2.5 Póngase el siguiente programa en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:}\quad & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{con las condiciones:}\quad & 3x_1 + 4x_3 \leq 5 \\ & 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 7 \\ & 8x_1 + 9x_3 \geq 2 \\ \text{con:}\quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Agregando una variable de holgura x_4 al lado izquierdo de la primera restricción, restando una variable superflua x_5 del lado izquierdo de la tercera restricción, y añadiendo después una variable artificial x_6 sólo al lado izquierdo de la tercera restricción; se obtiene el programa:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:}\quad & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \\ \text{con las condiciones:}\quad & 3x_1 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ & 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 7 \\ & 8x_1 + 9x_3 - x_5 + x_6 = 2 \\ \text{con:}\quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Este programa está en la forma estándar, con una solución factible inicial de $x_4 = 5$, $x_2 = 7$, $x_6 = 2$, $x_1 = x_3 = x_5 = 0$. Tiene la forma del sistema (2.3) si se define

$$\mathbf{X} \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T \qquad \mathbf{C} \equiv [1, 2, 3, 0, 0, M]^T$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 \equiv \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

En este caso, x_2 puede usarse para generar la solución inicial, en vez de agregar una variable artificial a la segunda restricción para llegar al mismo resultado. En general, siempre que una variable aparece sólo en una ecuación de restricción y con un coeficiente positivo, esa variable puede emplearse para generar parte de la solución inicial, dividiendo primero la ecuación de restricción entre el coeficiente positivo y después haciendo la variable igual al lado derecho de la ecuación; no es necesario agregar una variable artificial a la ecuación.

2.6 Póngase el siguiente programa en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:}\quad & z = 25x_1 + 30x_2 \\ \text{con las condiciones:}\quad & 4x_1 + 7x_2 \geq 1 \\ & 8x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ & 6x_1 + 9x_2 \geq -2 \end{aligned}$$

Ya que tanto x_1 como x_2 no tienen restricciones, se fijan $x_1 = x_3 - x_4$ y $x_2 = x_5 - x_6$, en donde se requiere que todas las cuatro nuevas variables sean no negativas. Sustituyendo estas cantidades en el programa dado y multiplicando después la última restricción por -1, para obligar a que tenga un lado derecho no negativo, se obtiene el programa equivalente:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:}\quad & z = 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 \\ \text{con las condiciones:}\quad & 4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 \geq 1 \\ & 8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 \geq 3 \\ & -6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 \leq 2 \\ \text{con:}\quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Este programa se convierte a la forma estándar restando las variables superfluas x_7 y x_8, respectivamente, de los lados izquierdos de las primeras dos restricciones; agregando una variable de holgura x_9 al lado izquierdo de la tercera restricción, y después añadiendo las variables artificiales x_{10} y x_{11}, respectivamente, a los lados izquierdos de las primeras dos restricciones. Así se obtiene:

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimícese:} & z = 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + Mx_{10} + Mx_{11} \\
\text{con las condiciones:} & 4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 - x_7 + x_{10} = 1 \\
 & 8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 - x_8 + x_{11} = 3 \\
 & -6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 + x_9 = 2 \\
\text{con:} & \text{todas las variables no negativas.}
\end{array}
$$

Una solución inicial a este programa en forma estándar es:

$$x_{10} = 1 \qquad x_{11} = 3 \qquad x_9 = 2 \qquad x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$$

Problemas suplementarios

Póngase cada uno de los siguientes programas en forma estándar.

2.7

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimícese:} & z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
\text{con las condiciones:} & 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -7 \\
 & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8 \\
\text{con:} & x_1 \text{ no negativa.}
\end{array}
$$

2.8

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximícese:} & z = 10x_1 + 11x_2 \\
\text{con las condiciones:} & x_1 + 2x_2 \leq 150 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 200 \\
 & 6x_1 + x_2 \leq 175 \\
\text{con:} & x_1 \text{ y } x_2 \text{ no negativas.}
\end{array}
$$

2.9 Problema 2.8 con las tres desigualdades de restricción invertidas.

2.10

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimícese:} & z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\
\text{con las condiciones:} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1000 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \geq 1500 \\
\text{con:} & \text{todas las variables no negativas.}
\end{array}
$$

2.11

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimícese:} & z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{con las condiciones:} & x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\
\text{con:} & \text{todas las variables no negativas.}
\end{array}
$$

2.12

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximícese:} & z = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{con las condiciones:} & 2x_1 + 7x_2 = 7 \\
 & 5x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 10 \\
 & x_1 + x_3 = 11 \\
\text{con:} & x_1, x_2 \text{ y } x_3 \text{ no negativas.}
\end{array}
$$

2.13

minimícese: $z = 10x_1 + 2x_2 - x_3$

con las condiciones:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &\leq 50 \\ x_1 + x_2 \quad\quad &\geq 10 \\ x_2 + x_3 &\leq 30 \\ x_2 + x_3 &\geq 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 60 \end{aligned}$$

con: todas las variables no negativas.

Capítulo 3

Programación lineal: teoría de soluciones

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Un conjunto de vectores de m dimensiones $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n\}$, es *linealmente dependiente* si existen constantes, no todas cero, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tales que

$$\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{P}_n = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.1 El conjunto de vectores de 5 dimensiones

$$\{[1, 2, 0, 0, 0]^T, [1, 0, 0, 0, 0]^T, [0, 0, 1, 1, 0]^T, [0, 1, 0, 0, 0]^T\}$$

es linealmente dependiente, ya que

$$-1\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Teorema 3.1: Cualquier conjunto de $m + 1$ o más vectores de m dimensiones es linealmente dependiente.

Un conjunto de vectores de m dimensiones $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n\}$, es *linealmente independiente* si las únicas constantes para las que (3.1) se cumple, son $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. (Véanse los problemas 3.1 y 3.2).

COMBINACIONES CONVEXAS

Un vector $\mathbf{P}$ de m dimensiones es una *combinación convexa* de los vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ de m dimensiones, si existen constantes no negativas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ cuya suma es 1, como

$$\mathbf{P} = \beta_1\mathbf{P}_1 + \beta_2\mathbf{P}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{P}_n \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.2 El vector de 2 dimensiones $[5/3, 5/6]^T$ es una combinación convexa de los vectores $[1,1]^T$, $[3,0]^T$ y $[1,2]^T$ porque

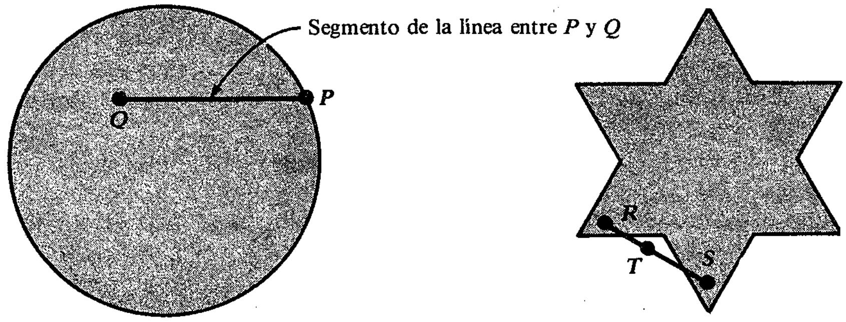
$$\begin{bmatrix}5/3\\5/6\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Dados dos vectores de m dimensiones, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, se denomina *segmento línea* entre los dos vectores al conjunto de todas las combinaciones convexas de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$. El significado geométrico de este término resulta claro en el caso $m = 3$.

CONJUNTOS CONVEXOS

Un conjunto de vectores de m dimensiones es *convexo,* siempre que dos vectores pertenezcan al conjunto, si el segmento línea entre los vectores también pertenece al conjunto.

Ejemplo 3.3 El disco sombreado en la figura 3-1 (*a*) es un conjunto convexo, ya que el segmento línea entre cualquiera de sus puntos (vectores bidimensionales) está completamente dentro del disco. La figura 3-1 (*b*) no es un con-



(a) (b)

Fig. 3-1

junto convexo; aunque R y S pertenezcan al conjunto sombreado, existen puntos, como T, que pertenecen al segmento línea entre R y S y que no son parte de la estrella.

