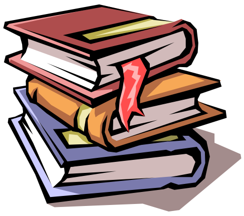
6: PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Continuamos con la inferencia estadística, seguiremos trabajando con la información muestral para tomar decisiones sobre hipótesis basadas en los parámetros poblacionales.

Una *hipótesis estadística* o simplemente *hipótesis*, es una suposición o una conjetura concerniente a la población. Antes de aceptar o rechazar una hipótesis, todo investigador deberá probar la validez de la misma, puesto que puede o no ser verdadera. Claramente, un medio seguro de probar la hipótesis sería un examen de la población entera, sin embargo, el examen puede llegar a ser impráctico o imposible. Un modo práctico es probar la hipótesis usando una muestra de acuerdo con la teoría de la probabilidad. El resultado de la prueba conducirá, ya sea a aceptar la hipótesis o a rechazarla. La aceptación o rechazo conducirá al investigador a tomar una decisión.



Actividad bibliográfica

1. Lea en las páginas 290 a 346, los apartados 10.1 a 10.15 inclusive del libro *Probabilidad y Estadística para Ingenieros* de Walpole, Myers y Myers.
Tenga en cuenta las siguientes recomendaciones al estudiar este material:

- Debe leer todo el capítulo con excepción de los apartados:
  - 10.16: Prueba de homogeneidad.
  - 10.17: Prueba para varias proporciones.
  - 10.18: Estudio de dos muestras.
- Para estudiar, comprender y resolver problemas de pruebas de hipótesis debe considerar la distribución muestral del estadístico que permitirá tomar la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis propuesta, para lo cual se debe reflexionar sobre los siguientes aspectos:
  - <u>Distribución de la población</u> de la cual proviene la muestra en estudio (normales, no normales o desconocidas).

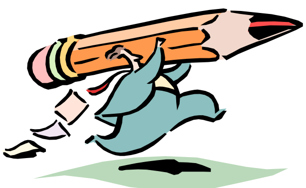
- Conocimiento de <u>otros parámetros poblacionales</u>. Por ejemplo, se debe tener en cuenta si se conoce o no la desviación estándar de la población en estudio.
- <u>Tamaño de la muestra</u> seleccionada (muestras pequeñas o grandes).

- <u>Página 293</u>: Distinga entre *error de tipo I* (Definición 10.2) y *nivel de significancia* (primera oración del párrafo siguiente a la Tabla 10.1).
- <u>Páginas 293 y 294</u>: Distinga entre *error de tipo II* y β.
- <u>Página 294</u>: Reflexione sobre la primera oración del segundo párrafo.
- <u>Página 295</u>: Después de la Figura 10.2, comienza un párrafo con la expresión: "De la tabla A.3 encontramos que α = p(error tipo I) = ...". Lo correcto, según la nomenclatura que hemos adoptado sería colocar la probabilidad con mayúscula, quedando: "De la tabla A.3 encontramos que α = **P**(error tipo I) = ..."
- <u>Página 296</u>: Identifique gráficamente el área representativa de α. (Vea la Figura 10.3).
- <u>Página 296</u>: Se titula a la Figura 10.4 como *Probabilidad de un error tipo II*. Este título es incorrecto, debería decir: *Criterio de decisión para probar $\mu = 68$ contra $\mu \neq 68$.*
- <u>Página 298</u>: Identifique gráficamente el área representativa de β. (Vea la Figura 10.7).
- <u>Página 299</u>: Deténgase en el resumen de **propiedades importantes** que está antes de la Definición 10.4.
- <u>Página 300</u>: Recuerde la regla práctica dada por los autores: "En cierto sentido, el símbolo de la desigualdad apunta en la dirección donde se encuentra la región crítica".
- <u>Página 301</u>: En el segundo párrafo, lea con atención los "principios para determinar cuál hipótesis se establecerá como H_0 y cuál como H_1".
- <u>Página 301</u>: Lea con atención el párrafo anterior al Ejemplo 10.2.
- <u>Página 304</u>: Los autores proponen aquí un *resumen* de los procedimientos a seguir para las pruebas de hipótesis. Seguramente le resultará muy útil.
- <u>Página 304</u>: El último párrafo, antes de los ejercicios, es muy importante, al indicar la utilidad del valor P y sus aplicaciones en la vida real.
- <u>Página 305</u>: El libro hace referencia a la *Curva característica de operación* en el Ejercicio 18. ¡Analícelo!
- <u>Páginas 308 y 309</u>: Vea la representación gráfica e interpretación del *valor P* de las Figuras 10.10 y 10.11.
- <u>Páginas 311 y 312</u>: Lea detenidamente el *Comentario sobre la prueba T de una sola muestra* (suposición de normalidad).

- <u>Página 315</u>: En el primer renglón del apartado *Varianzas desconocidas pero diferentes* dice $\sigma_2 = \sigma_2$ pero debe decir: $\sigma_1 = \sigma_2$.
- <u>Página 315</u>: En el estadístico t' del apartado *Varianzas desconocidas pero diferentes* dice $\overline{X} - \overline{X}_2$ pero debe decir: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.
- <u>Página 319</u>: Utilice el resumen de los procedimientos de prueba sobre medias poblacionales dado en la Tabla 10.2.
- <u>Páginas 320 y 321</u>: Interprete las gráficas de α y β en las Figuras 10.14 y 10.15.
- <u>Páginas 323 a 325</u>: Vea y analice los útiles comentarios sobre las ***gráficas de caja y extensión***, desde el último párrafo de la página 323 hasta el segundo párrafo de la página 325.

Para pensar

1. En un juicio que se hace a un individuo acusado de robo, ¿cuáles son los dos tipos de error? ¿Cuál de ellos considera más grave la justicia?
2. Se desea probar la hipótesis nula de que cierto dispositivo anticontaminante para automóviles es eficaz. Explique en qué condiciones cometería error tipo I y en qué condiciones cometería error tipo II.
3. Dé un ejemplo de hipótesis para la cual el error tipo I se considere más serio que el error tipo II.



A trabajar solos...

Aunque no tanto porque al final encontrará los ejercicios resueltos.

1. Establezca la hipótesis nula a utilizar en la prueba de las siguientes afirmaciones. Proponga posibles hipótesis alternativas y determine, en forma general, cuál sería el criterio de decisión.
   a) El 20% de la población de cereales del año próximo será exportado a la India.
   b) En promedio, las amas de casa de Estados Unidos, beben tres tazas de café al día.

- **c)** La proporción de egresados de cierta universidad que se especializa en Ciencias Sociales, es al menos del 15%.
- **d)** El promedio de consumo de agua de los habitantes de cierta localidad es de 400 litros por habitante y por día.
- **e)** Los residentes del suburbio de Richmond recorren, en promedio, 15 kilómetros para llegar a su lugar de trabajo.

2. Responda:

- **a)** Suponga que un especialista en alergias desea probar la hipótesis de que al menos 30% del público es alérgico a ciertos productos lácteos. ¿Cuándo el especialista cometería error tipo I y cuándo error tipo II?
- **b)** Un sociólogo está interesado en la eficacia de un curso de capacitación diseñado para lograr que más conductores se acostumbren a utilizar los cinturones de seguridad en el automóvil:
  - **i)** ¿Qué hipótesis estará probando esta persona si comete error tipo I al concluir erróneamente que el curso de capacitación no es eficaz?
  - **ii)** ¿Qué hipótesis estará probando esta persona si comete error tipo II al concluir erróneamente que el curso de capacitación es eficaz?
- **c)** Una gran empresa manufacturera ha sido calificada como discriminadora en sus prácticas de contratación:
  - **i)** ¿Qué hipótesis se está probando si un jurado comete error tipo I al encontrar que la compañía es culpable?
  - **ii)** ¿Qué hipótesis se está probando si un jurado comete error tipo II al encontrar culpable a la compañía?

3. Un fabricante de fibras textiles está investigando una nueva fibra para tapicería, la cual tiene una elongación media por hilo de 12 kg con una desviación estándar de 0,5 kg. La compañía desea probar la hipótesis $H_0 : \mu = 12$ kg contra $H_1 : \mu < 12$ kg, utilizando para ello una muestra aleatoria de 36 especímenes.

- **a)** ¿Cuál sería el criterio de decisión a adoptar para $\alpha = 0{,}01$ y $\alpha = 0{,}05$?
- **b)** ¿Qué decisión tomaría si la media muestral fuera de 11,83 kg, según las condiciones iniciales del problema, para un $\alpha = 0{,}01$?, ¿y si $\alpha = 0{,}05$?
- **c)** ¿Qué decisión tomaría si la media muestral fuera de 11,83 kg según las condiciones iniciales del problema pero con $n = 100$ y para un $\alpha = 0{,}01$?, ¿y si $\alpha = 0{,}05$?
- **d)** Encuentre β para el caso donde la elongación media real es de 11,7 kg para $n = 36$.
- **e)** Encuentre β para el caso donde la elongación media real es de 11,7 kg para $n = 100$.

4. Un laboratorio ofrece frascos de agua oxigenada de 100 cm^3. Se toma una muestra aleatoria de 144 frascos y se encuentra que el volumen medio es de 101 cm^3 con un desvío muestral de 4 cm^3

a) Con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ pruebe si se ha producido un aumento en el volumen de agua oxigenada de los frascos.

b) Calcule el valor P e interprete el valor obtenido.

c) Encuentre β para el caso donde el volumen medio verdadero es de 101,2 cm^3.

d) ¿Qué sucede con el valor de β si se realiza la prueba con $\alpha = 0{,}01$?

e) Realice la prueba para n = 225 y compare ambos errores nuevamente.

f) ¿Cómo puede mantener pequeños ambos errores?

g) Calcule el valor P e interprete el valor obtenido.

5. Un fabricante está interesado en el voltaje de salida de una fuente de alimentación. Se supone que el voltaje de salida tiene una distribución normal, con desviación estándar 1 V y media 5 V. El fabricante desea probar $H_0 : \mu = 5$ V contra $H_1 : \mu \neq 5$ V.

a) ¿Es cierto lo que dice el fabricante si en una muestra de 64 fuentes obtuvo un promedio de 5,3 V? ($\alpha = 0{,}05$)

b) Calcule el valor P e interprete el valor obtenido.

c) ¿Qué error tipo II cometería al aceptar la hipótesis nula cuando en realidad la media es de 4,8 V?

