- ***FUNCIONES PUNTUALES, AFINES Y MÉTRICAS***

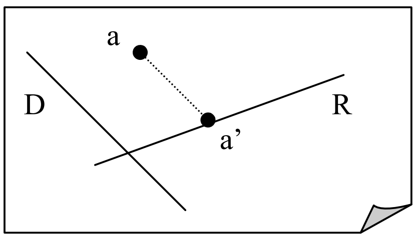
Las Funciones puntuales trasforman puntos en puntos. Las funciones afines son funciones puntuales, por ello para definirlas se consideran espacios afines.

Las funciones métricas también son funciones puntuales, pero los espacios afines en los cuales se definen son espacios métricos, lo que indica que previamente se ha definido una distancia en ellos.

Existen numerosas funciones puntuales, afines y métricas, pero en este curso sólo vamos a considerar algunas de ellas en el plano.

1. <u>Proyecciones</u>

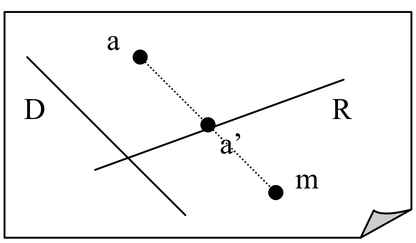
Observe la siguiente representación:



Se dispone de **dos rectas secantes** D y R.
Se realiza la proyección del punto a sobre la recta R paralelamente a D.
Por el punto a pasa una única recta paralela a D, que intersecta a la recta R en el punto a'.
La imagen del punto a por esta proyección sobre R en la dirección de D es el punto a'.

Una proyección sobre la recta R paralelamente a la recta D es una función puntual que asigna a cada punto a del plano un único punto a' del mismo, tal que por a pasa una única paralela a D que intersecta a R en el punto a'.

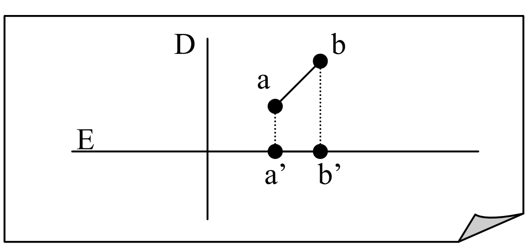
Las proyecciones son funciones puntuales <u>no biyectivas</u>, ya que más de un punto puede tener la misma imagen, además el conjunto imagen por esta función no es todo el plano, es la recta sobre la cual se proyecta.



En esta representación se observa como el punto a y el punto m tienen como imagen al mismo punto a' por la proyección sobre R paralelamente a D.

2. <u>Proyecciones ortogonales</u>

Un caso particular de las proyecciones sobre una recta en la dirección de otra recta es cuando ambas son perpendiculares. Las proyecciones ortogonales son funciones puntuales métricas, ya que es necesario el reconocimiento de la perpendicularidad en el espacio puntual en el que se definan.

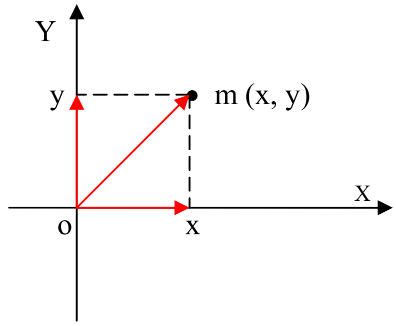


La figura representa una proyección sobre la recta E paralelamente a la recta D, perpendiculares entre sí, ésta asigna al segmento ab el segmento a'b' como imagen.

Por a y por b pasan rectas paralelas a D cuyos puntos de intersección con la recta E son a' y b' respectivamente.

3. Proyecciones en coordenadas:

Dada la Referencia usual en el plano: R = {o, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } con o = (0, 0), es posible definir dos proyecciones puntuales:



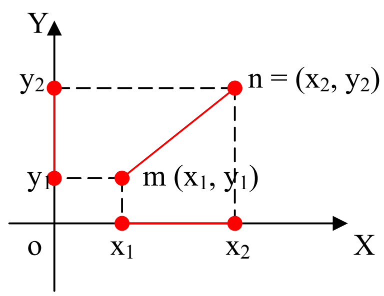
Proyección ortogonal sobre el eje X:

P_X (m) = (x, 0) si y sólo sí $P_X(\overrightarrow{om}) = \overrightarrow{ox}$

Proyección ortogonal sobre el eje Y:

P_Y (m) = (0, y) si y sólo sí $P_Y(\overrightarrow{om}) = \overrightarrow{oy}$

En el caso de proyectar en coordenadas un segmento:



Proyección ortogonal sobre el eje X:

$P_X(\overline{mn}) = \overline{x_1x_2}$ tal que $P_X(\overrightarrow{om}) = \overrightarrow{ox_1}$

$P_X(\overrightarrow{on}) = \overrightarrow{ox_2}$ y $\overline{x_1x_2} = \overrightarrow{ox_2} - \overrightarrow{ox_1}$

Proyección ortogonal sobre el eje Y:

$P_Y(\overline{mn}) = \overline{y_1y_2}$ tal que $P_Y(\overrightarrow{om}) = \overrightarrow{oy_1}$

$P_Y(\overrightarrow{on}) = \overrightarrow{oy_2}$ y $\overline{y_1y_2} = \overrightarrow{oy_2} - \overrightarrow{oy_1}$

Compruebe gráficamente que las proyecciones si bien preservan la alineación, no preservan las distancias, no preservan el paralelismo, ni la perpendicularidad.