Un vector **P** es un *punto extremo* de un conjunto, si no es posible expresarlo como una combinación convexa de otros dos vectores del conjunto; es decir, un punto extremo no descansa en el segmento línea entre cualquier otro par de vectores en el conjunto.

Ejemplo 3.4 Cualquier punto sobre la circunferencia del disco de la figura 3-1 (*a*) es un punto extremo del disco.

Teorema 3.2: Cualquier vector en un conjunto convexo cerrado y acotado que tenga un número finito de puntos extremos, puede expresarse como una combinación convexa de los puntos extremos.

Teorema 3.3: El espacio de solución de un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas es un conjunto convexo que tiene un número finito de puntos extremos.

SOLUCIONES DE PUNTO EXTREMO

Se designa $\mathscr{S}$ al conjunto de todas las soluciones factibles al programa lineal en forma estándar, (2.3); es decir, $\mathscr{S}$ es el conjunto de todos los vectores **X** que satisfacen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$. Del teorema 3.3, y por el hecho de que los conjuntos convexos se intersectan en conjuntos convexos (problema 3.11), se tiene que $\mathscr{S}$ es un conjunto convexo con un número finito de puntos extremos.

Nota 1: La función objetivo logra su óptimo (ya sea máximo o mínimo) en un punto extremo de $\mathscr{S}$, siempre y cuando dicho óptimo exista. (Véase el problema 3.12).

Nota 2: Si **A** es del orden $m \times n$ (m renglones y n columnas), con $m \leq n$, entonces los puntos extremos de $\mathscr{S}$ tienen al menos $n - m$ componentes cero. (Véase el problema 3.13).

SOLUCIONES BÁSICAS FACTIBLES

Denótense las columnas de la matriz de coeficientes **A**, de $m \times n$, en el sistema (2.3) por $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, respectivamente. Entonces, la matriz de la ecuación de restricciones $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ se puede volver a escribir en forma de vector.

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{B} \tag{3.3}$$

Se hace notar que los vectores **A**, así como **B**, son vectores conocidos de m dimensiones; se desea encontrar soluciones no negativas para las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deberá suponerse que $m \leq n$ y que el nivel $\mathbf{A} = m$, lo cual significa que al menos una colección de m vectores **A** es linealmente independiente.

Una *solución factible básica* a (3.3) se obtiene haciendo $n - m$ de las x variables iguales a cero y encontrando una solución no negativa para las variables x restantes, siempre y cuando los m vectores **A** correspondientes a las variables x que no se hayan hecho cero sean linealmente independientes. Las variables x que inicialmente no se hicieron iguales a cero, se denominan *variables básicas*. Si una o más de las variables básicas resulta igual a cero, la solución factible básica es *degenerada*; si todas las variables básicas son positivas, la solución factible básica es *no degenerada*. (Véanse los problemas 3.7, 3.8 y 3.9).

Las notas anteriores, números 1 y 2, pueden reforzarse como se plantea a continuación:

Nota 1′: La función objetivo llega a su óptimo en una solución factible básica.

Nota 2′: Los puntos extremos de $\mathcal{S}$ son precisamente las soluciones factibles básicas. (Véanse los problemas 3.13 y 3.14).

En consecuencia, el programa lineal estándar puede resolverse buscando entre las soluciones factibles básicas aquélla(s) en las cuales el objetivo se optimiza. Un procedimiento eficiente para realizar los cálculos se describe en el capítulo 4.

Problemas resueltos

3.1 Determínese si $\{[1,2]^T, [2,4]^T\}$ es linealmente independiente.

Si se denomina $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ a los dos vectores es obvio que $\mathbf{P}_2 = 2\mathbf{P}_1$, o

$$2\mathbf{P}_1 + (-1)\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

Entonces, el conjunto dado de vectores es linealmente dependiente (no linealmente independiente).

3.2 ¿Es $\{[1, 1, 3, 1]^T, [1, 2, 1, 1]^T, [1, 0, 0, 1]^T\}$ linealmente independiente?

Para estos vectores, (3.1) cambia a:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0\\ 3\alpha_1 + \alpha_2 &= 0\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Las primeras tres ecuaciones (la cuarta es redundante) tienen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ como únicas soluciones. Por lo tanto, el conjunto dado de vectores es linealmente independiente.

3.3 Un vector $\mathbf{Q}$ es una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_n$ si existen constantes $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ como:

$$\mathbf{Q} = \delta_1\mathbf{Q}_1 + \delta_2\mathbf{Q}_2 + \cdots + \delta_n\mathbf{Q}_n$$

Demuéstrese que el conjunto de vectores $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n\}$ es linealmente independiente, sólo si uno de los vectores es una combinación lineal de los demás.

Si $\mathbf{P}_i = \delta_1\mathbf{P}_1 + \cdots + \delta_{i-1}\mathbf{P}_{i-1} + \delta_{i+1}\mathbf{P}_{i+1} + \cdots + \delta_n\mathbf{P}_n$, en donde alguna o todas las δ pueden ser cero, entonces:

$$\delta_1\mathbf{P}_1 + \cdots + \delta_{i-1}\mathbf{P}_{i-1} + (-1)\mathbf{P}_i + \delta_{i+1}\mathbf{P}_{i+1} + \cdots + \delta_n\mathbf{P}_n = \mathbf{0}$$

y por lo tanto el conjunto es linealmente independiente.

Por otra parte, si el conjunto es linealmente dependiente, hágase que α_j sea el primer coeficiente diferente a cero en (3.1). Entonces,

$$\mathbf{P}_j = 0\mathbf{P}_1 + \cdots + 0\mathbf{P}_{j-1} + \left(\frac{\alpha_{j+1}}{-\alpha_j}\right)\mathbf{P}_{j+1} + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{-\alpha_j}\right)\mathbf{P}_n$$

es decir, $\mathbf{P}_j$ es una combinación lineal de los vectores restantes.

3.4 Determínese si $[1, 2, 3]^T$ es una combinación lineal de

$$[1, 2, 1]^T \qquad [1, 1, 1]^T \qquad [2, 3, 2]^T$$

No lo es; cualquier combinación lineal de los tres vectores debe tener su primer y tercer componente iguales. (De una manera más general:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \delta_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \delta_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \delta_3\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} \qquad \text{si} \qquad \begin{aligned}\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 &= 1\\ 2\delta_1 + \delta_2 + 3\delta_3 &= 2\\ \delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 &= 3\end{aligned}$$

Pero este segundo sistema no tiene solución).

3.5 Demuéstrese si $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente y si $\mathbf{P}$ es un vector como

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{r} c_j\mathbf{P}_j \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P} = \sum_{j=1}^{r} d_j\mathbf{P}_j$$

entonces $c_j = d_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Restando ambas representaciones, se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{r} (c_j - d_j)\mathbf{P}_j = \mathbf{0}$$

que es (3.1) con $\alpha_j = c_j - d_j$ y $n = r$. Ya que $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_r$ son linealmente independientes, se tiene entonces $c_j - d_j = 0$, o $c_j = d_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

3.6 Anótense las ecuaciones de restricción para el siguiente programa lineal, empleando la forma vectorial (3.3):

$$\begin{aligned}\text{minimícese: } & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + Mx_5 + 0x_6\\ \text{con las condiciones: } & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3\\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 6\\ \text{con: } & \text{todas las variables no negativas.}\end{aligned}$$

Para este problema, (3.3) se convierte en:

$$\underbrace{x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{x_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} + \underbrace{x_3\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_3} + \underbrace{x_4\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_4} + \underbrace{x_5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_5} + \underbrace{x_6\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_6} = \underbrace{\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

3.7 Determínese si $[1, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ es una solución factible básica al programa lineal dado en el problema 3.6.

