MODELACIÓN DE PROBLEMAS NO LINEALES

No existe un método general para analizar a todos los Sistemas No Lineales (SNL) porque no existe un método general de resolución de las ecuaciones diferenciales (ED) no lineales.

Solamente algunos tipos más simples de ED no lineales tienen una solución exacta. El resto, que básicamente son la mayoría de las EDNL para los sistemas físicos, sólo pueden resolverse por aproximaciones y esas soluciones sólo tienen validez bajo las condiciones limitadas impuestas al aproximar.

Como no existe un método general de resolución, cada EDNL puede admitir un método de análisis particular, basados en distintas técnicas de linealización.

Comportamiento no lineal

Antes de continuar se debería aclarar en qué consiste un SNL, o mejor todavía, qué es para un sistema poseer un *comportamiento no lineal*, dado que el mismo dispositivo podría comportarse en forma lineal bajo determinadas condiciones de operación y pasar a tener un comportamiento no lineal bajo diferentes condiciones de funcionamiento.

Frecuentemente, en el caso de los sistemas físicos, sucede que el sistema exhibe un comportamiento lineal cuando opera con bajos niveles de energía y al incrementarse los niveles de energía tramitada pasa a mostrar un comportamiento no lineal.

Justamente, en esto se basan muchas hipótesis de simplificación que permiten estimar un comportamiento como lineal, cuando se descartan términos de las ED correspondientes al suponer, por ejemplo, que no existe rozamiento, no existe la fricción, no hay disipación de calor, los elementos son rígidos e indeformables, los materiales son homogéneos, los movimientos se realizan a baja velocidad, no hay compresibilidad de los fluidos, y toda la extensa gama de suposiciones que realizamos habitualmente en física.

Cuando estas hipótesis no pueden realizarse, debido a las condiciones de operación del sistema, significa que no pueden despreciarse todos los términos de las ED que estas simplificaciones permitían.

Normalmente, esto determina que las ED completas, con todos los términos, pasen a ser no lineales y esto sucede cuando el régimen de operación maneja mayores niveles de energía.

Por ejemplo, no se puede despreciar la dilatación de los materiales por aceleración centrífuga, cuando en un elemento mecánico se analiza un movimiento realizado a alta velocidad. En este caso, el elemento que se suponía rígido e indeformable deberá considerarse como sujeto a una pequeña deformación diferencial.

Para resumir, el comportamiento no lineal de un sistema, lo que llamamos vulgarmente "*sistema no lineal*", se caracteriza por las siguientes particularidades:

- No cumple con el principio de superposición, como sí lo hacen los sistemas lineales (propiedad básica de la linealidad).
- "Crean" frecuencias. Si la entrada es una señal senoidal pura, la salida debe representarse mediante una serie de Fourier por todas las componentes armónicas que incluye.
- Sus parámetros son variables con el nivel de excitación
- Pueden presentar oscilaciones subarmónicas y, a veces, oscilaciones automantenidas (ciclos límites).

Metodología de análisis:

Existen básicamente cuatro tipos de métodos más comunes, frecuentemente utilizados para examinar sistemas no lineales, que son:

1) Función Descriptiva
2) Plano de Fase
3) Método de Lyapunov
4) Simulación por software

El método de la Función Descriptiva no se verá en esta materia, pero se estudia en Sistemas de Control.

El Método del Plano de Fase (PDF) es un procedimiento muy completo que brinda información tanto de la respuesta temporal, como de la estabilidad del sistema, pero tiene la limitación de poder emplearse solamente para sistemas de 1° y 2° Orden, para representarlo en un plano cartesiano.

Podría ampliarse hasta tercer orden usando la misma metodología, mediante un *espacio de fase* equivalente al plano, para representarlo gráficamente mediante una terna cartesiana. Para sistemas de mayor orden se requiere un hiperespacio, que es una representación de tipo estadístico.

Cabe aclarar que el PDF sirve para el análisis de sistemas tanto lineales como no lineales.

El Método de Lyapunov se aplica a un tipo particular de SNL que son los *sistemas cuasilineales* e incluye una solución analítica de las EDNL.

Por último, las técnicas de Simulación por Software se basan en métodos algorítmicos de modelación y distintos programas para obtener la respuesta temporal del sistema aproximando la solución de las ecuaciones.

