- Espacio vectorial:

Sea V un conjunto no vacío, y (K, +, .) un cuerpo (se trabajará con el cuerpo de los números reales y el cuerpo de los números complejos), se definen una operación binaria interna y una operación binaria externa en V como sigue:

$+ : V \times V \rightarrow V$ tal que $(u, v) \rightarrow u + v$ $\quad$ $. : K \times V \rightarrow V$ tal que $(k, u) \rightarrow k.u$

Se dice que V con dichas operaciones es un K espacio vectorial si se verifican los siguientes axiomas:

A1 – Asociativa: Cualesquiera sean u, v y w de V : $(u + v) + w = u + (v + w)$
A2 – Existencia de elemento neutro: Existe $\vec{0}$ en V para todo u de V: $u + \vec{0} = \vec{0} + u = u$
A3 – Existencia de elementos opuestos: Para todo u de V existe –u también en V: $u + (-u) = -u + u = \vec{0}$
A4 – Conmutativa: Cualesquiera sean u y v de V: $u + v = v + u$
A5 – Para todo k de K, cualesquiera sean u y v de V: $k. (u + v)\ k.u + k.v$
A6 – Cualesquiera sean k y k' de K, para todo u de V: $(k + k') . u = k.u + k'.u$
A7 - Cualesquiera sean k y k' de K, para todo u de V: $(k . k') . u = k. (k'. u)$
A8 – Para todo u de V: $1 . u = u$ (siendo 1 la unidad del cuerpo)

A los elementos del espacio vectorial se los llama *vectores*.

En general este año trabajaremos con espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales o sobre el cuerpo de los complejos.

Consecuencias de la definición de espacio vectorial:

- $0 . u = \vec{0}$ (para todo u de V)
- $k . \vec{0} = \vec{0}$ (cualquiera sea k de K)
- $(-1) . u = -u$ (para todo u de V)

Familia de vectores - Familia libre y familia ligada:

Un conjunto ordenado de vectores: $F = \{ u_1, u_2, ... , u_m \}$ de un espacio vectorial V (K) se denomina *familia de vectores*.
Combinación lineal: Una *combinación lineal* de los vectores de una familia con los escalares $a_1 , ..., a_m$ es siempre un vector del espacio vectorial V (K).

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m , \ u \in V$$

Si el vector u de V es el nulo, entonces la combinación lineal es: $\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m$

Esta combinación lineal es un sistema de ecuaciones, si al resolverlo resulta que los escalares son todos nulos $a_1 = 0 = ... = a_m = 0$ entonces la familia de vectores $F = \{ u_1, u_2, ... , u_m \}$ recibe el nombre de ***familia libre***.
En el caso contrario, si al menos uno de los escalares es no nulo, la familia F se denomina ***ligada***.

Los vectores de una familia libre son *linealmente independientes*, esto significa que ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás de la familia. **Los vectores de una familia ligada son *linealmente dependientes*.**

Propiedades de una familia libre:

1) Si F es una familia libre el vector nulo no pertenece a ella.

Demostración:
Sea F = { $\vec{0}$, u_1, u_2, ... , u_m} una familia de vectores de V (K), en la combinación lineal:

$$\vec{0} = a_0\vec{0} + a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m$$

si suponemos que: $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$ resulta entonces: $\vec{0} = a_0 \vec{0}$ pero por la propiedad que dice que cualquiera sea k el producto k . $\vec{0} = \vec{0}$ con que estaríamos admitiendo que el escalar a_0 no es necesariamente nulo, lo que indica que la familia no es libre.

2) Si una familia de vectores de V consta de un solo vector no nulo, es una familia libre.

Demostración:
Sea F = { u_1 } , con u_1 no nulo, una familia de vectores de V (K), la combinación lineal: $\vec{0} = a_1 u_1$ resulta que es verdadera si $a_1 = 0$ o bien si $u_1 = \vec{0}$, pero partimos de decir que u_1 es no nulo, por lo tanto $a_1 = 0$, lo que indica que F es una familia libre.

3) Si una familia F de vectores de V es libre, toda familia F' incluida en F es también libre.