Aunque todos sus componentes son no negativos, la solución propuesta no es básica. Los vectores $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_3$, asociados a las variables x no igualadas a cero, no son linealmente independientes (problema 3.1).

3.8 Determínese si $[1, 0, 0, 0, 2, 4]^T$ es una solución factible básica al programa lineal dado en el problema 3.6

La matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, formada por los vectores columna $\mathbf{A}_1$ al $\mathbf{A}_6$, es del orden 2×6. Por lo tanto, una solución factible básica debe tener al menos $6 - 2 = 4$ componentes (variables) cero, lo cual no sucede en este caso.

3.9 Encuéntrense dos diferentes soluciones factibles básicas al programa lineal dado en el problema 3.6.

Ya que $n - m = 4$, una solución factible básica tendrá todas las cuatro variables x igualadas a cero. Al hacer cero a x_1, x_2, x_3 y x_4, la ecuación vector de restricción se convierte en:

$$x_5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_6\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

la cual tiene la solución (no negativa) $x_5 = 3$, $x_6 = 6$. Ya que $\mathbf{A}_5$ y $\mathbf{A}_6$ son linealmente independientes, la solución completa, $[0, 0, 0, 0, 3, 6]^T$, es básica. Aquí las variables básicas son x_5 y x_6, y ya que ambas son positivas, entonces la solución es también no degenerada.

Para obtener una segunda solución factible básica, se hacen $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, por lo cual la ecuación vector de restricción se vuelve:

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

Resolviendo esta ecuación para x_1 y x_2, se obtiene $x_1 = 3$ y $x_2 = 0$. Los vectores $\mathbf{A}$ correspondientes, $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, son linealmente independientes, así que la solución completa, $[3, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, es básica. Las variables básicas son x_1 y x_2, y ya que una de ellas es cero, la solución es degenerada.

3.10 Determínese si el vector $[0,7]^T$ es una combinación convexa del conjunto $\{[3,6]^T, [-6,9]^T, [2,1]^T, [-1,1]^T\}$.

Para estos vectores, (3.2) se convierte en:

$$\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix}=\beta_1\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}+\beta_3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\beta_4\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

o

$$\begin{aligned}3\beta_1-6\beta_2+2\beta_3-\beta_4&=0\\6\beta_1+9\beta_2+\beta_3+\beta_4&=7\end{aligned}\tag{1}$$

A estas ecuaciones se añade una tercera condición,

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=1\tag{2}$$

Se debe determinar si existen valores *no negativos* de β_1, β_2, β_3, y β_4 que satisfagan simultáneamente (1) y (2). Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$\beta_1=\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}\beta_4 \qquad \beta_2=\tfrac{1}{3}-\tfrac{5}{16}\beta_4 \qquad \beta_3=(-19/16)\beta_4$$

con β_4 arbitraria. La selección $\beta_4 = 0$ es forzada y da:

$$\beta_1=\tfrac{2}{3} \qquad \beta_2=\tfrac{1}{3} \qquad \beta_3=0 \qquad \beta_4=0$$

como un conjunto aceptable de constantes. Entonces, $[0,7]^T$ es una combinación convexa del conjunto dado de cuatro vectores.

3.11 Si $\mathscr{Q}$ y $\mathscr{R}$ son conjuntos convexos, demuéstrese que su intersección $\mathscr{Q}\cap\mathscr{R}$ es un conjunto convexo.

Sean $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ dos vectores cualesquiera, en $\mathscr{Q}\cap\mathscr{R}$. Entonces, el segmento línea entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ está en $\mathscr{Q}$ (porque tanto $\mathbf{X}$ como $\mathbf{Y}$ están en $\mathscr{Q}$, y $\mathscr{Q}$ es convexo) y está en $\mathscr{R}$ (similarmente). Entonces, el segmento línea está en $\mathscr{Q}\cap\mathscr{R}$; por lo tanto $\mathscr{Q}\cap\mathscr{R}$ es convexo.

En el caso de que $\mathscr{Q}$ y $\mathscr{R}$ sean poliedros convexos (es decir que tengan un número grande finito de puntos extremos), es intuitivamente obvio que la intersección es también un poliedro convexo.

3.12 Demuéstrese que la función objetivo $z = f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X}$ del sistema (2.3) tiene su óptimo (digamos que un mínimo) en un punto extremo de $\mathscr{S}$, siempre y cuando exista un mínimo y $\mathscr{S}$ esté acotado.

Si existe un mínimo, entonces existe un punto $\mathbf{X}_0\in\mathscr{S}$; por ejemplo:

$$f(\mathbf{X}_0)\le f(\mathbf{X}) \text{ cuando } \mathbf{X}\in\mathscr{S}\tag{1}$$

Si $\mathbf{X}_0$ es un punto extremo de $\mathscr{S}$, el problema está resuelto. Si no, se debe obtener un punto extremo $\mathbf{X}_m$ como $f(\mathbf{X}_m) = f(\mathbf{X}_0)$.

Ahora bien, $\mathscr{S}$ tiene sólo un número finito de puntos extremos; se les denotará como $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_p$. Ya que $\mathscr{S}$ es acotado (además de ser cerrado), el teorema 3.2 asegura que $\mathbf{X}_0$ puede escribirse como una combinación convexa de estos puntos extremos; esto es, existen β_j ($j = 1,2, \ldots, p$), no negativos, cuya suma es 1, así

$$\mathbf{X}_0 = \sum^{p} \beta_j \mathbf{X}_j$$

Considérese a $\mathbf{X}_m$ como el mínimo de $f(\mathbf{X})$ sobre los puntos extremos. Por (1), $f(\mathbf{X}_0) \leq f(\mathbf{X}_m)$. Pero

$$f(\mathbf{X}_0) = f\left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbf{X}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f(\mathbf{X}_j) \geq \sum_{j=1}^{p} \beta_j f(\mathbf{X}_m) = f(\mathbf{X}_m) \sum_{j=1}^{p} \beta_j = f(\mathbf{X}_m) \tag{2}$$

En consecuencia, $f(\mathbf{X}_0) = f(\mathbf{X}_m)$, así que hay un punto extremo, específicamente $\mathbf{X}_m$, en el cual $f(\mathbf{X})$ llega a su mínimo.

De acuerdo con el *teorema fundamental de Weierstrass* (teorema 11.1), una función continua —en particular una función lineal como $f(\mathbf{X})$— en realidad asume un valor mínimo en una región cerrada y acotada. Se concluye que el programa lineal estándar siempre tiene una solución óptima de punto extremo, cuando $\mathscr{S}$ es acotada. Si $\mathscr{S}$ no es acotada, puede ser que el óptimo no exista; sin embargo, si existe, nuevamente estará en un punto extremo.

3.13 Compruébese que cada punto extremo de $\mathscr{S}$ tiene al menos $n - m$ componentes cero y es una solución factible básica.

Sea $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ un punto extremo de $\mathscr{S}$. Sin perder generalidad, se puede considerar que a las variables x se les han asignado subíndices, de manera que $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ($r \leq n$) son positivas y todos los componentes subsecuentes de $\mathbf{X}$, si los hay, son cero. Ya que $\mathbf{X} \in \mathscr{S}$ se tiene $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, lo cual como una consecuencia de que $x_j = 0$ para $j > r$, se puede escribir en la forma vectorial.

$$\sum_{j=1}^{r} x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{B} \tag{1}$$

Se mostrará primero que los vectores $\mathbf{A}_j$ involucrados en (1) son linealmente independientes. *Considérese que no lo son.* Entonces, existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, no todas cero. Así,

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0} \tag{2}$$

Sea θ un número positivo; entonces, de (1) y (2) se tiene:

$$\sum_{j=1}^{r} (x_j + \theta\alpha_j)\mathbf{A}_j = \mathbf{B} \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{r} (x_j - \theta\alpha_j)\mathbf{A}_j = \mathbf{B} \tag{3}$$

Si se selecciona θ lo suficientemente pequeña como para que $x_j + \theta\alpha_j$ y $x_j - \theta\alpha_j$ permanezcan positivas para toda $j = 1,2, \ldots, r$, entonces, se tiene directamente de (3) que:

$$\mathbf{X}_1 = [x_1 + \theta\alpha_1, x_2 + \theta\alpha_2, \ldots, x_r + \theta\alpha_r, 0, 0, \ldots, 0]^T$$
$$\mathbf{X}_2 = [x_1 - \theta\alpha_1, x_2 - \theta\alpha_2, \ldots, x_r - \theta\alpha_r, 0, 0, \ldots, 0]^T$$

son *distintos* elementos de $\mathscr{S}$. Pero entonces $\mathbf{X} = \frac{1}{2}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_2$ lo cual es imposible, ya que $\mathbf{X}$ es un punto extremo de $\mathscr{S}$. Entonces $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r\}$ debe ser un conjunto linealmente independiente.

