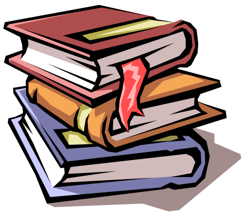
3.3: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

De la misma manera que estudiamos los modelos de distribuciones discretas de probabilidad, lo haremos para distribuciones continuas de probabilidad.

Para realizar el estudio de este capítulo realice el siguiente itinerario:

- ✓ Realice la **Actividad bibliográfica** teniendo en cuenta las *recomendaciones*.
- ✓ Luego continúe leyendo este documento, ya que hemos incorporado dos **distribuciones** más y algunas **propiedades** que serán de suma utilidad en los próximos temas. Además encontrará un apartado sobre el **uso de tablas** para cálculo de probabilidades en distribuciones continuas.
- ✓ A continuación encontrará **ejercicios integradores** (resueltos al final) y una **autoevaluación**, siguiendo el esquema de trabajo de capítulos anteriores.



Actividad bibliográfica

- Lea las páginas 155 a 181 del libro *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias* de Devore, donde se estudian modelos de distribuciones de probabilidad. Ellos son: Distribución **normal**, **gamma y sus relativos**, **exponencial**, **ji cuadrada**, **Weibull**, **lognormal** y **beta**.[1]

  Tenga en cuenta las siguientes recomendaciones al estudiar este material:
  - o En *todo este capítulo*, **no es necesario** que sepa de memoria la expresión de las funciones de densidad de probabilidad y las funciones de distribución acumulada de las distribuciones estudiadas.
  - o En cambio, en *todo este capítulo*, **sí es necesario**:
    - Reconocer y recordar los <u>parámetros</u> que caracterizan a la distribución, además de sus *condiciones*, por ejemplo, $\alpha > 0$.
    - Identificar cómo influyen los <u>parámetros</u> en la forma de las gráficas de las funciones de densidad de probabilidad respectivas.

[1] Además, para complementar esta lectura, puede ver estos mismos temas en las páginas 143 a 179 del libro *Probabilidad y Estadística para Ingenieros* de Walpole.

- Recordar el rango de la variable aleatoria en cada distribución analizada.
- Interpretar correctamente qué se lee en las abscisas, ordenadas y áreas bajo la curva de cada gráfica.

- Página 156: Es importante saber graficar y comparar curvas normales con diferentes valores para sus parámetros. ¡Preste atención a las gráficas de la figura 4.13!
- Página 157: Recuerde que se indicará con $\Phi(x)$ a la función de distribución acumulada de la distribución normal, es decir, el autor considera que $F(x) = \Phi(x)$.
- Página 157: Debajo del recuadro con la definición de distribución normal estándar, se da la explicación sobre el uso de la tabla normal provista en el libro. ¡Usted NO debe trabajar con estas tablas! Por esto es que se detendrá en nuestra sección sobre *Uso de tablas* y no leerá la explicación del libro.
  En resumen, después de la definición de distribución normal estándar, debe pasar al apartado *Notación* z_α.
- Página 163: Luego de leer el apartado dedicado al cálculo de percentiles, vea en *Uso de tablas* (en este documento) cómo se calculan los percentiles usando la tabla de la distribución normal estándar.
- Página 164: Por la traducción, el título no indica claramente a qué se refiere el tema, por esto preferimos llamarlo *Aproximación de la distribución binomial a la distribución normal.*
- Página 165: Usaremos una condición menos restrictiva para aproximar la distribución binomial a la normal. Sólo pediremos que: $\mathbf{n.p \geq 5}$ y $\mathbf{n.q \geq 5}$.
- Página 171: Al concluir el Ejemplo 4.21 se observan seis errores en la expresión: "La probabilidad de que un ratón sobreviva por lo menos 130 semanas es $P(X \leq 30) = 1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - F(30/15; 8) = .999$". La expresión correcta es: "La probabilidad de que un ratón sobreviva por lo menos 130 semanas es $P(X \geq \mathbf{1}30) = 1 - P(X < \mathbf{1}30) = 1 - P(X \leq \mathbf{1}30) = 1 - F(\mathbf{1}30/15; 8) = 0{,}999$".
- Página 176: Agregue unos paréntesis en la expresión de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria Weibull con parámetros α y β, para que quede $F(x; \alpha, \beta) = 1 - \exp[-((x/\beta)^\alpha)]$ para $x \geq 0$. Esta aclaración sirve para advertir que primero hay que calcular $\mathbf{(x/\beta)^\alpha}$, luego cambiarle el signo $\mathbf{-(x/\beta)^\alpha}$ y posteriormente elevar el número e al valor obtenido $\mathbf{\exp[-((x/\beta)^\alpha)]}$, para finalmente restar $\mathbf{1 - \exp[-((x/\beta)^\alpha)]}$.

El libro de Devore presenta las distribuciones t-Student y F de Fisher-Snedecor en otro capítulo, pero nosotros preferimos estudiarlas en este momento, por eso las explicamos a continuación:

Distribuciones continuas

Distribución t-Student

A veces debemos aplicar el cálculo de probabilidades en distribuciones normales pero desconocemos la desviación estándar poblacional. En los casos en que el ingeniero está bastante familiarizado con el sistema o proceso puede ser razonable suponer que la desviación estándar es conocida, pero en muchos escenarios experimentales conocer la desviación estándar poblacional es tan importante como conocer la media poblacional. A menudo, de hecho, una estimación de la desviación estándar poblacional, σ, debe ser proporcionada por la misma información muestral que produce el promedio muestral $\overline{x}$.

Como resultado, una estadística natural a considerar para tratar con inferencias sobre la media poblacional, μ, es

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

puesto que S es el análogo de la muestra para σ.

Si el tamaño de muestra es pequeño, los valores de S^2 fluctúan de forma considerable de una muestra a otra y la distribución T se desvía de manera apreciable de la de una distribución normal estándar.

Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, digamos $n \geq 30$, la distribución de T no difiere de manera considerable de la distribución normal estándar.

Para $n < 30$, es útil tratar con la distribución exacta de T. Para desarrollar la distribución muestral de T supondremos que nuestra muestra aleatoria se seleccionó de una población normal y que se verifica el siguiente teorema:

Teorema

Sea Z una variable aleatoria normal estándar y V una variable aleatoria ji-cuadrada con ν grados de libertad. Si Z y V son independientes, entonces la distribución de la variable aleatoria T, donde

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

tiene una distribución de probabilidad llamada t con ν grados de libertad.

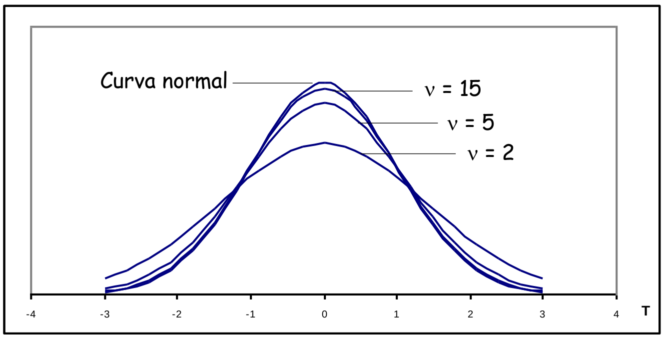
Corolario

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes que son todas normales con media μ y desviación estándar σ. Si $\overline{X}$ es la media de las n variables aleatorias, la variable aleatoria T, definida como:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

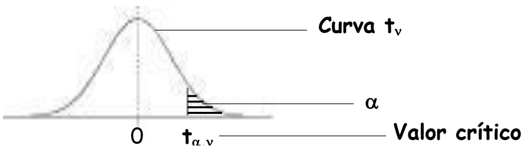
tiene una distribución de probabilidad llamada t con ν = n-1 grados de libertad.

Gráficas de la distribución t



Notación $t_{\alpha,\nu}$

Sea $t_{\alpha,\nu}$ el valor de la variable T para el cual el área bajo la curva t con ν grados de libertad a la derecha de $t_{\alpha,\nu}$ es α, donde $t_{\alpha,\nu}$ se llama **valor crítico t**.



Propiedades de la distribución t

- La distribución t está regida por un solo parámetro llamado **número de grados de libertad** de la distribución. Representamos este parámetro con la letra griega ν. Los posibles valores de ν son los números naturales 1, 2, 3, … . Así cada valor distinto de ν caracterizará a una distribución t diferente.
- Cada curva t_ν, tiene forma de campana.
- Es simétrica respecto al eje t = 0.
- Cada curva t_ν está más dispersa que la curva normal estándar.
- A medida que ν aumenta, la dispersión de la curva t_ν correspondiente disminuye.
- A medida que ν tiende a infinito, la secuencia de curvas t_ν se aproxima a la curva normal estándar.

Para pensar

1. Si T se comporta de manera tan parecida a Z…

a) ¿En qué difieren? ¿En qué se parecen?

b) ¿Por qué y cuándo usaremos la distribución t en vez de la distribución normal?

Distribución F de Fisher-Snedecor

La distribución t es útil para un análisis comparativo entre medias, pero nos podemos preguntar si también sirve para comparar varianzas. Por ejemplo, un ingeniero químico reúne datos de dos catalizadores, verifica que en promedio se comportan de manera similar pero observa que las medidas en uno de ellos se presentan mucho más dispersas que las del otro; lo mismo le puede suceder a un ingeniero civil que compara la resistencia de dos hormigones. Muchas veces, aunque es de sumo interés la comparación de las medias, es frecuente necesitar comparar la variabilidad de distintas muestras provenientes de poblaciones distintas.

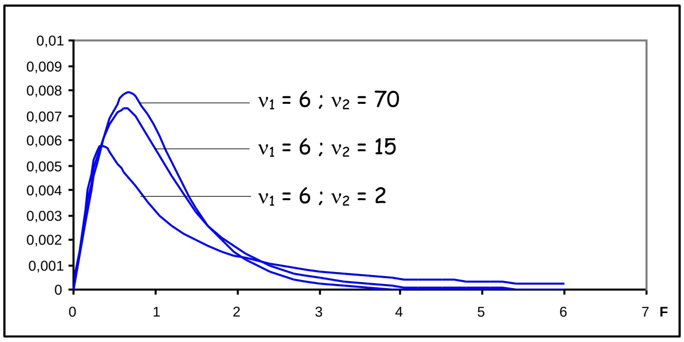
La distribución F sirve para describir el comportamiento de un estadístico que sirve para la comparación de las varianzas.

La estadística F definida como:

$$F = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$$

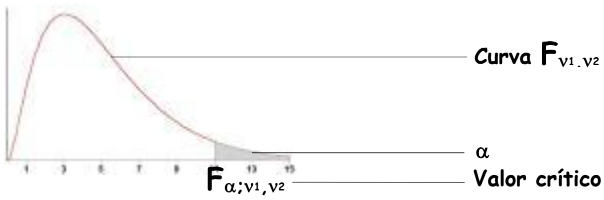
donde U y V son variables aleatorias independientes que tienen distribución ji-cuadrada con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, tiene una distribución de probabilidad F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

Gráficas de la distribución F



Notación $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$

Sea $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ el valor de la variable F para el cual el área bajo la curva F con ν_1 y ν_1 grados de libertad a la derecha de $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ es α, donde $\mathbf{F}_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ se llama **valor crítico F**.



Propiedades de la distribución F

- La distribución F depende de dos parámetros, ν_1 y ν_2, llamados grados de libertad del numerador y del denominador.
- Además es importante tener en cuenta el orden de los parámetros ν_1 y ν_2.
- La curva de densidad de la distribución F no es simétrica.
- Por no ser simétrica parecería que es necesario calcular los valores críticos para la cola superior y la cola inferior, pero esto no es necesario por la siguiente propiedad: $\mathbf{F_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2} = 1/F_{\alpha;\nu_2,\nu_1}}$.

Teorema

Si S_1^2 y S_2^2 son las varianzas de muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de poblaciones normales con varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, entonces

$$\mathbf{F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 . S_1^2}{\sigma_1^2 . S_2^2}}$$

tiene una distribución F con $\nu_1 = n_1 - 1$ y $\nu_2 = n_2 - 1$ grados de libertad.

Combinaciones lineales de variables aleatorias: algunas propiedades

Algunas combinaciones lineales de variables aleatorias tienen un interés especial para nosotros, ya que serán utilizadas en capítulos posteriores y las propiedades que ellas verifican, nos permitirán entender algunos métodos estadísticos a utilizar.

Teorema

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales con medias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, respectivamente, entonces la variable aleatoria

$$\mathbf{Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n}$$

tiene una distribución normal

con media $\mu_Y = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots + a_n \mu_n$

y varianza $\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + a_n^2 \sigma_n^2$

Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, diríamos que la suma de n variables aleatorias normales independientes, es otra variable aleatoria con distribución normal.

