ES BASE

Base normada

Base ortogonal

Base ortonormada

ESPACIOS METRICOS

Trabajamos con el práctico

Problema 9. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres **P_3(*R*)** se tiene el producto interior:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).\, g(x)dx$$

Investigue si los siguientes vectores constituyen una base, en caso afirmativo analice si es ortonormada u ortogonal: {f1, f2, f3, f4} siendo:

$$f1(x) = 1,\ f2(x) = x,\ f3(x) = x^2,\ f4(x) = x^3$$

ESPACIOS METRICOS

Trabajamos con el práctico

Problema 10. Sea C*[a, b] el espacio vectorial de las funciones definidas en [a, b] con valores complejos, en él se define el siguiente producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t).\overline{g(t)}dt$$

Y las funciones $f(t) = 2.t^2 - t\,i$ y $g(t) = t - 2t\,i$

a) Analice si son funciones ortogonales, justifique su respuesta.

b) Determine la distancia entre ellas a partir de la distancia inducida por este producto.