En coordenadas las proyecciones son funciones de IR^2 en IR^2 tales que $P_X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ y $P_Y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

Hay algunas funciones que se pueden expresar a través de matrices, son aquellas que se denominan "lineales" y que van a ser objeto de estudio en Algebra Lineal, sin embargo es interesante comenzar a conocer algunos aspectos de estas.
Si determinamos las imágenes de los versores en el plano con coordenadas, es decir las imágenes de los vectores: $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sus imágenes por la proyección que acabamos de ver serían, para $P_x\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $P_x\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Si colocamos en una matriz 2x2 esas imágenes, queda determinada la matriz A asociada a esta función, A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Obtener la imagen de cualquier vector $\vec{\boldsymbol{oa}}$ de IR^2 se simplifica a calcular el producto matricial: A. $\vec{\boldsymbol{oa}} = \vec{\boldsymbol{oa}}\,'$

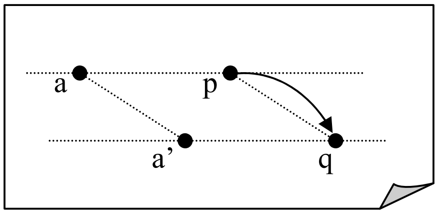
Donde a' es la imagen de a por la función proyección según el eje X.

Del mismo modo para la proyección según el eje Y: $P_Y\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $P_Y\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto su matriz asociada sería: A = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

4. <u>Traslaciones:</u>

También se suele denominarlas desplazamientos, pueden ser afines o métricas, según el espacio en el cual se definan. Son funciones biyectivas. Observe la siguiente representación:

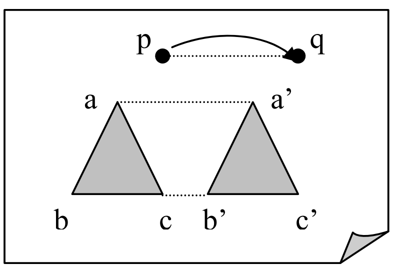


Todo vector fijo $\vec{pq}$ permite definir una traslación, se busca un vector equipolente a él con origen en a: $\vec{aa'}$

El punto a' es la imagen del punto a por dicha traslación. Los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{aa'}$ son equipolentes.

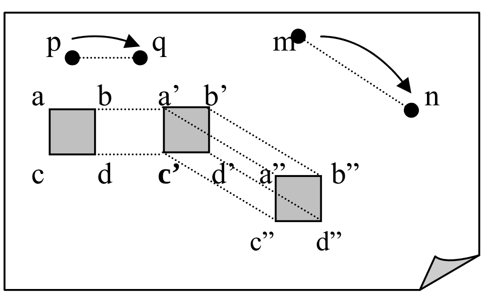
Para definir una Traslación en el plano es necesario dar un vector fijo, la obtención de la imagen de un punto cualquiera por una traslación se fundamenta en la equipolencia.

Una traslación T de vector $\vec{pq}$ es una función puntual que hace corresponder a cada punto a del plano otro punto único a' del mismo, tal que los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{aa'}$ son equipolentes.



La figura representa una traslación de vector $\vec{pq}$ aplicada a un triángulo abc, obteniéndose como imagen el triángulo a'b'c', tal que los vectores $\vec{aa'}$, $\vec{bb'}$, $\vec{cc'}$ son equipolentes con el vector $\vec{pq}$

La composición de dos traslaciones es siempre otra traslación:

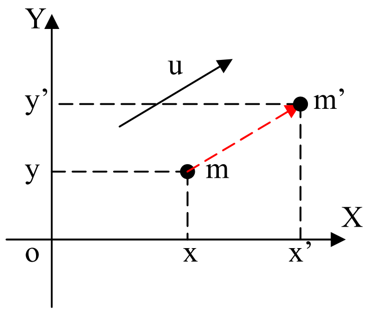


La figura representa la composición de dos traslaciones, una respecto al vector fijo $\vec{pq}$ y la otra respecto al vector $\vec{mn}$

La imagen del cuadrado abcd por dicha composición es el cuadrado a"b"c"d"

5. <u>Traslaciones en coordenadas:</u>

Dada la Referencia usual en el plano: R = {o, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } con o = (0, 0), y un vector u dado:

