MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADO

El modelo en el espacio de estado se obtendrá en función de los datos que se proporcionen de cada sistema:

a) La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema.

b) Un circuito eléctrico o un sistema mecánico y su sistema eléctrico equivalente.

c) La función de transferencia correspondiente al sistema.

d) El diagrama de bloques correspondiente al sistema.

a) Ecuación diferencial que modela un sistema

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = u(t)$$

Llamamos $x_1 = y$ de esta manera $x_1 = y \quad x_2 = \frac{dy}{dt} \rightarrow x_1' = x_2$

Para la derivada de la segunda variable de estado, despejamos de la ecuación diferencial

$\frac{d^2y}{dt^2} = u(t) + 4\frac{dy}{dt} + 5y$ Se expresa en función de términos de variable de estado teniendo en cuenta que cada ecuación contiene solo una derivada $x_2' = u(t) + 4\,x_2 + 5\,x_1$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, llamadas ecuaciones de estado, pueden expresarse de manera conveniente en forma matricial.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

Donde:

x = Vector de estado, formado por una matriz columna de (n x 1)

A = Matriz del sistema (n x n)

B = Matriz de control (n x 1)

C = Matriz de salida (1 x n)

u = Vector de entrada (1 x 1)

y = Matriz de salida

D = Matriz de alimentación directa o proalimentación

El modelo queda:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = u(t) + 4\,x_2 + 5\,x_1$$

ECUACIONES DE ESTADO

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}}_{[\dot{x}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{[x]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[B]} u(t)$$

$$[\dot{x}] = [A]\;[x]\; + [B]u$$

La función que queremos despejar es y (t) esta función representa la matriz de salida del sistema

$$[y(t)] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ **Donde y (t) = [C] [X (t)] donde [C] es la matriz de salida e y (t) =** $x_{1(t)}$

Para resolver la ecuación diferencial se utiliza el método de transformada de Laplace

$$\begin{bmatrix} X_{1(s)} \\ X_{2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -5 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & -1 \\ -5 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

b) 1. Resolución de circuitos eléctricos

Elección de las variables de estado:

En la ecuación de estado, se relacionan la variable y su derivada.

Si tenemos dos elementos almacenadores de energía como inductancia y capacidad, las variables de estado se eligen siempre de la siguiente manera:

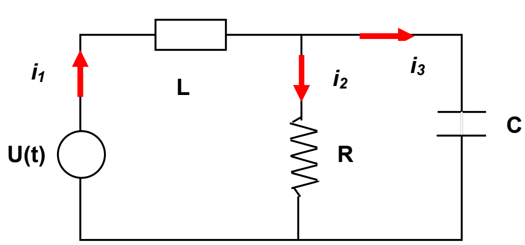
inductancia :

$$i_L = \frac{1}{L}\int v_L\,dt; \quad V_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\text{llamamos } x_1 = i_L \text{ porque está relacionada con la derivada} \Rightarrow V_L = L\,\dot{x}_1$$

capacidad :

$$i_c = c\frac{dV_c}{dt}\;;\; V_C = C\frac{di_C}{dt} \quad \text{llamamos } x_2 = V_c \Rightarrow i_c = C\,\dot{x}_2$$



Ecuaciones de equilibrio:

$$U(t) = V_L + V_R \Longrightarrow U(t) = L\,\dot{x}_1 + x_2$$

$$\underbrace{V_R = V_c \quad \text{donde } i_L = i_R + i_C}_{} \Rightarrow x_2 = \left(x_1 - C\,\dot{x}_2\right) R$$

Las ponemos en términos de variables de estado

Ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_2}{L} + \frac{U(t)}{L}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{CR}$$

Modelo en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t)$$

Matriz de salida:

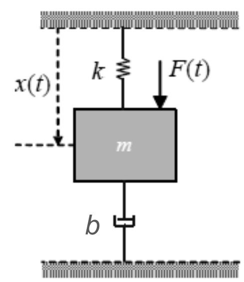
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 = V_c$$

2. Modelo mecánico

Obtener el modelo de estado que define el desplazamiento x (t) de una masa M con constante elástica k y con coeficiente viscoso b, si en t= 0 se aplica al sistema una fuerza de desplazamiento F.

