MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADOS

Modelos matemáticos

El método más común utilizado desde hace mucho tiempo en Ingeniería para establecer modelos matemáticos de sistemas son sus ecuaciones diferenciales de equilibrio. La resolución de las mismas permite obtener las funciones que describen el comportamiento temporal de esos sistemas así modelizados.

Sin embargo, este método tiene algunas limitaciones básicas, como por ejemplo las siguientes:

- No es aplicable a los sistemas no lineales.

- Es difícil procesar las soluciones matemáticas en forma digital.

- No suministran demasiada información de los sistemas a menos que se obtengan soluciones completas y detalladas. Esto es contradictorio, porque para lograr eso se necesitan las condiciones de contorno que implican poseer un conocimiento acabado del sistema.

Análisis por variables de estado

El método que puede sortear todas estas limitaciones es el del análisis en el espacio de estados.

Este método tiene la ventaja de ser fácilmente aplicable a los sistemas no lineales, invariantes en el tiempo y además, los resultados que se obtienen a partir de las ecuaciones diferenciales de estado pueden ser procesados mediante software.

Esencialmente, este tratamiento consiste en desarrollar una técnica que permite determinar analíticamente el estado de un sistema.

Para poder avanzar en el despliegue teórico del análisis por variables de estado se hace necesario considerar algunas definiciones:

Estado: Es el comportamiento dinámico de un sistema en un instante dado, el cual responde a una determinada distribución de energía acumulada en los elementos activos del sistema. Por elementos activos se entienden los elementos almacenadores de energía.

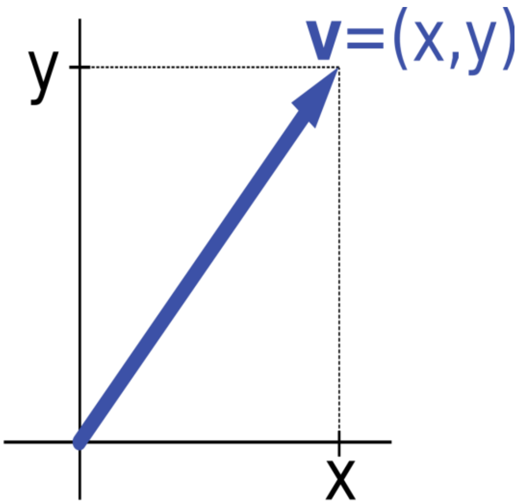
Espacio de estados: Es un sistema de coordenadas donde cada eje corresponde a una variable de estado diferente. Los valores de todas las variables definen un único punto en ese espacio llamado estado, que a su vez corresponde a un instante determinado $E_n(t_n)$.

Variables de estado: Son el menor conjunto posible de parámetros que definen el estado del sistema en cualquier instante.

Trayectoria de estado: Es una sucesión de puntos que corresponden a diferentes estados representados en el espacio de estados para distintos instantes.

Vector de estado: Es el vector que une el origen del sistema de coordenadas con el punto que corresponde a un estado en un cierto instante.

Resume matricialmente las coordenadas del estado correspondiente $V_1= \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$ donde x=x(t) é y=y(t); por lo tanto $x_1=x(t_1)$; é $y_1=y(t_1)$, que son las coordenadas del estado E_1 en el instante t_1.



Orden del sistema: Está dado por la cantidad de elementos almacenadores de energía que posee el sistema, por lo tanto será igual al número (n) de variables de estado, ya que las variables se eligen asociadas a estos elementos activos. También coincide con el orden de la ecuación diferencial de equilibrio del sistema en la representación convencional por ED's.

Un problema con esta forma de representación se produce por el número de variables existentes, ya que hasta segundo orden se puede representar en un plano y hasta tercer orden en una terna en el espacio, pero si la cantidad de variables es mayor hay que recurrir al empleo de un hiperespacio en una forma de representación estadística.