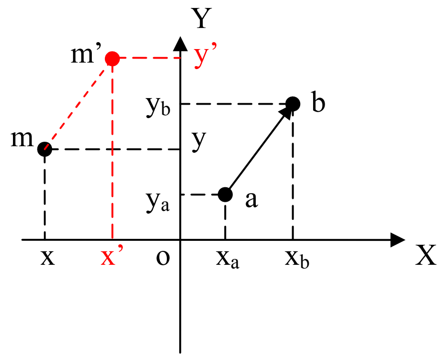


La traslación de vector u transforma el punto m en el punto m' si y sólo si:

$$\overrightarrow{om'} = \overrightarrow{om} + u$$

Puede observarse que $\overrightarrow{mm'}$ es equipolente a u

Para determinar las coordenadas del punto m' imagen por la traslación de vector u del punto m:



El vector u = $\overrightarrow{ab} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$, la traslación de vector u trasforma al puntos m = (x, y) en el punto m' = (x', y') siendo $\overrightarrow{om'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{om} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{om'} = \overrightarrow{om} + u \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$$

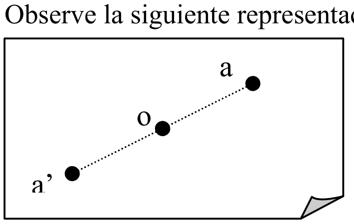
Compruebe gráficamente si las traslaciones preservan la alineación, preservan las distancias, preservan el paralelismo, y la perpendicularidad.

En coordenadas las traslaciones son funciones de IR^2 en IR^2 tales que $T_u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ siendo $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ las componentes de u.

En este caso, las traslaciones no son "lineales" por lo cual no es posible determinar una matriz asociada a esta función.

6. Simetría central

Observe la siguiente representación:

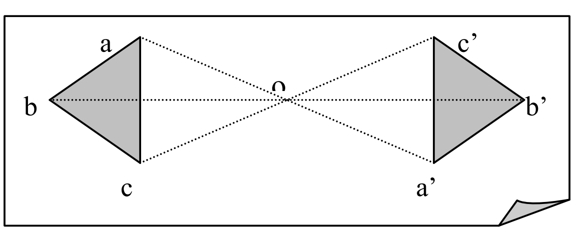


Un punto cualquiera del plano, fijado de antemano: "o", permite definir una simetría central.

Dado un punto a del plano, se construye el vector $\vec{oa'}$ opuesto al vector $\vec{oa}$.

El punto o es el centro de la cupla (a, a'). El punto o es el centro de simetría.

Una simetría de centro "o" es una función puntual que hace corresponder a cada punto a del plano un único punto a' del mismo, tal que "o" es el punto medio del vector $\vec{aa'}$



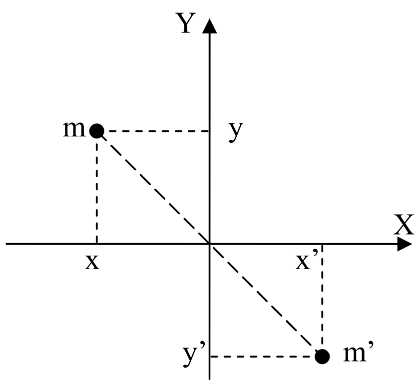
La figura representa una simetría central respecto del punto o, la imagen del triángulo abc es el triángulo a'b'c'.

El punto "o" es el punto medio de los vectores $\vec{aa'}$, $\vec{bb'}$, $\vec{cc'}$

Las simetrías centrales pueden ser afines o bien métricas, dependiendo del espacio en el que se definan. También son funciones biyectivas.

7. Simetría central en coordenadas

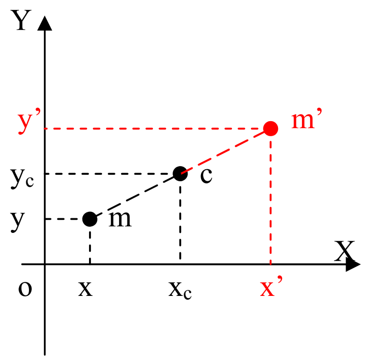
Dada la Referencia usual en el plano: R = {o, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } con o = (0, 0)



El punto m se transforma en el punto m' por la simetría central respecto de o = (0, 0) si y sólo si: $\overrightarrow{om'} = - \overrightarrow{om}$

Siendo m = (x, y) y m' = (x', y')

$$\overrightarrow{om'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{om} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



El punto m se transforma en el punto m' por la simetría central de centro c = (x_c, y_c) si y sólo si:

$$\overrightarrow{cm'} + \overrightarrow{cm} = \vec{0}$$

Es decir si c es el punto medio del vector $\overrightarrow{mm'}$

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{2}(x + x') \\ y_c = \frac{1}{2}(y + y') \end{cases} \quad \text{despejando} \quad \begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y \end{cases}$$

Compruebe gráficamente si las simetrías centrales preservan la alineación, preservan las distancias, preservan el paralelismo, y la perpendicularidad.