Tanto la distribución normal, la de Poisson como la ji-cuadrada poseen esta propiedad llamada **propiedad reproductiva**, donde la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (por alguna de las distribuciones mencionadas) es una nueva variable aleatoria que tiene esa misma distribución. Como lo indica el siguiente teorema:

Teorema

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias mutuamente independientes que tienen, respectivamente, distribuciones ji-cuadrada con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ grados de libertad, entonces la variable aleatoria

$$\mathbf{Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n}$$

tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$ grados de libertad.

Corolario

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales idénticas con media μ y varianza σ^2, entonces la variable aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

tiene una distribución ji-cuadrada con ν = n grados de libertad.

Este corolario es muy importante, ya que establece una relación entre la distribución ji-cuadrada y la distribución normal.

Vemos que $(X - \mu)/\sigma$ es la variable que hemos llamado Z, y sabemos que tiene una distribución normal estándar. Así, en el corolario tendríamos n variables aleatorias normales estándar independientes e idénticamente distribuidas, entonces la variable aleatoria $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ tiene una distribución ji-cuadrada con ν = n grados de libertad.

Uso de tablas

Las tablas provistas por la cátedra, serán indispensables para el cálculo de probabilidades de distribuciones continuas de probabilidad.

Tabla D.5: ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

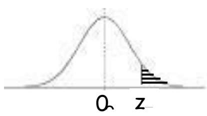
A continuación se presenta una parte de la tabla, más precisamente, una parte de la primera página.

Tabla D.5: ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

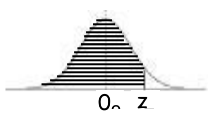
c.chica (z) | **c.grande (z)** | **área central** | **área (0 a z)**

z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)
0,00	0,50000	0,50000	0,00000	0,00000	**0,62**	0,26763	0,73237	0,46474	0,23237
0,01	0,49601	0,50399	0,00798	0,00399	**0,63**	0,26435	0,73565	0,47131	0,23565
0,02	0,49202	0,50798	0,01596	0,00798	**0,64**	0,26109	0,73891	0,47783	0,23891
0,03	0,48803	0,51197	0,02393	0,01197	**0,65**	0,25785	0,74215	0,48431	0,24215
0,04	0,48405	0,51595	0,03191	0,01595	**0,66**	0,25463	0,74537	0,49075	0,24537
0,05	0,48006	0,51994	0,03988	0,01994	**0,67**	0,25143	0,74857	0,49714	0,24857
0,06	0,47608	0,52392	0,04784	0,02392	**0,68**	0,24825	0,75175	0,50350	0,25175
0,07	0,47210	0,52790	0,05581	0,02790	**0,69**	0,24510	0,75490	0,50981	0,25490
0,08	0,46812	0,53188	0,06376	0,03188	**0,70**	0,24196	0,75804	0,51607	0,25804
0,09	0,46414	0,53586	0,07171	0,03586	**0,71**	0,23885	0,76115	0,52230	0,26115
0,10	0,46017	0,53983	0,07966	0,03983	**0,72**	0,23576	0,76424	0,52848	0,26424
0,11	0,45620	0,54380	0,08759	0,04380	**0,73**	0,23270	0,76730	0,53461	0,26730
0,12	0,45224	0,54776	0,09552	0,04776	**0,74**	0,22965	0,77035	0,54070	0,27035
0,13	0,44828	0,55172	0,10343	0,05172	**0,75**	0,22663	0,77337	0,54675	0,27337
0,14	0,44433	0,55567	0,11134	0,05567	**0,76**	0,22363	0,77637	0,55275	0,27637
0,15	0,44038	0,55962	0,11924	0,05962	**0,77**	0,22065	0,77935	0,55870	0,27935
0,16	0,43644	0,56356	0,12712	0,06356	**0,78**	0,21770	0,78230	0,56461	0,28230
0,17	0,43251	0,56749	0,13499	0,06749	**0,79**	0,21476	0,78524	0,57047	0,28524
0,18	0,42858	0,57142	0,14285	0,07142	**0,80**	0,21186	0,78814	0,57629	0,28814
0,19	0,42465	0,57535	0,15069	0,07535	**0,81**	0,20897	0,79103	0,58206	0,29103
0,20	0,42074	0,57926	0,15852	0,07926	**0,82**	0,20611	0,79389	0,58778	0,29389
0,21	0,41683	0,58317	0,16633	0,08317	**0,83**	0,20327	0,79673	0,59346	0,29673
0,22	0,41294	0,58706	0,17413	0,08706	**0,84**	0,20045	0,79955	0,59909	0,29955
0,23	0,40905	0,59095	0,18191	0,09095	**0,85**	0,19766	0,80234	0,60467	0,30234
0,24	0,40517	0,59483	0,18967	0,09483	**0,86**	0,19489	0,80511	0,61021	0,30511
0,25	0,40129	0,59871	0,19741	0,09871	**0,87**	0,19215	0,80785	0,61570	0,30785
0,26	0,39743	0,60257	0,20514	0,10257	**0,88**	0,18943	0,81057	0,62114	0,31057
0,27	0,39358	0,60642	0,21284	0,10642	**0,89**	0,18673	0,81327	0,62653	0,31327
0,28	0,38974	0,61026	0,22052	0,11026	**0,90**	0,18406	0,81594	0,63188	0,31594

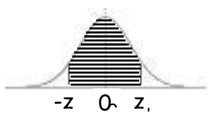
1. Comencemos analizando el título de la tabla...
   - La tabla tiene la letra D para indicar que corresponde a una **distribución de probabilidad** y el número 5 indica su lugar, o sea, ésta es la quinta tabla.
   - Se indica qué se encontrará en ella y a qué distribución corresponde: ***ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR***.
2. Analicemos sus partes...
   - En primer lugar observamos cuatro gráficas con distintas zonas sombreadas. Cada una de estas zonas son **áreas bajo la curva normal estándar**, como indica el título.



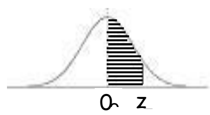
c.chica (z)



c.grande (z)



área central (z)



área (0 a z)

Distribuciones continuas

- Las áreas presentadas son:
  - La **cola chica de z** (c.chica (z)), que corresponde al área bajo la curva normal estándar desde un determinado valor de +z hasta +∞ o desde un valor –z hasta -∞.
    - ✓ Podemos ver que estas áreas asumirán valores inferiores o iguales a 0,5 (el área total bajo la curva vale 1, y por ser simétrica, desde 0 a +∞ el área vale 0,5, y desde 0 a -∞ vale 0,5), por esto se las llama "colas chicas".
  - La **cola grande de z** (c.grande (z)), que corresponde al área bajo la curva normal estándar desde un determinado valor de +z hasta -∞ o desde un valor –z hasta +∞.
    - ✓ Está claro que dichas áreas tomarán valores mayores o iguales a 0,5, por esto se las llama "colas grandes".
  - El **área central de z** (área central (z)), que corresponde al área desde –z hasta +z.
    - ✓ Esta área puede tomar valores menores, mayores o iguales a 0,5.
  - El **área de 0 a z** (área (0 a z)), que corresponde al área desde 0 hasta +z o desde 0 a –z.
    - ✓ Es la mitad del área central correspondiente a ese valor de z.
    - ✓ Esta área toma valores menores o iguales a 0,5.

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar el valor del área bajo la curva para un particular valor de z.
   - *Así, por ejemplo, si nos ubicamos en el renglón de* **z = 0,21**.

Tabla D.5: ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

c.chica (z) **c.grande (z)** **área central (z)** **área (0 a z)**

z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)
0,00	0,50000	0,50000	0,00000	0,00000	**0,62**	0,26763	0,73237	0,46474	0,23237
0,01	0,49601	0,50399	0,00798	0,00399	**0,63**	0,26435	0,73565	0,47131	0,23565
0,02	0,49202	0,50798	0,01596	0,00798	**0,64**	0,26109	0,73891	0,47783	0,23891

0,18	0,42858	0,57142	0,14285	0,07142	**0,80**	0,21186	0,78814	0,57629	0,28814
0,19	0,42465	0,57535	0,15069	0,07535	**0,81**	0,20897	0,79103	0,58206	0,29103
0,20	0,42074	0,57926	0,15852	0,07926	**0,82**	0,20611	0,79389	0,58778	0,29389
0,21	**0,41683**	**0,58317**	**0,16633**	**0,08317**	**0,83**	0,20327	0,79673	0,59346	0,29673
0,22	0,41294	0,58706	0,17413	0,08706	**0,84**	0,20045	0,79955	0,59909	0,29955
0,23	0,40905	0,59095	0,18191	0,09095	**0,85**	0,19766	0,80234	0,60467	0,30234
0,24	0,40517	0,59483	0,18967	0,09483	**0,86**	0,19489	0,80511	0,61021	0,30511
0,25	0,40129	0,59871	0,19741	0,09871	**0,87**	0,19215	0,80785	0,61570	0,30785
0,26	0,39743	0,60257	0,20514	0,10257	**0,88**	0,18943	0,81057	0,62114	0,31057
0,27	0,39358	0,60642	0,21284	0,10642	**0,89**	0,18673	0,81327	0,62653	0,31327
0,28	0,38974	0,61026	0,22052	0,11026	**0,90**	0,18406	0,81594	0,63188	0,31594

- Si nos ubicamos en el renglón de **z = 0,21**. Observamos los valores:
    - c.chica (z) = 0,41683
    - c.grande (z) = 0,58317
    - área central (z) = 0,16633
    - área (0 a z) = 0,08317
- ¿Qué indican cada uno de estos valores?
- Recordemos que al ser una curva simétrica respecto al eje z = 0, las áreas simétricas (a ambos lados del eje) tomarán el mismo valor.
    - c.chica (z = 0,21) = P (Z > 0,21) = P(Z < -0,21) = 0,41683
    - c.grande (z = 0,21) = P (Z < 0,21) = P(Z > -0,21) = 0,58317
    - área central (z = 0,21) = P (-0,21 < Z < 0,21) = 0,16633
    - área (0 a z = 0,21) = P (0 < Z < 0,21) = P(-0,21 < Z < 0) = 0,08317

4. Muchas veces necesitamos calcular áreas que no coinciden exactamente con algunas de las áreas dadas en la tabla, pero en base a ellas las podemos calcular, por ejemplo, si queremos calcular:

- **P(0,37 < Z < 0,82)**, se puede resolver de varias maneras, usando las distintas áreas dadas en la tabla:
    - P(0,37 < Z < 0,82) = c.chica (0,37) – c.chica (0,82) =
      = 0,35569 – 0,20611 = 0,14958
    - P(0,37 < Z < 0,82) = c.grande (0,82) – c.grande (0,37) =
      = 0,79389 – 0,64431 = 0,14958
    - P(0,37 < Z < 0,82) = área (0 a 0,82) – área (0 a 0,37) =
      = 0,29389 – 0,14431 = 0,14958
    - P(0,37 < Z < 0,82) = 0,5 - c.chica (0,82) – área (0 a 0,37) =
      = 0,5 - 0, 20611 – 0,14431 = 0,14958
    - P(0,37 < Z < 0,82) = 1 - c.chica (0,82) – c.grande (0,37) =
      = 1 - 0, 20611 – 0,64431 = 0,14958

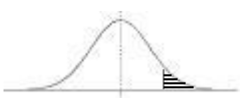
5. Otras veces es necesario calcular un percentil, o sea, un valor de la variable en estudio, no un valor de área, y ni siquiera un valor de z. Por ejemplo, si queremos calcular:

- el **percentil 76**, deberíamos buscar un valor de X. Específicamente, el valor de X que deja por debajo de él, el 76% de los valores de la variable aleatoria en estudio.
  - Para calcular este valor, en primer lugar debemos buscar en la columna de cola grande (porque es un valor superior a 0,5) el valor "más cercano" a 0,76. Este valor es: **0,76115**.
  - Luego vemos a qué valor de z corresponde. El valor z es: **0,71**.
  - Pero como el valor z es sólo una variable estandarizada, debemos llevarla a la variable X, que es la que tiene real sentido en los problemas. Así, $\mathbf{x = z.\sigma + \mu}$. En nuestro caso, para encontrar el valor de x correspondiente al percentil 76, deberíamos multiplicar por el valor de σ y luego le sumaríamos el valor de μ.
- el **percentil 29**, deberíamos buscar un valor de X. Específicamente, el valor de X que deja por debajo de él, el 29% de los valores de la variable aleatoria en estudio.
  - Para calcular este valor, en primer lugar debemos buscar en la columna de cola chica (porque es un valor inferior a 0,5) el valor "más cercano" a 0,29. Este valor es: **0,29116**.
  - Luego vemos a qué valor de z corresponde. El valor z es: **0,55**.
  - ¡Cuidado en estos casos! Porque el valor de z será el de **–0,55**, ya que el percentil 29 es un valor menor que la media, y en términos de z, la media es 0.
  - Pero como el valor z es sólo una variable estandarizada, debemos llevarla a la variable X, que es la que tiene real sentido en los problemas. Así, $\mathbf{x = z.\sigma + \mu}$. En nuestro caso, para encontrar el valor de x correspondiente al percentil 29, deberíamos multiplicar por el valor de σ y luego le sumaríamos el valor de μ.