Ya que los vectores son de m dimensiones, se concluye a partir del teorema 3.1 que no puede haber más de m de ellos que sean linealmente independientes; por consiguiente, $r \leq m$. Pero todo componente de $\mathbf{X}$, después del r-ésimo, es cero; por lo tanto $\mathbf{X}$ debe tener al menos $n - m$ componentes.

Cuando $r = m$, la prueba anterior establece de inmediato que $\mathbf{X}$ es una solución factible básica. Si $r < m$, siempre es posible (suponiendo el rango de $\mathbf{A} = m$) identificar $m - r$ componentes cero de $\mathbf{X}$ tales que sus vectores $\mathbf{A}$ correspondientes se combinen con $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots,$ y $\mathbf{A}_r$ para formar un conjunto linealmente independiente. Entonces, nuevamente, $\mathbf{X}$ es una solución factible básica.

3.14 Compruébese que cada solución factible básica es un punto extremo de $\mathscr{S}$.

Sea $\mathbf{X}$ una solución factible básica. Entonces, $\mathbf{X} \in \mathscr{S}$, y al menos $n - m$ de los componentes de $\mathbf{X}$, son cero. Sin perder generalidad, se puede considerar que a las variables x se les han asignado subíndices, de manera que los componentes positivos de $\mathbf{X}$ aparezcan primero:

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \tag{1}$$

con $x_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, s$) y $s \le m$. En consecuencia, la igualdad $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ puede escribirse en forma vectorial.

$$\sum^{s} x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{B}$$

donde, debido a que $\mathbf{X}$ es básico, el conjunto $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_s\}$ es linealmente independiente (véase problema 3.22).

Considérese que $\mathbf{X}$ *no es un punto extremo de* $\mathscr{S}$. Entonces, $\mathbf{X}$ puede expresarse como una combinación convexa de otros dos puntos en $\mathscr{S}$:

$$\mathbf{X} = \beta_1\mathbf{X}_1 + \beta_2\mathbf{X}_2 \qquad \text{con} \qquad \mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2 \tag{2}$$

Ya que los componentes de $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son no negativos, y las constantes β_1 y β_2 son estrictamente positivas, de (1) y (2) se concluye que los últimos $n - s$ componentes de $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son también cero. Por lo tanto,

$$\mathbf{X}_1 = [c_1, c_2, \ldots, c_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \qquad \mathbf{X}_2 = [d_1, d_2, \ldots, d_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \tag{3}$$

Por (3), $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{B}$ y $\mathbf{AX}_2 = \mathbf{B}$ toman las formas vectoriales:

$$\sum_{j=1}^{s} c_j \mathbf{A}_j = \mathbf{B} \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{s} d_j \mathbf{A}_j = \mathbf{B}$$

Usando el resultado del problema 3.5, se puede concluir que $c_j = d_j$, por lo tanto, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$. Esta contradicción establece que $\mathbf{X}$ es, realmente, un punto extremo.

3.15 Compruébese que la solución inicial $\mathbf{X}_0$ generada en el capítulo 2 es una solución factible básica.

El conjunto de vectores $\mathbf{A}$ correspondiente a la solución inicial constituye las $m \times m$ columnas de la matriz identidad, las cuales son linealmente independientes.

Problemas complementarios

3.16 Determínese gráficamente si $[1,2]^T$ es una combinación convexa de $[1,1]^T$ y $[2, -1]^T$.

3.17 Escríbanse en forma vectorial las ecuaciones de restricción para el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
\text{minimícese: } & z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + Mx_4 + 0x_5 \\
\text{con las condiciones: } & x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 3 \\
& 2x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 + x_5 = 6
\end{aligned}$$

con: todas las variables no negativas.

3.18 Determínese cuál o cuáles de los siguientes vectores son soluciones factibles básicas para el programa lineal del problema 3.17. ¿Es degenerada alguna de estas soluciones factibles básicas?

(*a*) $[1, 1, 0, 0, 0]^T$ (*b*) $[3, 0, 0, 0, 0]^T$ (*c*) $[0, 0, 3, 0, 6]^T$ (*d*) $[0, 0, 3, 2, 8]^T$

3.19 Escríbanse en forma vectorial las ecuaciones de restricción para el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
\text{maximícese: } & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\
\text{con las condiciones: } & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \qquad = 9 \\
& 2x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 \qquad + x_6 \qquad = 9 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 = 0
\end{aligned}$$

con: todas las variables no negativas.

3.20 Determínese cuál o cuáles de los siguientes vectores son soluciones factibles básicas para el programa lineal del problema 3.19. ¿Es degenerada alguna de estas soluciones factibles básicas?

(*a*) $[3, 3, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ (*c*) $[0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]^T$ (*e*) $[1, 0, 0, 0, 8, 7, 1]^T$

(*b*) $[2, 2, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ (*d*) $[0, 0, 0, 0, 9, 9, 0]^T$ (*f*) $[0, 0, 9, 0, 0, 9, -9]^T$

3.21 Compruébese que si una función lineal asume su mínimo en dos puntos diferentes de un conjunto convexo, entonces asume su mínimo sobre todo el segmento línea entre los puntos.

3.22 Compruébese que todo subconjunto no vacío de vectores linealmente independientes, es a su vez linealmente independiente.

3.23 Compruébese que cualquier conjunto de vectores que contenga al vector cero, es linealmente independiente.

Capítulo 4

Programación lineal: el método símplex

EL TABLEAU SÍMPLEX

El *método símplex* es un procedimiento matricial para resolver programas lineales expresados en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{optimícese:}\quad & z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\ \text{con la condición:}\quad & \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\ \text{con:}\quad & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ y es conocida una solución factible básica $\mathbf{X}_0$ (problema 3.15). Empezando con $\mathbf{X}_0$, el método localiza sucesivamente otras soluciones factibles básicas que tienen mejores valores del objetivo, hasta obtener la solución óptima. Para programas de optimización, el método símplex utiliza el tableau 4-1, en el cual $\mathbf{C}_0$ designa al vector de costo asociado con las variables en $\mathbf{X}_0$.

		$\mathbf{X}^T$ $\mathbf{C}^T$	
$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{C}_0$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
		$\mathbf{C}^T - \mathbf{C}_0^T\mathbf{A}$	$-\mathbf{C}_0^T\mathbf{B}$

Tableau 4-1

Para programas de maximización, el tableau 4-1 se aplica si a los elementos del renglón inferior *se les cambian los signos.*

Ejemplo 4.1 Para el programa de maximización del problema 2.5, $\mathbf{C}_0 = [0.2, \mathbf{M}]^T$. Entonces

$$\mathbf{C}^T - \mathbf{C}_0^T\mathbf{A} = [1, 2, 3, 0, 0, M] - [0, 2, M]\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1, 2, 3, 0, 0, M] - [10 + 8M, 2, 12 + 9M, 0, -M, M] = [-9 - 8M, 0, -9 - 9M, 0, M, 0]$$

$$-\mathbf{C}_0^T\mathbf{B} = -[0, 2, M]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = -14 - 2M$$

y el tableau 4-1 se convierte en:

		x_1 1	x_2 2	x_3 3	x_4 0	x_5 0	x_6 M	
x_4	0	3	0	4	1	0	0	5
x_2	2	5	1	6	0	0	0	7
x_6	M	8	0	9	0	-1	1	2
		$-9-8M$	0	$-9-9M$	0	M	0	$-14-2M$

SIMPLIFICACIÓN AL TABLEAU

Para cada j ($j = 1,2, \ldots, n$), defínase $z_j \equiv \mathbf{C}_0^T\mathbf{A}_j$, el producto escalar (o producto punto) de $\mathbf{C}_0$ con la columna j de **A**. El ítem j en el último renglón del tableau 4-1 es $c_j - z_j$ (o, para un programa de maximización, $z_j - c_j$), donde c_j es el costo en el segundo renglón del tableau, inmediatamente encima de $\mathbf{A}_j$. Una vez que se obtiene este último renglón, el segundo renglón y la segunda columna del tableau, que corresponden respectivamente a $\mathbf{C}^T$ y $\mathbf{C}_0$, resultan superfluos y pueden eliminarse.