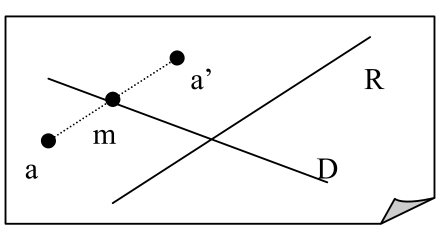
En coordenadas las simetrías centrales son funciones en IR² tales que $S_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **con c = (x_c, y_c)**

Las simetrías centrales con centro en o = (0, 0) si son "lineales", por lo tanto es posible determinar su matriz asociada A a partir de la imagen de los versores del plano IR² entonces:

$S_o \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $S_o \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$. Por lo tanto su matriz asociada sería: A = $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

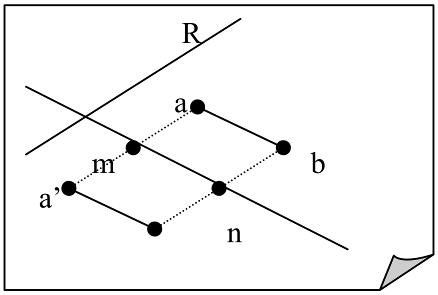
8. Simetría axial

Observe la siguiente representación:



Las rectas R y D **son secantes**, ellas permiten definir una simetría axial.
Por el punto a pasa una única recta paralela a D, ella contiene al punto a'.
El punto m es la intersección de la recta que contiene a los puntos a y a' con el eje D.
La imagen del punto a es el punto a' por la simetría de eje D en la dirección de la recta R.

Una simetría de eje D en la dirección de una recta R (secante a D) es una función puntual que hace corresponder a cada punto a un único punto a', tal que por los puntos a y a' pasa una única recta paralela a R. Siendo m el punto de intersección entre esta paralela y D. Además el punto m es el punto medio del vector $\overrightarrow{aa'}$



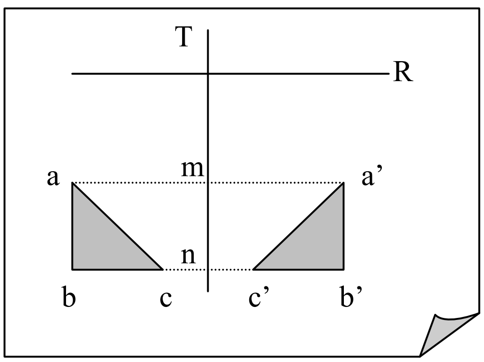
Esta representación muestra una simetría axial de eje D en la dirección de la recta R.

Al segmento ab le asigna como imagen el segmento a'b', tal que se verifica que por los puntos a y a' como por b y b' pasan rectas paralelas a la recta R, además el punto m es el punto medio de la cupla (a, a') y el punto n es el punto medio de la cupla (b, b')

Las simetrías axiales también son funciones biyectivas.

9. <u>Simetría ortogonal</u>

Una situación particular de simetrías axiales son las que se definen a través de ejes ortogonales (perpendiculares)



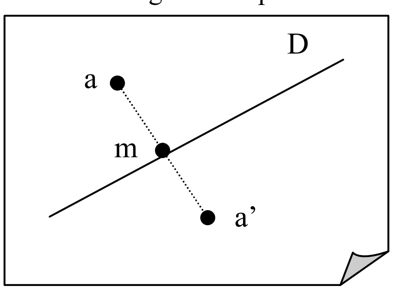
Observe la siguiente representación:

La figura representa una simetría de Eje T en la dirección de la recta R, ambas secantes, pero además **perpendiculares**.

La imagen del triángulo abc es el triángulo a'b'c', tal que por los puntos a y a' como por b y b' (o c y c') pasan rectas paralelas a R, además el punto m es el punto medio

Las simetrías ortogonales son funciones métricas ya que es necesario el reconocimiento de la perpendicularidad para definirlas.

Observe la siguiente representación:

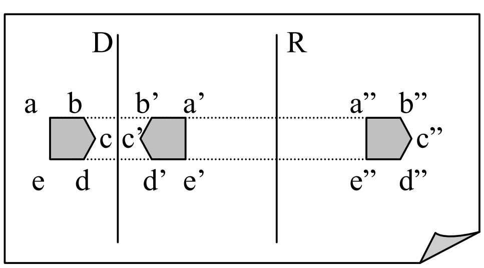


La figura muestra una recta D, ella permite definir una simetría que asigna al punto a el punto a', respecto del eje D en dirección perpendicular al mismo.

Por los puntos a y a' pasa una única recta perpendicular a D, el punto m es la intersección entre ésta y la recta D.

