PROGRAMACIÓN LINEAL

Para poder entender este tema lo haremos en el contexto del siguiente ejemplo: consideremos una fábrica que produce dos tipos de celulares, C_1, que produce un beneficio de \$30, y C_2, que produce una ganancia de \$20. El objetivo es determinar cuántos debo producir para obtener la máxima ganancia teniendo en cuenta que consta de una cinta transportadora que produce 5 C_1 por día y otra cinta que produce 7 C_2 por día. Llamemos X_1 a la cantidad de celulares C_1 por día y X_2 a la cantidad de celulares C_2 por día. Para producir cada C_1 necesito dos hombres y para producir C_1 un hombre. La limitación que tenemos es que la empresa consta de doce hombres. La ganancia es:

$$G = 30\,X_1 + 20\,X_2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \end{array}\right\} (2)$$

$$x_1 \geq 0 \;\wedge\; x_2 \geq 0 \quad (3)$$

Hay que determinar qué conjuntos de puntos X_1, X_2 verifican las restricciones y las condiciones de no negatividad, y luego cuál o cuáles producen la máxima ganancia. La ganancia es una función lineal porque para cada par de puntos hay un solo valor de G:

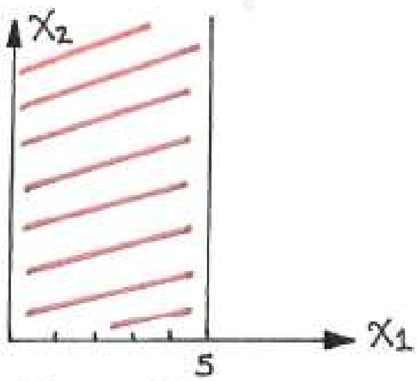
$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto 30\,x_1 + 20\,x_2 \end{aligned}$$

Para determinar el conjunto de puntos que cumplen con **(2)** y **(3)** debemos considerar u obtener el siguiente conjunto:

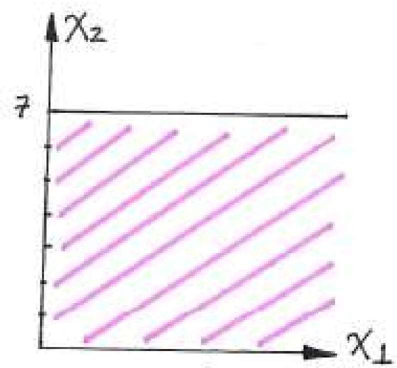
$$S = \left\{ (x_1, x_2) \,/\, 0 \leq x_1 \leq 5 \;\wedge\; 0 \leq x_2 \leq 7 \;\wedge\; 2x_1 + x_2 \leq 12 \right\}$$

Todas estas condiciones deben cumplirse simultáneamente, por lo tanto, podemos expresarlo como:

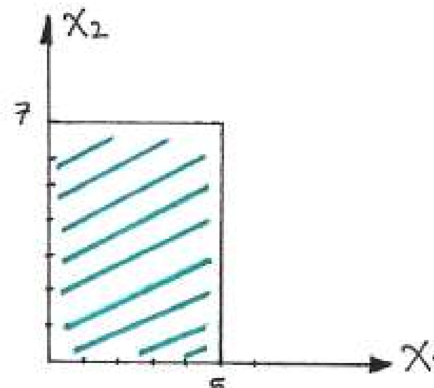
$$S = \left\{ \underbrace{\left((x_1, x_2)/x_1 \geq 0\right)}_{1} \cap \underbrace{\left((x_1, x_2)/x_1 \leq 5\right)}_{2} \cap \underbrace{\left((x_1, x_2)/x_2 \geq 0\right)}_{3} \cap \underbrace{\left((x_1, x_2)/x_2 \leq 7\right)}_{4} \cap \underbrace{\left((x_1, x_2)/2x_1 + x_2 \leq 12\right)}_{5} \right\}$$



