Ya que M indica un número positivo muy grande, todos los valores en el último renglón del tableau 4, excepto el elemento en la última columna, son no negativos. Por lo tanto, la solución óptima se puede leer directamente: $x_3^* = 10.00$, $x_2^* = 15.34$, y todas las otras variables cero, con $z^* = -14.01$.

En los cálculos anteriores fue posible dejar a la cantidad M como literal solamente por tratarse de cálculos realizados a mano. Si se hubiera empleado computadora, habría sido necesario sustituir M por un valor numérico grande, por ejemplo $M = 10\,000$. Entonces, considerando nuevamente todos los números redondeados a *cuatro* cifras significativas, el último renglón del tableau 1 cambia a:

$$-60\,000 \quad -3 \quad -10\,000 \quad 10\,000 \quad 0 \quad 0 \quad -100\,000$$

Nótese que las constantes aditivas $+8$ es el primer valor y $+6$ en el tercero, se pierden en el redondeo. El último renglón del tableau 2 cambia a:

$$0 \quad 36\,000 \quad -58\,000 \quad -2\,000 \quad 12\,000 \quad -28\,000$$

mientras que el último renglón del tableau 3 es:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10\,000 \quad 10\,000 \quad 0$$

¡El cual señala optimización! La solución óptima errónea se leería del tableau 3 como $x_3^* = 0.4828$, $x_1^* = 1.586$, y todas las otras variables cero, con $z^* = 0$.

Este problema de redondeo no ocurre en el método de dos fases, ya que los términos que no involucran a M se separan de los otros términos, haciendo imposible que los términos con M se "coman" a los otros.

4.7 Resuélvase el problema 1.7.

Empleando el programa matemático definido por el sistema (12) en el problema 1.7, se añaden las variables de holgura de x_5 a x_{12} en cada una de las primeras ocho desigualdades de restricción; igualmente, las variables superfluas x_{13} y x_{14} en cada una de las últimas dos desigualdades de restricción, y las variables artificiales x_{15} y x_{16}, respectivamente, en cada una de las dos últimas restricciones. Agregando los coeficientes ade-

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
		4	−3	6	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_5	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20 000
x_7	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60 000
x_9	0	1	−10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	6	−5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{15}	$-M$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	0	50 000
x_{16}	$-M$	0	0	1	1*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	5 000
$(z_j - c_j)$:		−4	3	−6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	−55 000

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	
x_5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15 000
x_7	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	1	−1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	55 000
x_9	1	−10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	−5	0	25 000
x_{11}	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−8	0	40 000
x_{15}	1	1*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	50 000
x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	5 000
	−4	3	−7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−5 000
	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−50 000

Tableau 2

$$\begin{array}{rll} \text{minimícese:} & z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 & (3) \\ \text{con las condiciones:} & 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 & (4) \\ & x_1 + \quad x_2 \quad = 1 & (5) \\ \text{con:} & \text{todas las variables no negativas.} & \end{array}$$

para el cual se conoce una solución de punto extremo: —$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.05$—. Obsérvese que este programa modificado tiene $n = 3$ variables y $m = 2$ ecuaciones de restricción, así que los puntos extremos deben tener al menor $3 - 2 = 1$ variables con valor cero.

Para determinar si puede mejorarse la solución inicial para el nuevo programa, se resuelve (5) —ecuación que restringía a x_1— para x_1 y se sustituye el resultado en (3) y (4). El programa cambia a:

$$\begin{array}{rll} \text{minimícese:} & z = 0x_1 - 20x_2 + 0x_3 + 80 & (6) \\ \text{con las condiciones:} & 0.12x_2 + x_3 = 0.05 & (7) \\ & x_1 + \quad x_2 \quad = 1 & (8) \\ \text{con:} & \text{todas las variables no negativas} & \end{array}$$

Compárese este programa con el tableau 2 del problema 4-2.

En la solución corriente, $x_2 = 0$, y se tiene de (6) que $z = 80$. Sin embargo, resulta obvio a partir de ésta que z se reducirá si se aumenta x_2. La restricción (7) limita a x_2 a no pasar de $0.05/0.12 = 5/12$, si las otras variables han de permanecer no negativas; mientras que (8) limita a x_2 a no pasar de 1. Ya que deben satisfacerse ambas restricciones, x_2 no puede aumentarse a más de 5/12. Haciendo $x_2 = 5/12$, lo cual fuerza $x_3 = 0$. se obtiene de (8) que $x_1 = 7/12$. Ésta es una nueva solución de punto extremo al programa.

Para determinar si puede mejorarse esta solución, se resuelve (7) —ecuación que restringía a x_2— para x_2 y se sustituye el resultado en (6) y (8). El programa cambia a:

$$\begin{array}{rll} \text{minimícese:} & z = 0x_1 + 0x_2 + 166.7x_3 + 71.67 & (9) \\ \text{con las condiciones:} & x_2 + 8.333x_3 = 0.4167 & (10) \\ & x_1 \quad - 8.333x_3 = 0.5833 & (11) \\ \text{con:} & \text{todas las variables no negativas.} & \end{array}$$

La ecuación (10) es solamente (7) dividida entre 0.12. Compárese la forma de este programa con el tableau 3 del problema 4.2.

En la solución normal, $x_3 = 0$, así que de (9) se tiene $z = 71.67$. También se tiene de (9) que ninguna asignación positiva a x_3 reducirá a z por abajo de este valor. En realidad, cualquiera de estas asignaciones aumentará el valor de z. Entonces, la solución normal es una solución óptima.

Problemas complementarios

Úsese el método simplex o el de dos fases para resolver los siguientes problemas:

4.9

$$\begin{array}{rl} \text{maximícese:} & z = x_1 + x_2 \\ \text{con las condiciones:} & x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ \text{con:} & x_1, x_2 \text{ no negativas} \end{array}$$

4.10

$$\begin{array}{rl} \text{maximícese:} & z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{con las condiciones:} & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ \text{con:} & x_1, x_2 \text{ no negativas} \end{array}$$