Estas simetrías son también simetrías ortogonales y es suficiente una recta para poder definirlas, ya que la dirección de simetría es siempre perpendicular a ella.
La composición de dos simetrías ortogonales de ejes paralelos (no coincidentes) es equivalente a una traslación:

Observe la siguiente representación:

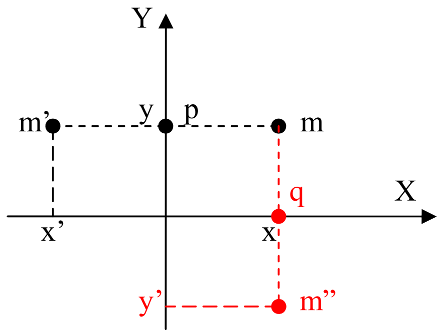


La figura reresenta la composición de dos simetrías ortogonales, una de eje D que transforma la figura abcde en a'b'c'd'e' , y la otra de eje R que transforma a la figura a'b'c'd'e' en a"b"c"d"e".

La imagen final es equivalente a la obtenida por traslación.

10. Simetría axial en coordenadas

Dada la Referencia usual en el plano: R = {o, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } con o = (0, 0) se pueden definir dos simetrías axiales respecto de los ejes de coordenadas X e Y:



Un punto m se transforma en el punto m' por la simetría axial de eje Y S_Y si y sólo si:

$$\overrightarrow{pm'} + \overrightarrow{pm} = \vec{0}$$

Un punto m se transforma en el punto m" por la simetría axial respecto al eje X S_X si y sólo si:

$$\overrightarrow{qm''} + \overrightarrow{qm} = \vec{0}$$

Lo que significa que:

p es el punto medio del vector $\overrightarrow{mm'}$, p = (0, y)

q es el punto medio del vector $\overrightarrow{mm''}$, q = (x, 0)

En coordenadas las simetrías axiales son funciones de IR^2 en IR^2 tales que $S_X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ y $S_Y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

Compruebe gráficamente si las simetrías axiales preservan la alineación, preservan la distancia, preservan el paralelismo y la perpendicularidad.

Las simetrías ortogonales también son "lineales" por lo cual es posible hallar su matriz asociada a partir de la imagen de los versores del plano IR^2, entonces:

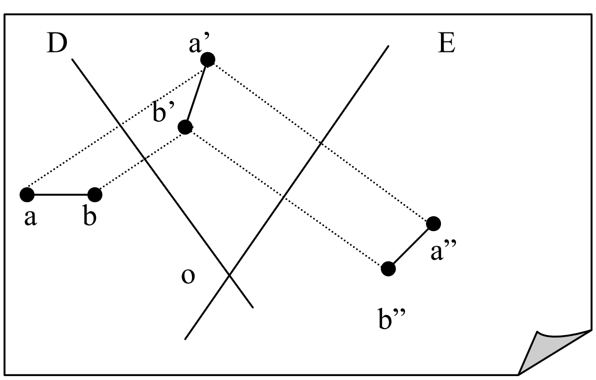
$S_X\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $S_X\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$. Por lo tanto su matriz asociada sería: A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

$S_Y\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $S_Y\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Por lo tanto su matriz asociada sería: A = $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

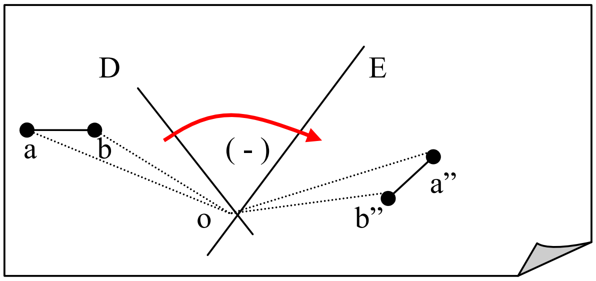
11. Rotaciones

Es posible definir a las rotaciones como la composición de dos simetrías ortogonales de ejes secantes. También si se define previamente el concepto de ángulo orientado es posible dar otra definición a la rotación a partir de las amplitudes angulares. Las rotaciones son funciones métricas.

Observe la siguiente representación:



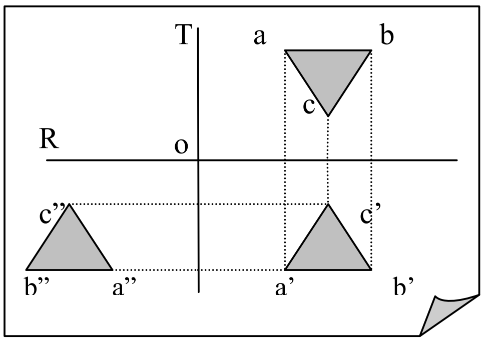
La figura muestra la composición de dos simetrías ortogonales de ejes D y E secantes.
El segmento a'b' es la imagen del segmento ab por la simetría ortogonal respecto a la recta D.
El segmento a"b" es la imagen del segmento a'b' por la simetría ortogonal respecto a la recta E.
El efecto final provocado al segmento ab es una rotación.



