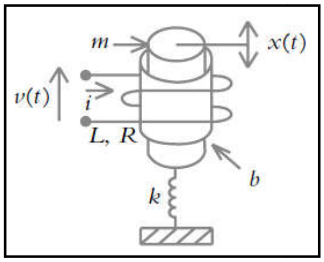
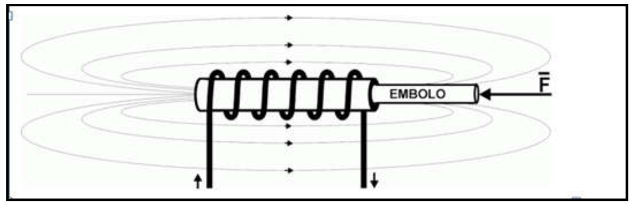
➢ FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Interconexión de Sistemas Lineales serie

1 **Encontrar el modelo en el espacio de estado y la ecuación diferencial que modela el sistema.**





Un solenoide está formado por un circuito eléctrico, un acoplamiento mecánico y un sistema mecánico de traslación:

1) **Parte eléctrica:** Consta de una bobina L y una resistencia R

$$L\frac{di(t)}{dt} + i(t) = V(t) \qquad \text{donde} \;\; i(t) = i_L$$

2) **Acoplamiento electromecánico:** Un solenoide polarizado, produce una fuerza electromotriz proporcional a la corriente en la bobina

$$f_s(t) = k_s \, i_L$$

3) **Parte mecánica de traslación:** Consta de una masa “m” que tiene un rozamiento “b” con la envolvente de la bobina y un resorte “k”.

Su ecuación corresponde al modelo masa- resorte- amortiguador.

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = f(t) \qquad \text{donde} \;\; f(t) \equiv f_s(t)$$

Representación con las variables transformadas:

$V(s) \rightarrow$ [Parte eléctrica] $\xrightarrow{I(s)}$ [Transductor] $\xrightarrow{F(s)}$ [Parte mecánica] $\rightarrow X(s)$

Lo representamos como dos sistemas interconectados en cascada

$V(s) \rightarrow$ [**Sistema I: Parte eléctrica + Acoplamiento**] $\xrightarrow{I(s)}$ [**Sistema II: masa – resorte-amortiguador**] $\rightarrow X(s)$

Conexión Serie o Cascada

SISTEMA I:

Llamamos $x_1 = i_L$ ➡ $L\dot{x}_1 + R\,x_1 = V(t)$

El modelo de estado para el sistema I queda:

$$\dot{x}_1 = \underbrace{\left[-\frac{R}{L}\right]}_{A_1} x_1 + \underbrace{\left[\frac{1}{L}\right]}_{B_1} V(t) \qquad y(t) = \underbrace{[k_s]}_{C_1} x_1$$

SISTEMA II:

MASA –RESORTE AMORTIGUADOR

$$m\,x''(t) + b\,x'(t) + k\,x(t) = f(t) \rightarrow k_s i_L$$

$$x_2 = x(t)$$

$$x_3 = x'(t) = x'_2 \qquad x'_3 = \frac{f(t)}{m} - \frac{b}{m} x'(t) - \frac{k}{m} x(t) = \frac{f(t)}{m} - \frac{b}{m} x_3 - \frac{k}{m} x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B_2} f(t) \qquad [x(t)] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Con los datos de los dos sistemas, armamos la matriz de estado aumentado:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_s/m & -k/m & -b/m \end{bmatrix}$$

MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADO

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

El sistema es de orden tres. La salida del sistema es el desplazamiento de la masa

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

SISTEMA I:

$$H_1(s) = \frac{F(s)}{V(s)} \qquad F(s) = I(s).k_s$$

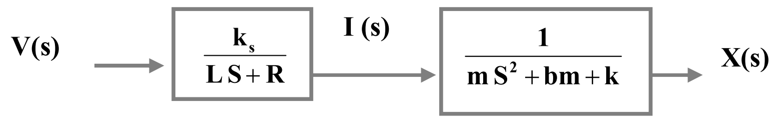
$$H_1(s) = \frac{k_s}{L\,S + R}$$

SISTEMA II:

$$H_2(s) = \frac{X(s)}{I(s)}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{m\,S^2 + bm + k}$$

La función de transferencia es el producto $H(s) = H_1(s)\, H_2(s)$



$$H(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{k_s}{(LS+R)(m\,S^2 + bm + k)}$$

La podemos escribir como:

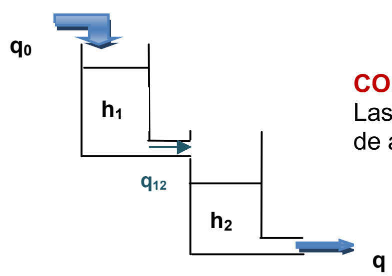
$$L\,m\,S^3\; X(s) + (\,L.b + R.m)\,S^2\; X(s) + (\,L.k + R.b)\,S\;X\,(s) + R.k\;X(s) = U(s)\,.k_s$$

Antitransformando miembro a miembro, obtenemos la ecuación diferencial que modela el sistema:

$$L\,m\,x'''(t) + (\,L.b + R.m)\,x''(t) + (\,L.k + R.b)\,x'(t) + R.k\;x(t) = u(t)\,.k_s$$

Ecuación diferencial de orden tres.

