

## Unidad nº 2: Combinatoria

***La combinatoria es la rama del Álgebra que se ocupa de los problemas de contar.***

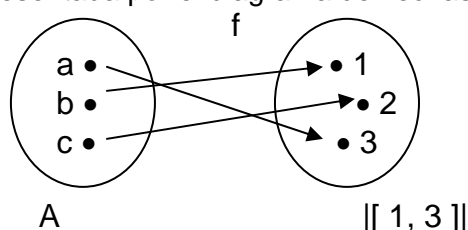
- Conjuntos finitos:

Intuitivamente ya habíamos dicho que un conjunto es finito si se pueden contar sus elementos. Daremos ahora una definición formal del tema:

Un conjunto es finito y tiene  $n$  elementos si es equipotente al intervalo natural  $[[1, n]]$ , es decir si es posible establecer una biyección entre dicho conjunto y el intervalo natural inicial  $[[1, n]] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Ejemplo:

$A = \{a, b, c\}$ ,  $A$  es un conjunto finito y tiene 3 elementos porque es equipotente al intervalo natural  $[[1, 3]]$ , ya que es posible establecer al menos una biyección con el intervalo natural  $[[1, 3]] = \{1, 2, 3\}$  como la representada por el diagrama de flechas:



- Primer Principio del Conteo:

La combinatoria se apoya en ciertos Principios, uno de ellos es el Primer Principio del Conteo, o Principio del Producto o Principio de la enumeración que dice:

Si una experiencia  $E$  tiene  $n$  resultados posibles, y por cada uno de éstos se realiza una segunda experiencia  $E'$  que tiene  $m$  resultados posibles, entonces la realización sucesiva de ambas experiencias  $E$  y  $E'$  es otra experiencia, que tiene  $n \cdot m$  resultados posibles.

Ejemplo:

Se quieren formar números de dos cifras con los dígitos 2, 3, 5, de tal forma que:

- a) no se repitan sus cifras
- b) se pueden repetir sus cifras

Analicemos la situación, son números de dos cifras, la primer experiencia es la elección de la primera cifra y la segunda experiencia la elección de la segunda cifra. Veamos en cada caso los resultados posibles:

- a) Para la primera experiencia hay 3 resultados posibles, es decir se pueden elegir los tres dígitos, para la segunda experiencia, como ya elegimos uno de los dígitos y queremos que no se repitan las cifras, tenemos 2 resultados posibles. Luego la elección de ambas cifras es otra experiencia que tiene  $3 \cdot 2 = 6$  resultados posibles, en efecto sólo se pueden formar los números: 23, 25, 32, 35, 52, 53 de dos cifras no repetidas.
- b) Aquí cambia la situación, como se pueden repetir las cifras para la primer experiencia hay 3 resultados posibles y para la segunda también, entonces la realización sucesiva de ellas tiene  $3 \cdot 3 = 9$  resultados posibles. Y en efecto se pueden agregar a los seis ya nombrados: 22, 33, 55

## Unidad nº 2: Combinatoria

Generalizando el Primer Principio del Conteo diremos que si una experiencia  $E_1$  se puede realizar de  $n_1$  maneras posibles, otra experiencia  $E_2$  tiene  $n_2$  resultados posibles, . . . , y una experiencia  $E_p$  tiene  $n_p$  posibilidades, la realización sucesiva de las  $p$  experiencias tendrá  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_p$  resultados posibles.