Tabla D.6: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

A continuación se presenta una parte de la tabla.

Tabla D.6: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT



área a la derecha de t

g.d.l	0,0005	0,0025	0,005	0,015	0,02	0,3	0,4	0,45	g.d.l

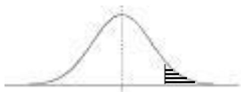
1	636,619	127,321	63,657	21,205	15,895	0,727	0,325	0,158	1
2	31,599	14,089	9,925	5,643	4,849	0,617	0,289	0,142	2
3	12,924	7,453	5,841	3,896	3,482	0,584	0,277	0,137	3
4	8,610	5,598	4,604	3,298	2,999	0,569	0,271	0,134	4
5	6,869	4,773	4,032	3,003	2,757	0,559	0,267	0,132	5
40	3,551	2,971	2,704	2,250	2,123	0,529	0,255	0,126	40
60	3,460	2,915	2,660	2,223	2,099	0,527	0,254	0,126	60
80	3,416	2,887	2,639	2,209	2,088	0,526	0,254	0,126	80
90	3,402	2,878	2,632	2,205	2,084	0,526	0,254	0,126	90
100	3,390	2,871	2,626	2,201	2,081	0,526	0,254	0,126	100
120	3,373	2,860	2,617	2,196	2,076	0,526	0,254	0,126	120
inf.	3,291	2,807	2,576	2,170	2,054	0,524	0,253	0,126	inf.

1. Comencemos analizando el título de la tabla...

- La tabla tiene la letra D para indicar que corresponde a una **distribución de probabilidad** y el número 6 indica su lugar, o sea, ésta es la sexta tabla.
- Se indica qué se encontrará en ella y a qué distribución corresponde: **VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT**.

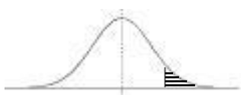
2. Analicemos sus partes...

- En primer lugar observamos una **gráfica** con una región sombreada.



- La región sombreada indica el área a la derecha del valor crítico, es decir, el valor crítico $t_{\alpha,\nu}$ es tal que: $\mathbf{P(T > t_{\alpha,\nu}) = \alpha}$.
- El *encabezado de las columnas* está dado por distintos valores de α, que llamamos **áreas a la derecha de t**.

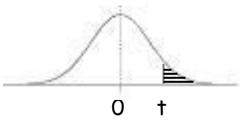
Tabla D.6: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT



g.d.l	área a la derecha de t: 0,0005	0,0025	0,005	0,015	0,02	0,3	0,4	0,45	g.d.l
1	636,619	127,321	63,657	21,205	15,895	0,727	0,325	0,158	1
2	31,599	14,089	9,925	5,643	4,849	0,617	0,289	0,142	2
3	12,924	7,453	5,841	3,896	3,482	0,584	0,277	0,137	3
4	8,610	5,598	4,604	3,298	2,999	0,569	0,271	0,134	4
5	6,869	4,773	4,032	3,003	2,757	0,559	0,267	0,132	5

- o Las *columnas matrices* son la primera y la última (que es la misma que la primera para facilitar la lectura de la tabla), en ellas vemos los **grados de libertad** de la distribución.

Tabla D.6: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

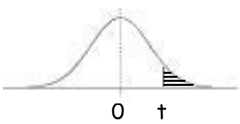


área a la derecha de t

g.d.l	0,0005	0,0025	0,005	0,015	0,02	0,3	0,4	0,45	g.d.l
1	636,619	127,321	63,657	21,205	15,895	0,727	0,325	0,158	1
2	31,599	14,089	9,925	5,643	4,849	0,617	0,289	0,142	2
3	12,924	7,453	5,841	3,896	3,482	0,584	0,277	0,137	3
4	8,610	5,598	4,604	3,298	2,999	0,569	0,271	0,134	4
5	6,869	4,773	4,032	3,003	2,757	0,559	0,267	0,132	5
40	3,551	2,971	2,704	2,250	2,123	0,529	0,255	0,126	40
60	3,460	2,915	2,660	2,223	2,099	0,527	0,254	0,126	60
80	3,416	2,887	2,639	2,209	2,088	0,526	0,254	0,126	80
90	3,402	2,878	2,632	2,205	2,084	0,526	0,254	0,126	90
100	3,390	2,871	2,626	2,201	2,081	0,526	0,254	0,126	100
120	3,373	2,860	2,617	2,196	2,076	0,526	0,254	0,126	120
inf.	3,291	2,807	2,576	2,170	2,054	0,524	0,253	0,126	inf.

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar el valor crítico para un determinado valor del área a la derecha de t y un determinado valor de grados de libertad.
   - Por ejemplo, si queremos saber cuál es el valor crítico que deja por encima de él un área de 0,02, en una distribución t-Student con 4 grados de libertad.
     - o Buscamos por las columnas el valor **0,02**, para el área a la derecha de t.
     - o Buscamos en las filas el valor **4**, para los grados de libertad.
     - o En la intersección se encuentra el **valor crítico** correspondiente.

Tabla D.6: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT



área a la derecha de t

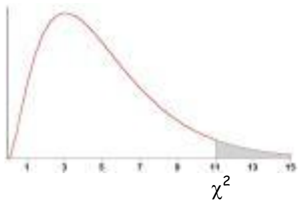
g.d.l	0,0005	0,0025	0,005	0,015	0,02	0,3	0,4	0,45	g.d.l
1	636,619	127,321	63,657	21,205	15,895	0,727	0,325	0,158	1
2	31,599	14,089	9,925	5,643	4,849	0,617	0,289	0,142	2
3	12,924	7,453	5,841	3,896	3,482	0,584	0,277	0,137	3
4	8,610	5,598	4,604	3,298	2,999	0,569	0,271	0,134	4
5	6,869	4,773	4,032	3,003	2,757	0,559	0,267	0,132	5

- Entonces el **valor crítico $t_{\alpha,\nu}$** para una distribución t-Student con 4 grados de libertad, que deja a la derecha de él un área de 0,02 es **2,999**, es decir, el valor $t_{\alpha=0,02;\ \nu=4}$ **= 2,999**, de manera tal que: **$P(T > t_{\alpha=0,02;\ \nu=4}) = 0,02$**.

Tabla D.7: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA

A continuación se presenta una parte de la tabla.

Tabla D.7: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA

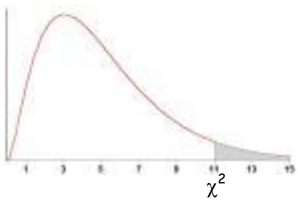


área a la derecha del valor crítico

g.d.l	0,001	0,005	0,01	0,05	0,10	0,30	0,35	0,40	g.d.l
1	10,828	7,879	6,635	3,841	2,706	1,074	0,873	0,708	1
2	13,816	10,597	9,210	5,991	4,605	2,408	2,100	1,833	2
3	16,266	12,838	11,345	7,815	6,251	3,665	3,283	2,946	3
4	18,467	14,860	13,277	9,488	7,779	4,878	4,438	4,045	4
5	20,515	16,750	15,086	11,070	9,236	6,064	5,573	5,132	5
6	22,458	18,548	16,812	12,592	10,645	7,231	6,695	6,211	6
7	24,322	20,278	18,475	14,067	12,017	8,383	7,806	7,283	7
8	26,124	21,955	20,090	15,507	13,362	9,524	8,909	8,351	8

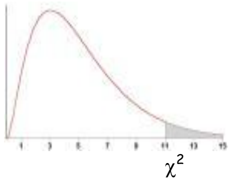
1. Comencemos analizando el título de la tabla...
   - La tabla tiene la letra D para indicar que corresponde a una **distribución de probabilidad** y el número 7 indica su lugar, o sea, ésta es la séptima tabla.
   - Se indica qué se encontrará en ella y a qué distribución corresponde: **VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA**.

2. Analicemos sus partes...
   - En primer lugar observamos una **gráfica** con una región sombreada.



   - La región sombreada indica el área a la derecha del valor crítico, es decir, el valor crítico $\chi^2_{\alpha,\nu}$ es tal que: **$P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\nu}) = \alpha$**.
   - El *encabezado de las columnas* está dado por distintos valores de α, que llamamos **áreas a la derecha del valor crítico**.

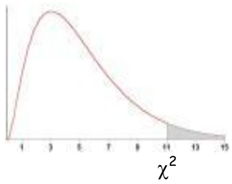
Tabla D.7: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA



	área a la derecha del valor crítico								
g.d.l	0,001	0,005	0,01	0,05	0,10	0,30	0,35	0,40	g.d.l
1	10,828	7,879	6,635	3,841	2,706	1,074	0,873	0,708	1
2	13,816	10,597	9,210	5,991	4,605	2,408	2,100	1,833	2
3	16,266	12,838	11,345	7,815	6,251	3,665	3,283	2,946	3
4	18,467	14,860	13,277	9,488	7,779	4,878	4,438	4,045	4
5	20,515	16,750	15,086	11,070	9,236	6,064	5,573	5,132	5
6	22,458	18,548	16,812	12,592	10,645	7,231	6,695	6,211	6
7	24,322	20,278	18,475	14,067	12,017	8,383	7,806	7,283	7
8	26,124	21,955	20,090	15,507	13,362	9,524	8,909	8,351	8

- o Las *columnas matrices* son la primera y la última (que es la misma que la primera para facilitar la lectura de la tabla), en ellas vemos los **grados de libertad** de la distribución.

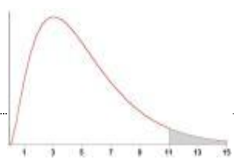
Tabla D.7: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA



	área a la derecha del valor crítico								
g.d.l	0,001	0,005	0,01	0,05	0,10	0,30	0,35	0,40	g.d.l
1	10,828	7,879	6,635	3,841	2,706	1,074	0,873	0,708	1
2	13,816	10,597	9,210	5,991	4,605	2,408	2,100	1,833	2
3	16,266	12,838	11,345	7,815	6,251	3,665	3,283	2,946	3
4	18,467	14,860	13,277	9,488	7,779	4,878	4,438	4,045	4
5	20,515	16,750	15,086	11,070	9,236	6,064	5,573	5,132	5
6	22,458	18,548	16,812	12,592	10,645	7,231	6,695	6,211	6
7	24,322	20,278	18,475	14,067	12,017	8,383	7,806	7,283	7
8	26,124	21,955	20,090	15,507	13,362	9,524	8,909	8,351	8

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar el valor crítico para un determinado valor del área a la derecha del valor crítico y un determinado valor de grados de libertad.
   - Por ejemplo, si queremos saber cuál es el valor crítico que deja por encima de él un área de 0,01, en una distribución ji-cuadrada con 7 grados de libertad.
     - o Buscamos por las columnas el valor **0,01**, para el área a la derecha del valor crítico.
     - o Buscamos en las filas el valor **7**, para los grados de libertad.
     - o En la intersección se encuentra el **valor crítico** correspondiente.

Tabla D.7: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA



Distribuciones continuas

χ^2

área a la derecha del valor crítico

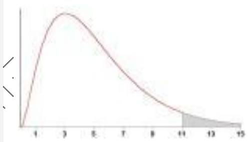
g.d.l	0,001	0,005	0,01	0,05	0,10	0,30	0,35	0,40	g.d.l
1	10,828	7,879	6,635	3,841	2,706	1,074	0,873	0,708	1
2	13,816	10,597	9,210	5,991	4,605	2,408	2,100	1,833	2
3	16,266	12,838	11,345	7,815	6,251	3,665	3,283	2,946	3
4	18,467	14,860	13,277	9,488	7,779	4,878	4,438	4,045	4
5	20,515	16,750	15,086	11,070	9,236	6,064	5,573	5,132	5
6	22,458	18,548	16,812	12,592	10,645	7,231	6,695	6,211	6
7	24,322	20,278	**18,475**	14,067	12,017	8,383	7,806	7,283	7
8	26,124	21,955	20,090	15,507	13,362	9,524	8,909	8,351	8

o Entonces el **valor crítico** $\chi^2_{\alpha,\nu}$ para una distribución ji-cuadrada con 7 grados de libertad, que deja a la derecha de él un área de 0,01 es **18,475**, es decir, el valor $\chi^2_{\alpha=0{,}01;\ \nu=7}$ **= 18,475**, de manera tal que: **P(χ^2 > $\chi^2_{\alpha=0{,}01;\ \nu=7}$) = 0,01**.

