El método del simplex. Ejercicios resueltos y comentados

1.- Resolver utilizando el método del simplex el programa siguiente

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_1 + 9x_2 + x_3 \\ &\quad \text{sujeto a} \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9 \\ &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned} \quad .$$

Solución:

Paso 1: En primer lugar, transformamos este programa de forma canónica a forma estándar mediante la introducción de dos variables de holgura

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_1^h + 0x_2^h \\ &\quad \text{sujeto a} \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_1^h \quad = 9 \\ &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \quad x_2^h = 15 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_1^h, x_2^h \ge 0 \end{aligned}$$

Las variables de holgura se incorporan a la función objetivo con costos (coeficientes) nulos.

Este es el cuerpo de las restricciones

Restricciones de no negatividad para las variables

Expresamos ahora los componentes del problema en forma matricial

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1^h \\ x_2^h \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

y comprobamos que $\operatorname{rg}A = \operatorname{rg}(A, B) = 2$. Esto significa que el sistema $AX = B$ es compatible.

Además obtenemos una base canónica en la matriz A utilizando las dos últimas columnas lo que implica que no son necesarias variables artificiales para este problema.

Paso 2: Determinamos una primera solución factible básica utilizando la matriz básica canónica $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y tenemos $X_0 = A_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Esta solución básica es factible no degenerada y permite considerar las variables de holgura como básicas y sus costes asociadas como básicos

$$X_b = \begin{pmatrix} x_1^h \\ x_2^h \end{pmatrix} \qquad C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 3: Como se trata de un problema de maximización utilizaremos el siguiente esquema para *la primera tabla del simplex*

		X^T	
		C^T	
X_b	C_b	A	B
	$z_j - c_j$	$C_0{}^T A - C^T$	$C_0{}^T B$

Aquí se disponen las variables básicas y sus costes asociados

Este es el cuerpo de la tabla

Calculamos en primer lugar los valores $C_0{}^T A - C^T$ y $C_0{}^T B$ y luego sustituimos en esta primera tabla

$$C_0{}^T A - C^T = (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (1,9,1,0,0) = (-1,-9,-1,0,0)$$

$$C_0{}^T B = (0,0)\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$$

		x_1	x_2	x_3	x_1^h	x_2^h	
		1	9	1	0	0	
x_1^h	0	1	2	3	1	0	9
x_2^h	0	3	2	2	0	1	15
$z_j - c_j$		-1	-9	-1	0	0	0

Paso 4: Para evitar confusiones prescindimos de los valores de la segunda columna y a continuación localizaremos el número *más negativo* de la última fila (excluyendo la última columna). La columna del cuerpo de la tabla que esté situada inmediatamente encima será la *columna de trabajo*.

	x_1	x_2	x_3	x_1^h	x_2^h	
	1	9	1	0	0	
x_1^h	1	[2]	3	1	0	9
x_2^h	3	[2]	2	0	1	15
$z_j - c_j$	-1	-9	-1	0	0	0

Esta es la columna de trabajo

Este es el número más negativo de la última fila (sin contar el elemento de la última columna)

Ahora dividiremos cada número de la última columna del cuerpo de la tabla por el correspondiente en la columna de trabajo

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^h & x_2^h & \\
 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
x_1^h & 1 & [2] & 3 & 1 & 0 & 9 \\
x_2^h & 3 & [2] & 2 & 0 & 1 & 15 \\
\hline
z_j - c_j & -1 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

y obtenemos los valores 9/2 = 4,5 y 15/2= 7,5. Entre tales valores se escoge el que dé un resultado menor y el elemento de la columna de trabajo que proporciona este valor mínimo se distingue como *elemento pivote*.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^h & x_2^h & \\
 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
x_1^h & 1 & 2^* & 3 & 1 & 0 & 9 \\
x_2^h & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 15 \\
\hline
z_j - c_j & -1 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Este es el elemento pivote

Paso 5: Prescindimos de los valores numéricos de la última fila de la tabla y utilizando operaciones elementales de *filas* reducimos a ceros todos los elementos de la columna de trabajo distintos del pivote y a éste lo hacemos igual a la unidad

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^h & x_2^h & \\
 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
x_1^h & 1/2 & 1^* & 3/2 & 1/2 & 0 & 9/2 \\
x_2^h & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 15 \\
\hline
z_j - c_j & & & & & &
\end{array}
$$

Hemos multiplicado por ½ todos los elementos de la primera fila del cuerpo de la tabla

		x_1	x_2	x_3	x_1^h	x_2^h	
		1	9	1	0	0	
x_1^h		$1/2$	1^*	$3/2$	$1/2$	0	$9/2$
x_2^h		2	0	-1	-1	1	6
$z_j - c_j$							