6. Un artículo publicado en la revista Materials Engineering (1989, Vol. II, Nº 4, pág. 275- 281) describe los resultados de pruebas de resistencia a la adhesión de 22 especímenes de aleación U-700. La carga para la que cada espécimen falla es la siguiente (en MPa):

19,8	18,5	17,6	16,7	15,8	15,4	14,1	13,6	11,9	11,4	11,4
7,9	8,8	7,5	15,4	15,4	19,5	14,9	12,7	11,9	11,4	10,1

La media muestral es de 13,71 MPa y la desviación estándar muestral es de 3,55 MPa.

¿Sugieren los datos que la carga promedio de falla es mayor que 10 MPa? Suponga que la carga donde se presenta la falla tiene una distribución normal y utilice $\alpha = 0{,}05$.

7. Un diseñador de productos está interesado en reducir el tiempo de secado de una pintura. Se prueban dos fórmulas de pintura; la fórmula 1 tiene el contenido químico estándar y la fórmula 2 tiene un nuevo ingrediente secante que tiende a reducir el tiempo de secado. De la experiencia se sabe que la desviación estándar del tiempo de secado es ocho minutos y esta variabilidad inherente no debe verse afectada por la adición del nuevo ingrediente. Se pintan 35 placas con la fórmula 1 y otras 35 con la fórmula 2. Los dos tiempos promedio de secado muestrales son de 116 min y 112 min, respectivamente. ¿A qué conclusión puede llegar el diseñador del producto sobre la eficacia del nuevo ingrediente, utilizando $\alpha = 0{,}01$?

8. Se analizan dos catalizadores para determinar la forma en que afectan el rendimiento promedio de un proceso químico. Por experiencia se sabe que el rendimiento se comporta de manera aproximadamente normal. De manera específica, el catalizador 1 es el que se está empleando en este momento y es aceptable. Debido a que el catalizador 2 es más económico, éste puede adoptarse siempre y cuando no cambie el rendimiento del proceso. Se hace una prueba en una planta piloto; los resultados obtenidos son:
$\bar{x}_1 = 95{,}142$, $s_1 = 2{,}39$, $n_1 = 8$ y $\bar{x}_2 = 92{,}733$, $s_2 = 2{,}98$, $n_2 = 8$ para los catalizadores 1 y 2, respectivamente. ¿Existe alguna diferencia entre los rendimientos promedio, utilizando $\alpha = 0{,}05$?

9. Un fabricante de semiconductores produce controladores que se emplean en aplicaciones de motores de automóviles asegurando que la proporción de controladores defectuosos en uno de los pasos críticos de manufactura no es mayor que 0,05. El cliente requiere que el fabricante demuestre este nivel de calidad, utilizando $\alpha = 0{,}05$. El fabricante de semiconductores toma una muestra aleatoria de 200 dispositivos y encuentra que cuatro de ellos son defectuosos, ¿pudo demostrar al cliente la calidad del proceso?

10. Se evalúan dos tipos diferentes de soluciones para pulir, para su posible uso un tipo de pulido en la fabricación de lentes intraoculares utilizados en el ojo humano después de una cirugía de cataratas. Se pulen 300 lentes con la primera solución y, de éstas, 253 no presentaron defectos inducidos por el pulido. Después se pulen otras 300 lentes con la segunda solución, de los cuales 196 resultaron satisfactorios. ¿Existe alguna razón para creer que las dos soluciones para pulir son diferentes a un nivel de significancia del 1%?

11. Un fabricante de detergente líquido está interesado en la uniformidad de la máquina utilizada para llenar las botellas. Supóngase que la distribución del volumen de llenado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas, se obtiene un varianza muestral $s^2 = 0{,}0153$ onzas^2. Si la varianza del volumen de llenado es mayor que 0,01 onzas^2, entonces existe una proporción aceptable de botellas que serán llenadas con una cantidad menor de líquido.

a) ¿Existe evidencia en los datos muestrales que sugiera que el fabricante tiene un problema con el llenado de las botellas? Use $\alpha = 0{,}05$.

b) Calcule el valor P (aunque sea de manera aproximada) e interprete el valor obtenido.

12. Mientras realizan una tarea extenuante, el ritmo cardíaco de 25 trabajadores se incrementa en un promedio de 18,4 pulsaciones por minuto, con una desviación estándar de 4,9 pulsaciones por minuto. Use un nivel de significancia de

0,05 para probar la hipótesis nula de que $\sigma^2 = 30$ para tales incrementos en el ritmo cardíaco contra la hipótesis alterna de que $\sigma^2 < 30$.

13. Una obra social privada contrata los servicios de una empresa dedicada a emergencias médicas y desea probar la hipótesis nula de que $\sigma^2 = 4$ minutos^2 para el tiempo que tarda en llegar la ambulancia al lugar solicitado contra la hipótesis alternativa de que $\sigma^2 \neq 4$ minutos^2. El tiempo ocupado por la ambulancia se distribuye normalmente. ¿Qué puede concluirse con un nivel de significancia de 0,01, si en una muestra aleatoria de tamaño n = 10 se obtuvo s = 2,2 minutos?

14. Las capas de óxido en las obleas semiconductoras son depositadas en una mezcla de gases para alcanzar el espesor apropiado. La variabilidad del espesor de las capas de óxido es una característica crítica de la oblea, y lo deseable para los siguientes pasos de la fabricación es tener una variabilidad baja. Para ello se estudian dos mezclas diferentes de gases con la finalidad de determinar con cuál se obtienen mejores resultados en cuanto a la reducción en la variabilidad del espesor del óxido. Veinticinco obleas son depositadas en cada gas. Las desviaciones estándar de cada muestra del espesor del óxido son s_1 = 1,96 angstroms y s_2 = 2,13 angstroms, respectivamente. ¿Existe alguna evidencia que indique preferencia por alguno de los gases, con un nivel de significancia de 0,02?

15. Se desea investigar la distribución estadística que sigue la cantidad de productos congelados que son descartados por haberse roto la cadena de frío. Para esto se han examinado 210 de estos productos por día, escogidos al azar, para determinar la frecuencia con que se deben descartar. El número de días en que se descartaron cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco o más productos congelados fueron 25, 55, 65, 35, 20 y 10, respectivamente.
¿Podría creer razonablemente que la cantidad de productos congelados descartados sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 2$?

16. Si un ingeniero de control de calidad toma una muestra de 10 neumáticos que salen de una línea de ensamblaje y él desea verificar sobre la base de los datos que se presentan a continuación, si el número de llantas con defectos observadas en 200 días, siguen una distribución binomial con n = 10 y p = 0,05, utilizando un nivel de significancia del 0,05.

Número de unidades con defectos	Cantidad de días
0	138
1	53
2 o más	9

17. Un fabricante de baterías es visitado por inspectores de 'Defensa al consumidor' porque la duración de las baterías (de una muestra aleatoria seleccionada para realizar la inspección) se ajusta a una distribución normal con media 3,5 años y una desviación estándar de 0,7 años, mientras que el fabricante asegura que duran mucho más, en promedio.

Los inspectores analizaron una muestra de 40 baterías y obtuvieron los siguientes datos:

Intervalos	Cantidad de baterías
1,45 - 1,95	3
1,95 - 2,45	3
2,45 - 2,95	2
2,95 - 3,45	16
3,45 - 3,95	10
3,95 - 4,45	2
4,45 - 4,95	4

Finalmente… ¿Los inspectores deben volver 'con las manos vacías' porque no pueden comprobar, con un nivel de significancia de 0,05, que el fabricante miente?

18. En un experimento para estudiar la dependencia entre la hipertensión y los hábitos de fumar, se tomaron los siguientes datos de 180 individuos:

	No fumadores	Fumadores moderados	Fumadores empedernidos
Con hipertensión	21	36	30
Sin hipertensión	48	26	19

Pruebe la hipótesis de que la presencia o ausencia de hipertensión es independiente de los hábitos de fumar con un nivel de significancia de 0,05.

19. De acuerdo con un estudio publicado en el *American Journal of Public Health*, las viudas viven más que los viudos. Considere los siguientes datos de sobrevivencia de 100 viudas y 100 viudos después de la muerte de su cónyuge:

Años de sobrevida	Viuda	Viudo
Menos de 5	25	39
De 5 a 10	42	40
Más de 10	33	21

¿Podemos concluir con un nivel de significancia de 0,05 que las proporciones de viudas y viudos son iguales con respecto a los diferentes períodos que un cónyuge sobrevive tras la muerte de su compañero?

20. En un estudio realizado entre 200 estudiantes de Córdoba, 150 estudiantes de Rosario y 150 estudiantes de Mendoza con el objeto de analizar si la costumbre de utilizar Facebook para hacer consultas sobre cuestiones relacionadas con sus estudios en la universidad depende del lugar de residencia, se encontró que 52 estudiantes de Córdoba, 31 estudiantes de Rosario y 37 estudiantes de Mendoza no usan Facebook con este fin. ¿Podría decir con un nivel de significancia de 0,01 que el lugar de residencia y el uso de Facebook para consultas universitarias son independientes?

21. Una muestra aleatoria de 90 adultos se clasifica de acuerdo a su género y al número de horas que pasan viendo la televisión durante una semana:

	Masculino	Femenino
Más de 25 horas	15	29

Menos de 25 horas	27	19

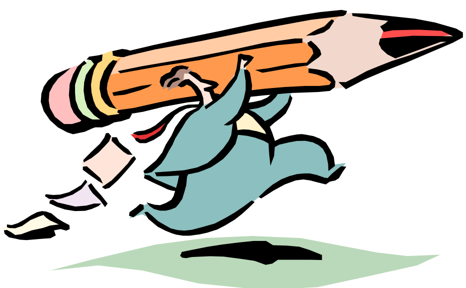
Utilice un nivel de significancia de 0,01 y pruebe que el tiempo que pasan viendo televisión es independiente del género.

¡A repasar...!

Es preciso que domine muy bien este tema antes de comenzar las aplicaciones prácticas y las autoevaluaciones.

Para autoevaluarse, responda las preguntas que están a continuación. Puede hacerlo con el material de estudio, pero asegurándose que "entiende" cada palabra, a tal punto que usted podría explicarle a un amigo, que no conoce el tema, de manera simple, los conceptos estudiados:

- ☑ **¿Qué es una hipótesis estadística?**
- ☑ **¿A qué se llama hipótesis nula y a qué hipótesis alternativa?**
- ☑ **Defina error de tipo I y error de tipo II.**
- ☑ **Distinga cada error de su probabilidad.**
- ☑ **Mencione propiedades de α y de β.**
- ☑ **¿A qué se llama potencia de una prueba?**
- ☑ **¿Qué es el valor P?**
- ☑ **¿Cómo se usa el valor P para la toma de decisiones?**
- ☑ **Recuerde los pasos para plantear y resolver un problema de pruebas de hipótesis.**
- ☑ **Identifique las condiciones que se deben dar para el uso de cada estadístico de prueba.**



Por favor, no avance al siguiente tema si tiene dudas o no

recuerda las nociones aquí volcadas. Pero si se siente listo para continuar, es hora de empezar a trabajar con las **autoevaluaciones** y las **aplicaciones prácticas**...

