Relaciones y Funciones

Conjunto Producto:

Dados dos conjuntos A y B se llama conjunto producto o producto cartesiano de A x B al conjunto que consta de todos los pares ordenados cuyas primeras componentes pertenecen a A y las segundas componentes a B.

$$A \times B = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in B \}$$

Es posible que A = B en cuyo caso ambas componentes de los pares pertenecen a A:

$$A \times A = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in A \}$$

Ejemplo 1 : $A = \{ x / x \in Z \wedge -2 \leq x < 1 \}$ $B = \{ x / x \in Z \wedge |x| \leq 1 \}$

$$A \times B = \{ (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-1,-1), (-1, 0), (-1, 1), (0,-1), (0, 0), (0, 1) \}$$

$$A \times A = \{ (-2,-2), (-2,-1), (-2, 0), (-1,-2), (-1,-1), (-1, 0), (0,-2), (0,-1), (0, 0) \}$$

En general $A \times B \neq B \times A$, lo comprobamos con el ejemplo anterior:

$$B \times A = \{ (-1,-2), (-1,-1), (-1, 0), (0,-2), (0,-1), (0, 0), (1,-2), (1,-1), (1, 0) \}$$

Ejemplo 2:
En este caso analicemos conjuntos no numéricos en el cual A = {a, e, i , o, u } y B = { m, n, o}

A x B = {(a, m), (e, m), (i, m), (o, m), (u, m), (a, n), (e, n), (i, n), (o, n), (u, n), (a, o), (e, o), (i, o), (o, o), (u, o)}

B x B = {(m, m), (m, n), (m, o), (n, m), (n, n), (n, o), (o, m), (o, n), (o, o)}

Es fácilmente comprobable en este caso también que $A \times B \neq B \times A$

Relación:

Relación de A en B es cualquier subconjunto del conjunto producto A x B. Por lo tanto, también es un conjunto de pares ordenados.

$$R = \{ (x, y) / (x \in A \wedge y \in B) \wedge x R y\}$$

Se anota x R y o bien $(x, y) \in R$

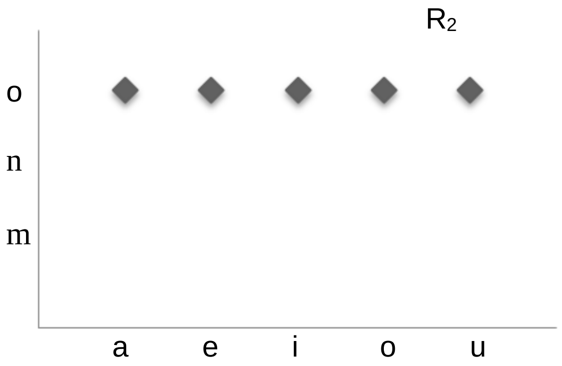
En el ejemplo 1 anterior de A y B, son relaciones de A en B, entre otras, las siguientes:

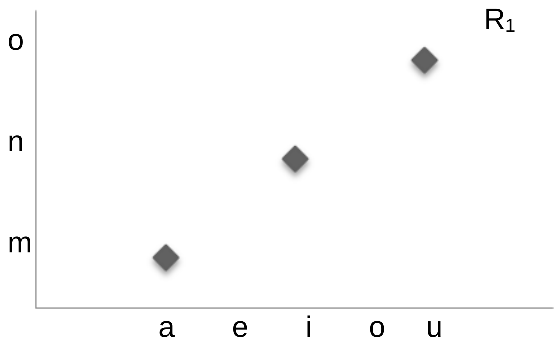
$R_1 = \{ (-2,-1), (-2,1) , (-1, 1), (0, 0)\}$ $R_2 = \{ (0, 0) \}$ $R_3 = \{ (-2, 0), (-1, 0), (0, 0) \}$

En el ejemplo 2 anterior se tienen, entre otras, por ejemplo, las siguientes relaciones:

R_1 = {(a, m), (i, n), (u, o)} R_2 = {(a, o), (e, o), (i, o), (o, o), (u, o)}

Las relaciones se pueden representar en diagramas como los mostrados a continuación considerando el ejemplo 2:





Nota: Cuando los conjuntos involucrados en una relación son numéricos, se puede recurrir a representaciones en ejes cartesianos, como las mostradas más adelante.