A la segunda fila le añadimos el resultado de multiplicar (-2) por la primera

Paso 6: La variable básica situada en la fila del pivote pasa a ser no básica y la variable no básica situada en la columna del pivote pasa a ser básica. Añadimos ahora sus costes asociados. (Señalemos que no es conveniente retocar las variables de la primera fila de la tabla).

		x_1	x_2	x_3	x_1^h	x_2^h	
		1	9	1	0		
	0						
x_2	9	$1/2$	1^*	$3/2$	$1/2$	0	$9/2$
x_2^h	0	2	0	-1	-1	1	6
$z_j - c_j$							

Paso 7: Reiteramos los pasos 3 y 4 y volvemos a efectúar los cálculos $z_j - c_j$**,** teniendo en cuenta que ahora es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1^* & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad C_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y resulta

$$C_0{}^T A - C = (9,0)\begin{pmatrix} 1/2 & 1^* & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - (1,9,1,0,0) = (7/2, 0, 25/2, 9/2, 0)$$

$$C_0{}^T B = (9,0)\begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \end{pmatrix} = 81/2\,.$$

- Reiteración del paso 3

		x_1	x_2	x_3	x_1^h	x_2^h	
		1	9	1	0	0	
x_2	9	$1/2$	1^*	$3/2$	$1/2$	0	$9/2$
x_2^h	0	2	0	-1	-1	1	6
$z_j - c_j$		7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

- Reiteración del paso 4: No es posible debido a que no hay valores negativos en la última fila (sin contar la última columna). En consecuencia, el algoritmo se detiene. En el caso de que hubiera aparecido un número negativo en esta última fila, deberemos reiterar los pasos 5, 6 y 7.

Una vez que el algoritmo se ha detenido, identificamos las variables básicas presentes, que en este caso, son x_2, x_2^h y les asociamos los valores de la última columna del cuerpo de la tabla

		x_1	x_2	x_3	x_1^h	x_2^h	
		1	9	1	0	0	
x_2	9	$1/2$	1^*	$3/2$	$1/2$	0	$9/2$
x_2^h	0	2	0	-1	-1	1	6
$z_j - c_j$		7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y el resto de las variables se hace cero $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_1^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quedando como vector solución

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1^h \\ x_2^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y como valor máximo de la función objetivo tenemos el indicado en la última fila y última columna: 81/2.

2.- Resolver utilizando el método del simplex el programa siguiente

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = 80x_1 + 60x_2 \\
&\quad \text{sujeto a} \\
&0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 \le 0{,}25 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 = 1 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}.$$

Solución:

Paso 1: Transformamos este programa de forma mixta a forma estándar mediante la introducción de una variable de holgura

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 \\
&\quad \text{sujeto a} \\
&0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 + x_3 = 0{,}25 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 \qquad = 1 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}.$$

Como no podemos obtener una base canónica para la determinación de la primera solución factible básica, debemos introducir una variable artificial en la última restricción. Esta variable artificial se incorpora a la función objetivo con un coeficiente M muy grande con el fin de que el algoritmo quede penalizado por los valores de esta variable

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 + Mx_4 \\
&\quad \text{sujeto a} \\
&0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 + x_3 \qquad = 0{,}25 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 \qquad + x_4 = \ 1 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}.$$

Expresamos el programa en forma matricial

$$C = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y ahora podemos comprobar que $\text{rg}A = \text{rg}(A, B) = 2$.

Paso 2: Determinamos una primera solución factible básica utilizando la matriz básica canónica $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y tenemos $X_0 = A_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esta solución básica es factible y no degenerada, pudiendo escribir

$$X_b = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}.$$

Paso 3: Como se trata de un problema de minimización utilizaremos el siguiente esquema para *la primera tabla del simplex*

	X^T	
	C^T	
X_b $\quad C_b$	A	B
$c_j - z_j$	$C^T - C_0{}^T A$	$-C_0{}^T B$

Vamos a efectúar los cálculos y sustituir en esta primera tabla

$$(80,\ 60,0,\ M)-(0,\ M)\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (80-M, 60-M, 0, 0);\ \ -(0.\ M)\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} = -M$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		80	60	0	M	
x_3	0	0,20	0,32	1	0	0,25
x_4	M	1	1	0	1	1
$c_j - z_j$		80-M	60-M	0	0	- M

Paso 4: Para evitar errores de redondeo vamos a desglosar la última linea de la primera tabla en dos lineas. La primera contiene a los términos que no contienen *M* y la segunda a los términos que lo contienen.