Para pensar

Pruebas de hipótesis

1. En un juicio que se hace a un individuo acusado de robo, ¿cuáles son los dos tipos de error? ¿Cuál de ellos considera más grave la justicia?
   H_0 : El individuo es inocente

H_1 : El individuo no es inocente
α: es la probabilidad de rechazar la H_0 cuando en realidad es verdadera
α: es la probabilidad de creer que es culpable cuando en realidad es inocente
β : es la probabilidad de aceptar la H_0 cuando en realidad es falsa
β : es la probabilidad de creer que es inocente cuando en realidad es culpable
La justicia considera más grave, el error de tipo I, es decir, la justicia prefiere cometer el error de tipo II.

2. Se desea probar la hipótesis nula de que cierto dispositivo anticontaminante para automóviles es eficaz. Explique en qué condiciones cometería error tipo I y en qué condiciones cometería error tipo II.

H_0 : El dispositivo anticontaminante es eficaz
H_1 : El dispositivo anticontaminante no es eficaz
Error tipo I : se comete al rechazar la H_0 cuando en realidad es verdadera
*Se cometería **error tipo I** cuando se rechace que el dispositivo es eficaz (es decir, se cree que no es eficaz) pero en realidad lo es.*
Error tipo II : se comete al aceptar la H_0 cuando en realidad es falsa
*Se cometería **error tipo II** cuando se acepte que el dispositivo es eficaz pero en realidad no lo es.*

3. Dé un ejemplo de hipótesis para la cual el error tipo I se considere más serio que el error tipo II.

H_0 : El hábito de fumar y el cáncer de pulmón son sucesos independientes
H_1 : El hábito de fumar y el cáncer de pulmón no son sucesos independientes
Es preferible cometer error tipo I, es decir, se cometería más error al aceptar que el hábito de fumar no produce cáncer y seguir fumando cuando en realidad eso es falso.

H_0 : La maquinaria nueva es mejor que la existente
H_1 : La maquinaria nueva no es mejor que la existente
Es preferible cometer error tipo I, es decir, rechazar que la nueva maquinaria es mejor, aunque sea cierto a creer que es mejor, e invertir en una nueva maquinaria que no es mejor.

Ejercicios resueltos

1. Establezca la hipótesis nula a utilizar en la prueba de las siguientes afirmaciones. Proponga posibles hipótesis alternativas y determine, en forma general, cuál sería el criterio de decisión.

a) El 20% de la población de cereales del año próximo será exportado a la India.

$$H_0 : p = 0{,}2$$
$$H_1 : p < 0{,}2$$

Criterio de decisión $\left|\begin{array}{l} \text{Se acepta } H_0 \text{ si } p_o < p_c \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si } p_o \geq p_c \end{array}\right.$

b) En promedio, las amas de casa de Estados Unidos, beben tres tazas de café al día.

$$H_0 : \mu = 3$$
$$H_1 : \mu \neq 3$$

Criterio de decisión $\left|\begin{array}{l} \text{Se acepta } H_0 \text{ si } -z_c \leq z_o \leq +z_c \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si } z_o < -z_c \text{ o si } z_o > +z_c \end{array}\right.$

c) La proporción de egresados de cierta universidad que se especializa en Ciencias Sociales, es al menos del 15%.

$$H_0 : p = 0{,}15$$
$$H_1 : p > 0{,}15$$

Criterio de decisión $\left|\begin{array}{l} \text{Se acepta } H_0 \text{ si } p_o > p_c \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si } p_o \leq p_c \end{array}\right.$

d) El promedio de consumo de agua de los habitantes de cierta localidad es de 400 litros por habitante y por día.

$$H_0 : \mu = 400$$
$$H_1 : \mu > 400$$

Criterio de decisión $\left|\begin{array}{l} \text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_o \leq +z_c \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si } z_o > +z_c \end{array}\right.$

e) Los residentes del suburbio de Richmond recorren, en promedio, 15 kilómetros para llegar a su lugar de trabajo.

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu < 15$$

Criterio de decisión $\left|\begin{array}{l} \text{Se acepta } H_0 \text{ si } z_o \geq +z_c \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si } z_o < +z_c \end{array}\right.$

2. Responda:

a) Suponga que un especialista en alergias desea probar la hipótesis de que al menos 30% del público es alérgico a ciertos productos lácteos. ¿Cuándo el especialista cometería error tipo I y cuándo error tipo II?

X:"Cantidad de personas alérgicas a ciertos productos lácteos"

$X \sim$ *Binomial* $(n\ ;\ p)$

$\hat{P} \sim$ *Normal* $(\mu = p\ ;\ \sigma^2 = p.q/n)$

$H_0 : p = 0{,}3$

$H_1 : p \geq 0{,}3$

Error tipo I : se comete al rechazar la H_0 cuando en realidad es verdadera

*Se cometería **error tipo I** cuando se concluya que al menos el 30% del público es alérgico, cuando en realidad el 30% es alérgico.*

Error tipo II : se comete al aceptar la H_0 cuando en realidad es falsa

*Se cometería **error tipo II** cuando se concluya que el 30% del público es alérgico, cuando en realidad más del 30% es alérgico.*

b) Un sociólogo está interesado en la eficacia de un curso de capacitación diseñado para lograr que más conductores se acostumbren a utilizar los cinturones de seguridad en el automóvil:

i. ¿Qué hipótesis estará probando esta persona si comete error tipo I al concluir erróneamente que el curso de capacitación no es eficaz?

H_0 : El curso de capacitación es eficaz

H_1 : El curso de capacitación no es eficaz

ii. ¿Qué hipótesis estará probando esta persona si comete error tipo II al concluir erróneamente que el curso de capacitación es eficaz?

H_0 : El curso de capacitación es eficaz

H_1 : El curso de capacitación no es eficaz

c) Una gran empresa manufacturera ha sido calificada como discriminadora en sus prácticas de contratación:

i. ¿Qué hipótesis se está probando si un jurado comete error tipo I al encontrar que la compañía es culpable?

H_0 : La empresa no es culpable

H_1 : La empresa es culpable

ii. ¿Qué hipótesis se está probando si un jurado comete error tipo II al encontrar culpable a la compañía?

H_0 : La empresa es culpable

H_1 : La empresa no es culpable

3. Un fabricante de fibras textiles está investigando una nueva fibra para tapicería, la cual tiene una elongación media por hilo de 12 kg con una desviación estándar de 0,5 kg. La compañía desea probar la hipótesis $H_0 : \mu = 12$ kg contra $H_1 : \mu < 12$ kg, utilizando para ello una muestra aleatoria de 36 especímenes.

X:"Elongación del hilo para tapicería"

$X \sim$ Desconocida

$\overline{X} \sim$ Normal ($\mu_{\overline{x}} = \mu$; $\sigma_{\overline{x}} = \sigma/\sqrt{n}$)

$H_0 : \mu = 12$ kg contra $H_1 : \mu < 12$ kg

a) ¿Cuál sería el criterio de decisión a adoptar para $\alpha = 0{,}01$ y $\alpha = 0{,}05$?

- $\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = -2{,}33 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = -2{,}33 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{36}} + 12 = 11{,}806$ kg
- ***Criterio de decisión***:
  - *Se **acepta** la H_0 si el valor observado en la muestra es mayor o igual a 11,806 kg.*
  - *Se **rechaza** la H_0 si el valor observado en la muestra es menor a 11,806 kg.*

Rechazo la H_0 ←	*→ Acepto la H_0*

↓

11,806 kg

- $\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = -1{,}64 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = -1{,}64 \cdot \dfrac{0{,}5}{\sqrt{36}} + 12 = 11{,}86$ kg
- ***Criterio de decisión***:
  - *Se **acepta** la H_0 si el valor observado en la muestra es mayor o igual a 11,86 kg.*
  - *Se **rechaza** la H_0 si el valor observado en la muestra es menor a 11,86 kg.*

Rechazo la H_0 ←	*→ Acepto la H_0*

↓

11,86 kg

b) ¿Qué decisión tomaría si la media muestral fuera de 11,83 kg, según las condiciones iniciales del problema, para un $\alpha = 0{,}01$?, ¿y si $\alpha = 0{,}05$?

- *Para un $\alpha = 0{,}01$, **acepto** la H_0, o sea, creo que la elongación media del hilo es de 12 kg y que cualquier variación se debe a las variaciones propias del azar y no a un cambio significativo en el valor medio de la elongación.*
- *Para un $\alpha = 0{,}05$, **rechazo** la H_0, o sea, creo que la elongación media del hilo es significativamente menor que 12 kg.*

- *Es obvio ver que al disminuir el error tipo I, aumenta la región de aceptación y con ella las probabilidades de aceptar la hipótesis nula.*

c) ¿Qué decisión tomaría si la media muestral fuera de 11,83 kg, según las condiciones iniciales del problema, pero con n = 100 y para un α = 0,01?, ¿y si α = 0,05?

- $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow z_c = -2{,}33 \Rightarrow \bar{x}_c = -2{,}33 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{100}} + 12 = 11{,}88$ kg
- ***Criterio de decisión:***
  - *Se **acepta** la H_0 si el valor observado en la muestra es mayor o igual a 11,88 kg.*
  - *Se **rechaza** la H_0 si el valor observado en la muestra es menor a 11,88 kg.*

Rechazo la H_0 ←	→ Acepto la H_0

↓
11,88 kg

- $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_c = -1{,}64 \Rightarrow \bar{x}_c = -1{,}64 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{100}} + 12 = 11{,}92$ kg
- ***Criterio de decisión:***
  - *Se **acepta** la H_0 si el valor observado en la muestra es mayor o igual a 11,92 kg.*
  - *Se **rechaza** la H_0 si el valor observado en la muestra es menor a 11,92 kg.*

Rechazo la H_0 ←	→ Acepto la H_0

↓
11,92 kg

*Para un α = 0,01 y para α = 0,05, **rechazo** la H_0, o sea, creo que la elongación media del hilo es significativamente menor que 12 kg, ya que en ambos casos, la media muestral de 11,83 kg es menor a los respectivos valores críticos.*

d) Encuentre β para el caso donde la elongación media real es de 11,7 kg para n = 36.