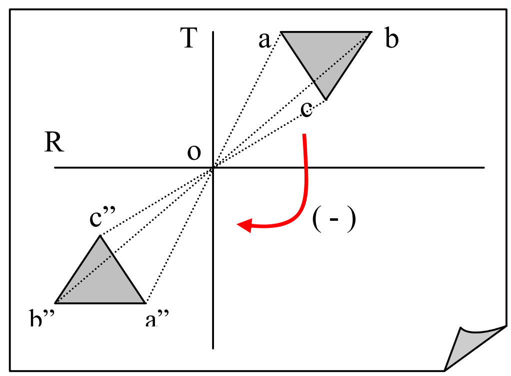
Es posible llegar a obtener el segmento a”b” mediante un giro alrededor de o, siendo o el punto de intersección de ambas rectas.
En este caso la rotación tiene sentido de giro horario, también denominado negativo.

Definición 1: una rotación de centro o, en un determinado sentido de giro, es la composición de dos simetrías ortogonales de ejes secantes D y E respectivamente, siendo o el punto de intersección de ambos.

Observe las siguientes representaciones:



Las rectas T y R son perpendiculares.
La simetría ortogonal de eje R en dirección de la recta T transforma al triángulo abc en el triángulo a’b’c’.
La simetría ortogonal de eje T en dirección de la recta R transforma al triángulo a’b’c’ en el triángulo a”b”c”.
El triángulo a”b”c” es la imagen del triángulo abc por la composición de las dos simetrías ortogonales.

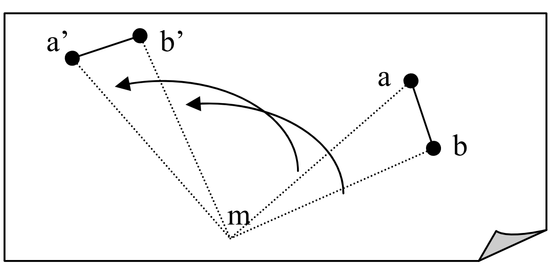


La aplicación sucesiva de ambas simetrías es equivalente a la rotación de centro o, punto de intersección de R y T.

En este caso la rotación tiene sentido horario, también denominado negativo respecto del ángulo α = - 180.

La representación anterior, rotación respecto de o, coincide con la simetría central respecto de dicho punto o. Es decir la composición de dos simetrías ortogonales de ejes ortogonales es equivalente a la simetría de centro o, siendo o el punto de intersección de ambos ejes y a la rotación de giro negativo respecto del ángulo α = - 180.

Observe la siguiente representación:



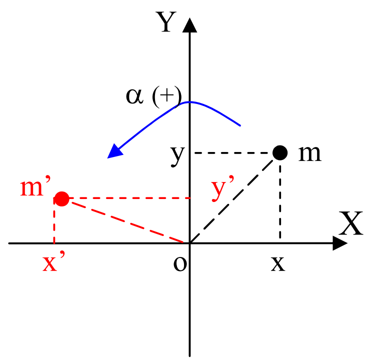
La figura representa una rotación de amplitud α y centro m en sentido positivo (antihorario).

Se obtiene el segmento a’b’ como imagen del segmento ab.

Definición 2: una rotación de centro m y amplitud α es una función puntual que asigna a cada punto a del plano un único punto a’ del mismo, tal que la amplitud de los ángulos ama’ y bmb’ es α, medidos en un determinado sentido (positivo o negativo).

12. Rotaciones en coordenadas

Dada la Referencia usual en el plano: R = {o, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } con o = (0, 0)



La rotación de centro o y ángulo α (+) asigna al punto m = (x, y) el punto m' = (x', y') tal que:
* La amplitud del ángulo mom' = α
* d (o, m) = d (o, m')

Las coordenadas del punto m' se pueden obtener relacionando trigonométricamente a los puntos a través de la expresión:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y sen\alpha \\ y' = x sen\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

En coordenadas las rotaciones son funciones de IR^2 en IR^2 tales que R $_\alpha$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y sen\alpha \\ x sen\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$, con α (+)

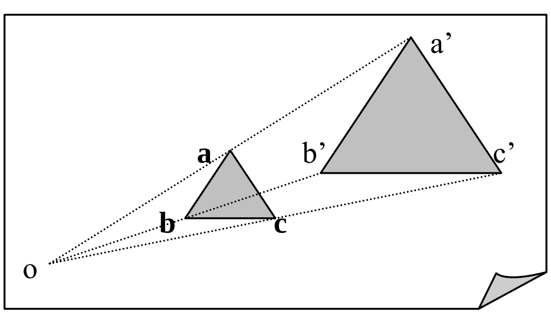
Compruebe gráficamente si las simetrías axiales preservan la alineación, preservan la distancia, preservan el paralelismo y la perpendicularidad.