- Número de funciones

Queremos averiguar cuántas funciones es posible definir entre dos conjuntos finitos de  $n$  y de  $m$  elementos respectivamente. Esto es equivalente a decir que queremos definir funciones entre el intervalo natural  $[[1, n]]$  y el  $[[1, m]]$

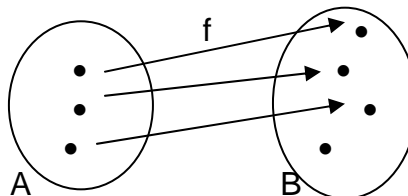
Recurriremos al Primer Principio del Conteo, la primera experiencia es elegir un elemento del intervalo  $[[1, m]]$  para que sea la imagen de 1 (es decir  $f(1)$ ), la segunda experiencia es elegir un elemento del intervalo  $[[1, m]]$  para que sea la imagen de 2 (es decir  $f(2)$ ), y así sucesivamente para todos los elementos del intervalo  $[[1, n]]$

Para elegir la imagen de 1 hay  $m$  posibilidades, para elegir la imagen de 2 hay  $m$  posibilidades, . . . , para elegir la imagen de  $n$  hay  $m$  posibilidades, entonces, para elegir la imagen de los  $n$  elementos sucesivamente hay  $m \cdot m \cdot \dots \cdot m$  ( $n$  factores) resultados posibles

En conclusión, hay  $m^n$  funciones que se pueden definir del intervalo natural  $[[1, n]]$  en el intervalo natural  $[[1, m]]$ , o bien se pueden definir  $m^n$  funciones de  $A$  en  $B$  siendo  $n$  el número de elementos de  $A$  y  $m$  el de  $B$ .

Ejemplo 1:

$A$  es finito y tiene 3 elementos,  $B$  es finito y tiene 4 elementos, se pueden definir de  $A$  en  $B$   $4^3 = 64$  funciones, de las cuales la siguiente representada en un diagrama de flechas es una de ellas:



Ejemplo 2:

¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 7, 9 ?

Si observamos detenidamente este ejemplo veremos que responder la pregunta enunciada, significa averiguar “cuántas funciones se pueden establecer del intervalo natural  $[[1, 3]]$  en el intervalo natural  $[[1, 5]]$ ”

Este análisis nos lleva a dar las siguientes definiciones:

- Se llama **variación con repetición** a toda función definida de  $[[1, n]]$  en  $[[1, m]]$ , siendo  $0 < n \leq m$
- El **número de variaciones con repetición** es el número de funciones que se pueden definir de  $[[1, n]]$  en  $[[1, m]]$  es decir  $m^n$  y se anota  $V_{m,n}^r$

## Unidad nº 2: Combinatoria

En este ejemplo 2 sería:

$V_{5,3}^r = 5^3 = 125$ , se pueden formar 125 números de tres cifras con los dígitos dados.

Ahora bien en este análisis hemos considerado que existen los números de tres cifras como por ejemplo 233, o bien 333, que son soluciones al problema, pero la situación sería diferente si la planteamos así:

Ejemplo 3:

¿Cuántos números de tres cifras **distintas** se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 7, 9 ?

En este caso ya no podemos hablar del número de funciones en general para responder, cómo no se pueden repetir las cifras estaríamos hablando de **funciones inyectivas**.

Calculemos el número de funciones inyectivas que se pueden establecer de A en B, dos conjuntos finitos equipotentes con los intervalos naturales  $[[1, n]]$  y  $[[1, m]]$  respectivamente, siendo  $0 < n \leq m$

Aplicando el Primer Principio del Conteo:

Para elegir  $f(1)$  hay  $m$  resultados posibles, para elegir  $f(2)$  hay  $m - 1$  posibilidades, para elegir  $f(3)$  hay  $m - 2$ , ..., para elegir  $f(n)$  hay  $m - (n - 1)$  posibilidades.

En definitiva para realizar las elecciones de las imágenes de los  $n$  elementos de A sucesivamente hay  $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot \dots \cdot (m - (n - 1))$  resultados posibles.

Si releemos el ejemplo 3, vemos que responder a la pregunta planteada significa determinar el número de funciones **inyectivas** que se pueden definir del intervalo natural  $[[1, 3]]$  en el  $[[1, 5]]$

Este análisis nos lleva a nuevas definiciones:

- Se llama **variación simple** de orden  $m$  en un conjunto de  $n$  elementos a toda función inyectiva de  $[[1, n]]$  en  $[[1, m]]$  con  $0 < n \leq m$
- En general el **número de variaciones simples** de orden  $m$  en un conjunto de  $n$  elementos es  $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot \dots \cdot (m - (n - 1))$  y se anota  $V_{m,n}$

En el ejemplo 3:  $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ , se pueden formar 60 números de tres cifras distintas con los dígitos dados.