Tabla D.8: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F (0,01)

A continuación se presenta una parte de la tabla.

Tabla D.8: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F (0,01)



f 0.01

Grados de libertad del Numerador

Grados de libertad del Denominador

g.d.l.	1	2	7	8	9	10	14	15	g.d.l
1	4.052,2	4.999,5	5.928,4	5.981,1	6.022,5	6.055,8	6.142,7	6.157,3	1
2	98,503	99,000	99,356	99,374	99,388	99,399	99,428	99,433	2
11	9,646	7,206	4,886	4,744	4,632	4,539	4,293	4,251	11
12	9,330	6,927	4,640	4,499	4,388	4,296	4,052	4,010	12
13	9,074	6,701	4,441	4,302	4,191	4,100	3,857	3,815	13
14	8,862	6,515	4,278	4,140	4,030	3,939	3,698	3,656	14
15	8,683	6,359	4,142	4,004	3,895	3,805	3,564	3,522	15
16	8,531	6,226	4,026	3,890	3,780	3,691	3,451	3,409	16
17	8,400	6,112	3,927	3,791	3,682	3,593	3,353	3,312	17
18	8,285	6,013	3,841	3,705	3,597	3,508	3,269	3,227	18
19	8,185	5,926	3,765	3,631	3,523	3,434	3,195	3,153	19
20	8,096	5,849	3,699	3,564	3,457	3,368	3,130	3,088	20
21	8,017	5,780	3,640	3,506	3,398	3,310	3,072	3,030	21
22	7,945	5,719	3,587	3,453	3,346	3,258	3,019	2,978	22
23	7,881	5,664	3,539	3,406	3,299	3,211	2,973	2,931	23
120	6,851	4,787	2,792	2,663	2,559	2,472	2,234	2,192	120
inf.	6,635	4,605	2,639	2,511	2,407	2,321	2,082	2,039	inf.

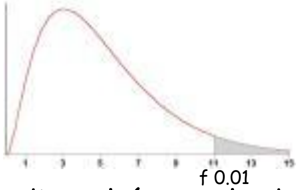
1. Comencemos analizando el título de la tabla...
   - La tabla tiene la letra D para indicar que corresponde a una **distribución de probabilidad** y el número 8 indica su lugar, o sea, ésta es la octava tabla.

Distribuciones continuas

- Se indica qué se encontrará en ella y a qué distribución corresponde: **VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F (0,01)**.

2. Analicemos sus partes...

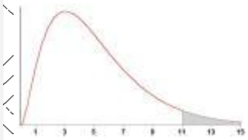
- En primer lugar observamos una **gráfica** con una región sombreada.



f 0.01

- La región sombreada indica el área a la derecha del valor crítico, es decir, el valor crítico $f_{\alpha;v_1,v_2}$ es tal que: $\mathbf{P(F > f_{\alpha;v_1,v_2}) = \alpha}$.
- El *encabezado de las columnas* está dado por distintos valores de **grados de libertad del numerador**.

Tabla D.8: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F (0,01)

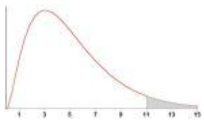


f 0.01

			Grados de libertad del Numerador						
g.d.l	**1**	**2**	**7**	**8**	**9**	**10**	**14**	**15**	**g.d.l**
1	4.052,2	4.999,5	5.928,4	5.981,1	6.022,5	6.055,8	6.142,7	6.157,3	1
2	98,503	99,000	99,356	99,374	99,388	99,399	99,428	99,433	2
120	6,851	4,787	2,792	2,663	2,559	2,472	2,234	2,192	120
inf.	6,635	4,605	2,639	2,511	2,407	2,321	2,082	2,039	Inf.

- o Las *columnas matrices* son la primera y la última (que es la misma que la primera para facilitar la lectura de la tabla), en ellas vemos los **grados de libertad del denominador**.

Tabla D.8: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F (0,01)

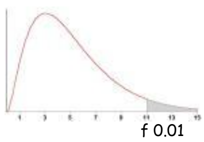


				Grados de libertad del Numerador						
	g.d.l	1	2	7	8	9	10	14	15	**g.d.l**
	1	4.052,2	4.999,5	5.928,4	5.981,1	6.022,5	6.055,8	6.142,7	6.157,3	**1**
	2	98,503	99,000	99,356	99,374	99,388	99,399	99,428	99,433	**2**
Grados de li-	**11**	9,646	7,206	4,886	4,744	4,632	4,539	4,293	4,251	**11**
	12	9,330	6,927	4,640	4,499	4,388	4,296	4,052	4,010	**12**
	13	9,074	6,701	4,441	4,302	4,191	4,100	3,857	3,815	**13**
	14	8,862	6,515	4,278	4,140	4,030	3,939	3,698	3,656	**14**
	15	8,683	6,359	4,142	4,004	3,895	3,805	3,564	3,522	**15**
	16	8,531	6,226	4,026	3,890	3,780	3,691	3,451	3,409	**16**

17	8,400	6,112	3,927	3,791	3,682	3,593	3,353	3,312	**17**
18	8,285	6,013	3,841	3,705	3,597	3,508	3,269	3,227	**18**
19	8,185	5,926	3,765	3,631	3,523	3,434	3,195	3,153	**19**
20	8,096	5,849	3,699	3,564	3,457	3,368	3,130	3,088	**20**
21	8,017	5,780	3,640	3,506	3,398	3,310	3,072	3,030	**21**
22	7,945	5,719	3,587	3,453	3,346	3,258	3,019	2,978	**22**
23	7,881	5,664	3,539	3,406	3,299	3,211	2,973	2,931	**23**
120	6,851	4,787	2,792	2,663	2,559	2,472	2,234	2,192	**120**
inf.	6,635	4,605	2,639	2,511	2,407	2,321	2,082	2,039	**inf.**

3. Ahora que estamos ubicados en la tabla podemos buscar el valor crítico para un área de 0,01 a la derecha de éste y dos determinados grados de libertad.
   - Por ejemplo, si queremos saber cuál es el valor crítico que deja por encima de él un área de 0,01 (esta tabla nos da valores críticos sólo para un área a la derecha de ellos de 0,01), en una distribución F con 8 y 15 grados de libertad para numerador y denominador, respectivamente.
     - Buscamos por las columnas el número de grados de libertad del numerador: **8**.
     - Buscamos en las filas el número de grados de libertad del denominador: **15**.
     - En la intersección se encuentra el **valor crítico** correspondiente.

Tabla D.8: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F (0,01)



Grados de libertad del Numerador

Grados de libertad

g.d.l	1	2	7	**8**	9	10	14	15	g.d.l
1	4.052,2	4.999,5	5.928,4	5.981,1	6.022,5	6.055,8	6.142,7	6.157,3	1
2	98,503	99,000	99,356	99,374	99,388	99,399	99,428	99,433	2
11	9,646	7,206	4,886	4,744	4,632	4,539	4,293	4,251	11
12	9,330	6,927	4,640	4,499	4,388	4,296	4,052	4,010	12
13	9,074	6,701	4,441	4,302	4,191	4,100	3,857	3,815	13
14	8,862	6,515	4,278	4,140	4,030	3,939	3,698	3,656	14
15	8,683	6,359	4,142	**4,004**	3,895	3,805	3,564	3,522	15
16	8,531	6,226	4,026	3,890	3,780	3,691	3,451	3,409	16
17	8,400	6,112	3,927	3,791	3,682	3,593	3,353	3,312	17

18	8,285	6,013	3,841	3,705	3,597	3,508	3,269	3,227	18
19	8,185	5,926	3,765	3,631	3,523	3,434	3,195	3,153	19
20	8,096	5,849	3,699	3,564	3,457	3,368	3,130	3,088	20
21	8,017	5,780	3,640	3,506	3,398	3,310	3,072	3,030	21
22	7,945	5,719	3,587	3,453	3,346	3,258	3,019	2,978	22
23	7,881	5,664	3,539	3,406	3,299	3,211	2,973	2,931	23
120	6,851	4,787	2,792	2,663	2,559	2,472	2,234	2,192	120
inf.	6,635	4,605	2,639	2,511	2,407	2,321	2,082	2,039	inf.

- Entonces el **valor crítico** $f_{\alpha;v_1,\ v_2}$ para una distribución F con 8 grados de libertad para el numerador y 15 grados de libertad para el denominador, que deja a la derecha de él un área de 0,01 es **4,004**, es decir, el valor $f_{\alpha=0,01;v_1=8,v_2=15}$ = **4,004**, de manera tal que: $P(F > f_{\alpha;v_1,\ v_2}) = 0,01$.

Tabla D.9: VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F (0,05)

Esta tabla presenta las mismas características de la tabla D.8, pero para un área a la derecha del valor crítico de 0,05.

Ejercicios integradores

Le proponemos que resuelva solo algunos ejercicios. Los desarrollos los encontrará al final del capítulo. Pero antes de resolverlos...

Recuerde que...

- En el caso de distribuciones continuas, no tiene sentido calcular la probabilidad asociada a un valor particular de la variable, ya que éste es igual a cero. Siempre se trabaja con la probabilidad asociada a intervalos de valores de la variable aleatoria analizada.
- Como la probabilidad de un valor particular es cero, son válidas cualesquiera de las siguientes expresiones:
  $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$
- Usar la aproximación de binomial a normal en aquellos casos en que las condiciones del problema lo permitan.

- En la aproximación de binomial a normal, hay que realizar la corrección por continuidad, para obtener resultados más aproximados.
- Como regla práctica, la aproximación de binomial a normal es buena cuando tanto n.p como n.q son mayores o iguales que 5.
    - Si p es cercano a 0,5, la aproximación es buena para cualquier valor de n; en caso contrario, n debe ser suficientemente grande, o cumplir con las condiciones indicadas para n.p y n.q.
- Es indispensable que conozca las características de cada distribución, es decir, sus parámetros y condiciones, además de conocer el rango de la variable aleatoria estudiada.

Ejercicios integradores

1. Un ordenador genera un número aleatorio real en el intervalo (0 , 1) . Dé la función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada de la variable X: "número que se generó". Halle la probabilidad de que al generar un número, éste se encuentre entre 0,5 y 0,7.

2. La cantidad de café, en litros, que despacha una expendedora automática instalada en la sala de espera de un aeropuerto internacional es una variable aleatoria que tiene una distribución uniforme en el intervalo (7, 10).

a) Encuentre la probabilidad de que en un determinado día la cantidad de café despachado por esta máquina sea:

b) a lo sumo 8,81 litros.

c) por lo menos 8,51 litros.

d) más de 7,41 litros pero menos de 9,51 litros.

3. Si X se encuentra distribuida normalmente con media 12 y desviación estándar 2, calcule la probabilidad de que:

a) $X > 14$

b) $X > 11$

c) $X < 10$

d) $X < 15$

e) $10 < X < 13$

f) $9 < X < 11$

g) $13 < X < 15$

h) $11 < X < 13$

i) Percentil 23

j) Percentil 67

k) Entre qué valores se encuentra el 50% de la población alrededor de la media.

4. Sea X ~ N (20 , 4).

i) Calcule:

b) P (X > 22)

c) P (X > 18,5)

d) P (X < 19)

e) P (X < 22,6)

f) P (19 < X < 23)

g) P (17 < X < 19,5)

h) Percentil 82

i) Percentil 16

j) Entre qué valores se encuentra el 80% de la población alrededor de la media.

5. Suponiendo que el promedio obtenido en el examen de ingreso a una facultad es de 7,5 con un desvío de 1,3 y que las notas de los estudiantes se distribuyen normalmente, ¿cuál es la nota mínima aprobatoria si sólo pueden entrar el 70% de los alumnos que rindieron?

6. La vida media de un motor eléctrico es de 6 años con una desviación estándar de 2 años. Si la vida de un motor tal puede tratarse como una variable normal y si el motor está garantizado, ¿durante cuánto tiempo debiera ser válida la garantía para que no más del 15% de los motores fallen antes de la expiración de ésta?

7. Una persona viaja diariamente en automóvil de su casa a la oficina y ha encontrado que el tiempo empleado en el viaje corresponde a una distribución normal con μ = 35,5 minutos y σ = 3,11 minutos. Si sale de su casa todos los días a las 8:20 y debe estar en su oficina a las 9:00, ¿cuántos días al año espera llegar tarde? Supónganse 240 viajes anuales.