SISTEMAS AUTÓNOMOS

Antes de comenzar con el análisis del PDF propiamente dicho, se considera el funcionamiento de los sistemas autónomos, que tienen como característica que la variable independiente tiempo [t] no aparece en forma explícita en las ED sino que se encuentra implícita.

Las ED son de la forma:

$\frac{dx}{dt}$ = F(x,y);

$\frac{dy}{dt}$ = G(x,y);

donde x=x(t) é y=y(t)

Para estos sistemas, cualquier solución de los mismos x=φ(t) é y=ψ(t) constituye una trayectoria del sistema en el PDF, donde la variable para obtener los distintos puntos es el tiempo.

En el caso en que φ(t)=cte. y ψ(t)=cte.; entonces se trata de un único punto en el PDF en lugar de una trayectoria.

Ejemplo:

Sea el sistema autónomo dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$\frac{dx}{dt}$ = x + y

$\frac{dy}{dt}$ = 2x

donde:

F(x,y) = x + y

G(x,y) = 2x

que se indicará con la notación más simplificada y habitual, por comodidad:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{2x} \end{cases}$$

Este sistema muy simple de dos ED con dos incógnitas se puede resolver de distintas maneras, por ejemplo, por métodos matriciales. En este caso se puede resolver utilizando una forma más simple, volviendo a derivar la primera ED, de manera que:

x’’ = x’ + y’

y, reemplazando (y’) por su valor en la segunda ecuación, entonces resulta:

$x'' = x' + 2x \;\Rightarrow\; \mathbf{x'' - x' - 2x = 0}$

que es una ED Ordinaria Homogénea de 2° Orden, cuya solución es conocida y tiene la forma:

$\underline{\mathbf{x(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t}}}$

para calcular la otra variable [y(t)] se reemplaza simplemente en la segunda ecuación, así:

$y' = 2x \Rightarrow y' = 2\,[c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t}]$

e integrando esta última, se obtiene:

$y(t) = -2\, c_1\, e^{-t} + 2\, c_2\, \tfrac{1}{2}\, e^{2t} + c_3 \Rightarrow \underline{\mathbf{y(t) = -2\, c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} + c_3}}$

para evaluar la constante arbitraria de integración c_3 se puede reemplazar ambas soluciones en la primera ecuación:

$x' = x + y = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} - 2\, c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} + c_3$ operando resulta:

$x' = -\, c_1\, e^{-t} + 2\, c_2\, e^{2t} + c_3$ ①

pero, si se deriva la primera solución x(t) obtenida, se obtiene:

$x' = -\, c_1\, e^{-t} + 2\, c_2\, e^{2t}$ ②

comparando ① y ② se concluye que debe ser: $\mathbf{c_3 = 0}$

por lo tanto, la solución general del sistema autónomo es:

$$\begin{cases} \mathbf{x(t) = \varphi(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}} \\ \mathbf{y(t) = \psi(t) = -2c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t}} \end{cases}$$

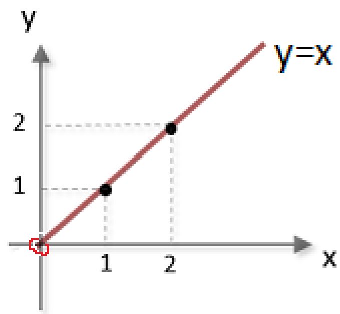
Para cada juego de valores de las constantes c_1 y c_2; las funciones $x=\varphi(t)$ é $y=\psi(t)$ son ecuaciones paramétricas de una curva en el plano.

Estas curvas son gráficos de las trayectorias del sistema de ED y también se refieren a sí mismas como trayectorias.

Por ejemplo, si el par de valores fuera $c_1=0$ y $c_2=1$; el sistema se reduciría a:

$$\begin{cases} \mathbf{x = e^{2t}} \\ \mathbf{y = e^{2t}} \end{cases}$$

Por consiguiente: [x(t) = y(t)] y si se representa en un sistema de ejes cartesianos se trataría de la función identidad representada por una recta a 45°



Además, el gráfico estará en el primer cuadrante porque, para cualquier valor de [t] resulta:

$e^{2t} > 0$

Por último, la trayectoria debe excluir al origen, aunque habrá puntos tan próximos como se quiera a (0,0), porque la función no se anula para valores finitos de [t] y solamente [$e^{2t} = 0$] si [$t = -\infty$]

Para distintos pares de valores de c_1 y c_2 se obtendrán diferentes tipos de curvas o trayectorias.