**Entre dos conjuntos A y B finitos, ambos equipotentes a los intervalos naturales  $[[1, n]]$  y  $[[1, m]]$ , es posible definir  $m^n$  funciones las que reciben el nombre de variaciones con repetición; y  $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot \dots \cdot (m - (n - 1))$  funciones inyectivas, las que reciben el nombre de variaciones simples.**

### • Permutaciones

Queremos averiguar ahora cuántas funciones biyectivas se pueden establecer entre dos conjuntos finitos, lo primero que debemos aclarar es que para que esto sea posible ambos deben tener  $n$  elementos.

## Unidad nº 2: Combinatoria

En otras palabras buscamos el número de biyecciones del intervalo natural  $[[1, n]]$  en el  $[[1, n]]$ , la totalidad de funciones sería  $n^n$ , pero cuántas de ellas son biyectivas?

Recurrimos nuevamente al Primer Principio del Conteo, para elegir  $f(1)$  hay  $n$  resultados posibles, para elegir  $f(2)$  hay  $n-1$  posibilidades, para elegir  $f(3)$  hay  $n-2$ , y así sucesivamente hasta que para elegir  $f(n)$  hay  $n - (n-1) = 1$  posibilidad, por lo tanto la realización sucesiva de éstas elecciones será:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-(n-2)) \cdot (n-(n-1)) = n!$$

Daremos una nueva definición:

Se llama **permutación** de orden  $n$  a toda función biyectiva de  $[[1, n]]$  en  $[[1, n]]$ .

En general el **número de permutaciones** de orden  $n$  es  $n!$  y se anota  $P_n$

Ejemplo:

Se quieren ordenar cinco niños en una fila ¿de cuántas maneras es posible realizar la experiencia?

Identifiquemos al grupo de los cinco niños con el intervalo natural  $[[1, 5]]$ , de la misma manera, tenemos cinco lugares  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $4^\circ$  y  $5^\circ$  en la fila, identificables con el intervalo natural  $[[1, 5]]$ , cada ordenamiento es una permutación de orden 5, entonces contestar de cuántas maneras se puede realizar la experiencia se reduce a calcular el número de permutaciones de orden 5, es decir:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**Entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  finitos, ambos equipotentes al intervalo natural  $[[1, n]]$  es posible definir  $n!$  funciones biyectivas, las que reciben el nombre de permutaciones de orden  $n$ .**

Se puede demostrar que:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \dots \cdot (m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{P_m}{P_{m-n}}$$

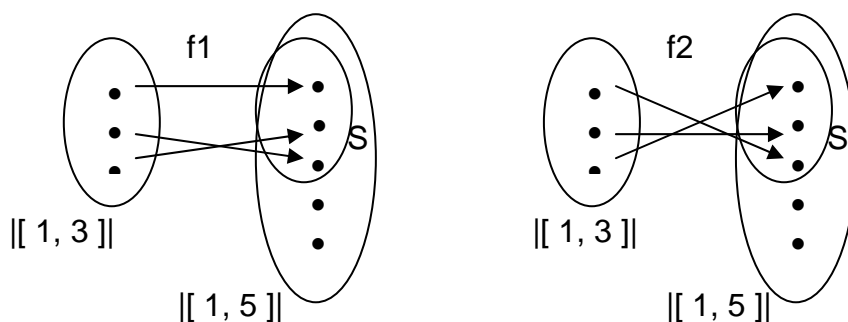
- Número combinatorio

La situación ahora consiste en considerar un conjunto finito  $A$  equipotente al intervalo natural  $[[1, m]]$  y se pretende averiguar cuántos subconjuntos de  $n$  elementos podemos formar.