- $\alpha = 0{,}01$

$$\beta = P(\bar{X} > 11{,}806 \text{ kg} \,/\, \mu = 11{,}7 \text{ kg}) =$$
$$= P\left(Z > \frac{11{,}806 - 11{,}7}{\frac{0{,}5}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z > 1{,}27) = \mathbf{0{,}10204}$$

Tenemos una probabilidad de 0,10204 de aceptar la hipótesis nula (μ_{H_0} = 12 kg) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 11,7 kg). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,89796. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,89796.

- $\alpha = 0,05$

$\beta = P(\overline{X} > 11,86 \text{ kg} / \mu = 11,7 \text{ kg}) =$

$$= P\left(Z > \frac{11,86 - 11,7}{\frac{0,5}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z > 1,92) = \mathbf{0,02743}$$

Tenemos una probabilidad de 0,02743 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 12 kg) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 11,7 kg). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,97257. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,97257.

e) Encuentre β para el caso donde la elongación media real es de 11,7 kg para n = 100.

- $\alpha = 0,01$

$\beta = P(\overline{X} > 11,88 \text{ kg} / \mu = 11,7 \text{ kg}) =$

$$= P\left(Z > \frac{11,88 - 11,7}{\frac{0,5}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z > 3,6) = \mathbf{0,00016}$$

Tenemos una probabilidad de 0,00016 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 12 kg) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 11,7 kg). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,99984. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,99984.

- $\alpha = 0,05$

$\beta = P(\overline{X} > 11,92 \text{ kg} / \mu = 11,7 \text{ kg}) =$

$$= P\left(Z > \frac{11,92 - 11,7}{\frac{0,5}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z > 4,4) = \mathbf{0,00001}$$

Tenemos una probabilidad de 0,00001 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 12 kg) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 11,7 kg). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,99999. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,99999.

4. Un laboratorio ofrece frascos de agua oxigenada de 100 cm^3. Se toma una muestra aleatoria de 144 frascos y se encuentra que el volumen medio es de 101 cm^3 con un desvío muestral de 4 cm^3.

a) Con un nivel de significancia α = 0,05 pruebe si se ha producido un aumento en el volumen de agua oxigenada de los frascos.

X:"Volumen de agua oxigenada de los frascos"

$X \sim$ *Desconocida*

$\overline{X} \sim$ Normal ($\mu_{\overline{x}} = \mu$; $\sigma_{\overline{x}} = \sigma / \sqrt{n}$) *Por el teorema del límite central, ya que n es grande (n > 30)*

Según los datos del problema:
$\mu = 100\ cm^3$
$n = 144$ *frascos*
$\overline{x}_o = 101\ cm^3$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \mu = 100\ cm^3$
$H_1 : \mu > 100\ cm^3$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = 1{,}64 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = 1{,}64 . \frac{4}{\sqrt{144}} + 100 = 100{,}55\ cm^3$$

Por lo que decidimos ***rechazar*** *la* H_0*, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.*

Según la conclusión, interpretamos:
- *Se rechaza la* H_0*, es decir, se ha producido un aumento significativo en el volumen de agua oxigenada de los frascos.*

b) Calcule el valor P e interprete el valor obtenido.

El valor P es el menor nivel (de significancia) que hace que el valor observado "caiga" en la zona de rechazo, es decir, en el que el valor observado de la estadística de prueba es significativo.
Entonces,
Valor P = P($\overline{X} > \overline{x}_o$ ***)****, porque la hipótesis alternativa es* $\mu > 100\ cm^3$

Nota:
Si la hipótesis alternativa fuera $\mu < 100\ cm^3$*, Valor P = P(*$\overline{X} < \overline{x}_o$*)*
Si la hipótesis alternativa fuera $\mu \neq 100\ cm^3$*, Valor P = 2 . P(*$\overline{X} < \overline{x}_o$*) o Valor P = 2 . P(*$\overline{X} > \overline{x}_o$*)*

En nuestro caso,

$$\text{Valor P} = P(\overline{X} > \overline{x}_o) = P(Z > z_o) = P\left(Z > \frac{101 - 100}{\frac{4}{\sqrt{144}}}\right) = P(Z > 3) = \mathbf{0{,}00135}$$

A partir de un nivel de significancia de 0,00135, el valor observado en la muestra caería en la zona de rechazo.
El nivel de significancia de referencia (en este problema) es $\alpha = 0{,}05$*, y como el valor P es menor que* α*, nuestra decisión debe ser la de rechazar la hipótesis nula (como lo hicimos en el inciso a).*

c) Encuentre β para el caso donde el volumen medio verdadero es de 101,2 cm³.

α = 0,05

$$\beta = P(\,\overline{X} < 100{,}55\ cm^3 \ / \ \mu = 101{,}2\ cm^3\,) =$$

$$= P\left(Z < \frac{100{,}55 - 101{,}2}{\frac{4}{\sqrt{144}}}\right) = P(\,Z < -1{,}95\,) = \mathbf{0{,}02559}$$

Tenemos una probabilidad de 0,02559 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 100 cm³) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 101,2 cm³). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,97441. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,97441.

d) ¿Qué sucede con el valor de β si se realiza la prueba con α = 0,01?

$$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = 2{,}33 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = 2{,}33 \cdot \frac{4}{\sqrt{144}} + 100 = 100{,}78\ cm^3$$

$$\beta = P(\,\overline{X} < 100{,}78\ cm^3 \ / \ \mu = 101{,}2\ cm^3\,) =$$

$$= P\left(Z < \frac{100{,}78 - 101{,}2}{\frac{4}{\sqrt{144}}}\right) = P(\,Z < -1{,}26\,) = \mathbf{0{,}10383}$$

Tenemos una probabilidad de 0,10383 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 100 cm³) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 101,2 cm³). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,89617, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,89617.

- *¿Qué sucede con el valor de β al disminuir el valor de α?*

n = 144	α = 0,05 β = 0,02559	**β aumenta al disminuir α.**
	α = 0,01 β = 0,10383	

e) Realice la prueba para n = 225 y compare ambos errores nuevamente.

Según los datos del problema:

μ = 100 cm³

n = 225 frascos

$\overline{x}_o$ = 101 cm³

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \mu = 100\ cm^3$

$H_1 : \mu > 100\ cm^3$

- *Para un nivel de significancia de 0,05, el valor crítico es:*

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = 1{,}64 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = 1{,}64 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{225}} + 100 = 100{,}44 \text{ cm}^3$

*Por lo que decidimos **rechazar** la H_0, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se rechaza la H_0, es decir, <u>se ha producido un aumento significativo</u> en el volumen de agua oxigenada de los frascos.*

El valor de β para el caso donde el volumen medio verdadero es de 101,2 cm^3, sería:

$\beta = P(\overline{X} < 100{,}44 \text{ cm}^3 \,/\, \mu = 101{,}2 \text{ cm}^3) =$

$= P\left(Z < \dfrac{100{,}44 - 101{,}2}{\dfrac{4}{\sqrt{225}}}\right) = P(Z < -2{,}85) = \mathbf{0{,}00219}$

Tenemos una probabilidad de 0,00219 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 100 cm^3) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 101,2 cm^3). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,99781, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,99781.

- *Para un nivel de significancia de 0,01, el valor crítico es:*

$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = 2{,}33 \quad \Rightarrow \quad x_c = 2{,}33 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{225}} + 100 = 100{,}62 \text{ cm}^3$

*Por lo que decidimos **rechazar** la H_0, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se rechaza la H_0, es decir, <u>se ha producido un aumento significativo</u> en el volumen de agua oxigenada de los frascos.*

El valor de β para el caso donde el volumen medio verdadero es de 101,2 cm^3, sería:

$\beta = P(\overline{X} < 100{,}62 \text{ cm}^3 \,/\, \mu = 101{,}2 \text{ cm}^3) =$

$= P\left(Z < \dfrac{100{,}62 - 101{,}2}{\dfrac{4}{\sqrt{225}}}\right) = P(Z < -2{,}18) = \mathbf{0{,}01463}$

Tenemos una probabilidad de 0,01463 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 100 cm^3) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 101,2 cm^3). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,98537, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,98537.

n = 225	$\alpha = 0{,}05$ $\beta = 0{,}00219$	**β aumenta al disminuir α, y viceversa, pero mucho menos al aumentar el tamaño de la muestra.**
	$\alpha = 0{,}01$ $\beta = 0{,}01463$	

f) ¿Cómo puede mantener pequeños ambos errores?

Para mantener pequeños ambos errores es necesario ***aumentar el tamaño de la muestra****.*

5. Un fabricante está interesado en el voltaje de salida de una fuente de alimentación. Se supone que el voltaje de salida tiene una distribución normal, con desviación estándar 1 V y media 5 V. El fabricante desea probar $H_0 : \mu = 5$ V contra $H_1 : \mu \neq 5$ V.

X:"Voltaje de salida de una fuente de alimentación"

$X \sim Normal\ (\mu = 5\ V\ ;\ \sigma = 1\ V)$

$\overline{X} \sim Normal\ (\mu_{\overline{x}} = \mu\ ;\ \sigma_{\overline{x}} = \sigma / \sqrt{n}\ )$ *Por provenir la muestra de una distribución normal*

a) ¿Es cierto lo que dice el fabricante si en una muestra de 64 fuentes obtuvo un promedio de 5,3 V? (α = 0,05)

Según los datos del problema:

$\mu = 5\ V$

$n = 64$ *fuentes*

$\overline{x}_o = 5{,}3\ V$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \mu = 5\ V$

$H_1 : \mu \neq 5\ V$

Para el nivel de significancia indicado, los valores críticos son:

$$\Rightarrow \quad \overline{x}_{c1} = -1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} + 5 = 4{,}755\ V$$

$$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = \pm 1{,}96$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x}_{c2} = 1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} + 5 = 5{,}245\ V$$

Por lo que decidimos ***rechazar*** *la* H_0*, ya que el valor crítico 2 es menor que el valor observado en la muestra, es decir, el valor observado no se encuentra entre los valores críticos.*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se rechaza la* H_0*, es decir, se concluye que con un nivel de significancia de 0,05, hay diferencias significativas que hacen creer que <u>el voltaje de salida medio no es de 5 V</u>.*

b) Calcule el valor P e interprete el valor obtenido.