Las rotaciones de centro o = (0, 0) y ángulo de amplitud α(+) también poseen matriz asociada, la que se obtiene a partir de las imágenes de los versores en el plano IR^2, entonces:

R$_\alpha$ $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{pmatrix}$ y R$_\alpha$ $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sen\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$. Por lo tanto su matriz asociada sería: A = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

13. Homotecias (agrandamientos y reducciones):

Observe la siguiente representación:



Se fija un punto "o" cualquiera del plano, respecto a él se define una función puntual, para un cierto escalar k distinto de cero.

El triángulo a'b'c' es la imagen del triángulo abc por la homotecia de centro o de razón k, que verifica:

$$\overrightarrow{oa'} = k.\overrightarrow{oa}, \quad \overrightarrow{ob'} = k.\overrightarrow{ob}, \quad \overrightarrow{oc'} = k.\overrightarrow{oc}$$

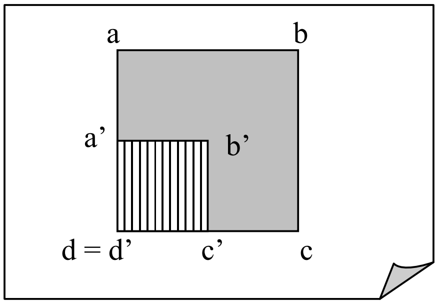
La homotecia en este caso ha provocado un *agrandamiento* de la figura.

Una homotecia (agrandamiento o reducción) es una función puntual que a cada punto a del plano le hace corresponder un único punto a' del mismo, respecto de cierto punto o, fijado de antemano, tal que siendo k un número real no nulo, se verifica que: $\overrightarrow{oa'} = k.\overrightarrow{oa}$

Existe proporcionalidad entre las figuras homotéticas, la constante de dicha proporcionalidad es el número real k.

Las homotecias pueden definirse como afines o como métricas, según sea el espacio puntual en el que se definan.

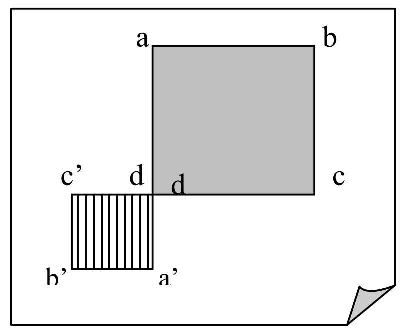
Observe la siguiente representación:



La figura representa una homotecia (reducción) respecto del punto d, de un cuadrado abcd, obteniéndose como imagen el cuadrado a'b'c'd', la razón de esta homotecia es el número real k positivo y menor a uno.

Observe que en este caso el punto elegido para aplicar la reducción es uno de los vértices del cuadrado abcd, y su imagen coincide con él.
Se ha producido una reducción.

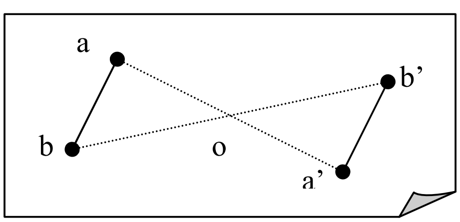
Observe esta representación:



Se aplicó una homotecia (reducción) respecto del punto d, al cuadrado abcd, se obtuvo como imagen el cuadrado a'b'c'd', la razón de esta homotecia es un número real k *negativo* y mayor a menos uno.

Nota: para lograr una reducción el escalar k debe ser positivo menor a uno o negativo mayor a menos uno, además por definición nunca nulo. Para lograr un agrandamiento k debe ser positivo mayor a uno o negativo menor a menos uno

Observe la siguiente representación:

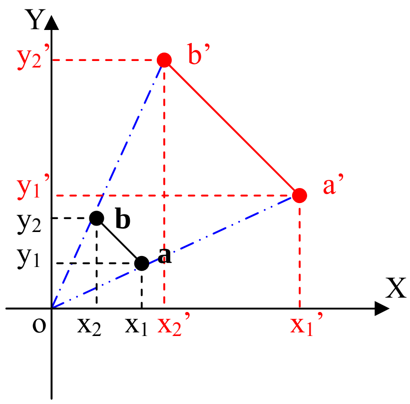


La figura representa una homotecia de centro o y razón k = -1, que transforma al segmento ab en el segmento a'b'.
Note que coincide con una simetría central respecto de o.

En general una simetría de centro o es equivalente a una homotecia de centro y razón –1.