Tomemos un ejemplo, consideremos un conjunto  $A$  equipotente con  $[[1, 5]]$  y queremos formar subconjuntos de 3 elementos.

Podríamos pensar que el problema se soluciona buscando las funciones inyectivas de  $[[1, 3]]$  en  $[[1, 5]]$ , pero veamos algo:

## Unidad nº 2: Combinatoria



Si nos detenemos en estos diagramas de flechas notaremos que se han representado dos funciones inyectivas de  $[[1, 3]]$  en  $[[1, 5]]$  que tienen como conjunto imagen al mismo subconjunto  $S$ .

Entonces si buscamos el número de subconjuntos de 3 elementos por este camino de las variaciones simples debemos tener en cuenta que estas funciones inyectivas que tienen como conjunto imagen a  $S$  son 6, tantas como las permutaciones de esos tres elementos que constituyen  $S$ .

Ahora estamos en condiciones de decir que el número de subconjuntos de 3 elementos de un conjunto de 5 elementos es  $\frac{V_{5,3}}{P_3}$

En conclusión: el número de subconjuntos de  $n$  elementos que se pueden formar con una colección de  $m$  elementos, siendo  $n \leq m$ , recibe el nombre de **número combinatorio** de  $m$  elementos tomados de a  $n$  elementos, o bien combinaciones simples.

Y se anota:  $C_{m,n} = \binom{m}{n}$  Y se calcula:  $\frac{V_{m,n}}{P_n}$

Se puede calcular como el cociente entre el número de variaciones simples que se pueden determinar de  $[[1, n]]$  en  $[[1, m]]$  y el número de permutaciones de orden  $n$ .

Y se puede demostrar que:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo:

¿Cuántas comisiones de 5 alumnos se pueden formar con un grupo de 8?

En realidad estamos buscando el número de subconjuntos de 5 elementos que se pueden determinar de una colección de 8 elementos.

## Unidad nº 2: Combinatoria

Es decir:  $C_{8,5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ , se pueden formar 56 comisiones de 5 alumnos con un grupo de 8.

### Propiedades de los números combinatorios:

1 – El número combinatorio:  $C_{m,m} = 1$  y  $C_{m,0} = 1$

2 – El número combinatorio:  $C_{m,1} = m$

3 - Los números combinatorios  $C_{m,n}$  y  $C_{m,m-n}$  se llaman complementarios. Los números combinatorios complementarios son iguales:  $C_{m,n} = C_{m,m-n}$

Demostración:  $C_{m,n} = C_{m,m-n}$

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} &= \binom{m}{m-n} \\ \frac{m!}{n!(m-n)!} &= \frac{m!}{(m-n)!(m-(m-n))!} && \text{(por definición de número combinatorio)} \\ \frac{m!}{n!(m-n)!} &= \frac{m!}{(m-n)!(m-m+n)!} && \text{(sacando el paréntesis)} \\ \frac{m!}{n!(m-n)!} &= \frac{m!}{(m-n)!n!} && \text{(cancelando)}\end{aligned}$$

4 – Los números combinatorios verifican que:  $C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1}$

Demostración:

$$\begin{aligned}C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1} &= \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \\ &= \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!} = \\ &= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-1-n)!(m-n)} + \frac{(m-1)!n}{(n-1)!(m-1-(n-1))!n} = \\ &= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} = \frac{(m-1)!(m-n) + (m-1)!n}{n!(m-n)!} = \\ &= \frac{(m-1)![(m-n) + n]}{n!(m-n)!} = \frac{(m-1)!m}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n} = C_{m,n}\end{aligned}$$

## **Unidad nº 2: Combinatoria**

Veamos un par de ejemplos que escapa a las definiciones que venimos de considerar:

a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 3 monedas de 25 ctvs. Y 7 monedas de 50 ctvs. Entre diez niños de modo tal que a cada uno le toque una sola moneda?

b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 100 botellas en 10 comercios?

Si en ambos casos es imposible “marcar” los elementos considerados para distinguir unos de otros de un mismo tipo estamos en presencia de casos particulares de permutaciones y de combinaciones con repetición.