PROPIEDADES

1) Una traslación de una trayectoria es también una trayectoria

Si $x(t)=\varphi(t)$ é $y(t)=\psi(t)$ es la solución de un sistema y existe una constante (b) se puede comprobar por sustitución que $x=\varphi(t+b)$ é $y=\psi(t+b)$ también satisface las ecuaciones del sistema y, por lo tanto, también constituye una trayectoria de éste.

Esta última solución es, además, una traslación de la primera trayectoria en una magnitud dada por la constante (b).

2) Si dos trayectorias pasan a través del mismo punto ($x_o;y_o$) es porque una es traslación de la otra.

se puede verificar esta propiedad:

$x=\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t_o)=x_o$

$y=\psi(t) \Rightarrow \psi(t_o)=y_o$ (1)

la otra trayectoria pasa por el mismo punto, pero en un instante distinto $t=t_1$; entonces:

$x=\alpha(t) \Rightarrow \alpha(t_1) = x_o$

$y=\beta(t) \Rightarrow \beta(t_1) = y_o$ (2)

en la propiedad anterior se definió una trayectoria que es traslación de otra como:

$X(t)= \varphi(t+c)$

$Y(t)= \psi(t+c)$ ③

Pero como es una traslación, también es solución del sistema, luego $x=X(t)$ é $y=Y(t)$ son soluciones, pero como (c) era una constante arbitraria, podría asumirse que ella vale $c= t_o - t_1$; luego, suponiendo que es $t=t_1$ en ③ resulta:

$X(t_1)= \varphi(t_1+c)$

$Y(t_1)= \psi(t_1+c)$

pero, reemplazando [c] será:

$X(t_1)= \varphi(t_1+t_o-t_1) = \varphi(t_o) \Rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi(t_o)= x_o}$ por ①

$Y(t_1)= \psi(t_1+t_o-t_1) = \psi(t_o) \Rightarrow$ $\boldsymbol{\psi(t_o)= y_o}$ por ①

pero como era:

$x_o = \alpha(t_1)$

$y_o = \beta(t_1)$

entonces se puede igualar

$X(t_1)= \alpha(t_1)$ é $Y(t_1)= \beta(t_1)$

pero por la unicidad de las soluciones esto será válido para cualquier instante, además de $t=t_1$; entonces

$X(t)= \alpha(t)$

$Y(t)= \beta(t)$

por lo tanto

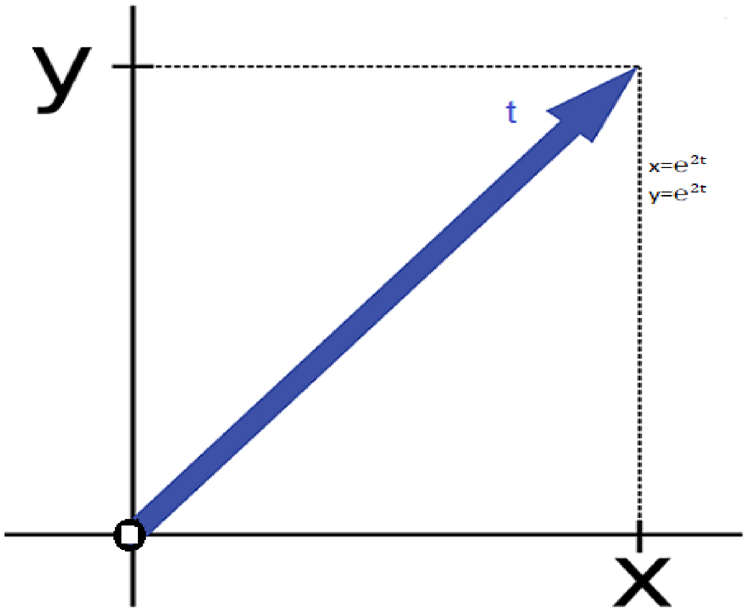
$\alpha(t)= \varphi(t+c)$

$\beta(t)= \psi(t+c)$

es decir que esta segunda trayectoria que pasa por el punto $P_o\,(x_o\ y_o)$; es una traslación de la primera.