EL MÉTODO SÍMPLEX

PASO 1 Localícese el número más negativo en el renglón inferior del tableau símplex, excluyendo la última columna. A la columna en la cual aparece este número, se le denominará *columna de trabajo*. Si existe más de una posibilidad en la selección del número más negativo, selecciónese sólo uno.

PASO 2 Obténganse razones dividiendo cada número *positivo* de la columna de trabajo, excluyendo el último renglón, entre el elemento en el mismo renglón y en la última columna. Al elemento de la columna de trabajo que dé la razón *más pequeña*, se le denomina *elemento pivote*. Si más de un elemento da la misma razón más pequeña, selecciónese uno de ellos. Si ningún elemento en la columna de trabajo es positivo, el programa no tiene solución.

PASO 3 Úsense operaciones elementales de renglones para convertir el elemento pivote a 1 y reducir después a todos los *otros* elementos en la columna de trabajo a 0.

PASO 4 Reemplácese la variable x en el renglón pivote y en la primera columna por la variable x en el primer renglón y en la columna pivote. Esta nueva primera columna es ahora el conjunto de variables básicas (véase el Cap. 3).

PASO 5 Repítanse los pasos 1 al 4 hasta que no queden números negativos en el último renglón, excluyendo a la última columna.

PASO 6 La solución óptima se obtiene asignando a cada variable de la primera columna aquel valor en el renglón correspondiente y en la última columna. A todas las otras variables se les asigna el valor cero. El valor asociado z^*, último valor óptimo de la función objetivo, es el número en el último renglón y última columna para un programa de maximización, pero es el *negativo* de este número para un programa de minimización.

MODIFICACIONES PARA PROGRAMAS CON VARIABLES ARTIFICIALES

Siempre que existan variables artificiales como parte de la solución inicial $\mathbf{X}_0$, el último renglón del tableau 4-1 contendrá el costo penal **M** (véase el Cap. 2). Para minimizar el error de redondeo (véase el problema 4.6), se añaden las siguientes modificaciones al método símplex, el algoritmo resultante es el *método de dos fases*.

Cambio 1: El último renglón del tableau 4-1 se descompone en dos renglones; el primero comprende aquellos términos que no contienen a **M**, mientras que el segundo comprende a los coeficientes de **M** en los términos restantes.

Ejemplo 4.2 El último renglón del tableau en el ejemplo 4.1 es:

$$-9-8M \quad 0 \quad -9-9M \quad 0 \quad M \quad 0 \quad -14-2M$$

Bajo el cambio 1, se transformarían en los dos renglones

$$\begin{array}{ccccccc} -9 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ -8 & 0 & -9 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

Cambio 2: Se aplica el paso 1 del método símplex al último renglón generado en el cambio 1 (seguido por los pasos 2, 3 y 4), hasta que el último renglón no contenga elementos negativos. Entonces, se aplica el paso 1 a los elementos del penúltimo renglón que se encuentren situados sobre ceros en el último renglón.

Cambio 3: Siempre que una variable artificial deja de ser básica —es decir, que se quita de la primera columna del tableau como resultado del paso 4—, se elimina del renglón superior del tableau, al igual que toda la columna abajo de ella. (Esta modificación simplifica los cálculos manuales, pero no está incluida en la mayor parte de los programas de computadora).

Cambio 4: El último renglón puede eliminarse del tableau, siempre que todos sus elementos sean cero.

Cambio 5: Si en el conjunto básico final están presentes variables artificiales *diferentes de cero,* el programa no tiene solución. (En cambio, cuando una o más de las ecuaciones de restricción originales es redundante, las variables artificiales de valor cero aparecen como variables básicas).

Problemas resueltos

4.1

$$\begin{aligned} \text{maximícese:}\quad & z = x_1 + 9x_2 + x_3 \\ \text{con las condiciones:}\quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ \text{con:}\quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Este programa se pone en forma estándar, empezando por introducir variables de holgura x_4 y x_5 en la primera y segunda desigualdades de restricción, respectivamente, y definiendo después

$$\mathbf{X} \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \qquad \mathbf{C} \equiv [1, 9, 1, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 \equiv \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Los costos asociados con los componentes $\mathbf{X}_0$, variables de holgura, son cero; por lo tanto, $\mathbf{C}_0 \equiv [0,0]^T$. El tableau 4-1 queda:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		1	9	1	0	0	
x_4	0	1	2	3	1	0	9
x_5	0	3	2	2	0	1	15

Para calcular el último renglón de este tableau, se emplea la simplificación al tableau y primero se calcula por inspección cada z_j; éste es el producto escalar de la columna 2 y la columna j de **A**. Después se le resta el costo correspondiente c_j (programa de maximización). En este caso, la segunda columna es cero, por lo que $z_j - c_j = 0 - c_j = -c_j$. Por lo tanto, el renglón inferior del tableau, excluyendo al último elemento, es sólo el negativo del renglón 2. El último elemento del último renglón es simplemente el producto escalar de la columna 2 y la columna final **B**, así que también es cero. En este punto, el segundo renglón y la segunda columna del tableau son superfluos. Eliminándolos, se obtiene el tableau 1 como el tableau inicial completo.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	2*	3	1	0	9
x_5	3	2	2	0	1	15
$(z_j - c_j)$:	−1	−9	−1	0	0	0

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
x_5	2	0	−1	−1	1	6
	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

Tableau 2

Se puede ahora aplicar el método símplex. El elemento más negativo en el último renglón del tableau 1 es -9, correspondiente a la columna x_2; por lo tanto, esta columna se transforma en la columna de trabajo. Obteniendo las razones $9/2 = 4.5$ y $15/2 = 7.5$, se encuentra que el elemento 2, marcado con asterisco en el tableau 1, es el elemento pivote que da la razón más pequeña. Entonces, aplicando los pasos 3 y 4 al tableau 1, se obtiene el tableau 2. Ya que el último renglón del tableau 2 no contiene elementos negativos, se tiene del paso 6 que la solución óptima es

4.2

$$\begin{aligned}
\text{minimícese:}\quad & z = 80x_1 + 60x_2 \\
\text{con las condiciones:}\quad & 0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\
& x_1 + \quad x_2 = \ 1 \\
\text{con:}\quad & x_1 \text{ y } x_2 \text{ no negativas.}
\end{aligned}$$

Añadiendo respectivamente una variable de holgura x_3 y una variable artificial x_4 a la primera y segunda restricciones, el programa se convierte a la forma estándar, con

$$\mathbf{X} \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \qquad \mathbf{C} \equiv [80, 60, 0, M]^T$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0.20 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 \equiv \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estas matrices, junto con $\mathbf{C}_0 \equiv [0, M]^T$, en el tableau 4-1, se obtiene el tableau 0. Ya que el renglón inferior incluye a **M**, se aplica el cambio 1; el tableau 1 resultante es el tableau inicial para el método de dos fases.