14. Homotecias en coordenadas (agrandamientos o reducciones)

Dada la Referencia usual en el plano: R = {o, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } con o = (0, 0)

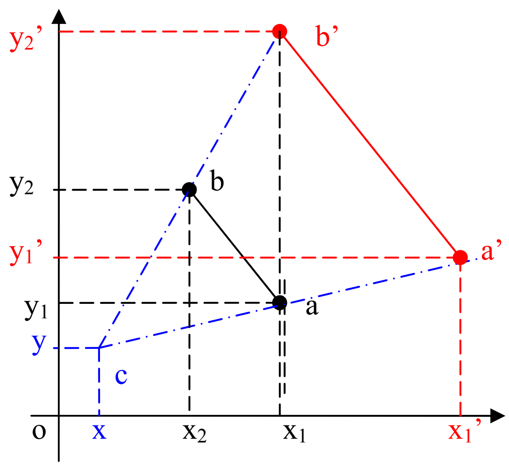


Si el centro de la homotecia (agrandamiento o reducción) es el centro de coordenadas "o":

Un punto a se transforma por la homotecia de centro o y razón k $H_{o,\,k}$ en un punto a' si y sólo si: $\overrightarrow{oa'} = k\,.\,\overrightarrow{oa}$ $(k \neq 0)$

o = (0, 0) a = (x_1 , y_1) a' = (x_1' , y_1')

$$\overrightarrow{oa'} = k\ \overrightarrow{oa} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = k\,.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x_1 \\ k.y_1 \end{pmatrix}$$



Si el centro de la homotecia (agrandamiento o reducción) es un punto c (x, y) cualquiera del plano:

El punto a se transforma en el punto a' por la homotecia de centro c = (x, y) y razón k: $H_{c,\,k}$ si y sólo si: $\overrightarrow{ca'} = k\ \overrightarrow{ca}$ $(k \neq 0)$

Siendo $\overrightarrow{ca} = \overrightarrow{oa} - \overrightarrow{oc}$ y $\overrightarrow{ca'} = \overrightarrow{oa'} - \overrightarrow{oc}$

Se pueden determinar las coordenadas de a'

En coordenadas las homotecias de centro "o" (siendo o = (0, 0) el centro de la referencia) son funciones de IR^2 en IR^2 tales que $H_{o,\,k}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}$, con $k \in IR$ y es no nulo

Las homotecias de centro "o"=(0, 0) son también "lineales" por ello es posible obtener su matriz asociada con las imágenes de los versores del plano IR^2, entonces:

$H_{o,}\,k \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $H_{o,}\,k \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$. Por lo tanto su matriz asociada sería: $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

15. Congruencia:

Se llama congruencia a toda función puntual que resulta de componer n simetrías ortogonales. (para n = 2, 3, ... , n)

Como la composición de dos simetrías ortogonales de ejes paralelos no coincidentes es equivalente a una traslación, las traslaciones también son congruencias.

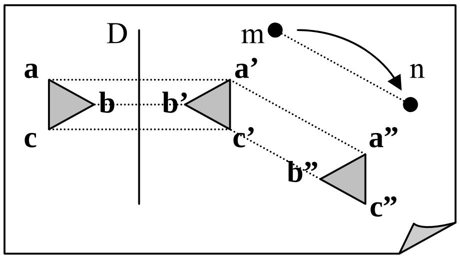
Como la composición de dos simetrías ortogonales de ejes secantes es equivalente a una rotación, las rotaciones también son congruencias.

La composición de congruencias es siempre otra congruencia, por lo tanto la compuesta de una traslación y una rotación es también una congruencia.

La composición de una simetría ortogonal consigo misma es equivalente a la identidad, la identidad es también una congruencia.

Las figuras obtenidas por congruencias se denominan *congruentes*.

Observe la siguiente representación:



La figura representa la composición de una simetría ortogonal de eje D con una traslación según la cupla puntual (m, n).

Las figuras abc, a'b'c' y a"b"c" son congruentes.

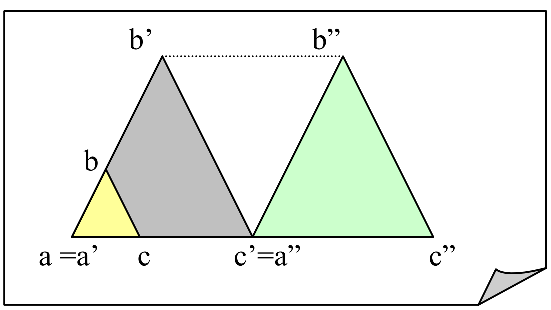
16. <u>Semejanza:</u>

Se denomina semejanza a la función puntual que resulta una congruencia, una homotecia o una composición de ambas.

Por lo tanto, las simetrías ortogonales, las traslaciones, las rotaciones, las simetrías centrales, las homotecias, y todas las posibles composiciones son semejanzas.

Las figuras obtenidas a través de semejanzas se denominan *semejantes*.

Observe la siguiente representación:



La figura representa la composición de una homotecia de centro a y razón k (positivo y mayor a uno) con la traslación de vector $\vec{ac}$

Los triángulos abc, a'b'c' y a"b"c" son semejantes.

Los triángulos a'b'c y a"b"c" son congruentes.

Tanto la congruencia como la semejanza son funciones puntuales biyectivas. A diferencia de las "relaciones" de congruencia o de semejanza que pueden definirse entre las figuras del plano.