8. Si la probabilidad de que un tirador acierte a un blanco es de 1/3 y si dispara 12 tiros, ¿cuál es la probabilidad de que acierte a lo sumo en 5 de ellos? Resuelva por distribución binomial y por aproximación a la normal. Compare los resultados obtenidos.

9. Supóngase que el 5% de los individuos vacunados contra la gripe presentan serias reacciones. Calcule la probabilidad de que entre 6 y 16 personas sobre un total de 200 individuos vacunados presente dichas reacciones.

10. Si el 20% de los conductores de automóviles en cierta ciudad tienen por lo menos un accidente durante un año de manejo, ¿cuál es la probabilidad de que el porcentaje para 200 clientes de una compañía de seguros en esa ciudad iguale o exceda al 25% durante el año próximo?

11. El tiempo de trabajo sin falla de un elemento está distribuido por la ley exponencial f(t)=0,01 . exp(-0,01.t) donde t es el tiempo en horas. Halle la probabilidad de que el elemento trabaje sin fallas por lo menos 100 horas.

12. El tiempo, en minutos, que se tarda en atender a un individuo en un banco es una variable aleatoria exponencial con un valor medio de 4. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida en menos de tres minutos, en al menos 4 de los 5 días hábiles de la semana? ¿Qué supuestos realiza?

13. Supóngase que el intervalo de tiempo necesario para efectuar una comprobación periódica de mantenimiento, de acuerdo a la experiencia, en un dictáfono, sigue una distribución gamma con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$ (minutos).

a) Calcule la probabilidad de que se efectúe la comprobación en menos de 5 minutos.

b) El gerente técnico contrata una empresa externa para realizar el mantenimiento y se observa que demoran 20 minutos para revisar un dictáfono. ¿Conviene que el trabajo lo realice esta empresa?

14. Los ingresos anuales de los ingenieros de determinada industria siguen aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 600$ y $\beta = 50$.

a) Calcule el promedio y la varianza de tales ingresos.

b) ¿Cree usted que hay muchos ingenieros de esta industria cuyos ingresos anuales sean mayores que $ 35.000?

15. Un distribuidor mayorista de combustible tiene tanques de almacenamiento con un aprovisionamiento fijo. Los tanques se llenan cada lunes. Para el mayorista es interesante la proporción de este volumen que se vende durante la semana. Durante muchas semanas se ha observado que esa proporción se modela muy bien con una distribución beta estándar con $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.

a) ¿Será muy probable que el mayorista venda por lo menos el 90% de su capacidad en una semana determinada?

b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la proporción de combustible vendido.

16. Los errores de medición del tiempo de llegada de un frente de onda que parte de una fuente acústica se pueden modelar mediante una distribución beta estándar con $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, con mediciones en microsegundos.

a) Calcule la probabilidad de que esos errores de medición sean menores que 0,5 microsegundos.

b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de estas mediciones de error.

17. La vida de servicio durante la que un determinado tipo de máquina funciona dentro de sus especificaciones sigue una distribución de Weibull con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 7$ (mediciones en miles de horas).

a) Calcule la probabilidad de que una de estas máquinas, que se ha de instalar en un sistema, trabaje en forma correcta durante más de 10.000 horas.

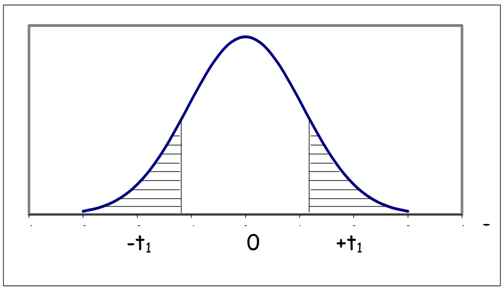
b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la vida de servicio de estas máquinas.

18. El tiempo de fatiga, en cientos de horas, de determinado tipo de rodamientos tiene una distribución de Weibull con parámetros $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.

a) Calcule la probabilidad de que un rodamiento de este tipo tenga avería en menos de 200 horas.

b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la vida de fatiga de esos rodamientos.

19. La representación gráfica de t para 9 grados de libertad es la siguiente:



Halle el valor de t_1 para el cual:

a) el área sombreada a la derecha es 0,05.

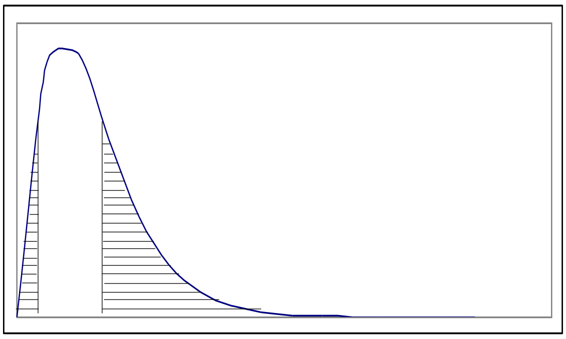
b) el área total sombreada es 0,05.

c) el área total sin sombrear es de 0,99.

d) el área sombreada a la izquierda es de 0,01.

e) el área a la izquierda de t_1 es 0,90.

20. La figura muestra el gráfico de la distribución χ^2 con 5 grados de libertad.



a) Halle los valores de χ^2 para los que:

b) el área sombreada a la derecha es 0,05.

c) el área total sombreada es 0,05.

d) el área derecha sombreada es de 0,01.

e) el área sombreada a la izquierda es de 0,01.

21. La figura muestra el gráfico de la distribución χ^2 con 2 grados de libertad.

Halle los valores de χ^2 para los que:

a) el área sombreada a la derecha es 0,025.

b) el área total sombreada es 0,1.

c) el área derecha sombreada es de 0,01.

d) el área sombreada a la izquierda es de 0,01.

22. Halle los valores críticos de χ^2 para los cuales el área en la cola derecha de la distribución sea 0,05 si el número de grados de libertad es:

a) 15

b) 21

c) 60

23. Halle los valores críticos de χ^2 para los cuales el área en la cola izquierda de la distribución sea 0,01 si el número de grados de libertad es:

a) 1

b) 8

c) 24

d) 60

e) 80

f) 100

24. Calcule, usando la tabla:

a) $F_{0.05\,,\,7\,,\,30}$

b) $F_{0.01\,,\,12\,,\,20}$

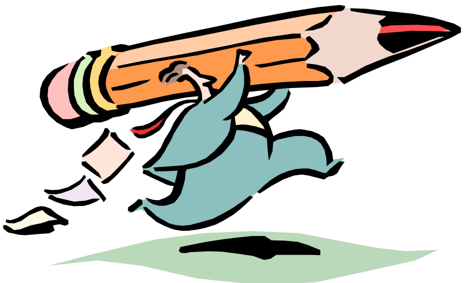
c) $F_{0.05\,,\,100,\,5}$

d) $F_{0.01\,,\,250,\,325}$

¡A repasar...!

Para autoevaluarse, responda las preguntas que están a continuación. Puede hacerlo con el material de estudio, pero asegurándose que "entiende" cada palabra, a tal punto que usted podría explicarle a un amigo, que no conoce el tema, de manera simple, los conceptos estudiados:

- ☑ **¿Qué características en común tienen las distribuciones de probabilidad estudiadas en este capítulo?**
- ☑ **¿Cuáles fueron las distribuciones estudiadas?**
- ☑ **¿Existe relación de alguna de ellas con distribuciones discretas de probabilidad?**
- ☑ **¿Cuáles son los parámetros en cada distribución?**
- ☑ **¿Cómo es la representación gráfica de cada una de las distribuciones?**
- ☑ **¿Cómo se comportan según la variación de sus parámetros?**
- ☑ **¿Qué dice la propiedad de reproductividad?**



Por favor, no avance al siguiente tema si tiene dudas o no recuerda las nociones aquí volcadas. Pero si se siente listo para continuar, es hora de empezar a trabajar con las **autoevaluaciones** y las **aplicaciones prácticas**...

Para pensar

1. Si T se comporta de manera tan parecida a Z...

a) ¿En qué difieren? ¿En qué se parecen?

La distribución T es similar a la distribución Z, pues ambas son simétricas alrededor de una media de cero. Ambas distribuciones tiene forma de campana, pero la distribución t es más variable, debido a que los va-

lores de T dependen de las fluctuaciones de dos cantidades $\overline{X}$ y S^2, mientras que los valores Z dependen sólo de los cambios de $\overline{X}$ de una muestra a otra.

La distribución de T difiere de la de Z en que la varianza de T depende del tamaño de muestra n y siempre es mayor que 1. Sólo cuando el tamaño de muestra tiende a infinito las dos distribuciones serán la misma.

b) ¿Por qué y cuándo usaremos la distribución t en vez de la distribución normal?

La distribución t se usa en problemas que tiene que ver con inferencia acerca de la media poblacional o en problemas que implica la comparación de muestras.

Recordemos que la distribución normal está regida por dos parámetros, la media μ y la desviación estándar σ. Pero la desviación estándar poblacional muchas veces es desconocida y el uso de la desviación estándar muestral, S, como una buena aproximación de la desviación estándar poblacional, σ, no es válido cuando las muestras son de tamaño pequeño.

Resumiendo, la distribución t se usa en los casos que deseamos realizar estimaciones sobre la media poblacional y se cumplen las siguientes condiciones:

1) *Tenemos una muestra aleatoria formada por n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, normalmente distribuidas.*
2) *El tamaño de muestra es menor que 30 ($n < 30$).*
3) *La desviación estándar poblacional es desconocida.*

Ejercicios integradores resueltos

1. Un ordenador genera un número aleatorio real en el intervalo (0, 1). Dé la función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada de la variable X: "número que se generó". Halle la probabilidad de que al generar un número, éste se encuentre entre 0,5 y 0,7.

La probabilidad de generar aleatoriamente un número en un intervalo real, sigue una ***distribución uniforme****, cuya función de densidad de probabilidad es:*

$f(x) = 1/(b-a)$ si x pertenece al intervalo (a, b)
$f(x) = 0$ si x no pertenece al intervalo (a, b)

En nuestro caso, el intervalo (a, b) = (0, 1), entonces:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Así, la función de distribución acumulada será:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{-\infty}^{x} dt = \int_{0}^{x} dt = (t\,|_0^x = x$$ *para los valores de x pertenecientes al intervalo.*

Quedando definida completamente por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in (0,1) \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Luego, de manera sencilla, podemos ver que la probabilidad deseada es:
$P(0{,}5 < X < 0{,}7) = F(0{,}7) - F(0{,}5) = 0{,}7 - 0{,}5 = \mathbf{0{,}2}$
La probabilidad de que al generar un número, éste se encuentre entre 0,5 y 0,7, es de 0,2.

2. La cantidad de café, en litros, que despacha una expendedora automática instalada en la sala de espera de un aeropuerto internacional es una variable aleatoria que tiene una distribución uniforme en el intervalo (7, 10).
Encuentre la probabilidad de que en un determinado día la cantidad de café despachado por esta máquina sea:
La función de distribución acumulada será:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{x} dt = \frac{1}{b-a}.(t\,|_a^x = \frac{1}{b-a}.(x-a) = \frac{x-a}{b-a}$$

para los valores de x pertenecientes al intervalo

Quedando definida completamente por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 7 \\ \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{x-7}{10-7} = \dfrac{x-7}{3} & \text{si } x \in (7,10) \\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

a) a lo sumo 8,81 litros.

$$P(X \leq 8{,}81) = F(8{,}81) = \frac{8{,}81-7}{3} = \mathbf{0{,}60333...}$$

La probabilidad de que la cantidad de café despachado por la máquina sea a lo sumo 8,81 litros, en un determinado día, es de 0,6033.

b) por lo menos 8,51 litros.

$$P(X \geq 8{,}51) = 1 - P(X < 8{,}51) = 1 - F(8{,}51) = \frac{8{,}51-7}{3} = \mathbf{0{,}50333...}$$

($P(X < 8{,}51) = F(8{,}51)$ porque $P(X = 8{,}51) = 0$)
La probabilidad de que la cantidad de café despachado por la máquina sea por lo menos de 8,51 litros, en un determinado día, es de 0,5033.

c) más de 7,41 litros pero menos de 9,51 litros.

$$\mathbf{P(7{,}41 < X < 9{,}51)} = F(9{,}51) - F(7{,}41) = \frac{9{,}51 - 7}{3} - \frac{7{,}41 - 7}{3} = \mathbf{0{,}7}$$

La probabilidad de que la cantidad de café despachado por la máquina sea más de 7,41 litros pero menos de 9,51 litros, en un determinado día, es de 0,7.