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		80	60	0	M	
x_3	0	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4	M	1	1	0	1	1
		$80-M$	$60-M$	0	0	$-M$

Tableau 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4	1*	1	0	1	1
$(c_j - z_j)$:	80	60	0	0	0
	-1	-1	0	0	-1

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	0.12*	1	0.05
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80
	0	0	0	0

Tableau 2

Usando tanto el paso 1 del método símplex como el cambio 2, se encuentra que el elemento más negativo en el último renglón del tableau 1 (excluyendo la última columna) es -1, que aparece dos veces. Seleccionando arbitrariamente la columna x_1 como la columna de trabajo, se forman las razones $0.25/0.20 = 1.25$ y $1/1 = 1$. El elemento 1, marcado con asterisco en el tableau 1, es el elemento pivote, ya que da la razón más pequeña. Entonces, aplicando los pasos 3 y 4 y el cambio 3 al tableau 1, se obtiene el tableau 2. Nótese que x_1 reemplaza a la variable artificial x_4 en la primera columna del tableau 2, así que toda la columna x_4 queda eliminada del tableau 2. Ahora, sin variables artificiales en la primera columna y realizando el cambio 3, el último renglón del tableau deberá estar totalmente en ceros. Lo está, y mediante el cambio 4, este renglón puede eliminarse, dando:

$$0 \qquad -20 \qquad 0 \qquad -80$$

como nuevo último renglón del tableau 2.

Repitiendo los pasos del 1 al 4, se encuentra que la columna x_2 es la nueva columna de trabajo (recuérdese que el último elemento en el último renglón está excluido debido al paso 1); el elemento marcado con asterisco en el tableau 2 es el nuevo pivote y las operaciones elementales de renglones dan el tableau 3, en el cual todos los cálculos han sido redondeados a cuatro cifras significativas. Ya que el último renglón del tableau 3, excluyendo la última columna, no contiene elementos negativos, se tiene del paso 6 que $x_1^* = 0.5833$, $x_2^* = 0.4167$, $x_3^* = x_4^* = 0$, con $z^* = 71.67$. (Compárese con el problema 1.2).

	x_1	x_2	x_3	
x_2	0	1	8.333	0.4167
x_1	1	0	−8.333	0.5833
	0	0	166.7	−71.67

Tableau 3

4.3

$$\text{maximícese:} \quad z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{con las condiciones:} \quad \begin{aligned} 6x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

con: todas las variables no negativas.

Este programa se pone en forma estándar introduciendo, respectivamente, las variables x_3, x_4 y x_5 en las desigualdades de restricción, y después las variables artificiales x_6, x_7 y x_8, respectivamente, en las ecuaciones resultantes. Aplicando luego el método de dos fases y redondeando todos los cálculos a cuatro cifras significativas, se generan secuencialmente los siguientes tableaux, en cada uno de los cuales el elemento pivote aparece marcado por un asterisco.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
		5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	
x_6	$-M$	6*	1	−1	0	0	1	0	0	6
x_7	$-M$	4	3	0	−1	0	0	1	0	12
x_8	$-M$	1	2	0	0	−1	0	0	1	4
$(z_j - c_j)$:		−5	−2	0	0	0	0	0	0	0
		−11	−6	1	1	1	0	0	0	−22

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	
x_1	1	0.1667	−0.1667	0	0	0	0	1
x_7	0	2.333	0.6668	−1	0	1	0	8
x_8	0	1.833*	0.1667	0	−1	0	1	3
	0	−1.167	−0.8335	0	0	0	0	5
	0	−4.166	−0.8337	1	1	0	0	−11

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	
x_1	1	0	−0.1819	0	0.09095	0	0.7271
x_7	0	0	0.4546	−1	1.273*	1	4.181
x_2	0	1	0.09094	0	−0.5456	0	1.637
	0	0	−0.7274	0	−0.6367	0	6.910
	0	0	−0.4548	1	−1.273	0	−4.180

Tableau 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	−0.2144	0.07144*	0	0.4284
x_5	0	1	0.3571	−0.7855	1	3.284
x_2	0	1	0.2858	−0.4286	0	3.429
	0	0	−0.5000	−0.5001	0	9.001
	0	0	−0.0002	0.0001	0	0.0005

Tableau 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	14.00	0	−3.001	1	0	6.000
x_5	11.00	0	−2.000	0	1	7.997
x_2	6.000	1	−1.000	0	0	6.001
	7.001	0	−2.001	0	0	12.00

Tableau 5

El tableau 4 es el primero que no contiene variables artificiales en su primera columna; por lo tanto, realizando el cambio 3, el último renglón del tableau deberá ser cero. Dentro de los errores de redondeo efectivamente es cero, por lo que se puede eliminar del tableau. El tableau 5, sin embargo, presenta un problema que no puede ignorarse: ¡La columna de trabajo es la columna x_3 y todos sus elementos son negativos! Se concluye, por el paso 2, que el programa original no tiene solución. (Es fácil mostrar gráficamente que la región factible es infinita y que la función objetivo puede agrandarse arbitrariamente, seleccionando puntos factibles con coordenadas arbitrariamente grandes.)

4.4 maximícese: $z = 2x_1 + 3x_2$

con las condiciones: $x_1 + 2x_2 \leq 2$

$6x_1 + 4x_2 \geq 24$

con: todas las variables no negativas.

Este programa se pone en la forma estándar, añadiendo una variable de holgura x_3 a la primera restricción y una variable superflua x_4, así como una variable artificial x_5, a la segunda restricción. Así, el tableau 4-1, con el cambio 1, se vuelve el tableau 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		2	3	0	0	$-M$	
x_3	0	1*	2	1	0	0	2
x_5	$-M$	6	4	0	−1	1	24
$(z_j - c_j)$:		−2	−3	0	0	0	0
		−6	−4	0	1	0	−24

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	2	1	0	0	2
x_5	0	−8	−6	−1	1	12
	0	1	2	0	0	4
	0	8	6	1	0	−12

Tableau 2

Aplicando el algoritmo de dos fases al tableau 1 (el elemento pivote tiene asterisco), se genera el tableau 2. Ahora, no hay valores negativos en el último renglón del tableau 2, y en el penúltimo renglón no hay valores negativos encima de algún cero del último renglón. Así, el método de dos fases señala que se ha logrado la optimización. ¡Pero la variable artificial x_5, diferente de cero, es aún básica! Mediante el cambio 5, el programa original no tiene solución. (En este caso $\mathscr{S}$ es vacío, así que las desigualdades de restricción y las condiciones de no negatividad no pueden satisfacerse simultáneamente).

4.5

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximícese:} & z = -x_5 \\
\text{con las condiciones:} & 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 - x_5 \leq 0 \\
& -4x_1 + 2x_2 - x_3 - 8x_4 - x_5 \leq 0 \\
& -3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\
& -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq -1 \\
\text{con:} & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \text{ no negativas}
\end{array}
$$

Ya que x_5 no tiene restricciones, se da $x_5 = x_6 - x_7$, donde tanto x_6 como x_7 son no negativas; entonces, todas las variables son no negativas. Se multiplica la última restricción por -1, forzando así un lado derecho positivo. Finalmente, se logra llegar a la forma estándar agregando las variables de holgura de la x_8 a la x_{11}, respectivamente, a los lados izquierdos de las primeras cuatro restricciones, restando la variable superflua x_{12} y además agregando la variable x_{13} al lado izquierdo de la última restricción. El tableau inicial para el método de dos fases es el tableau 1, a partir del cual se derivan los tableaux 2, 3, . . . , 6. Del tableau 3 en adelante, el renglón final es siempre no negativo y el paso 1 del método símplex se aplica sólo a aquellos elementos del penúltimo renglón que están situados arriba de ceros en el último renglón. Del tableau 6,

$$x_1^* = 0 \qquad x_2^* = 0.11667 \qquad x_3^* = 0.7 \qquad x_4^* = 0.18333 \qquad x_5^* = x_6^* - x_7^* = -1.93334$$

con $z^* = 1.93334$.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
		0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	$-M$	
x_8	0	3*	−2	−4	6	−1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_9	0	−4	2	−1	−8	−1	1	0	1	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	−3	−2	−1	−1	1	0	0	1	0	0	0	0
x_{11}	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{13}	$-M$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	−1	1	1
$(z_j - c_j)$:		0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0
		−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	1	0	−1