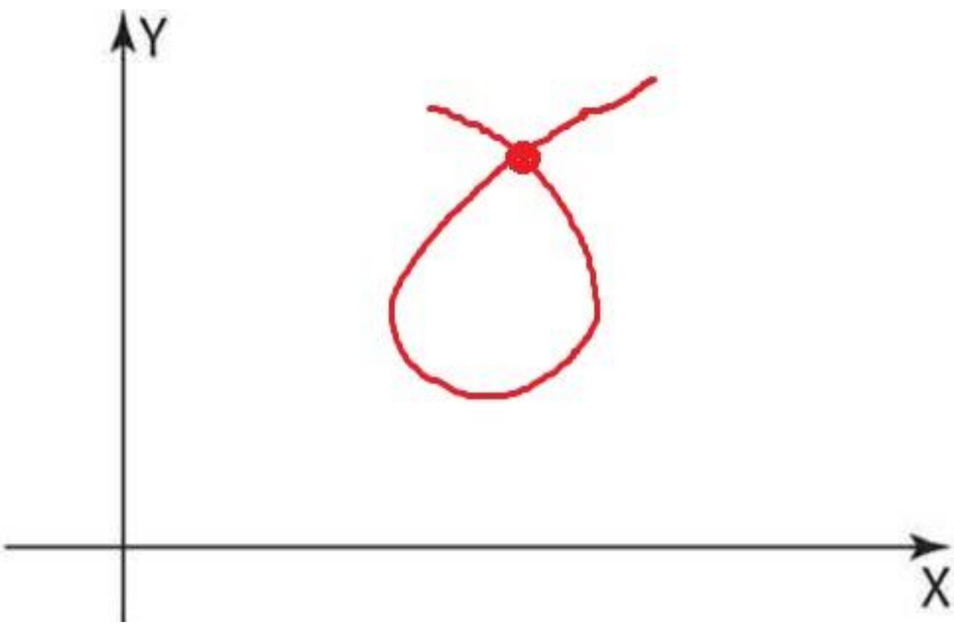
3) Las trayectorias tienen un sentido de dirección

Siendo $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$; se considerará sentido de la trayectoria a la dirección de avance del punto $[\varphi(t);\psi(t)]$ a medida que crece el tiempo [t]. En la trayectoria del ejemplo inicial:



4)Una trayectoria no puede cruzarse o intersectarse a sí misma

La curva de la figura no podría ser el gráfico de una trayectoria, sin embargo, una trayectoria sí podría estar representada por una curva cerrada.



En su caso, una curva cerrada representaría una solución periódica del sistema dado. Para un sistema autónomo, todo el plano (XY) se denomina Plano de Fase (PDF) y un gráfico de las trayectorias del sistema en este plano se denomina Diagrama de Fase o Retrato Fásico.

Punto Crítico

Un *punto crítico*, también llamado punto de equilibrio o punto singular del sistema, es aquel para el cual las derivadas de todas sus variables son simultáneamente nulas. Este punto corresponde a una condición estacionaria del sistema.

$$\begin{cases} x'(t_o) = F[x(t_o); y(t_o)] = F(x_o, y_o) = 0 \\ y'(t_o) = G[x(t_o); y(t_o)] = G(x_o, y_o) = 0 \end{cases}$$

La solución no puede apartarse del punto crítico (x_o,y_o) en ningún instante (t). La trayectoria a través de un punto crítico es, en consecuencia, el punto único (x_o,y_o). Como las diferentes trayectorias de un sistema autónomo no pueden cruzarse unas a otras, ninguna otra trayectoria puede atravesar el punto crítico.

Se puede clasificar los puntos críticos de acuerdo con el comportamiento de las trayectorias que comienzan cerca de ellos o que se les aproximan. Esta clasificación, a su vez, permite describir los diferentes tipos de soluciones según su comportamiento.

En los sistemas lineales, el único punto crítico es [x_o=0; y_o=0], que cumple con la definición, por lo que siempre el punto crítico o de equilibrio del sistema lineal estará ubicado en el origen del plano cartesiano de coordenadas.

En los sistemas no lineales, en cambio, puede haber distintos puntos críticos ubicados en diferentes lugares del plano.

Es importante destacar que las trayectorias no llegan ni salen del punto crítico, sino que se aproximan indefinidamente a él sin tocarlo.