Ecuaciones de equilibrio del sistema:

$$\sum F = m * a \rightarrow \quad F(t) - b\frac{dx(t)}{dt} - k\,x(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt}$$



Agrupamos para dejar solo la entrada en el segundo miembro:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt} + b\frac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = F(t) \quad \text{donde } F(t) \equiv U(t)$$

Llamamos:

$$x_1 = x(t) \qquad x_2 = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}_1 \;\; ; \;\; \dot{x}_2 = \frac{F(t)}{m} - \frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

Ecuaciones de estado:

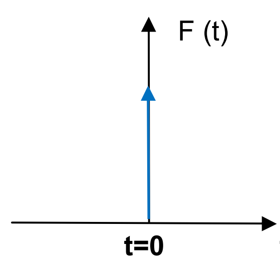
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m}$$

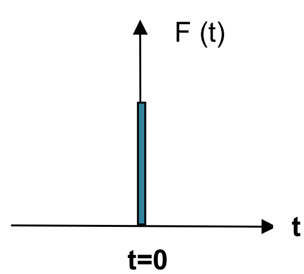
Modelo en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

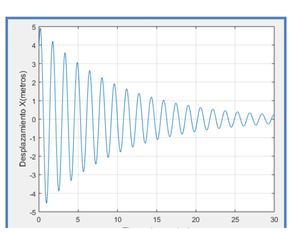


La función F (t) la consideramos un impulso para resolver la ecuación de estado, dado que la transformada de Laplace del impulso es 1.



Físicamente F (t) es un pulso de muy corta duración.

La función x(t) que es el desplazamiento de la masa en un instante t, es de la forma:

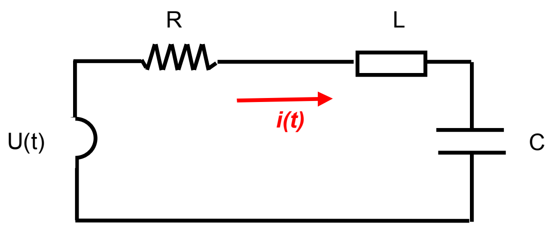


MODELO ELÉCTRICO EQUIVALENTE

Circuito serie: Se asocia cada fuerza con una caída de tensión

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}*b+x(t)*k=F(t)$$

En el circuito de la figura la ecuación de equilibrio es $u(t)=V_R+V_L+V_C$



Lo ordenamos para comparar con el modelo mecánico

$$L*\frac{d\,i(t)}{dt}+i(t)*R+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt=u(t)$$

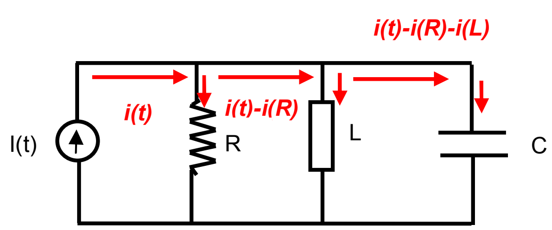
Si expresamos la ecuación del modelo mecánico en términos de velocidad en lugar de desplazamiento, resulta:

$$m\frac{dv(t)}{dt}+v(t)*b+k\int v(t)\,dt=F(t)$$

L y C son los elementos almacenadores de energía, se deberán corresponder con el resorte y la masa. Comparando:

$$\boxed{L=m \qquad R=b \qquad y \qquad C=1/k}$$

Circuito paralelo: Se asocia cada fuerza con una corriente de malla



$$I(t)=i_R+i_L+i_C$$

$$\frac{V_R}{R}+\frac{1}{L}\int V_L\,dt+c\frac{dV_C}{dt}=I(t)$$

Ordenamos y comparamos:

$$\left\{\begin{array}{l} m\dfrac{dv(t)}{dt}+v(t)*d+k\displaystyle\int v(t)\,dt=F(t) \\ C\dfrac{dV_C}{dt}+\dfrac{V_R}{R}+\dfrac{1}{L}\displaystyle\int V_L\,dt=I(t) \end{array}\right.$$

$$\boxed{C=m \qquad R=1/b \qquad y \quad L=1/k}$$