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_1	1	−0.666667	−1.33333	2	−0.333333	0.333333	0.333333	0	0	0	0	0	0
x_9	0	−0.666668	−6.33332	0	−2.333333	2.33333	1.33333	1	0	0	0	0	0
x_{10}	0	−3	−2	−1	−1	1	0	0	1	0	0	0	0
x_{11}	0	1.66667	2.33333*	−1	0.333333	−0.333333	−0.333333	0	0	1	0	0	1
x_{13}	0	1.66667	2.33333	−1	0.333333	−0.333333	−0.333333	0	0	0	−1	1	1
	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0
	0	−1.666667	−2.33333	1	−0.333333	0.333333	0.333333	0	0	0	1	0	−1

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_1	1	0.285715	0	1.42857	−0.142857	0.142857	0.142857	0	0	0.571428	0	0	0.571428
x_9	0	3.85715	0	−2.71428	−1.42857	1.42857	0.428571	1	0	2.71427	0	0	2.71427
x_{10}	0	−1.57142	0	−1.85714	−0.714286	0.714286*	−0.285714	0	1	0.857144	0	0	0.857144
x_3	0	0.714288	1	−0.428572	0.142857	−0.142857	−0.142857	0	0	0.428572	0	0	0.428572
x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	1	0
	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Tableau 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_4	0.583333	0	0	1	0	0	0.0666667	−0.05	−0.0166668	0.183333	0	0	0.183333
x_2	−0.0833332	1	0	0	0	0	0.133333	0.15	−0.283333	0.116667	0	0	0.116667
x_7	1.33333	0	0	0	−1	1	0.0666671	0.20	0.733334	1.93334	0	0	1.93334
x_3	0.499999	0	1	0	0	0	−0.200000	−0.10	0.300000	0.700000	0	0	0.700000
x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	1	0
	1.33333	0	0	0	0	0	0.0666659	0.20	0.733333	1.93334	0	0	1.93334
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Tableau 6

4.6 Resuélvase el siguiente programa empleando el método símplex, sin ninguna de las modificaciones (este procedimiento es conocido como *método de la gran M, Big M method*), mostrando cómo podría afectar al resultado el redondeo.

$$\text{maximícese:} \quad z = -8x_1 + 3x_2 - 6x_3$$

$$\text{con las condiciones:} \quad x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 6$$

$$\text{con:} \quad \text{todas las variables no negativas.}$$

Este programa se pone en la forma estándar, añadiendo la variable superflua x_4 a la desigualdad de restricción y luego las variables artificiales x_5 y x_6 a las dos ecuaciones de restricción. Con la sustitución de los coeficientes apropiados en el tableau 4-1 y aplicando directamente el método símplex, redondeando todos los cálculos a cuatro cifras significativas y con los elementos pivote señalados con asterisco, se generan sucesivamente los tableaux del 1 al 4.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
		−8	3	−6	0	$-M$	$-M$	
x_5	$-M$	1	−3	5	0	1	0	4
x_6	$-M$	5*	3	−4	−1	0	1	6
$(z_j - c_j)$:		$-6M+8$	−3	$-M+6$	M	0	0	$-10M$

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	−3.6	5.8*	0.2	1	−0.2	2.8
x_1	1	0.6	−0.8	−0.2	0	0.2	1.2
	0	$3.6M-7.8$	$-5.8M+12.4$	$-0.2M+1.6$	0	$1.2M-1.6$	$-2.8M-9.6$

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	−0.6207	1	0.03448	0.1724	−0.03448	0.4828
x_1	1	0.1034*	0	−0.1724	0.1379	0.1724	1.586
	0	−0.1033	0	1.172	$M-2.138$	$M-1.172$	−15.59

Tableau 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	6.003	0	1	−10.00	1.000	10.00	10.00
x_2	9.671	1	0	−1.667	1.334	1.667	15.34
	0.9990	0	0	0.9998^-	$M-2$	$M-0.9998$	−14.01

Tableau 4

Ya que M indica un número positivo muy grande, todos los valores en el último renglón del tableau 4, excepto el elemento en la última columna, son no negativos. Por lo tanto, la solución óptima se puede leer directamente: $x_3^* = 10.00$, $x_2^* = 15.34$, y todas las otras variables cero, con $z^* = -14.01$.

En los cálculos anteriores fue posible dejar a la cantidad M como literal solamente por tratarse de cálculos realizados a mano. Si se hubiera empleado computadora, habría sido necesario sustituir M por un valor numérico grande, por ejemplo $M = 10\,000$. Entonces, considerando nuevamente todos los números redondeados a *cuatro* cifras significativas, el último renglón del tableau 1 cambia a:

$$-60\,000 \qquad -3 \qquad -10\,000 \qquad 10\,000 \qquad 0 \qquad 0 \qquad -100\,000$$

Nótese que las constantes aditivas $+8$ es el primer valor y $+6$ en el tercero, se pierden en el redondeo. El último renglón del tableau 2 cambia a:

$$0 \qquad 36\,000 \qquad -58\,000 \qquad -2\,000 \qquad 12\,000 \qquad -28\,000$$

mientras que el último renglón del tableau 3 es:

$$0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 10\,000 \qquad 10\,000 \qquad 0$$

¡El cual señala optimización! La solución óptima errónea se leería del tableau 3 como $x_3^* = 0.4828$, $x_1^* = 1.586$, y todas las otras variables cero, con $z^* = 0$.

Este problema de redondeo no ocurre en el método de dos fases, ya que los términos que no involucran a M se separan de los otros términos, haciendo imposible que los términos con M se "coman" a los otros.

4.7 Resuélvase el problema 1.7.

Empleando el programa matemático definido por el sistema (12) en el problema 1.7, se añaden las variables de holgura de x_5 a x_{12} en cada una de las primeras ocho desigualdades de restricción; igualmente, las variables superfluas x_{13} y x_{14} en cada una de las últimas dos desigualdades de restricción, y las variables artificiales x_{15} y x_{16}, respectivamente, en cada una de las dos últimas restricciones. Agregando los coeficientes ade-

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
		4	−3	6	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_5	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20 000
x_7	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60 000
x_9	0	1	−10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	6	−5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{15}	$-M$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	0	50 000
x_{16}	$-M$	0	0	1	1*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	5 000
$(z_j - c_j)$:		−4	3	−6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	−55 000

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	
x_5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15 000
x_7	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	1	−1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	55 000
x_9	1	−10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	−5	0	25 000
x_{11}	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−8	0	40 000
x_{15}	1	1*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	50 000
x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	5 000
	−4	3	−7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−5 000
	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−50 000

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50 000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	15 000
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−0.0909	0	0	0	0.4545	37 727.3
x_8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	45 000
x_9	0	0	0	0	0	0	−11	0	1	1	0	0	−10	−5	85 000
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.0909	0	0	0	−0.4545	2 272.7
x_{11}	0	0	0	0	0	0	−10	0	0	0.9091	1	0	−8	−4.5455	22 727.2
x_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−0.9091	0	1	0	−3.4545	17 272.7
x_2	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	0.0909	0	0	−1	−0.4545	12 272.7
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	−0.0909	0	0	0	−0.5455	2 727.3
	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	3	1	125 000

Tableau 5

cuados en el tableau 4-1 y empleando el cambio 1, se obtiene el tableau 1. Aplicando entonces el método de dos fases, se generan los tableaux 2, . . . , 5. La solución óptima se lee directamente del tableau 5 como $x_1^* = 37\,727.3$ barriles, $x_2^* = 12\,272.7$ barriles, $x_3^* = 2\,272.7$ barriles, $x_4^* = 2\,727.3$ barriles, con $z^* =$ \$ 125 000.