Valor P = $2 \,.\, P(\overline{X} > \overline{x}_o) = 2 \,.\, P(Z > z_o) = 2 \,.\, P\left(Z > \dfrac{5{,}3 - 5}{\frac{1}{\sqrt{64}}}\right) = 2.\, P(Z > 2{,}4) =$

$= 2 \,.\, 0{,}0082 = \mathbf{0{,}0164}$

A partir de un nivel de significancia de 0,0164, el valor observado en la muestra caería en la zona de rechazo.

El nivel de significancia de referencia (en este problema) es α = 0,05, y como el valor P es menor que α, nuestra decisión debe ser la de rechazar la hipótesis nula (como lo hicimos en el inciso a).

c) ¿Qué error tipo II cometería al aceptar la hipótesis nula cuando en realidad la media es de 4,8 V?

El valor de β para el caso en que la media real fuera de 4,8 V, sería:

$\beta = P(\, 4{,}755\ V < \overline{X} < 5{,}245\ V \,/\, \mu = 4{,}8\ V\,) =$

$= P\left(\dfrac{4{,}755 - 4{,}8}{\frac{1}{\sqrt{64}}} < Z < \dfrac{5{,}245 - 4{,}8}{\frac{1}{\sqrt{64}}}\right) = P(-0{,}36 < Z < 3{,}56) = \mathbf{0{,}64039}$

Tenemos una probabilidad de 0,64039 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 5 V) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 4,8 V). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,35961, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,35961.

6. Un artículo publicado en la revista Materials Engineering (1989, Vol. II, Nº 4, pág. 275- 281) describe los resultados de pruebas de resistencia a la adhesión de 22 especímenes de aleación U-700. La carga para la que cada espécimen falla es la siguiente (en MPa):

19,8	18,5	17,6	16,7	15,8	15,4	14,1	13,6	11,9	11,4	11,4
7,9	8,8	7,5	15,4	15,4	19,5	14,9	12,7	11,9	11,4	10,1

La media muestral es de 13,71 MPa y la desviación estándar muestral es de 3,55 MPa.

¿Sugieren los datos que la carga promedio de falla es mayor que 10 MPa? Suponga que la carga donde se presenta la falla tiene una distribución normal y utilice α = 0,05.

X:"Resistencia a la adhesión de especimenes de aleación U-700"

$X \sim Normal\ (\mu\ ;\ \sigma)$

$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim$ *t con n-1 grados de libertad*

Según los datos del problema:

μ = *10 Mpa*

n = 22 especímenes

$\overline{x}_o$ = *13,71 MPa*

Pruebas de hipótesis

s_o = 3,55 MPa

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \mu = 10$ MPa
$H_1 : \mu > 10$ MPa

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad t_{c;21} = 1{,}721 \quad \Rightarrow \quad t_c = 1{,}721.\frac{3{,}55}{\sqrt{22}} + 10 = \mathbf{11{,}30\ MPa}$$

Por lo que decidimos **rechazar** *la* H_0*, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se rechaza la* H_0*, es decir, se concluye que con un nivel de significancia de 0,05,* <u>*la carga de falla promedio es mayor que 10 MPa*</u>*.*

7. Un diseñador de productos está interesado en reducir el tiempo de secado de una pintura. Se prueban dos fórmulas de pintura; la fórmula 1 tiene el contenido químico estándar y la fórmula 2 tiene un nuevo ingrediente secante que tiende a reducir el tiempo de secado. De la experiencia se sabe que la desviación estándar del tiempo de secado es ocho minutos y esta variabilidad inherente no debe verse afectada por la adición del nuevo ingrediente. Se pintan 35 placas con la fórmula 1 y otras 35 con la fórmula 2. Los dos tiempos promedio de secado muestrales son de 116 min y 112 min, respectivamente. ¿A qué conclusión puede llegar el diseñador del producto sobre la eficacia del nuevo ingrediente, utilizando $\alpha = 0{,}01$?

X_1:"Tiempo de secado de la pintura con contenido químico estándar"
X_2:" Tiempo de secado de la pintura con nuevo ingrediente secante"
$X_1 \sim$ Normal (μ_1 ; σ_1 = 8 min)
$X_2 \sim$ Normal (μ_2 ; σ_2 = 8 min)

$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim$ Normal ($\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$; $\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$) *Por provenir de muestras normales y tener varianzas poblacionales conocidas*

Según los datos del problema:

n_1 = 35 placas	$\overline{x}_{1\,obs}$ = 116 min	σ_1 = 8 min
n_2 = 35 placas	$\overline{x}_{2\,obs}$ = 112 min	σ_2 = 8 min

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

El estadístico de prueba es: $z_o = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \dfrac{116-112}{\sqrt{\dfrac{64}{35}+\dfrac{64}{35}}} = \mathbf{2{,}092}$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = \mathbf{2{,}33}$
Por lo que decidimos ***aceptar*** *la* $\mathbf{H_0}$*, ya que el valor observado (calculado con los datos muestrales, ahora dado en términos de z) es menor que el valor crítico (obviamente, dado en términos de z, para poder comparar).*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se acepta la* H_0*, es decir, se concluye que* *<u>la adición del nuevo ingrediente a la pintura no disminuye de manera significativa el tiempo de secado</u>.*

8. Se analizan dos catalizadores para determinar la forma en que afectan el rendimiento promedio de un proceso químico. Por experiencia se sabe que el rendimiento se comporta de manera aproximadamente normal. De manera específica, el catalizador 1 es el que se está empleando en este momento y es aceptable. Debido a que el catalizador 2 es más económico, éste puede adoptarse siempre y cuando no cambie el rendimiento del proceso. Se hace una prueba en una planta piloto; los resultados obtenidos son:
$\overline{x}_1 = 95{,}142$, $s_1 = 2{,}39$, $n_1 = 8$ y $\overline{x}_2 = 92{,}733$, $s_2 = 2{,}98$, $n_2 = 8$ para los catalizadores 1 y 2, respectivamente. ¿Existe alguna diferencia entre los rendimientos promedio, utilizando $\alpha = 0{,}05$?

X_1:"Rendimiento de un proceso químico utilizando el catalizador 1"
X_2:" Rendimiento de un proceso químico utilizando el catalizador 2"
$X_1 \sim$ Normal $(\mu_1 ; \sigma_1)$
$X_2 \sim$ Normal $(\mu_2 ; \sigma_2)$
Si suponemos que las varianzas poblacionales son iguales:

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim \text{ t-Student con } n_1 + n_2 - 2 \text{ grados de libertad}$$

siendo $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

Si suponemos que las varianzas poblacionales no son iguales:

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim \text{ t con } \nu \text{ grados de libertad}$$

siendo $\nu = \dfrac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$

Como no tenemos acceso a esta información, es decir, no sabemos si las varianzas poblacionales son o no iguales, debemos probar, en primer lugar, esta condición para utilizar una u otra estadística de prueba.

Otra solución sería realizar la prueba dos veces, una por cada una de las dos estadísticas y si, en ambos casos, se obtiene la misma conclusión, no es necesario probar la igualdad (o no) de las varianzas poblacionales.

Empezaremos con este último planteo que, aunque menos "científico", tiene validez lógica.

- *Si suponemos que las **varianzas poblacionales** son **iguales**:*

  Según los datos del problema:

  $n_1 = 8$ $\qquad \bar{x}_{1o} = 95{,}142$ $\qquad s_{1o} = 2{,}39$

  $n_2 = 8$ $\qquad \bar{x}_{2o} = 92{,}733$ $\qquad s_{2o} = 2{,}98$

  Las hipótesis propuestas son:

  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \;\; (\mu_1 - \mu_2 = 0)$

  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

  El estadístico de prueba es $t_o = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

  siendo $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \dfrac{(8-1)(2{,}39)^2 + (8-1)(2{,}98)^2}{8+8-2} = 7{,}3$

  Entonces $t_o = \dfrac{95{,}142 - 92{,}733}{2{,}7 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}}} = \mathbf{1{,}7844}$

Para el nivel de significancia indicado, los valores críticos son:

$\alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad t_{c\,;\,n1+n2-2\,=\,14} = \pm\, \mathbf{2,145}$

Por lo que decidimos **aceptar** la **H_0**, ya que el valor observado (calculado con los datos muestrales) está entre los valores críticos ($-t_c < t_o < t_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, se debería suponer que <u>los catalizadores proveen al proceso químico un rendimiento promedio similar</u>. No hay una evidencia significativa que permita concluir que el catalizador 1 dará como resultado un rendimiento promedio significativamente diferente del obtenido con el uso del catalizador 2, o viceversa.

- Si suponemos que las **varianzas poblacionales** son **distintas**:

Según los datos del problema:

$n_1 = 8 \qquad \overline{x}_{1o} = 95,142 \qquad s_{1o} = 2,39$

$n_2 = 8 \qquad \overline{x}_{2o} = 92,733 \qquad s_{2o} = 2,98$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \;\; (\mu_1 - \mu_2 = 0)$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

El estadístico de prueba es $t_o = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

Entonces $t_o = \dfrac{95,142 - 92,733}{\sqrt{\dfrac{2,39^2}{8} + \dfrac{2,98^2}{8}}} = \mathbf{1,7837}$

Para el nivel de significancia indicado, los valores críticos son:

Debemos calcular los grados de libertad:

$$\nu = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = (\text{como } n_1 = n_2 = n)\ \frac{((s_1^2 + s_2^2)/n)^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2 + (s_2^2/n)^2}{n-1}} = 13,3697$$

$\alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad t_{c\,;\,\nu\,=\,13} = \pm\, \mathbf{2,160}$

Por lo que decidimos **aceptar** la **H_0**, ya que el valor observado (calculado con datos muestrales) se encuentra entre los críticos ($-t_c < t_o < t_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se acepta la H_0, es decir, se debería suponer que <u>los catalizadores proveen al proceso químico un rendimiento promedio similar</u>. No se tiene evidencia significativa que permita concluir que el catalizador

2 dará como resultado un rendimiento promedio diferente del obtenido con el uso del catalizador 1.

¡Era de esperar...! Se buscaron los números justos para que dieran distintas conclusiones y tuviera que plantear primero una prueba de hipótesis para verificar la igualdad de las varianzas poblacionales y recién ahí, poder hacer la prueba para la diferencia de medias...