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		80	60	0	M	
x_3	0	0,20	0,32	1	0	0,25
x_4	M	1	1	0	1	1
		80	60	0	0	0
		-1	-1	0	0	-1

Paso 5: Se aplica ahora el algoritmo del simplex a la última fila de la tabla anterior, considerando que el cuerpo de la tabla se “amplia” con la penúltima fila. Así buscamos, en primer lugar, el elemento más negativo de esta última fila (sin incluir la última columna).

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	80	60	0	M	
x_3	0,20	0,32	1	0	0,25
x_4	1	1	0	1	1
	80	60	0	0	0
	-1	-1	0	0	- 1

Hay dos elementos más negativos, y elegimos este por comodidad

De esta forma, la columna de trabajo es la primera del cuerpo de la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	80	60	0	M	
x_3	[0,20]	0,32	1	0	0,25
x_4	[1]	1	0	1	1
	80	60	0	0	0
	-1	-1	0	0	- 1

Dividimos cada elemento de la última columna del cuerpo de la tabla por el correspondiente en la columna de trabajo.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	80	60	0	M	
x_3	[0,20]	0,32	1	0	0,25
x_4	[1]	1	0	1	1
	80	60	0	0	0
	- 1	-1	0	0	- 1

y obtenemos 0,25 /0,20 = 1,25 , 1/1 = 1. Esto nos indica que el elemento pivote es el segundo de la primera columna del cuerpo de la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	80	60	0	M	
x_3	0,20	0,32	1	0	0,25
x_4	1^*	1	0	1	1
	80	60	0	0	0
	- 1	-1	0	0	- 1

A continuación hacemos ceros con operaciones elementales de filas en el cuerpo de la tabla
y en la última fila.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	80	60	0	M	
x_3	0	0,12	1	–0,20	0,05
x_4	1	1	0	1	1
	0	-20	0	-80	-80
	0	0	0	1	0

Cambiamos las variables básicas y no básicas. Así x_1 pasa a ser básica y x_4 deja de ser básica.

Observación importante: Siempre que una variable artificial deja de ser básica, se elimina de la primera línea de la tabla junto con toda la columna por debajo de ella.

Como la variable x_4 es artificial y ha dejado de ser básica, podemos eliminar toda la columna por debajo de ella.

Observación importante: La última fila de la tabla puede eliminarse si nos da todo ceros.

Como esto ocurre en nuestra tabla podemos suprimir la última fila.

	x_1	x_2	x_3	
	80	60	0	
x_3	0	0,12	1	0,05
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80

Calculamos de nuevo $C^T - C_0{}^T A$ y $-C_0{}^T B$, con los valores

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 1 \end{pmatrix};\ C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \end{pmatrix},$$

$$(80,60,0) - (0,80)\begin{pmatrix} 0 & 0,12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,-20,0);\quad -(0,80)\begin{pmatrix} 0,05 \\ 1 \end{pmatrix} = -80$$

resultando la tabla

	x_1	x_2	x_3	
	80	60	0	
x_3	0	0,12	1	0,05
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80
$c_j - z_j$	0	-20	0	-80

El número más negativo en la última fila (excluyendo el correspondiente a la última columna) es -20, luego la columna de x_2 es la columna de trabajo.

	x_1	x_2	x_3	
	80	60	0	
x_3	0	[0,12]	1	0,05
x_1	1	[1]	0	1
	0	-20	0	-80
	0	-20	0	-80

Esta es la columna de trabajo correspondiente al número más negativo

Las razones entre los elementos de última columna y los correspondientes de la columna de trabajo son 0,05/0,12= 0,417 y 1/1 =1. De esta manera, el elemento pivote es el 0,12.

	x_1	x_2	x_3	
	80	60	0	
x_3	0	0,12*	1	0,05
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80

Convertimos el pivote en 1 y hacemos ceros de forma adecuada

	x_1	x_2	x_3	
	80	60	0	
x_3	0	1	8,333	0,416
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80

	x_1	x_2	x_3	
	80	60	0	
x_3	0	1	8,333	0,416
x_1	1	0	$-8,333$	0,584
	0	0	166,7	-71,68

Entra como variable básica x_2 y sale como no básica x_3 quedando.

	x_1	x_2	x_3	
	80	60	0	
x_2	0	1	8,333	0,416
x_1	1	0	$-8,333$	0,584
	0	0	166,7	-71,68

Como en la última fila no aparecen elementos negativos se termina la aplicación del algoritmo y la solución es $z = 71,68$ ya que se cambia el signo del valor obtenido en la última fila y columna. Este valor se alcanza para

$$x_1 = 0,584,\ x_2 = 0,416 .$$