Descripción por variables de estado

En el caso de un circuito eléctrico, por ejemplo, resulta obvio recurrir a los elementos almacenadores de energía como inductancias y capacitores para que las variaciones de sus parámetros suministren información sobre la cantidad de energía que se tramita en cualquier instante y por lo tanto describir el estado del circuito para ese momento.

Es sabido que L y C son los elementos activos, donde la inductancia almacena energía en forma de campo magnético (B) y el capacitor o condensador lo hace en forma de carga eléctrica (q).

La resistencia R, en cambio, es sólo un elemento de fricción donde se disipa la energía en forma de calor.

En el caso de un sistema mecánico, los elementos almacenadores de energía pueden ser la masa, que acumula en forma de energía potencial o un resorte que acumula o libera energía según se traccione o se comprima. El elemento de fricción puede ser un acumulador viscoso, donde se genera una fuerza disipativa resistente.

En general, para un sistema determinado existe más de un posible grupo de variables de estado que lo describan, por lo tanto, se debe elegir el conjunto de tal manera que, conocido el valor de cada una de las variables se pueda calcular la cantidad de energía acumulada en cada uno de los elementos del sistema en cualquier instante.

Obviamente, esta situación alude a los sistemas de orden n y no a un sistema de primero o segundo orden, donde las variables de estado están “cantadas” y no hay margen para buscar otras.

Un símil muy apropiado para entender el concepto son las indicaciones del análisis clínico que ordena realizar el médico. El colesterol, triglicéridos, glucemia, uricemia y otros son variables de estado que indican cuál es el estado del organismo en un momento dado.

Si el análisis del bioquímico se vuelve a realizar un mes después, algunos valores habrán cambiado porque se tratará de un nuevo estado.

El juego de indicadores no es único y cada médico puede ordenar uno diferente, pero todos sirven para evaluar el estado del paciente.

Volviendo a los sistemas dinámicos, a medida que transcurre el tiempo, la cantidad de energía acumulada en cada elemento va variando y el punto que representa al estado se desplazará en el sistema de ejes coordenados describiendo un lugar geométrico que se denomina trayectoria de estados.

En un sistema sin fuentes ni generadores, un punto en el cual las derivadas de todas las variables de estado respecto del tiempo sean nulas simultáneamente, se denomina *punto de equilibrio*, en el cual no hay variación de los valores respecto del tiempo.

Un punto de equilibrio, denominado también punto crítico o singular, corresponde a una condición estacionaria del sistema y puede ser estable o inestable.

Cuando una perturbación produce un desplazamiento del vector de estado que lo aleja ligeramente del punto de equilibrio, pero se origina una reacción en el sistema que tiende a retornar a su posición, se trata de un punto crítico estable.

Inversamente, cuando una perturbación logra que el vector de estado se aleje cada vez más del punto de equilibrio sin retornar al mismo, se trata de una inestabilidad del sistema.

En un sistema lineal sin fuentes, el único punto de equilibrio es el origen del sistema de coordenadas. En los sistemas no lineales puede existir más de un punto de equilibrio.

Lo más importante para la descripción de un sistema por este método es la elección del juego de variables de estado, la conformación de las ecuaciones de estado y la forma de resolverlas para obtener las soluciones de estado.

El método tiene validez tanto para analizar sistemas no lineales complicados como para sistemas lineales simples.

La obtención de las ecuaciones de estado presenta las siguientes características ventajosas:

-Se pueden extraer conclusiones incluso antes de resolverlas, por la simple examinación de sus propiedades y morfología.

-El método es aplicable a sistemas de orden superior y a sistemas no lineales (SNL)

-Permite desarrollar métodos de resolución algorítmicos y por lo tanto recurrir a la implementación en software para la búsqueda de soluciones.

Obtención de las ecuaciones de estado

La forma usual de expresar las ecuaciones de estado es colocando en el primer miembro la derivada de una y sólo una de las variables de estado, mientras que en el segundo miembro se ubica toda la formulación que contiene al resto de las variables de estado y las fuentes y generadores. En este segundo miembro no debe aparecer ninguna derivada.