X_1:"Rendimiento de un proceso químico utilizando el catalizador 1"
X_2:"Rendimiento de un proceso químico utilizando el catalizador 2"
$X_1 \sim$ Normal $(\mu_1 ; \sigma_1)$
$X_2 \sim$ Normal $(\mu_2 ; \sigma_2)$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F \text{ con } n_1 - 1 \text{ y } n_2 - 1 \text{ grados de libertad}$$

Según los datos del problema:

$n_1 = 8$ $\quad \overline{x}_{1o} = 95{,}142$ $\quad s_{1o} = 2{,}39$
$n_2 = 8$ $\quad \overline{x}_{2o} = 92{,}733$ $\quad s_{2o} = 2{,}98$

El estadístico de prueba es: $F_o = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{2{,}39^2}{2{,}98^2} = \mathbf{0{,}6432}$

Las hipótesis propuestas, para analizar la igualdad de las varianzas, son:
$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$
$H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$

Para un nivel de significancia de 0,10, los valores críticos son:
$F_{c1\,;\,\alpha/2;\,n1-1,n2-1} = F_{c1\,;\,1-\alpha/2=0{,}95;\,n1-1=7,n2-1=7} = 1/F_{\alpha/2=0{,}05;\,n2-1=7,n1-1=7} = 1/3{,}787 = \mathbf{0{,}264}$
$F_{c2\,;\,\alpha/2;\,n1-1,n2-1} = F_{c2\,;\,\alpha/2=0{,}05;\,n1-1=7,n2-1=7} = \mathbf{3{,}787}$
Por lo que decidimos **aceptar** la **H_0**, ya que el valor observado (calculado con los datos muestrales) se encuentra entre los valores críticos ($F_{c1} < F_o < F_{c2}$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se acepta la H_0, es decir, se concluye que no hay diferencia significativa entre las varianzas poblacionales. Luego, para resolver nuestro problema, debemos suponer $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$.

Entonces probaremos la diferencia de las medias poblacionales, suponiendo las varianza poblacionales iguales...
¡Menos mal que ya lo tenemos hecho...!

- *Si suponemos que las **varianzas poblacionales** son **iguales**:*

  Según los datos del problema:

  $n_1 = 8$ $\qquad \bar{x}_{1o} = 95{,}142$ $\qquad s_{1o} = 2{,}39$

  $n_2 = 8$ $\qquad \bar{x}_{2o} = 92{,}733$ $\qquad s_{2o} = 2{,}98$

  El estadístico de prueba es $t_o = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p.\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

  siendo $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \dfrac{(8-1)(2{,}39)^2 + (8-1)(2{,}98)^2}{8+8-2} = 7{,}3$

  Entonces $t_o = \dfrac{95{,}142 - 92{,}233}{2{,}7.\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}}} = \mathbf{2{,}1539}$

  Las hipótesis propuestas son:

  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \;\; (\mu_1 - \mu_2 = 0)$

  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

  Para el nivel de significancia indicado, los valores críticos son:

  $\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad t_{c\,;\,n1+n2-2\,=\,14} = \pm\, \mathbf{2{,}145}$

  *Por lo que decidimos **rechazar** la $\mathbf{H_0}$, ya que el valor observado (calculado con los datos muestrales) es mayor que el valor crítico ($t_o > t_c$).*

  Según la conclusión, interpretamos:

  - *Se rechaza la H_0, es decir, se debería suponer que **los catalizadores no proveen al proceso químico un rendimiento promedio similar**.*
  - *Hay una evidencia fuerte que permite concluir que el catalizador 2 dará como resultado un rendimiento promedio significativamente diferente del obtenido con el uso del catalizador 1. Más específicamente, **el catalizador 2 provee al proceso químico un rendimiento medio significativamente menor que el catalizador 1**.*

9. Un fabricante de semiconductores produce controladores que se emplean en aplicaciones de motores de automóviles asegurando que la proporción de controladores defectuosos en uno de los pasos críticos de manufactura no es mayor que 0,05. El cliente requiere que el fabricante demuestre este nivel de calidad, utilizando α = 0,05. El fabricante de semiconductores toma una muestra aleatoria de 200 dispositivos y encuentra que cuatro de ellos son defectuosos, ¿pudo demostrar al cliente la calidad del proceso?

X:"Cantidad de controladores defectuosos"

$X \sim$ *Binomial* $(n\ ;\ p)$

$\hat{P} \sim$ Normal $(\mu = p\ ;\ \sigma^2 = p.q/n)$

Según los datos del problema:

$x = 4 \qquad n = 200 \qquad p = 4/200 = 0{,}02$

El estadístico de prueba es $z_0 = \dfrac{\bar{p}-p}{\sqrt{p.(1-p)/n}} = \dfrac{0{,}02-0{,}05}{\sqrt{0{,}05.(1-0{,}05)/200}} = \mathbf{-1{,}95}$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : p = 0{,}05$

$H_1 : p < 0{,}05$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = \mathbf{-1{,}64}$

Por lo que decidimos ***rechazar*** *la* H_0*, ya que el valor observado (calculado con los valores de la muestra) es menor que el valor crítico* ($z_0 < z_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se rechaza la* H_0*, es decir, se concluye que la fracción de artículos defectuosos p es significativamente menor del 5% con una probabilidad de 0,05 de cometer un error. Luego, podemos decir que el proceso tiene el nivel de calidad que se requiere.*

10. Se evalúan dos tipos diferentes de soluciones para pulir, para su posible uso un tipo de pulido en la fabricación de lentes intraoculares utilizados en el ojo humano después de una cirugía de cataratas. Se pulen 300 lentes con la primera solución y, de éstas, 253 no presentaron defectos inducidos por el pulido. Después se pulen otras 300 lentes con la segunda solución, de los cuales 196 resultaron satisfactorios. ¿Existe alguna razón para creer que las dos soluciones para pulir son diferentes a un nivel de significancia del 1%?

X_1*:"Cantidad de lentes pulidas con la solución 1 que resultaron satisfactorias"*

X_2*:" Cantidad de lentes pulidas con la solución 2 que resultaron satisfactorias"*

$X_1 \sim$ *Binomial* $(n_1\ ;\ p_1)$

$X_2 \sim$ *Binomial* $(n_2\ ;\ p_2)$

$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim \text{Normal}\ (\mu = p_1 - p_2\ ;\ \sigma^2 = p_1.q_1/n_1 + p_2.q_2/n_2)$

Según los datos del problema:

$x_1 = 253$ $\quad n_1 = 300 \quad p_1 = 253/300 = 0{,}84333...$

$x_2 = 196$ $\quad n_2 = 300 \quad p_2 = 196/300 = 0{,}65333...$

El estadístico de prueba es $z_o = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{p.(1-p)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

El valor de la ***estimación combinada de p*** *es:*

$p = (x_1 + x_2)/(n_1 + n_2) = 449/600 = 0{,}748333...$

Entonces $z_o = \dfrac{0{,}8433 - 0{,}6533}{\sqrt{0{,}7483.(1-0{,}7483)\left(\dfrac{1}{300} + \dfrac{1}{300}\right)}} = \mathbf{5{,}36}$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p_1 \neq p_2$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = \pm\ \mathbf{2{,}58}$

Por lo que decidimos ***rechazar*** *la* H_0*, ya que el valor observado (calculado con los valores muestrales) es mayor que el valor crítico (*$z_o > z_c$*).*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se rechaza la* H_0*, es decir, se concluye que existe evidencia fuerte que apoya la afirmación de que* *<u>los dos fluidos para pulir son significativamente diferentes</u>, con un nivel de significancia de 0,01. El fluido 1 produce una fracción mayor de lentes no defectuosas.*

11. Un fabricante de detergente líquido está interesado en la uniformidad de la máquina utilizada para llenar las botellas. Supóngase que la distribución del volumen de llenado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas, se obtiene un varianza muestral $s^2 = 0{,}0153$ onzas^2. Si la varianza del volumen de llenado es mayor que 0,01 onzas^2, entonces existe una proporción aceptable de botellas que serán llenadas con una cantidad menor de líquido.

a) ¿Existe evidencia en los datos muestrales que sugiera que el fabricante tiene un problema con el llenado de las botellas? Use $\alpha = 0{,}05$.

X:"Volumen de llenado de las botellas con detergente"

$X \sim \text{Normal}\ (\mu\ ;\ \sigma)$

$(n-1)\,.\,\dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$ *con n-1 grados de libertad*

Según los datos del problema:
n = 20 botellas
s^2 = 0,0153 onzas^2
σ^2 = 0,01 onzas^2

El estadístico de prueba es $\chi^2_o = \dfrac{(n-1).s^2}{\sigma_o^2} = \dfrac{(20-1).0{,}0153}{0{,}01} = \mathbf{29{,}07}$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \sigma^2 = 0{,}01$
$H_1 : \sigma^2 > 0{,}01$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{c;\ \alpha=0{,}05,n-1=19} = \mathbf{30{,}144}$
*Por lo que decidimos **aceptar** la **H₀**, ya que el valor observado (calculado con los datos de la muestra) es menor que el valor crítico ($\chi^2_o < \chi^2_c$).*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se acepta la H_0, es decir, se concluye que no hay evidencia fuerte que indique que la varianza del volumen de llenado sea mayor que 0,01 onzas^2. <u>La varianza del volumen de llenado no es significativamente mayor que 0,01 onzas^2</u>.*

b) Calcule el valor P (aunque sea de manera aproximada) e interprete el valor obtenido.

Valor P = P($(n-1)\ .\ \dfrac{s^2}{\sigma^2} > \chi^2_o$), entonces debemos buscar para qué valor de área encontramos, con los grados de libertad correspondientes (n-1 = 19), tendríamos un valor de χ^2_o (29,07).

g.d.l	0,001	0,005	0,01	0,04	0,05	0,10	0,15	0,40	g.d.l
1	10,828	7,879	6,635	4,218	3,841	2,706	2,072	0,708	1
2	13,816	10,597	9,210	6,438	5,991	4,605	3,794	1,833	2
3	16,266	12,838	11,345	8,311	7,815	6,251	5,317	2,946	3
4	18,467	14,860	13,277	10,026	9,488	7,779	6,745	4,045	4
5	20,515	16,750	15,086	11,644	11,070	9,236	8,115	5,132	5
6	22,458	18,548	16,812	13,198	12,592	10,645	9,446	6,211	6
7	24,322	20,278	18,475	14,703	14,067	12,017	10,748	7,283	7
8	26,124	21,955	20,090	16,171	15,507	13,362	12,027	8,351	8
9	27,877	23,589	21,666	17,608	16,919	14,684	13,288	9,414	9
10	29,588	25,188	23,209	19,021	18,307	15,987	14,534	10,473	10
11	31,264	26,757	24,725	20,412	19,675	17,275	15,767	11,530	11
12	32,909	28,300	26,217	21,785	21,026	18,549	16,989	12,584	12
13	34,528	29,819	27,688	23,142	22,362	19,812	18,202	13,636	13
14	36,123	31,319	29,141	24,485	23,685	21,064	19,406	14,685	14
15	37,697	32,801	30,578	25,816	24,996	22,307	20,603	15,733	15
16	39,252	34,267	32,000	27,136	26,296	23,542	21,793	16,780	16
17	40,790	35,718	33,409	28,445	27,587	24,769	22,977	17,824	17
18	42,312	37,156	34,805	29,745	28,869	25,989	24,155	18,868	18
19	**43,820**	**38,582**	**36,191**	**31,037**	**30,144**	**27,204**	**25,329**	**19,910**	**19**
20	45,315	39,997	37,566	32,321	31,410	28,412	26,498	20,951	20

Vemos que el valor 29,07 está entre los valores 30,144 y 27,204, que corresponden a área a su derecha de 0,05 y 0,10, respectivamente.