3. Si X se encuentra distribuida normalmente con media 12 y desviación estándar 2, calcule la probabilidad de que:

a) $X > 14$

$\mathbf{P(X > 14)} = P(Z > 1) =$ (c.chica (1)) $\mathbf{0{,}15866} \rightarrow \mathbf{15{,}87\%}$

La probabilidad de que la variable X tome valores mayores a 14 es de 0,15866.

b) $X > 11$

$\mathbf{P(X > 11)} = P(Z > -0{,}5) = \mathbf{0{,}69146} \rightarrow \mathbf{69{,}15\%}$
(c.grande(0,5))
La probabilidad de que la variable X tome valores mayores a 11 es de 0,69146.

c) $X < 10$

$\mathbf{P(X < 10)} = P(Z < -1) = \mathbf{0{,}15866} \rightarrow \mathbf{15{,}87\%}$
(c.chica(1))
La probabilidad de que la variable X tome valores menores a 10 es de 0,15866.

d) $X < 15$

$\mathbf{P(X < 15)} = P(Z < 1{,}5) = \mathbf{0{,}93319} \rightarrow \mathbf{93{,}32\%}$
(c.grande(1,5))
La probabilidad de que la variable X tome valores menores a 15 es de 0,93319.

e) $10 < X < 13$

$\mathbf{P(10 < X < 13)} = P(-1 < Z < 0{,}5) = \mathbf{0{,}5328} \rightarrow \mathbf{53{,}28\%}$
(área(0 a 1) + área(0 a 0,5)) o (c.grande(0,5) - c.chica(1)) o (c.grande(1) - c.chica(0,5)) o (1 – c.chica(0,5) – c.chica(1))
La probabilidad de que la variable X tome valores entre 10 y 13 es de 0,5328.

f) $9 < X < 11$

$\mathbf{P(9 < X < 11)} = P(-1{,}5 < Z < -0{,}5) = \mathbf{0{,}24173} \rightarrow \mathbf{24{,}17\%}$
(área(0 a 1,5) - área(0 a 0,5)) o (c.grande (1,5) - c.grande(0,5)) o (c.chica(0,5) - c.chica(1,5)) o (1 – c.chica(1,5) – c.grande(0,5)) o (0,5 – área(0 a 0,5) – c.chica(1,5))

La probabilidad de que la variable X tome valores entre 9 y 11 es de 0,2417.

g) $13 < X < 15$

P (13 < X < 15) $= P(0{,}5 < Z < 1{,}5) =$ ***0,24173*** $\rightarrow$ ***24,17%***

(área(0 a 1,5) - área(0 a 0,5)) o (c.grande (1,5) - c.grande(0,5)) o (c.chica(0,5) - c.chica(1,5)) o (1 – c.chica(1,5) – c.grande(0,5)) o (0,5 – área(0 a 0,5) – c.chica(1,5))

La probabilidad de que la variable X tome valores entre 13 y 15 es de 0,2417.

h) $11 < X < 13$

P (11 < X < 13) $= P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) =$ ***0,19146*** $\rightarrow$ ***19,15%***

(área central (0,5)) o (área(0 a 0,5).2) o (1 – c.chica(0,5) – c.chica(0,5))

La probabilidad de que la variable X tome valores entre 11 y 13 es de 0,1915.

i) Percentil 23

$z_{P23} = -0{,}74 \Rightarrow P_{23} = x_{P23} = z_{P23}.\sigma + \mu = -0{,}74 \,.\, 2 + 12 = \mathbf{10{,}52}$ ***unidades***

El 23% de los valores de la variable X son iguales o menores a 10,52 unidades y el 77% restante son iguales o mayores a 10,52 unidades.

j) Percentil 67

$z_{P67} = +0{,}44 \Rightarrow P_{67} = x_{P67} = z_{P67}.\sigma + \mu = +0{,}44 \,.\, 2 + 12 = \mathbf{12{,}88}$ ***unidades***

El 67% de los valores de la variable X son iguales o menores a 12,88 unidades y el 33% restante son iguales o mayores a 12,88 unidades.

k) Entre qué valores se encuentra el 50% de la población alrededor de la media.

$z_{a.c.(50\%)} = \pm 0{,}67 \Rightarrow z_1 = z_{a.c.(50\%)}.\sigma + \mu = -0{,}67 \,.\, 2 + 12 = \mathbf{10{,}66}$ ***unidades***

$\Rightarrow z_2 = z_{a.c.(50\%)}.\sigma + \mu = +0{,}67 \,.\, 2 + 12 = \mathbf{13{,}34}$ ***unidades***

El 50% de los valores de la variable X alrededor de la media, se encuentra entre 10,66 y 13,34 unidades.

4. Sea $X \sim N(20\ ,\ 4)$. Calcular:

a) $P(X > 22)$

P (X > 22) $= P(Z > 1) =$ ***0,15866*** $\rightarrow$ ***15,87%***

La probabilidad de que la variable X tome valores mayores a 22 es de 0,15866.

b) $P(X > 18{,}5)$

P (X > 18,5) $= P(Z > -0{,}75) =$ ***0,77337*** $\rightarrow$ ***77,34 %***

La probabilidad de que la variable X tome valores mayores a 18,5 es de 0,7734.

c) $P(X < 19)$

P (X < 19) $= P(Z < -0{,}5) =$ ***0,30854*** $\rightarrow$ ***30,85%***

La probabilidad de que la variable X tome valores menores a 19 es de 0,30854.

d) P (X < 22,6)

P (X < 22,6) = *P (Z < 1,3) =* ***0,90320*** → ***90,32%***

La probabilidad de que la variable X tome valores menores a 22,6 es de 0,9032.

e) P (19 < X < 23)

P (19 < X < 23) = *P (- 0,5 < Z < 1,5) =* ***0,62465*** → ***62,47%***

La probabilidad de que la variable X tome valores entre 19 y 23 es de 0,62465.

f) P (17 < X < 19,5)

P (17 < X < 19,5) = *P (- 1,5 < Z < - 0,25) =* ***0,33448*** → ***33,45%***

La probabilidad de que la variable X tome valores entre 17 y 19,5 es de 0,33448.

g) Percentil 82

$z_{P82} = +0{,}92 \Rightarrow \mathbf{P_{82}} = x_{P82} = z_{P82}.\sigma + \mu = +0{,}92 \,.\, 2 + 20 =$ ***21,84 unidades***

El 82% de los valores de la variable X son iguales o menores a 21,84 unidades y el 18% restante son iguales o mayores a 21,84 unidades.

h) Percentil 16

$z_{P16} = -0{,}99 \Rightarrow \mathbf{P_{16}} = x_{P16} = z_{P16}.\sigma + \mu = -0{,}99 \,.\, 2 + 20 =$ ***18,02 unidades***

El 16% de los valores de la variable X son iguales o menores a 18,02 unidades y el 84% restante son iguales o mayores a 18,02 unidades.

i) Entre qué valores se encuentra el 80% de la población alrededor de la media.

$z_{a.c.(80\%)} = \pm 1{,}28 \Rightarrow \mathbf{z_1} = z_{a.c.(80\%)} \,.\, \sigma + \mu = -1{,}28 \,.\, 2 + 20 =$ ***17,44 unidades***

$\Rightarrow \mathbf{z_2} = z_{a.c.(80\%)} \,.\, \sigma + \mu = +1{,}28 \,.\, 2 + 20 =$ ***22,56 unidades***

El 80% de los valores de la variable X alrededor de la media, se encuentra entre 17,44 y 22,56 unidades.

5. Suponiendo que el promedio obtenido en el examen de ingreso a una facultad es de 7,5 con un desvío de 1,3 y que las notas de los estudiantes se distribuyen normalmente, ¿cuál es la nota mínima aprobatoria si sólo pueden entrar el 70% de los alumnos que rindieron?

X: "Nota obtenida por los alumnos en el examen de ingreso"

X ~ Normal (μ = 7,5 ; σ = 1,3)

La mínima nota para aprobar será aquella que deje por encima de ella al 70% de los alumnos, por lo que esta nota corresponde al valor del percentil 30.

$z_{P30} = -0{,}52 \Rightarrow \mathbf{P_{30}} = x_{P30} = z_{P30} \,.\, \sigma + \mu = -0{,}52 \,.\, 1{,}3 + 7{,}5 =$ ***6,824***

La nota mínima para aprobar el examen es 6,824.

6. La vida media de un motor eléctrico es de 6 años con una desviación estándar de 2 años. Si la vida de un motor tal puede tratarse como una variable normal y si el motor está garantizado, ¿durante cuánto tiempo debiera ser válida la ga-

Distribuciones continuas

rantía para que no más del 15% de los motores fallen antes de la expiración de la ésta?

X: "Tiempo de vida de un motor eléctrico"

$X \sim$ Normal ($\mu = 6$; $\sigma = 2$)

La garantía debería ser válida durante los primeros meses o años de vida del motor, por lo que la garantía estaría representada por el valor del percentil 15, que deja por debajo de él al 15% de los motores que menos duraron.

$z_{P15} = -1{,}04 \Rightarrow \mathbf{P_{15}} = x_{P15} = z_{P15} \,.\, \sigma + \mu = -1{,}04 \,.\, 2 + 6 = \mathbf{3{,}92}$ **años**

La garantía no debe exceder los 3,92 años para que no más del 15% de los motores fallen antes de que expire la garantía.

7. Una persona viaja diariamente en automóvil de su casa a la oficina y ha encontrado que el tiempo empleado en el viaje corresponde a una distribución normal $\mu = 35{,}5$ minutos y $\sigma = 3{,}11$ minutos. Si sale de su casa todos los días a las 8:20 y debe estar en su oficina a las 9:00, ¿cuántos días al año espera llegar tarde? Supónganse 240 viajes anuales.

X: "Cantidad de días que llegará tarde a su trabajo en 240 viajes anuales"

$X \sim$ Binomial ($n = 240$; p)

¿Cuántos días al año <u>espera</u> llegar tarde si realiza 240 viajes anuales?

La respuesta se daría al calcular el valor de la esperanza matemática:

$E(X) = n.p$, pero no conocemos el valor de p...

El valor de p es el de la probabilidad de que llegue tarde.

Llegará tarde cuando demore más de 40 minutos.

Si T es el tiempo empleado en llegar al trabajo y se distribuye normalmente con $\mu = 35{,}5$ minutos y $\sigma = 3{,}11$ minutos, entonces, la probabilidad de que llegue tarde es $P(T > 40) = P(Z > 1{,}45) = 0{,}07353$.

Entonces

X: "Cantidad de días que llegará tarde a su trabajo en 240 viajes anuales"

$X \sim$ Binomial ($n = 240$; $p = 0{,}07353$)

y el valor de la esperanza será:

$\mu = E(X) = n \,.\, p = 240 \,.\, 0{,}07353 = \mathbf{17{,}6472}$ **días**

Espera llegar tarde entre 17 y 18 días al año. (¡Mejor que se levante más temprano!)

8. Si la probabilidad de que un tirador acierte a un blanco es de 1/3 y si dispara 12 tiros, ¿cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos en 6 de ellos? Resuelva por distribución binomial y por aproximación a la normal. Compare los resultados obtenidos.

X : "Cantidad de aciertos"

$X \sim$ Binomial ($n = 12$; $p = 1/3$)

$\mathbf{P(X \geq 6)} = 1 - F(5) = 1 - 0{,}8223 = \mathbf{0{,}1777} \quad \rightarrow \quad \mathbf{17{,}77\%}$

<u>Nota</u>: Se indica con F(5) a la suma de las probabilidades puntuales para los valores de X de 0 a 5, es decir, $F(5) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$, donde $f(x) = C_{n,x} \,.\, p^{x}.q^{n-x}$. Por ejemplo, $f(3) = C_{12,3} \,.\, (1/3)^{3} . (2/3)^{12-3} = 0{,}211952$

No es el caso ideal para aproximar de binomial a normal porque n.p = 4 < 5, aunque n.q = 8 > 5, pero si aún así realizamos la aproximación como pide el problema, sabemos que:

$$Z = \frac{X \pm 0{,}5 - n.p}{\sqrt{n.p.q}} \rightarrow N(0,1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

$\mu = n \,.\, p = 12 \,.\, 1/3 = 4$

$\sigma^2 = n \,.\, p \,.\, q = 12 \,.\, 1/3 \,.2/3 = 8/3 \Rightarrow \sigma = 1{,}633$

Entonces

$X \sim \text{Binomial}\,(n = 12 \,;\, p = 1/3) \rightarrow N(\mu = 4 \,;\, \sigma = 1{,}633)$

$$\mathbf{P(X \geq 6)} = P\left(Z \geq \frac{5{,}5 - 4}{\sqrt{8/3}}\right) = P(Z \geq 0{,}92) = \mathbf{0{,}17879} \rightarrow \mathbf{17{,}88\%}$$

La probabilidad de que la cantidad de aciertos sea mayor o igual que seis es de 0,1777, según el cálculo binomial y es de 0,1788, calculándolo por aproximación a la curva normal.