El Vector de Estado tiene como componentes a las (n) variables de estado y define unívocamente el estado del sistema.

De esta forma, la ecuación general de estado de un sistema de orden (n) quedará definida por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales que describen al sistema y será necesario trasladar a una forma vectorial-matricial por comodidad.

En forma muy simplificada, para n variables de estado podrían definirse de la siguiente forma:

$x_1=y$

$x_2=dy/dt$

$x_3=d^2y/dt^2$

….

$x_n=d^{n-1}y/dt^{n-1}$

En esta representación se observa que a partir de la segunda, cada nueva variable de estado es la derivada de la anterior:

$x_2=dx_1/dt$;

pero se prefiere la notación equivalente:

$\dot{x}_1=x_2$ y sucesivamente, donde el punto sobre la variable indica que está derivada.

$\dot{x}_2=x_3$

$\dot{x}_3=x_4$

……

$\dot{x}_{n-1}=x_n$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 \dots .0 \\ 0\ 0\ 1 \dots .0 \\ 0\ 0\ 0\ 1..0 \\ \dots \dots \dots . \\ a_n\ a_{n-1} \dots a_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Téngase presente que esto es sólo un ejemplo de una ecuación diferencial para un sistema de orden (n), con (n) variables de estado, que en forma extendida se expresaría como:

$u=d^ny/dt^n + a_{n-1}\, d^{n-1}y/dt^{n-1} + a_2\, d^{n-2}y/dt^{n-2} + \dots\, a_{n-1}\, dy/dt + a_n\, y$

donde $u=u(t)$ es la señal de entrada o referencia y, como ya se dijo, $x_1=y$;

Todas las variables de estado son funciones del tiempo, siendo $x_1=x_1(t)$ la primera variable de estado definida.

Esta misma ecuación diferencial de estado se puede expresar en notación compacta, mucho más habitual, como:

$\dot{x}(t)= A\, x(t) + B\, u(t)$;

ó simplemente

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax + Bu}$;

que es la forma más usual de presentarla, donde [A] y [B] son matrices de orden (nxn); y $\{\dot{x}\}$ y {x} son vectores columna de (n) filas o elementos, por lo tanto también se trata de magnitudes matriciales. Los significados y denominaciones en esta notación son los siguientes:

$\{\dot{x}\}$ es el vector de las derivadas, que contiene las derivadas de las (n) variables de estado del sistema.

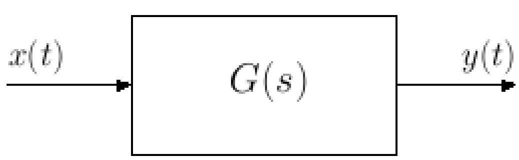
[A] es una matriz cuadrada de orden (nxn), llamada *Matriz de los Coeficientes*, que contiene constantes y parámetros propios del sistema.

{x} es el *Vector de Estado*, propiamente dicho, que contiene matricialmente a todas las variables de estado o parámetros dinámicos del sistema. Estrictamente {x}={x(t)}.

[B] se denomina *Matriz de Control* y reúne a todas las constantes que afectan a la señal de entrada.

u(t) es la señal de entrada o referencia. En este caso se trata de una magnitud escalar, pero en los sistemas de *Múltiple entrada Múltiple salida* pasa a ser una matriz de entrada.

Un sistema elemental, que responde al siguiente esquema simplificado de diagrama de bloques, presenta también una Ecuación de Estado de Salida, que se indica a continuación:



En este caso x(t) = u(t); siendo G(s) la *Función de Transferencia* del sistema.

y(t)= C x(t)

es la ecuación de estado de salida, donde [C] es la *Matriz de Salida*.

Cuando el sistema es retroalimentado, la ecuación de estado de salida puede adoptar una forma más completa que es:

y(t)= C x(t) + D u(t);

donde [D] es la *Matriz de Proalimentación* o alimentación directa, que no siempre está presente.