Función:

Una función de A en B es una relación que cumple con las condiciones de *existencia y unicidad*, las que pueden sintetizarse diciendo que *para todo elemento de A existe un único elemento de B con el cual se relaciona.*

Retomemos las relaciones ejemplificadas anteriormente. En el ejemplo 1:

$$R_1 = \{ (-2,-1), (-2,1), (-1, 1), (0, 0) \}$$

Esta relación no es una función ya que no cumple con la condición de unicidad, porque el elemento –2 de A esta relacionado con dos elementos de B, el –1 y el 1.

$$R_2 = \{ (0, 0)\}$$

Esta relación tampoco es una función ya que no cumple con la condición de existencia, porque hay elementos de A que no se relacionan con ningún elemento de B.

$$R_3 = \{ (-2, 0), (-1, 0), (0, 1) \}$$

Esta relación si es una función ya que cumple ambas condiciones, todo elemento de A se relaciona con uno único de B.

En el ejemplo 2:

$$R_1 = \{(a, m), (i, n), (u, o)\}$$

Esta relación no es una función ya que no cumple con la condición de existencia, porque hay elementos de A que no se relacionan con ningún elemento de B.

$$R_2 = \{(a, o), (e, o), (i, o), (o, o), (u, o)\}$$

Esta relación si es una función ya que cumple ambas condiciones, todo elemento de A se relaciona con uno único en B.

Es importante cuando nombramos funciones decir en qué conjuntos está definida ya que por ejemplo una relación:

$$x \, R \, y \Leftrightarrow y = x : 3$$

Definida de Z en Z no es función, no cumple con la condición de existencia, por ejemplo, para el entero 2 no existe ningún entero con el cual se relacione a través de la fórmula dada.
En cambio, si está definida de IR en IR sí es función, ya que para todo real existe otro único real que se obtiene dividiendo por 3.

En general el esquema funcional que se utiliza para funciones numéricas es el siguiente:

$$f : A \to B$$
tal que $x \to f(x) = y$

Las funciones numéricas pueden representarse en un par de ejes cartesianos ortogonales, quede bien claro que esa gráfica es sólo una representación de la función, ya que una función es un conjunto de pares ordenados que cumple ciertas condiciones ya enunciadas.

Dominio e imagen de una función:

Sea una función $f : A \to B$
$x \to f(x) = y$

Se llama *dominio de la función* (Dom (f)) al conjunto que contiene a las primeras componentes de los pares ordenados de la relación, y que coincide en una función con el conjunto de partida. Se llama *imagen de la función* (Im (f)) al conjunto que contiene a las segundas componentes de los pares ordenados en cuestión, y está incluido en el conjunto de llegada.

Ejemplo 1: $A = \{ x / x \in Z \wedge -2 \leq x < 1 \}$ $B = \{ x / x \in Z \wedge |x| \leq 1 \}$

$f = \{ (-2, 0), (-1, 0), (0, 1) \}$ Dom (f) = A y Im (f) = {0, 1}

Ejemplo 2: Sea $f: A \to B$ tal que $f(x) = x + 2$ siendo $A = \{1, 2, 3,\}$ y $B = \{x / x \in IN \wedge x < 10\}$

$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ por lo cual el Dom (f) = A y la Im (f) = {3, 4, 5}

Ejemplo 3: Sea $f : IR \to IR$ dada por $f(x) = x^2$

El conjunto dominio es Dom (f) = IR y el conjunto imagen es Im (f) = IR^+ .

Ejemplo 4: Sea $f : IR \to IR$ tal que $f(x) = x^3$

En este caso el Dom (f) = Im (f)= IR

Representaciones de una función:

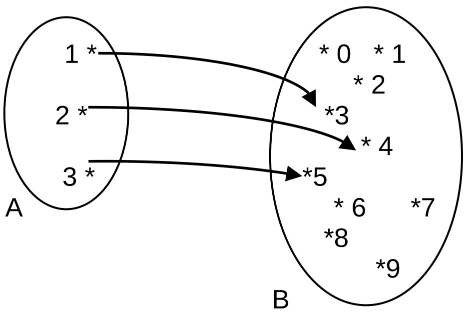
Una función puede representarse de varias maneras, por ejemplo, a través de su esquema funcional, del conjunto de los pares ordenados que la componen, de una tabla, de un diagrama, de una matriz o de un gráfico en ejes cartesianos.