30,144 $\rightarrow$ 0,05
29,07 $\rightarrow$???
27,204 $\rightarrow$ 0,10

Por interpolación, al valor observado 29,07, corresponde un valor de área de 0,0683.

Valor P = $P\left((n-1)\cdot\frac{s^2}{\sigma^2} > \chi^2_o\right) = \mathbf{0{,}0683}$

A partir de un nivel de significancia de 0,0683, el valor observado en la muestra caería en la zona de rechazo.

El nivel de significancia de referencia (en este problema) es α = 0,05, y como el valor P es mayor que α, nuestra decisión debe ser la de aceptar la hipótesis nula (como lo hicimos en el inciso a).

12. Mientras realizan una tarea extenuante, el ritmo cardíaco de 25 trabajadores se incrementa en un promedio de 18,4 pulsaciones por minuto, con una desviación estándar de 4,9 pulsaciones por minuto. Use un nivel de significancia de 0,05 para probar la hipótesis nula de que $\sigma^2 = 30$ para tales incrementos en el ritmo cardíaco contra la hipótesis alterna de que $\sigma^2 < 30$.

X:"Incremento del ritmo cardíaco al realizar una tarea extenuante"

X $\sim$ *Normal* $(\mu\,;\,\sigma)$

$(n-1)\cdot\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$ *con n-1 grados de libertad*

Según los datos del problema:

n = 25 trabajadores

s = 4,9 puls./min

$\sigma^2 = 30$ *(puls./min)*^{2}

El estadístico de prueba es $\chi^2_o = \frac{(n-1).s^2}{\sigma_o^2} = \frac{(25-1).4{,}9^2}{30} = \mathbf{19{,}208}$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \sigma^2 = 30$

$H_1 : \sigma^2 < 30$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{c;\,\alpha=0{,}05,n-1=24} = \mathbf{13{,}848}$

Por lo que decidimos ***aceptar*** *la H_0, ya que el valor observado (calculado con los datos de la muestra) es mayor que el valor crítico ($\chi^2_o > \chi^2_c$).*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que la varianza de las pulsaciones por minuto, mientras se realiza una tarea extenuante, es significativamente menor a 30.*

13. Una obra social privada contrata los servicios de una empresa dedicada a emergencias médicas y desea probar la hipótesis nula de que σ^2 = 4 minutos^2 para el tiempo que tarda en llegar la ambulancia al lugar solicitado contra la hipótesis alternativa de que $\sigma^2 \neq$ 4 minutos^2. El tiempo ocupado por la ambulancia se distribuye normalmente. ¿Qué puede concluirse con un nivel de significancia de 0,01, si en una muestra aleatoria de tamaño n = 10 se obtuvo s = 2,2 minutos?

X:"Tiempo que tarda en llegar al lugar solicitado una ambulancia"

$X \sim$ Normal $(\mu ; \sigma)$

$(n\text{-}1) . \dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$ *con n-1 grados de libertad*

Según los datos del problema:

n = 10

s = 2,2 min

El estadístico de prueba es $\chi^2{}_o = \dfrac{(n-1).s^2}{\sigma_o^2} = \dfrac{(10-1).2{,}2^2}{4} = \mathbf{10{,}89}$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \sigma^2 = 4 \text{ min}^2$

$H_1 : \sigma^2 \neq 4 \text{ min}^2$

Para un nivel de significancia de 0,01, los valores críticos son:

$\chi^2{}_{c1\,;\,1-\alpha/2=0{,}995,n-1=9} = \mathbf{1{,}735}$

$\chi^2{}_{c2\,;\,\alpha/2\,=\,0{,}005,n-1=9} = \mathbf{23{,}589}$

*Por lo que decidimos **aceptar** la **H_0**, ya que el valor observado (calculado con datos muestrales) se encuentra entre los valores críticos ($\chi^2{}_{c1} < \chi^2{}_o < \chi^2{}_{c2}$).*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se acepta la H_0, es decir, se concluye que no hay diferencias significativas como para creer que la varianza es distinta a 4 minutos^2.*

14. Las capas de óxido en las obleas semiconductoras son depositadas en una mezcla de gases para alcanzar el espesor apropiado. La variabilidad del espesor de las capas de óxido es una característica crítica de la oblea, y lo deseable para los siguientes pasos de la fabricación es tener una variabilidad baja. Para ello se estudian dos mezclas diferentes de gases con la finalidad de determinar con cuál se obtienen mejores resultados en cuanto a la reducción en la variabilidad del espesor del óxido. Veinticinco obleas son depositadas en cada gas. Las desviaciones estándar de cada muestra del espesor del óxido son $s_1 = 1{,}96$ angstroms y $s_2 = 2{,}13$ angstroms, respectivamente. ¿Existe alguna evidencia que indique preferencia por alguno de los gases, con un nivel de significancia de 0,02?

X_1:"Espesor del óxido depositado con la mezcla de gases 1"
X_2:"Espesor del óxido depositado con la mezcla de gases 2"
$X_1 \sim \text{Normal}\ (\mu_1\ ;\ \sigma_1)$
$X_2 \sim \text{Normal}\ (\mu_2\ ;\ \sigma_2)$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F \text{ con } n_1 - 1 \text{ y } n_2 - 1 \text{ grados de libertad}$$

Según los datos del problema:
$n_1 = 25$ *obleas* $\qquad s_{1o} = 1{,}96$ *angstroms*
$n_2 = 25$ *obleas* $\qquad s_{2o} = 2{,}13$ *angstroms*

El estadístico de prueba es $F_o = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{1{,}96^2}{2{,}13^2} = \mathbf{0{,}85}$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$
$H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$

Para un nivel de significancia de 0,02, los valores críticos son:
$F_{c1\,;\,\alpha/2;\, n1-1,n2-1} = F_{c1\,;\,1-\alpha/2=0{,}99;\, n1-1=24,n2-1=24} = 1/F_{\alpha/2=0{,}01;\, n2-1=24,n1-1=24} = 1/2{,}66 = \mathbf{0{,}376}$
$F_{c2\,;\,\alpha/2;\, n1-1,n2-1} = F_{c2\,;\,\alpha/2=0{,}01;\, n1-1=24,n2-1=24} = \mathbf{2{,}66}$

*Por lo que decidimos **aceptar** la **H_0**, ya que el valor observado (calculado con datos muestrales) se encuentra entre los valores críticos ($F_{c1} < F_o < F_{c2}$).*

Según la conclusión, interpretamos:

- *Se acepta la H_0, es decir, se concluye que <u>no hay evidencia fuerte que indique cuál de las dos mezclas de gases produce una menor varianza en el espesor de la capa de óxido</u>.*

15. Se desea investigar la distribución estadística que sigue la cantidad de productos congelados que son descartados por haberse roto la cadena de frío. Para esto se han examinado 210 de estos productos por día, escogidos al azar, para determinar la frecuencia con que se deben descartar. El número de días en que se descartaron cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco o más productos congelados fueron 25, 55, 65, 35, 20 y 10, respectivamente.
¿Podría creer razonablemente que la cantidad de productos congelados descartados sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 2$?

Pruebas de hipótesis

X: "Cantidad de productos congelados descartados"
X ~ Desconocida
(Se está analizando si tiene una distribución de Poisson con λ = 2)
H_0: Una buena descripción para la variable se da por la distribución de Poisson con λ = 2
H_1: Una buena descripción para la variable no se da por la distribución de Poisson con λ = 2

x	Frecuencia observada	Probabilidad teórica (Poisson)	Frecuencia esperada
0	25	0,1353	28,413
1	55	0,2707	56,847
2	65	0,2707	56,847
3	35	0,1804	37,884
4	20	0,0902	18,942
+ de 5	10	0,0527	11,067
	210		210

Estadística χ^2 observada = $\Sigma_i\,[(o_i - e_i)^2 / e_i]$ = 2,021
Para comparar el estadístico observado con el crítico y poder tomar una decisión es necesario definir el nivel de significancia a utilizar. Podemos elegir el que deseemos, en este caso, usaremos α = 0,05.
Estadística χ^2 crítica (k - 1 = 6 – 1 = 5; α = 0,05) = 11,070
Como χ^2 observada < χ^2 crítica, aceptamos la hipótesis nula.

Según la conclusión, interpretamos:
- *Aceptamos la hipótesis nula, es decir, el modelo propuesto (Poisson con media 2) da una buena descripción de la distribución para la cantidad de productos congelados descartados.*

16. Si un ingeniero de control de calidad toma una muestra de 10 neumáticos que salen de una línea de ensamblaje y él desea verificar sobre la base de los datos que se presentan a continuación, si el número de llantas con defectos observadas en 200 días, siguen una distribución binomial con n = 10 y p = 0,05, utilizando un nivel de significancia del 0,05.

Número de unidades con defectos	Cantidad de días
0	138
1	53
2 o más	9

X: "Cantidad de unidades con defectos"
X ~ Desconocida
(Se está analizando si tiene una distribución binomial con n = 10 y p = 0,05)

H_0: Una buena descripción para la variable se da por la distribución binomial con n = 10 y p = 0,05
H_1: Una buena descripción para la variable no se da por la distribución binomial con n = 10 y p = 0,05

Número de unidades con defectos	Cantidad de días o_i	Probabilidad teórica p_i	Frecuencia esperada e_i
0	138	0,5987	119,74
1	53	0,3151	63,02
2 o más	9	0,0862	17,24

Estadística χ^2 observada = Σ_i [$(o_i - e_i)^2$ / e_i] = 8,3161
Estadística χ^2 crítica (k - 1 = 3 - 1 = 2) = 5,991
Como χ^2 observada > χ^2 crítica, rechazamos la hipótesis nula.