9. Supóngase que el 5% de los individuos vacunados contra la gripe presentan serias reacciones. Empleando la aproximación normal calcule la probabilidad de que más del 8% de 200 individuos vacunados presente dichas reacciones.

X : "Cantidad de individuos vacunados que presentan serias reacciones"

$X \sim \text{Binomial}\,(n = 200 \,;\, p = 0{,}05) \rightarrow \text{Poisson}\ (\lambda = n \,.\, p = 200 \,.\, 0{,}05 = 10)$

(Más del 8% de 200 individuos vacunados equivalen a más de 16 individuos vacunados que presentan serias reacciones)

Lo podemos resolver aproximando la distribución binomial a la de Poisson

$P(X \geq 16) = P(X = 16) + P(X = 17) + \ \ldots\ + P(X = 200) =$

$= 1 - P(X < 16) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 15))$

Pero ..., sabemos que $Z = \dfrac{X \pm 0{,}5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow N(0,1)$ *cuando* $n \rightarrow \infty$

entonces ... $\mathbf{P(X \geq 16)} = P\left(Z \geq \dfrac{15{,}5 - 10}{\sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 1{,}74) = \mathbf{0{,}04093} \rightarrow \mathbf{4{,}09\%}$

La probabilidad de que más del 8% de 200 individuos vacunados presenten serias reacciones es del 4,09%.

10. Si el 20% de los conductores de automóviles en cierta ciudad tienen por lo menos un accidente durante un año de manejo, ¿cuál es la probabilidad de que el porcentaje para 200 clientes de una compañía de seguros en esa ciudad iguale o exceda al 25% durante el año próximo?

X: "Cantidad de conductores que tienen por lo menos un accidente en un año de manejo"

$X \sim \text{Binomial}\,(n = 200 \,;\, p = 0{,}20)$

(Que iguale o exceda el 25% de 200 clientes asegurados equivale a que 50 o más de 50 clientes tengan por lo menos un accidente)

$P(X \geq 50) = P(X = 50) + P(X = 51) + \ \ldots\ + P(X = 200) =$

$= 1 - P(X < 50) = 1 - P(X \leq 49) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = 49))$

Pero ..., sabemos que $Z = \dfrac{X \pm 0{,}5 - n.p}{\sqrt{n.p.q}} \rightarrow N(0,1)$ *cuando* $n \rightarrow \infty$

$\mu = n \,.\, p = 200 \,.\, 0{,}20 = 40$

$\sigma^2 = n \,.\, p \,.\, q = 200 \,.\, 0{,}20 \,.\, 0{,}80 = 32 \Rightarrow \sigma = 5{,}657$

entonces ... $\mathbf{P(X \geq 50)} = P(Z \geq \dfrac{49{,}5 - 40}{\sqrt{32}}) = P(Z \geq 1{,}68) = \mathbf{0{,}04648} \rightarrow \mathbf{4{,}65\%}$

La probabilidad de que la cantidad de clientes que tengan por lo menos un accidente en el próximo año, iguale o exceda el 25% de los 200 clientes asegurados es del 4,65%.

11. El tiempo de trabajo sin falla de un elemento está distribuido por la ley exponencial f(t)=0,01 . exp(-0,01.t) donde t es el tiempo en horas. Halle la probabilidad de que el elemento trabaje sin fallas por lo menos 100 horas.

X : "Tiempo de trabajo sin falla de un elemento"

$X \sim$ *Exponenciall* $(\lambda = 0{,}01)$

$$\mathbf{P(T \geq 100)} = \int_{100}^{\infty} 0{,}01 \,.\, \exp(-0{,}01.t)\, dt = 0{,}01 \,.\int_{100}^{\infty} \exp(-0{,}01.t)\, dt =$$

$$= (0{,}01/(-0{,}01)) \,.\, \left(e^{-0{,}01t}\right|_{100}^{\infty} = -1 \,.\, \left(\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{1}}\right) = e^{-1} = \mathbf{0{,}3679} \rightarrow \mathbf{36{,}79\%}$$

Usando la función de distribución acumulada, sabemos que:

$P(T \geq t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - \exp(-0{,}01.t)) = \exp(-0{,}01.t)$

$\mathbf{P(T \geq 100)} = 1 - F(100) = \exp(-0{,}01 \,.\, 100) = \exp(-1) = \mathbf{0{,}3679} \rightarrow \mathbf{36{,}79\%}$

La probabilidad de que el elemento trabaje sin fallas por lo menos 100 horas es de 0,3679.

12. El tiempo, en minutos, que se tarda en atender a un individuo en un banco es una variable aleatoria exponencial con un valor medio de 4. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida en menos de tres minutos, en al menos 4 de los 5 días hábiles de la semana? ¿Qué supuestos realiza?

T : "Tiempo que se tarda en atender a un cliente en un banco"

$\mu = 1/\lambda = 4$ minutos $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

$T \sim$ *Exponencial* $(\lambda = \frac{1}{4})$

La función de distribución acumulada para la variable exponencial es:

$F(t) = 1 - e^{-\lambda.t}$

$P(T < 3 \text{ min}) = F(3) = 1 - e^{(-1/4).3} = 0{,}5276 \rightarrow 52{,}76\%$

Si se supone que el trabajo de cada uno de los días es independiente, el problema se reduce a calcular la probabilidad de encontrar 4 o más "éxitos" en un total de 5, es decir, aparece una variable aleatoria binomial X.

Distribuciones continuas

X: "Cantidad de días en la que las personas son atendidas en menos de tres minutos", donde n = 5 y p = 0,5276, que es la probabilidad de éxito.

$$\mathbf{P(X \geq 4\ días)} = f(4) + f(5) = \binom{5}{4} 0{,}5276^4\ 0{,}4724^{5-4} + \binom{5}{5} 0{,}5276^5\ 0{,}4724^{5-5} =$$

$$= 0{,}1830 + 0{,}041 = \mathbf{0{,}2240} \rightarrow \mathbf{22{,}40\%}$$

La probabilidad de que una persona sea atendida en menos de tres minutos, en al menos 4 de los 5 días hábiles de la semana es de 0,2240.

13. Supóngase que el intervalo de tiempo necesario para efectuar una comprobación periódica de mantenimiento, de acuerdo a la experiencia, en un dictáfono, sigue una distribución gamma con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$ (minutos).

X : "Tiempo necesario para efectuar una comprobación de mantenimiento"

$X \sim$ *Gamma* $(\alpha = 3 , \beta = 2)$

a) Calcule la probabilidad de que se efectúe la comprobación en menos de 5 minutos.

$\mathbf{P(T < 5\ min)} = F(5) = (\text{por EXCEL})\ \mathbf{0{,}4562} \rightarrow \mathbf{45{,}62\%}$

$$\mathbf{P(T < 5\ min)} = \int_0^5 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}\, dx = \int_0^5 \frac{1}{2^3\,\Gamma(3)} \cdot x^{3-1} \cdot e^{-x/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{8.2!} \cdot \int_0^5 x^2 \cdot e^{-x/2}\, dx =$$

Integrando por partes, haciendo:

$u = x^2 \Rightarrow du = 2.x.dx$

$dv = e^{-x/2}\, dx \Rightarrow v = e^{-x/2} / (-1/2) = -2.\ e^{-x/2}$

y aplicando $u.v - \int v.du$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left\{ x^2 \cdot (-2).e^{-x/2} \Big|_0^5 - \int_0^5 -2.e^{-x/2}.2.x.dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left\{ x^2 \cdot (-2).e^{-x/2} \Big|_0^5 + 4 \cdot \int_0^5 e^{-x/2}.x.dx \right\} =$$

Integrando nuevamente por partes, haciendo:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-x/2}\, dx \Rightarrow v = e^{-x/2} / (-1/2) = -2.\ e^{-x/2}$

y aplicando nuevamente $u.v - \int v.du$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left\{ -50/e^{5/2} - 0/e^0 + 4. \left[x.(-2).e^{-x/2} \Big|_0^5 - \int_0^5 -2.e^{-x/2}.dx \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left\{ -50/e^{5/2} - 0 + 4 \cdot \left[-10/e^{5/2} - 0/e^0 + 2.(-2) \left(e^{-x/2} \Big|_0^5 \right. \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left\{ -50/e^{5/2} - 0 + 4 \cdot \left[-10/e^{5/2} - 0 - 4.\ (1/e^{5/2} - 1/e^0) \right] \right\} =$$

$$= \mathbf{0{,}456186884} \rightarrow \mathbf{45{,}62\%}$$

Distribuciones continuas

La probabilidad de que se efectúe la comprobación en menos de 5 minutos es de 0,4562.

b) El gerente técnico contrata una empresa externa para realizar el mantenimiento y se observa que demoran 20 minutos para revisar un dictáfono. ¿Conviene que el trabajo lo realice esta empresa?

La media y la varianza del tiempo de mantenimiento (de acuerdo a la experiencia) son:

$\mu = \alpha.\beta = 3 \,.\, 2$ minutos $= 6$ minutos

$\sigma^2 = \alpha.\beta^2 = 3 \,.\, 4$ minutos$^2 = 12$ minutos$^2 \Rightarrow \sigma = 3{,}46$ minutos

La desviación observada $(X - \mu) = 20$ min – 6 min $= 14$ minutos

El diferencial de probabilidad :

$P(X = 20) = f(20) =$ (por EXCEL) $0{,}001134998$

y $P(X \geq 14) =$ (por EXCEL) $0{,}029636164$

Nótese que esta probabilidad se basa en la hipótesis de que la distribución de los tiempos de mantenimiento no han variado de la experiencia anterior, entonces, al observar que P(X = 20) es pequeña, se concluye que, o bien la empresa externa ha generado un tiempo grande de mantenimiento que se presenta con pocas probabilidades, o bien, es más lento que sus predecesores. Al notar la baja probabilidad de P(X ≥ 14), uno se inclinaría por mantener al propio personal y no contratar a la empresa externa.

14. Los ingresos anuales de los ingenieros de determinada industria siguen aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 600$ y $\beta = 50$.

X : "Ingresos anuales de los ingenieros de determinada industria"

$X \sim$ *Gamma* $(\alpha = 600$ y $\beta = 50)$

a) Calcule el promedio y la varianza de tales ingresos.

$\mu = \alpha.\beta = 600 \,.\, 50 =$ **$30.000**

$\sigma^2 = \alpha.\beta^2 = 600 \,.\, 2500 =$ **1.500.000** $\Rightarrow \sigma =$ **$1224,74**

Los ingresos medios son de $30.000 con una desviación estándar de $1224,74.

b) ¿Cree usted que hay muchos ingenieros de esta industria cuyos ingresos anuales sean mayores que $ 35.000?

$P(X \geq 35000)$ = (por EXCEL) **0,0000503522**

Luego, podemos decir que ***no*** *hay muchos ingenieros de esta industria cuyos ingresos anuales sean mayores a $35.000.*

15. Un distribuidor mayorista de combustible tiene tanques de almacenamiento con un aprovisionamiento fijo. Los tanques se llenan cada lunes. Para el mayorista es interesante la proporción de este volumen que se vende durante la semana. Durante muchas semanas se ha observado que esa proporción se modela muy bien con una distribución beta estándar con $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.

X : "Proporción de combustible que se vende por semana"

$X \sim$ *Beta estándar* $(\alpha = 4$ y $\beta = 2)$

a) ¿Será muy probable que el mayorista venda por lo menos el 90% de su capacidad en una semana determinada?

P(X ≥ 0,9) = *(por EXCEL)* ***0,08146***

$$P(X \geq 0{,}9) = \int_{0,9}^{1} \frac{\Gamma(4+2)}{\Gamma(4)\Gamma(2)} \cdot x^{4-1} \cdot (1-x)^{2-1}\, dx = \int_{0,9}^{1} \frac{5!}{3!\,1!} \cdot x^3 \cdot (1-x)\, dx =$$

$$= 20 \cdot \int_{0,9}^{1} (x^3 - x^4)\, dx = 20 \cdot \left[\left(\frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_{0,9}^{1} - \left(\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_{0,9}^{1} \right] =$$

$$= 20 \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot (1^4 - 0{,}9^4) - \frac{1}{5} \cdot (1^5 - 0{,}9^5) \right] = \mathbf{0{,}08146}$$

*Luego, podemos decir que **no** es muy probable que se venda el 90% del suministro en una semana determinada.*

b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la proporción de combustible vendido.