Bajo esta cédula óptima de producción, la Azteca producirá $x_1^* + x_2^* = 50\,000$ barriles de gasolina regular, con una presión de vapor de 22.5 y un octanaje de 89.7. También producirá $x_3^* + x_4^* = 5\,000$ barriles de gasolina extra, con una presión de vapor de 19.5 y un octanaje de 93.0. Así, producirá exactamente la cantidad necesaria para cumplir con sus requerimientos mínimos de suministro, y nada más. Para hacerlo, la Azteca empleará $x_1^* + x_3^* = 40\,000$ barriles de su inventario de petróleo nacional —todo el que tiene— y $x_2^* + x_4^* = 15\,000$ barriles de su inventario de petróleo importado.

4.8 Demuéstrese la validez del método símplex resolviendo algebráicamente el problema 4.2.

El programa en forma estándar es:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:} \quad & z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 + Mx_4 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 \qquad = 0.25 \\ & x_1 + \quad x_2 \qquad + x_4 = \;\; 1 \qquad\qquad (1) \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Aplicando la teoría desarrollada para este sistema en el capítulo 3, se tiene $n = 4$ (variables) y $n = 2$ (ecuaciones de restricción); así que un punto extremo de la región factible $\mathscr{S}$ debe tener al menos $n - m = 2$ componentes cero. Ya que el mínimo debe ocurrir en un punto extremo, éstos son los únicos candidatos que es necesario considerar.

Una solución inicial de punto extremo para el sistema (1) es $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 0.25, x_4 = 1$. Se determina si esta solución puede mejorarse, escribiendo la función objetivo exclusivamente en términos de aquellas variables comúnmente hechas igual a cero, en este caso x_1 y x_2. (Es seguro que las ecuaciones de restricción pueden resolverse para x_3 y x_4 en términos de x_1 y x_2 porque la solución de punto extremo es una solución factible básica). Resolviendo la segunda ecuación de restricción para x_4 y sustituyéndola en la función objetivo, se obtiene:

$$z = (80 - M)x_1 + (60 - M)x_2 + M \qquad (2)$$

Compárese el sistema (1) con el tableau 0 del problema 4.2 y nótese cómo (2) está dada por el último renglón del tableau.

En la solución normal, $x_1 = x_2 = 0$ y, de (2), $z = M$. La función objetivo puede reducirse sustancialmente, si se permite que x_1 o x_2 se vuelva positiva; se selecciona arbitrariamente x_1. Ahora bien, la primera restricción en el sistema (1) limita a x_1 a no pasar de $0.25/0.20 = 1.25$ unidades, si las variables restantes han de conservarse no negativas; mientras que la segunda restricción limita a x_1 a no pasar de 1 unidad, por la misma razón. Ya que ambas restricciones deben satisfacerse, x_1 no puede ser mayor de 1 unidad. Haciendo $x_1 = 1$, lo que es equivalente a hacer $x_2 = x_4 = 0$, se obtiene $x_3 = 0.05$ de la ecuación de restricción. Estos valores constituyen la nueva solución (básica) de punto extremo al programa.

La variable artificial x_4 se añadió inicialmente para proporcionar una primera solución. Finalmente, esta variable debe ser cero. Ya que ahora se tiene una solución al programa en la cual $x_4 = 0$, se puede omitir esta variable de consideraciones posteriores y restringirse al programa

$$\text{minimícese:} \quad z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 \tag{3}$$

$$\text{con las condiciones:} \quad 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \tag{4}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{5}$$

$$\text{con:} \quad \text{todas las variables no negativas.}$$

para el cual se conoce una solución de punto extremo: —$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0.05$—. Obsérvese que este programa modificado tiene $n = 3$ variables y $m = 2$ ecuaciones de restricción, así que los puntos extremos deben tener al menor $3 - 2 = 1$ variables con valor cero.

Para determinar si puede mejorarse la solución inicial para el nuevo programa, se resuelve (5) —ecuación que restringía a x_1— para x_1 y se sustituye el resultado en (3) y (4). El programa cambia a:

$$\text{minimícese:} \quad z = 0x_1 - 20x_2 + 0x_3 + 80 \tag{6}$$

$$\text{con las condiciones:} \quad 0.12x_2 + x_3 = 0.05 \tag{7}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{8}$$

$$\text{con:} \quad \text{todas las variables no negativas}$$

Compárese este programa con el tableau 2 del problema 4-2.

En la solución corriente, $x_2 = 0$, y se tiene de (6) que $z = 80$. Sin embargo, resulta obvio a partir de ésta que z se reducirá si se aumenta x_2. La restricción (7) limita a x_2 a no pasar de $0.05/0.12 = 5/12$, si las otras variables han de permanecer no negativas; mientras que (8) limita a x_2 a no pasar de 1. Ya que deben satisfacerse ambas restricciones, x_2 no puede aumentarse a más de 5/12. Haciendo $x_2 = 5/12$, lo cual fuerza $x_3 = 0$ se obtiene de (8) que $x_1 = 7/12$. Ésta es una nueva solución de punto extremo al programa.

Para determinar si puede mejorarse esta solución, se resuelve (7) —ecuación que restringía a x_2— para x_2 y se sustituye el resultado en (6) y (8). El programa cambia a:

$$\text{minimícese:} \quad z = 0x_1 + 0x_2 + 166.7x_3 + 71.67 \tag{9}$$

$$\text{con las condiciones:} \quad x_2 + 8.333x_3 = 0.4167 \tag{10}$$

$$x_1 - 8.333x_3 = 0.5833 \tag{11}$$

$$\text{con:} \quad \text{todas las variables no negativas.}$$

La ecuación (10) es solamente (7) dividida entre 0.12. Compárese la forma de este programa con el tableau 3 del problema 4.2.

En la solución normal, $x_3 = 0$, así que de (9) se tiene $z = 71.67$. También se tiene de (9) que ninguna asignación positiva a x_3 reducirá a z por abajo de este valor. En realidad, cualquiera de estas asignaciones aumentará el valor de z. Entonces, la solución normal es una solución óptima.

Problemas complementarios

Úsese el método simplex o el de dos fases para resolver los siguientes problemas:

4.9

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ \text{con:} \quad & x_1, x_2 \text{ no negativas} \end{aligned}$$

4.10

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ \text{con:} \quad & x_1, x_2 \text{ no negativas} \end{aligned}$$

4.11

$$\begin{aligned}\text{minimícese:}\quad & z = x_1 + 2x_2\\ \text{con las condiciones:}\quad & x_1 + 3x_2 \geq 11\\ & 2x_1 + x_2 \geq 9\\ \text{con:}\quad & x_1, x_2 \text{ no negativas}\end{aligned}$$

4.12

$$\begin{aligned}\text{maximícese:}\quad & z = -x_1 - x_2\\ \text{con las condiciones:}\quad & x_1 + 2x_2 \geq 5\,000\\ & 5x_1 + 3x_2 \geq 12\,000\\ \text{con:}\quad & x_1, x_2 \text{ no negativas}\end{aligned}$$

4.13

$$\begin{aligned}\text{maximícese:}\quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\\ \text{con las condiciones:}\quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4\\ \text{con:}\quad & \text{todas las variables no negativas.}\end{aligned}$$

4.14

$$\begin{aligned}\text{minimícese:}\quad & z = 14x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 13x_5 + 12x_6\\ \text{con las condiciones:}\quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1200\\ & x_4 + x_5 + x_6 = 1000\\ & x_1 + x_4 = 1000\\ & x_2 + x_5 = 700\\ & x_3 + x_6 = 500\\ \text{con:}\quad & \text{todas las variables no negativas.}\end{aligned}$$

4.15 Problema 2.8.

4.16 Problema 2.10.

4.17 Problema 2.9.

4.18 Problema 2.11.

4.19 Problema 2.13.

4.20 Problema 1.7, pero con inventarios de 80 000 barriles de petróleo nacional y 20 000 barriles de petróleo importado.

4.21 Problema 1.17.

4.22 Problema 1.18.

4.23 Problema 1.19.

4.24 Problema 1.22.