Según la conclusión, interpretamos:

- *Rechazamos la hipótesis nula, es decir, el modelo propuesto (Binomial con n = 10 y p = 0,05) no da una buena descripción para el número de unidades defectuosas.*

17. Un fabricante de baterías es visitado por inspectores de 'Defensa al consumidor' porque la duración de las baterías (de una muestra aleatoria seleccionada para realizar la inspección) se ajusta a una distribución normal con media 3,5 años y una desviación estándar de 0,7 años, mientras que el fabricante asegura que duran mucho más, en promedio.
Los inspectores analizaron una muestra de 40 baterías y obtuvieron los siguientes datos:

Intervalos	Cantidad de baterías
1,45 - 1,95	3
1,95 - 2,45	3
2,45 - 2,95	2
2,95 - 3,45	16
3,45 - 3,95	10
3,95 - 4,45	2
4,45 - 4,95	4

Finalmente… ¿Los inspectores deben volver 'con las manos vacías' porque no pueden comprobar, con un nivel de significancia de 0,05, que el fabricante miente?

X: "Tiempo de duración de las baterías"
X ~ Desconocida
(Se está analizando si tiene una distribución normal con μ = 3,5 años y σ = 0,7 años)

H_0: Una buena descripción para la variable se da por la distribución normal con μ = 3,5 años y σ = 0,7 años
H_1: Una buena descripción para la variable no se da por la distribución normal con μ = 3,5 años y σ = 0,7 años

El análisis lo realizaron mediante una bondad de ajuste. ¿Por qué? Porque deseaban saber si la duración de las baterías se ajusta a una distribución normal.
Con la información obtenida se presentan algunas cuestiones:

1. *Hay frecuencias inferiores a 5, por lo que deben agrupar para que el estadístico de prueba no esté sobreestimado.*
2. *Al buscar el estadístico crítico hay que tener en cuenta que los parámetros propuestos para la distribución normal han sido estimados a partir de los datos de la muestra.*

Comenzamos completando la tabla:

Intervalos	Frecuencias observadas		Probabilidad teórica (Normal)	Frecuencias esperadas
1,45 - 1,95	3	8	0,2143	8,5726
1,95 - 2,45	3			
2,45 - 2,95	2			
2,95 - 3,45	16		0,2355	10,2201
3,45 - 3,95	10		0,2683	10,7325
3,95 - 4,45	2	6	0,2410	9,6400
4,45 - 4,95	4			

Estadística χ^2 observada = Σ_i $[(o_i - e_i)^2 / e_i]$ = 3,2457
Estadística χ^2 crítica (k – 1 - r = 4 – 1 - 2 = 1) = 3,841
Como χ^2 observada < χ^2 crítica, aceptaron la hipótesis nula.

- *Aceptaron la hipótesis nula, es decir, el modelo propuesto (Normal con μ = 3,5 años y σ = 0,7 años) da una buena descripción de la distribución para el tiempo de duración de las baterías. Entonces la distribución de la duración de las baterías tiene una media que no es mucho mayor, como indicaba el fabricante.*

18. En un experimento para estudiar la dependencia entre la hipertensión y los hábitos de fumar, se tomaron los siguientes datos de 180 individuos:

	No fumadores	Fumadores moderados	Fumadores empedernidos
Con hipertensión	21	36	30

Sin hipertensión	48	26	19

Pruebe la hipótesis de que la presencia o ausencia de hipertensión es independiente de los hábitos de fumar con un nivel de significancia de 0,05.

H_0: Los hábitos de fumar son independientes de la hipertensión arterial

H_1: Los hábitos de fumar no son independientes de la hipertensión arterial

Para poder calcular el estadístico de prueba es necesario evaluar los valores esperados, para ello podemos realizar una nueva tabla con el valor esperado correspondiente a cada uno de los valores observados.

Valores observados (o_i)	No fumadores	Fumadores moderados	Fumadores empedernidos	Totales
Con hipertensión	21	36	30	87
Sin hipertensión	48	26	19	93
Totales	69	62	49	180

Valores esperados (e_i)	No fumadores	Fumadores moderados	Fumadores empedernidos	Totales
Con hipertensión	33,35	29,97	23,68	87
Sin hipertensión	35,65	32,03	25,32	93
Totales	69	62	49	180

¿Cómo se obtienen los valores esperados?

Los valores esperados se obtienen al multiplicar el total de la fila por el total de la columna a las que pertenece el valor a calcular, divido por el gran total. Por ejemplo, para calcular el valor esperado correspondiente al valor observado de la primera fila y primera columna (que es el número 21), se debe multiplicar 87 por 69 y dividirlo por 180. Así, e_{11} = 87.69/180 = 33,35.

Valores observados (o_i)	No fumadores	Fumadores moderados	Fumadores empedernidos	Totales
Con hipertensión	21	36	30	**87**
Sin hipertensión	48	26	19	93
Totales	**69**	62	49	**180**

Estadística χ^2 observada = Σ_{ij} [$(o_{ij} - e_{ij})^2 / e_{ij}$]

χ^2 observada = 14,4636

Estadística χ^2 crítica para α con (f – 1) (c - 1) grados de libertad

(f:número de filas y c: número de columnas)

χ^2 crítica con (2 – 1) (3 - 1) = 2 grados de libertad = 5,991

Como χ^2 observada > χ^2 crítica, se rechaza la hipótesis nula.

- *Se rechaza la hipótesis nula, es decir, el hábito de fumar y la hipertensión no son independientes, a un nivel de significancia de 0,05.*

19. De acuerdo con un estudio de la Universidad Johns Hopkins publicado en el American Journal of Public Health, las viudas viven más que los viudos. Considere los siguientes datos de sobrevivencia de 100 viudas y 100 viudos después de la muerte de su cónyuge:

Años de sobrevida	Viuda	Viudo
Menos de 5	25	39
De 5 a 10	42	40
Más de 10	33	21

¿Podemos concluir con un nivel de significancia de 0,05 que las proporciones de viudas y viudos son iguales con respecto a los diferentes períodos que un cónyuge sobrevive tras la muerte de su compañero?

H_0: El tiempo de sobrevida es independiente del género del viudo

H_1: El tiempo de sobrevida no es independiente del género del viudo

Las tablas para los valores observados y para los valores esperados son:

Valores observados (o_i)	Viuda	Viudo	Totales
Menos de 5 años	25	39	64
De 5 a 10 años	42	40	82
Más de 10 años	33	21	54
Totales	100	100	200

Valores esperados (e_i)	Viuda	Viudo	Totales
Menos de 5 años	32	32	64
De 5 a 10 años	41	41	82
Más de 10 años	27	27	54
Totales	100	100	200

Estadística χ^2 observada = Σ_{ij} $[(o_{ij} - e_{ij})^2 / e_{ij}]$

χ^2 observada = 5,7779

Estadística χ^2 crítica para α con $(f - 1)(c - 1)$ grados de libertad

(f:número de filas y c: número de columnas)

χ^2 crítica con $(3 - 1)(2 - 1) = 2$ grados de libertad = 5,991

Como χ^2 observada < χ^2 crítica, se acepta la hipótesis nula.

- *Se acepta la hipótesis nula, es decir, el tiempo de sobrevida y el género del viudo son independientes.*

20. En un estudio realizado entre 200 estudiantes de Córdoba, 150 estudiantes de Rosario y 150 estudiantes de Mendoza con el objeto de analizar si la costumbre de utilizar Facebook para hacer consultas sobre cuestiones relacionadas con sus estudios en la universidad depende del lugar de residencia, se encontró que 52 estudiantes de Córdoba, 31 estudiantes de Rosario y 37 estudiantes de Mendoza no usan Facebook con este fin. ¿Podría decir con un nivel de significancia de 0,01 que el lugar de residencia y el uso de Facebook para consultas universitarias son independientes?

H_0: El lugar de residencia es independiente del uso de Facebook para consultas de estudio
H_1: El lugar de residencia no es independiente del uso de Facebook para consultas de estudio

Para poder calcular el estadístico de prueba es necesario evaluar los valores esperados, para ello podemos realizar una nueva tabla con el valor esperado correspondiente a cada uno de los valores observados.

Valores observados (o_i)	Córdoba	Rosario	Mendoza	Totales
No usa Facebook	52	31	37	120
Usa Facebook	148	119	113	380
Totales	200	150	150	500

Valores esperados (e_i)	Córdoba	Rosario	Mendoza	Totales
No usa Facebook	48	36	36	120
Usa Facebook	152	114	114	380
Totales	200	150	150	500

Estadística χ^2 observada = Σ_{ij} $[(o_{ij} - e_{ij})^2 / e_{ij}]$
χ^2 observada = 1,3889
Estadística χ^2 crítica para α con $(f - 1)(c - 1)$ grados de libertad
(f:número de filas y c: número de columnas)
χ^2 crítica con $(2 - 1)(3 - 1) = 2$ grados de libertad = 9,210
Como χ^2 observada < χ^2 crítica, se acepta la hipótesis nula.

Se acepta la hipótesis nula, es decir, <u>el lugar de residencia y el uso de Facebook para consultas por el estudio son independientes</u>.

21. Una muestra aleatoria de 90 adultos se clasifica de acuerdo a su género y al número de horas que pasan viendo la televisión durante una semana:

	Masculino	Femenino
Más de 25 horas	15	29
Menos de 25 horas	27	19

Utilice un nivel de significancia de 0,01 y pruebe que el tiempo que pasan viendo televisión es independiente del género.

H_0: La cantidad de horas destinadas a ver televisión durante una semana es independiente del género
H_1: La cantidad de horas destinadas a ver televisión durante una semana no es independiente del género

Las tablas para los valores observados y para los valores esperados son:

Valores observados (o_i)	Masculino	Femenino	Totales
Más de 25 horas	15	29	44
Menos de 25 horas	27	19	46
Totales	42	48	90

Valores esperados (e_i)	Masculino	Femenino	Totales
Más de 25 horas	20,53	23,47	44
Menos de 25 horas	21,47	24,53	46
Totales	42	48	90

Estadística χ^2 observada = Σ_{ij} $[(o_{ij} - e_{ij})^2 / e_{ij}]$

χ^2 observada = 5,4702

Estadística χ^2 crítica para α con (f – 1) (c - 1) grados de libertad
(f:número de filas y c: número de columnas)

χ^2 crítica con (2 – 1) (2 - 1) = 1 grado de libertad = 6,635

Como χ^2 observada < χ^2 crítica, se acepta la hipótesis nula.

- *Se acepta la hipótesis nula, es decir, la cantidad de horas destinadas a ver televisión durante una semana es independiente del género.*

Pruebas de hipótesis