Demostración:
Sea F = { u_1, u_2, ... , u_m} una familia libre en V (K) y sea F' = { u_1, u_2, ... , u_p} otra familia incluida en F ($p \leq m$) . Por ser F familia libre resulta que:

$$\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m \quad , \text{ con } a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$$

Si planteamos la combinación lineal del vector nulo con los vectores de F' tenemos:
$\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_p u_p$, como habíamos dicho que los m escalares eran ceros, y $p \leq m$, resulta que: $a_1 = a_2 = ... = a_p = 0$, por lo tanto F' es también una familia libre.

Propiedades de una familia ligada:

1) Si el vector nulo pertenece a una familia F de vectores de V, F es familia ligada.

Demostración:
Análoga a la presentada en la propiedad 1 de familia libre.

2) Si F es una familia ligada de vectores de V, toda familia F' que incluya a F es también ligada.

Demostración:
Sea F = { u_1, u_2, ... , u_m} una familia ligada en V (K) y sea F' = { u_1, u_2, ... , u_p} otra familia que incluye a F ($p \geq m$) . Por ser F familia ligada resulta que en la combinación lineal del vector nulo:
$\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m$, al menos un escalar a_i es distinto de cero ($a_i \neq 0$) planteamos la combinación lineal del vector nulo con los vectores de F' tenemos:

$$\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_p u_p$$

como habíamos dicho que al menos un escalar a_i es no nulo, y resulta que $p \geq m$, en esta segunda combinación lineal también está ese escalar no nulo, lo que indica que F' es familia ligada.

3) Si F es una familia ligada de vectores de V, al menos uno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Demostración:
Sea F = { u_1, u_2, ... , u_m} una familia ligada en V (K), y sea la C.L. del vector nulo:
$\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m$, por ser F ligada al menos uno de los escalares es no nulo, supongamos que a_1 es un escalar no nulo, entonces:

$\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$, $a_1 \neq 0$ entonces $u_1 = -\dfrac{a_2}{a_1} u_2 - \dfrac{a_3}{a_1} u_3 - \dots - \dfrac{a_m}{a_1} u_m$

Lo que nos está indicando que el vector u_1 es combinación lineal de los demás vectores de la familia F.

Familia generatriz:

Una familia de vectores de V (K) : F = { $u_1, u_2, \dots, u_m$ } recibe el nombre de *familia generatriz* o generadora si *todo* vector del espacio vectorial V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de F.

Es decir *cualquiera* sea u de V, es posible expresarlo: $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$

Base - Dimensión:

Una familia de vectores F = { $u_1, u_2, \dots, u_m$ } de V (K) se denomina *base* de V si es *a la vez* familia libre y generatriz.

Esto equivale a decir que todo u de V se puede expresar: $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$ y además si u es el vector nulo entones: $\vec{0} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$ los escalares son nulos, $a_1 = 0 = \dots = a_m = 0$

- Todo vector de V se expresa de manera única en cada base.
- El número de vectores de una base de V se denomina ***dimensión*** del espacio vectorial.
- Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita n tienen exactamente n vectores.
- Existen espacios vectoriales de dimensión infinita.
- El espacio vectorial { $\vec{0}$ } tiene dimensión cero por definición.
- Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n:
  (1) n + 1 vectores de V son linealmente dependientes, lo que equivale a decir que una familia libre tiene a lo más n elementos.
  (2) una familia generatriz tiene como mínimo n elementos.
  (3) Toda familia libre de V con n elementos es una base de V.
  (4) Toda familia generatriz de V con n elementos es una base de V .

Componentes de un vector en una base:

Sea V (K) un espacio vectorial y F = { $u_1, u_2, \dots, u_m$ } una base de V, un vector u cualquiera de V se expresa de manera única: $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$, los escalares que permiten esta combinación lineal reciben el nombre de componentes del vector u y se puede anotar así:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Si v es otro vector de V se expresa en F de la siguiente manera:

$$v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_m u_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Las componentes del vector u + v son la suma de las componentes de u más las de v, y las componentes del vector k . u son las que se obtienen de multiplicar k por cada una de las componentes de u:

$u + v = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m) + (b_1 u_1 + b_2 u_2 + ... + b_m u_m) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ ... \\ a_n + b_m \end{pmatrix}$

$k . u = k . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a_1 \\ k.a_2 \\ ... \\ k.a_m \end{pmatrix}$