Retomemos los ejemplos del punto anterior:

Ejemplo 1: La siguiente tabla de doble entrada representa los tres pares que componen la función

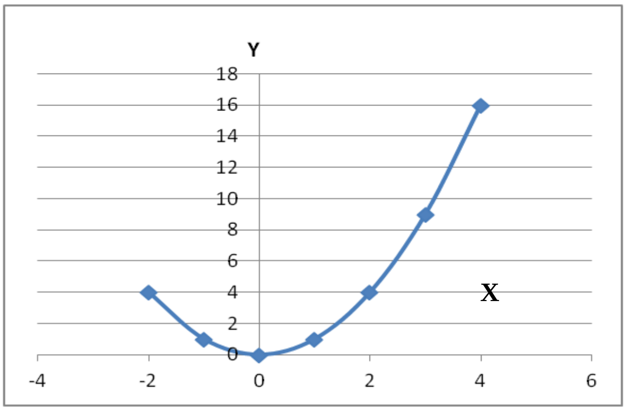
	-1	0	1
-2		●	
-1		●	
0			●

Ejemplo 2: El siguiente diagrama representa la función dada en este ejemplo 2, se lo llama diagrama de Venn- Euler de flechas.

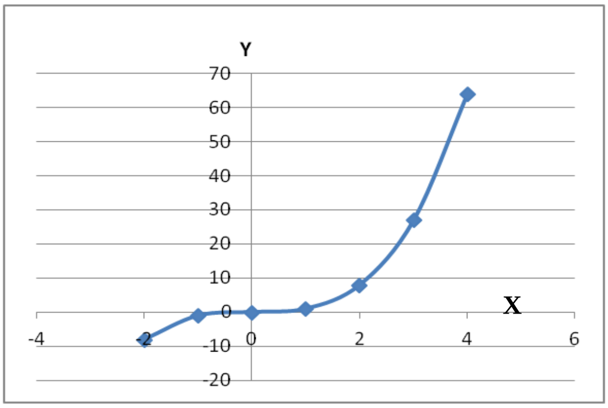


En el tercer y cuarto ejemplos tenemos funciones definidas en el conjunto de los números reales, se puede representar por medio de una gráfica en ejes cartesianos, a continuación, vemos la tabla de valores asociada y la gráfica:

X	Y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

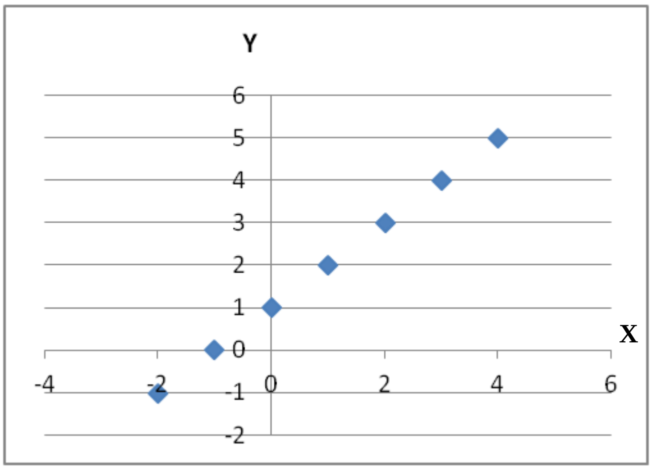


X	Y
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64



Veamos ahora un nuevo ejemplo, la función f definida en el conjunto Z de los números enteros tal que f (x) = x + 1. En este caso debemos tener cuidado ya que la gráfica en ejes cartesianos no será una recta continua, solamente tendremos puntos alineados:

X	Y
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5



Vemos que también se ha construido la tabla asociada a la gráfica y observamos representados los puntos y no la recta que los contiene es debido a que esta función está definida en Z y no en IR.

Ejemplo 3: las funciones f y g dadas por su esquema funcional

f: IR $\rightarrow$ IR
f (x) = 2x + 1

g: IN $\rightarrow$ IN
g(x) = $3x^2$+4