Analizaremos en clase estos dos ejemplos para llegar a determinar una forma de cálculo que permita modelizar situaciones similares a las presentadas.

## Unidad nº 2: Combinatoria

### • Binomio De Newton

Una aplicación de los números combinatorios la constituye el desarrollo de la potencia de un binomio con **exponente n natural**, o bien fórmula del Binomio de Newton.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Más abreviadamente se puede escribir:  $(a + b)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n-h} b^h$ , para h de IN de 0 a n

#### **Nota:**

- El desarrollo de la fórmula del binomio de Newton es una serie que consta de n+1 términos.
- En todos los términos se verifica que la suma de los exponentes de a y de b es igual a n.
- El término genérico del desarrollo es:  $T_{h+1} = \binom{n}{h} a^{n-h} b^h$
- Los términos que equidistan del , o de los términos centrales tienen igual valor de coeficientes, pues corresponden a números combinatorios complementarios.
- $$\binom{n}{h} = \frac{n!}{(n-h)!h!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(h+1))}{h!}$$

#### Extensión del Binomio de Newton:

Si el exponente del binomio es un **número real** se puede extender el concepto visto anteriormente y resulta:

$$(a + b)^r = a^r b^0 + \frac{r}{1!} a^{r-1} b^1 + \frac{r(r-1)}{2!} a^{r-2} b^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} a^{r-3} b^3 + \dots$$

En este caso el desarrollo resulta una serie infinita de términos, que se pueden resumir en la expresión siguiente:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r}{h} a^{r-h} b^h, \text{ para } h \text{ de IN desde } 0 \text{ hasta } \infty$$

En este caso la expresión:  $\binom{r}{h} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-(h+1))}{h!}$



## Unidad nº 2: Combinatoria

- Principio de Inducción o recurrencia

Una de las propiedades fundamentales de los números naturales es la validez del Principio de Inducción o recurrencia y sus formulaciones equivalentes. A continuación se consignará la forma más simple del principio y su interpretación:

□ **Principio de Inducción.**

Sea  $IN^* = \{ 1, 2, 3, \dots \}$  el conjunto de los números naturales (sin el cero) y  $P$  un subconjunto de  $IN$  tal que:

P1. 1 pertenece a  $P$

P2. Si  $k$  pertenece a  $P$ , entonces  $k + 1$  pertenece a  $P$

Entonces  $P$  es el conjunto de los números naturales. En símbolos:

$$P \subset IN \quad \wedge \quad \left. \begin{array}{l} i) 1 \in P \\ ii) k \in P \Rightarrow k+1 \in P \end{array} \right\} \Rightarrow P = IN$$

Donde con el símbolo " $\Rightarrow$ " se quiere indicar que si el antecedente es verdadero, el consecuente también lo es.

□ **Utilización del Principio de Inducción.**

Sea  $P(n)$  una proposición predicable sobre  $IN$ , es decir para cada  $n$  del conjunto  $IN$  de números naturales,  $P(n)$  designa una proposición verdadera o falsa tal que:

P'1.  $P(1)$  es verdadera

P'2. Para todo  $k$  de  $IN$ , si  $P(k)$  es verdadera, entonces  $P(k+1)$  es verdadera.

Entonces  $P(n)$  es verdadera cualquiera sea  $n$  de  $IN$

Ejemplo:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2} \quad \text{es verdadera ya que: } 1 = 1$$

$$P(k): 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{tomando como premisa que } P(k) \text{ es verdadera}$$

para todo  $k$  de  $IN$ , entonces:

$$P(k+1): 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Trabajando algebraicamente:

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2} = \frac{k^2 + 2k + 1 + k + 1}{2} = \\ &= \frac{(k^2 + k) + (2k + 2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = P(k) + (k+1) \end{aligned}$$

En efecto es verdadera para  $k+1$ , por lo tanto  $P(n)$  es verdadera para todo  $n$  de  $IN$ .