Cambio de base:

Lo desarrollaremos para un espacio vectorial de dimensión 2 y luego lo generalizaremos a un espacio de dimensión finita n:

Sea V (K) un espacio vectorial y $F_1 = \{ u_1 , u_2 \}$ y $F_2 = \{ v_1 , v_2 \}$ dos bases de V, un vector u de V se expresa de manera única en F_1 y de manera única en F_2 :

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ $u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$$

Si se sabe que las componentes de los vectores de F_2 en la base F_1 son:

$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11} u_1 + a_{21} u_2$ y $v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12} u_1 + a_{22} u_2$

Es posible relacionar ambas expresiones de u:

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \beta_1 (a_{11} u_1 + a_{21} u_2) + \beta_2 (a_{12} u_1 + a_{22} u_2)$

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 a_{11} u_1 + \beta_1 a_{21} u_2 + \beta_2 a_{12} u_1 + \beta_2 a_{22} u_2 = (a_{11} \beta_1 + \beta_2 a_{12}) u_1 + (\beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22}) u_2$

Por igualación podemos decir que:

$\alpha_1 = \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12}$
$\alpha_2 = \beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22}$

Que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, con solución única, ya que dijimos que cada vector se expresa de manera única en cada base, resolver el sistema equivale a hallar las componentes de u en F_2 a partir de F_1 o viceversa.

En forma matricial lo podemos expresar así:

$X = P . X'$: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ donde X contiene a las componentes de u en F_1, P contiene en cada columna a las componentes de los vectores de F_2, se le llama matriz de pasaje, y X' contiene a las componentes de u en F_2.

Lo visto se generaliza a un espacio vectorial de dimensión finita n.

- Subespacio vectorial:

Sea V (K) un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V, si S es espacio vectorial sobre K respecto a las mismas operaciones definidas en V, es un subespacio de V: S (K) subespacio de V (K)

Parte estable – Propiedad:

Un subconjunto S no vacío de V (K) es estable para las combinaciones lineales si se verifica que para cualesquier par de elementos u, v de V y para cualquier escalar k de K, los vectores u + v y k.u pertenecen también a S. S recibe el nombre de parte estable.

S es parte estable $\Leftrightarrow$ $S \subset V \wedge S \neq \varnothing \wedge \begin{cases} u+v \in S & (\forall u \in S \wedge \forall v \in S) \\ k.u \in S & (\forall k \in K \wedge \forall u \in S) \end{cases}$

Se puede demostrar que si "*S es parte estable de V (K) es un subespacio vectorial de V*".

Subespacios triviales:

Sea V (K) un espacio vectorial, los siguientes reciben el nombre de *subespacios triviales* o impropios :
$\{\vec{0}\}$ (K) y V (K) , es decir el conjunto formado exclusivamente por el vector nulo y el mismo V, cualquier otro subespacio de V recibe el nombre de subespacio propio.

Todo espacio vectorial admite al menos los subespacios triviales.

Dimensión de los subespacios:

Sea el espacio vectorial V (K), de dimensión finita n, todo subespacio de V tiene dimensión finita m tal que $m \leq n$.

- Por convención el subespacio trivial $U = \{\vec{0}\}$ como carece de base, entonces se dice que su dimensión es cero, $\dim \{\vec{0}\} = 0$, en este caso el único subespacio es él mismo, por lo tanto mantiene la dimensión nula.
- Si dim V = 1, admite subespacios de dimensión 0 y dimensión 1. Esto significa que sólo admite a los subespacios triviales, ya que no existe otro subespacio de la misma dimensión incluido en él.
- Si dim V = 2, admite los subespacios triviales, de dimensión 0 y de dimensión 2. Pero también admite subespacios de dimensión 1.
- En general si dim V = n admite los subespacios triviales de dimensión 0 y n y además todos los de dimensión m tal que $0 < m < n$.

A los espacios vectoriales de dimensión 1 se los llama rectas vectoriales, a los de dimensión 2 planos vectoriales, a los de dimensión n espacios n-dimensionales.

Teorema de la dimensión:

Sea el espacio vectorial V (K) y los subespacios de él U y W , se puede demostrar que la dimensión del subespacio suma es igual a la dimensión de U más la de W menos la de la intersección de ambos.

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$$