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3} = \mathbf{0{,}67}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} = \frac{4 \cdot 2}{(4+2+1)(4+2)^2} = 0{,}031746 \Rightarrow \sigma = \mathbf{0{,}1782}$$

La proporción media de combustible vendido es de 0,67, con una desviación estándar de 0,1782.

16. Los errores de medición del tiempo de llegada de un frente de onda que parte de una fuente acústica se pueden modelar mediante una distribución beta estándar con α = 1 y β = 2, con mediciones en microsegundos.

X : "Errores de medición del tiempo de llegada de un frente de onda"

X ~ Beta estándar $(\alpha = 1 \ \text{y} \ \beta = 2)$

a) Calcule la probabilidad de que esos errores de medición sean menores que 0,5 microsegundos.

P(X < 0,5) = *(por EXCEL)* ***0,75***

$$P(X < 0{,}5) = \int_{0}^{0,5} \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1)\Gamma(2)} \cdot x^{1-1} \cdot (1-x)^{2-1}\, dx = \int_{0}^{0,5} \frac{2!}{0!\,1!} \cdot x^0 \cdot (1-x)\, dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{0,5} (1-x)\, dx = 2 \cdot \left[\left(\frac{x^1}{1} \right)\Bigg|_{0}^{0,5} - \left(\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{0}^{0,5} \right] = 2 \cdot \left[(0{,}5 - 0) - \frac{1}{2} \cdot (0{,}5^2 - 0^2) \right]$$

$$= \mathbf{0{,}75}$$

La probabilidad de que los valores sean menores que 0,5 microsegundos es de ***0,75****.*

b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de estas mediciones de error.

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = \mathbf{0{,}33\ldots microsegundos}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} = \frac{1 \cdot 2}{(1+2+1)(1+2)^2} = 0{,}055\ldots \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ σ = **0,2357 microsegundos**

Las mediciones de error tienen una media de 0,33 microsegundos con una desviación estándar de 0,2357 microsegundos.

17. La vida de servicio durante la que un determinado tipo de máquina funciona dentro de sus especificaciones sigue una distribución de Weibull con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 7$ (mediciones en miles de horas).

X : "Tiempo de vida (en miles de horas) de un determinado tipo de máquina"

$X \sim$ *Weibull* $(\alpha = 2 \text{ y } \beta = 7)$

a) Calcule la probabilidad de que una de estas máquinas, que se ha de instalar en un sistema, trabaje en forma correcta durante más de 10.000 horas.

La expresión de la función de distribución acumulada es:

$F(x) = 1 - \exp[-((x/\beta)^{\alpha})]$

$\mathbf{P(X > 10)} = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - \exp(-((x/\beta)^{\alpha})) =$

$= \exp(-((x/7)^2)) = \exp(-((10/7)^2)) = \mathbf{0{,}1299}$

La probabilidad de que una de estas máquinas, que se ha de instalar en un sistema, trabaje en forma correcta durante más de 10.000 horas, es de ***0,1299****.*

b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la vida de servicio de estas máquinas.

$\mu = \beta \,.\, \Gamma(1 + \alpha^{-1}) = 7.\, \Gamma(1 + 2^{-1}) = 7 \,.\, \Gamma(1 + \frac{1}{2}) = 7 \,.\, \Gamma(3/2) = 7.\, \frac{1}{2} \,.\, \Gamma(\frac{1}{2}) =$

$= 7.\, \frac{1}{2} \,.\sqrt{\pi} =$ **6,2036 miles de horas**

$\sigma^2 = \beta^2 .\, \{ \Gamma(1 + 2\alpha^{-1}) - [\Gamma(1 + \alpha^{-1})]^2 \} = 7^2 .\, \{ \Gamma(1 + 2.2^{-1}) - [\Gamma(1 + 2^{-1})]^2 \} =$

$= 49.\, \{ \Gamma(2) - [\Gamma(1 + \frac{1}{2})]^2 \} = 49.\, \{ \Gamma(2) - [\Gamma(3/2)]^2 \} =$

$= 49.\, \{1! - [\frac{1}{2}.\Gamma(\frac{1}{2})]^2 \} = 49.\, \{1! - [\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}\,]^2 \} = 10{,}5155$ (miles de horas)^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ σ = **3,2428 miles de horas**

La vida media de servicio de estas máquinas es de 6,2036 miles de horas con una desviación estándar de 3,2428 miles de horas.

18. La vida de fatiga, en cientos de horas, de determinado tipo de rodamientos tiene una distribución de Weibull con parámetros $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.

X: "Tiempo de fatiga (en cientos de horas) de un tipo de rodamiento"

$X \sim$ *Weibull* $(\alpha = 4 \text{ y } \beta = 2)$

a) Calcule la probabilidad de que un rodamiento de este tipo tenga avería en menos de 200 horas.

La expresión de la función de distribución acumulada es:

$F(x) = 1 - \exp[-((x/\beta)^{\alpha})]$

Se pide la probabilidad para 200 horas, pero la variable está dada en "cientos de horas", entonces nuestra variable tomará el valor 2 (2 cientos de horas = 200 horas)

$\mathbf{P(X < 2)} = F(2) = 1 - \exp(-((x/\beta)^{\alpha})) = 1 - \exp(-((x/2)^4)) =$

$= 1 - \exp(-((2/2)^4)) = 1 - 0{,}3679 = \mathbf{0{,}6321}$

La probabilidad de que de que un rodamiento de este tipo tenga avería en menos de 200 horas, es de 0,6321.

b) Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la vida de fatiga de esos rodamientos.

$\mu = \beta \,.\, \Gamma(1 + \alpha^{-1}) = 2.\, \Gamma(1 + 4^{-1}) = 2 \,.\, \Gamma(1 + \frac{1}{4}) = 2 \,.\, \Gamma(5/4) = 2 \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \Gamma(\frac{1}{4}) =$

$= 2 \,.\, \frac{1}{4} \,.\, 3{,}6256 = \mathbf{1{,}8128}$ ***cientos de horas***

$\sigma^2 = \beta^2 .\{\, \Gamma(1 + 2\alpha^{-1}) - [\Gamma(1 + \alpha^{-1})]^2 \} = 2^2 .\{\, \Gamma(1 + 2.4^{-1}) - [\Gamma(1 + 4^{-1})]^2 \} =$

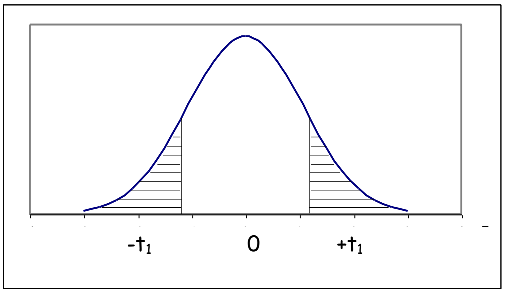
$= 4.\{\, \Gamma(1 + \frac{1}{2}) - [\Gamma(1 + \frac{1}{4})]^2 \} = 4.\{\, \Gamma(3/2) - [\Gamma(5/4)]^2 \} =$

$= 4.\{ \frac{1}{2} \,.\, \Gamma(\frac{1}{2}) - [\frac{1}{4} \,.\, \Gamma(\frac{1}{4})]^2 \} = 4.\{ \frac{1}{2} \,.\sqrt{\pi} - [\frac{1}{4} \,.\, 3{,}6256]^2 \} =$

$= 0{,}2587$ *(cientos de horas)*$^2 \;\Rightarrow\; \sigma = \mathbf{0{,}5086}$ ***cientos de horas***

La vida media de fatiga de los rodamientos es de 1,8128 cientos de horas con una desviación estándar de 0,5086 cientos de horas.

19. La representación gráfica de t para 9 grados de libertad es la siguiente, Halle el valor de t_1 para el cual:



a) el área sombreada a la derecha es 0,05

$t_{0,05\,;\,9} = \mathbf{+\,1{,}833}$

b) el área total sombreada es 0,05

$t_{0,025\,;\,9} = \pm\, \mathbf{2{,}262}$

c) el área total sin sombrear es de 0,99

$t_{0,005\,;\,9} = \pm\, \mathbf{3{,}250}$

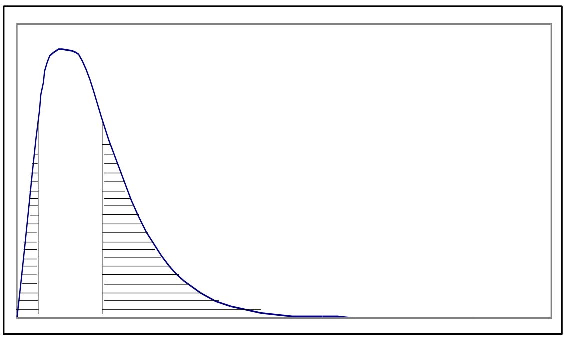
d) el área sombreada a la izquierda es de 0,01

$t_{0,01\,;\,9} = \mathbf{-\,2{,}821}$

e) el área a la izquierda de t_1 es 0,90

$t_{0,10\,;\,9} = \mathbf{+\,1{,}383}$

20. La figura muestra el gráfico de la distribución χ^2 con 5 grados de libertad, halle los valores de χ^2 para los que:



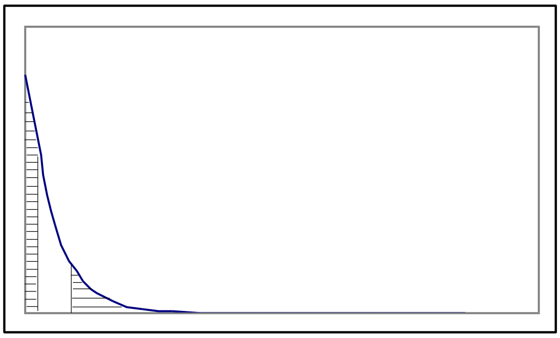
a) el área sombreada a la derecha es 0,05
$\chi^2_{0,05;\ 5} = +$ ***11,070***

b) el área total sombreada es 0,05
$\chi^2_{0,975\ ;\ 5} = +$ ***0,831*** y $\chi^2_{0,025\ ;\ 5} = +$ ***12,832***

c) el área derecha sombreada es 0,01
$\chi^2_{0,01\ ;\ 5} = +$ ***15,086***

d) el área sombreada a la izquierda es 0,01
$\chi^2_{0,99\ ;\ 5} = +$ ***0,554***

21. La figura muestra el gráfico de la distribución χ^2 con 2 grados de libertad. Halle los valores de χ^2 para los que:



a) el área sombreada a la derecha es 0,025.
$\chi^2_{0,025;\ 2} = +$ ***7,378***

b) el área total sombreada es 0,1.
$\chi^2_{0,95\ ;\ 2} = +$ ***0,103*** y $\chi^2_{0,05\ ;\ 2} = +$ ***5,991***

c) el área derecha sombreada es de 0,01.
$\chi^2_{0,01;\ 2} = +$ ***9,210***

d) el área sombreada a la izquierda es de 0,01.
$\chi^2_{0,99;\ 2} = +$ ***0,020***

22. Halle los valores críticos de χ^2 para los cuales el área en la cola derecha de la distribución sea 0,05 si el número de grados de libertad es:

a) 15
$\chi^2_{0,05\ ;\ 15} = +$ ***24,996***

b) 21
$\chi^2_{0,05\ ;\ 21} = +$ ***32,671***

c) 60
$\chi^2_{0,05\ ;\ 60} = +$ ***79,082***

23. Halle los valores críticos de χ^2 para los cuales el área en la cola izquierda de la distribución sea 0,01 si el número de grados de libertad es:

a) 1
$\chi^2_{0,99\ ;\ 1} = +$ ***0,000***

b) 8

$\chi^2_{0,99\,;\,8}$ = **+ 1,646**

c) 24

$\chi^2_{0,99\,;\,24}$ = **+ 10,856**

d) 60

$\chi^2_{0,99\,;\,60}$ = **+ 37,485**

e) 80

$\chi^2_{0,99\,;\,80}$ = **+ 53,540**

f) 100

$\chi^2_{0,99\,;\,100}$ = **+ 70,065**

24. Calcular, usando la tabla:

a) $F_{0,05\,,\,7\,,\,30}$

$F_{0,05\,,\,7\,,\,30}$ = **+ 2,334**

b) $F_{0,01\,,\,12\,,\,20}$

$F_{0,01\,,\,12\,,\,20}$ = **+ 3,231**

c) $F_{0,05\,,\,100,\,5}$

$F_{0,05\,,\,100,\,5}$ = **+ 4,405**

d) $F_{0,01\,,\,250,\,325}$

$F_{0,01\,,\,250,\,325}$ = **+ 1,000**