2 Encontrar el modelo en el espacio de estado de los tanques en cascada mostrados en la figura. Hallar la función de transferencia



CONSIDERACIONES

Las variables de estado del sistema son las variaciones de altura de ambos tanques

ECUACIONES DE EQUILIBRIO:

Para plantear las ecuaciones de equilibrio se tiene en cuenta:

Capacitancia del tanque: **Se define como el cambio necesario en la cantidad de líquido almacenado, para producir un cambio de una unidad en el potencial (altura)**

C = cambio en el líquido almacenado / cambio en la altura [m^2]

Resistencia: **Cambio en la diferencia de nivel necesaria para producir un cambio de una unidad en la velocidad del flujo**

R = cambio en la diferencia de nivel / cambio en la velocidad del flujo [seg/m^2]

TANQUE 1:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_0 - q_{12}}{c_1} \quad \text{donde } c_1 \text{ es la capacitancia del tanque 1}$$

$$q_{12} = \frac{h_1}{R_1} \quad \text{donde } R_1 \text{ es la resistencia de la válvula entre los dos tanques}$$

Llamamos $x_1 = h_1$ $\Rightarrow$ $\dot{x}_1 = \frac{q_0}{c_1} - \frac{x_1}{c_1 R_1}$

Ecuaciones de estado tanque 1:

$$\dot{x}_1 = \underbrace{\left[-\frac{1}{c_1R_1}\right]}_{A_1}[x_1] + \underbrace{\left[\frac{1}{c_1}\right]}_{B_1} q_0 \quad \text{Salida} \quad q_{12} = \underbrace{\left[\frac{1}{R_1}\right]}_{C_1}[x_1]$$

C_1 para no confundirla con la capacitancia, le ponemos c mayúscula

Función de transferencia tanque 1:

$$s\,X_1(s) = -\frac{1}{c_1R_1}X_1(s) + \frac{1}{c_1}Q_0(s)$$

$$X_1(s)\left(s+\frac{1}{c_1R_1}\right) = \frac{1}{c_1}Q_0(s) \Rightarrow X_1(s) = \frac{Q_0(s)}{c_1\left(s+\frac{1}{c_1R_1}\right)} = \frac{Q_0(s)R_1}{c_1R_1s+1}$$

Si tenemos en cuenta que la salida es $\frac{X_1(s)}{R_1}$ dividimos m.am por $Q_0(s)$ y por R_1

$$H_1(s) = \frac{1}{c_1R_1s+1}$$

TANQUE 2:

$\frac{dh_2}{dt} = \frac{q_{12}-q}{c_2}$ donde c_2 es la capacitancia del tanque 2

$q = \frac{h_2}{R_2}$ donde R_2 es la resistencia de la válvula de salida

Llamamos $x_2 = h_2$ ➡ $\dot{x}_2 = \frac{q_{12}}{c_2} - \frac{x_2}{c_2R_2}$ se ha reemplazado q_{12}

Ecuaciones de estado tanque 2:

$$\dot{x}_2 = \underbrace{\left[-\frac{1}{c_2R_2}\right]}_{A_2}[x_2] + \underbrace{\left[\frac{1}{c_2}\right]}_{B_2} q_{12} \quad \text{Salida} \quad q = \underbrace{\left[\frac{1}{R_2}\right]}_{C_2}[x_2]$$

Función de transferencia tanque 2:

$$s\,X_2(s) = -\frac{1}{c_2R_2}X_2(s) + \frac{1}{c_2}Q_{12}(s)$$

$$X_2(s)\left(s+\frac{1}{c_2R_2}\right) = \frac{1}{c_2}Q_{12}(s) \Rightarrow X_2(s) = \frac{Q_{12}(s)}{c_2\left(s+\frac{1}{c_2R_2}\right)} = \frac{Q_{12}(s)R_1}{c_1R_1s+1}$$

Si tenemos en cuenta que la salida es $\frac{X_2(s)}{R_2}$ dividimos m.a.m por $Q_{12}(s)$ y por R_2

$$H_2(s) = \frac{1}{c_2R_2s+1}$$

Llamamos τ_1: Tiempo de retención del tanque 1 donde $\tau_1 = c_1R_1$ (seg)

τ_2: Tiempo de retención del tanque 2 donde $\tau_2 = c_2 R_2$ (seg)

$$\boxed{H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)}}$$

MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADO

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{c_1R_1} & 0 \\ \dfrac{1}{c_2R_1} & -\dfrac{1}{c_2R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{c_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_0(t)$$

Matriz de salida $q(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$