1 ∩ 2

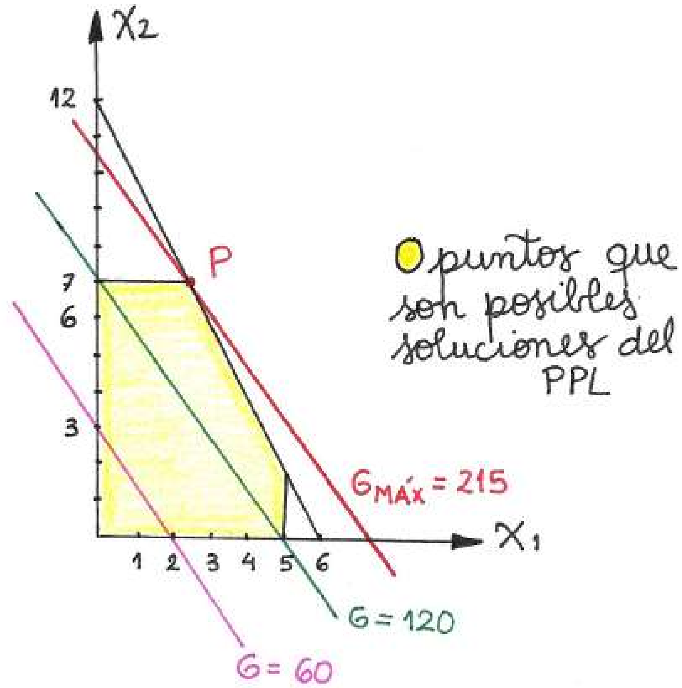


3 ∩ 4



1 ∩ 2 ∩ 3 ∩ 4

$$① \cap ② \cap ③ \cap ④ \cap ⑤$$



S es el conjunto de posibles soluciones.

Para determinar el punto que obtiene el máximo G analizamos la ganancia, que es una función lineal.

Si

$$G(x_1, x_2) = 30\,x_1 + 20\,x_2 = 60 \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{array}}$$

$$G(x_1, x_2) = 30\,x_1 + 20\,x_2 = 120 \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{array}}$$

Considero una paralela a la ganancia alejándome del origen. De este modo, se aumenta G y el punto más alejado para este problema y que cumple con las restricciones es el punto **P**, que lo obtenemos de la intersección de las siguientes rectas:

$$\begin{cases} x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + 7 = 12$$

$$x_1 = 5/2$$

$$G = 30 \cdot \frac{5}{2} + 20 \cdot 7 = 215 \rightarrow \text{ganancia máxima}$$

El ejemplo visto es un PPL o problema de optimización, porque se busca optimizar una función que va a ser un máximo cuando se trata de ganancia y un mínimo cuando se trata de costo, que va a depender de un número finito de variables de entrada. Además, estas variables pueden estar vinculadas entre sí o no a través de estas restricciones. Un

PPL será lineal si f (X_1, X_2, ..., X_n), que es la función objetivo, y g_i (X_1, X_2, ..., X_n), que son las restricciones, son lineales.

$$
\begin{array}{lll}
\text{optimizar} & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \\
\text{sujeto a} & \left.\begin{array}{l} g_1(\;\; , x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} & \begin{array}{c} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right.
\end{array}
$$

Esto se puede expresar como función lineal:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} . x_2 + \ldots + a_{in} x_n$$

Planteamiento del problema

En general se plantea en forma verbal. Esto lo debemos transformar en un programa matemático y luego resolverlo. Para obtener un buen resultado se recomienda:

1. ¿Qué cantidad se optimizará? Esto ayuda a determinar las variables de entrada.
2. Tener en cuenta todas las limitaciones, los requerimientos que posee la empresa. Estas son las restricciones vistas en el ejemplo.
3. Tener en cuenta las condiciones que no están explícitas, pero son evidentes, por ejemplo, las condiciones de no negatividad.

Introducción al método simplex - forma estándar

El PPL visto para dos variables nos permitió encontrar un conjunto S que resultó de la intersección de semiplanos en IR^2. Se observa también que el óptimo o máximo se alcanzó alejándonos del origen y justo en la intersección de dos rectas.

Si el número de variables n fuese 3, el conjunto factible surge de la intersección de semiespacios en IR^3. El óptimo se alcanza con la intersección de 3 planos. El método así es impracticable.

Veremos que cuando tenemos más de dos variables utilizaremos otro método llamado simplex que sin embargo aplica los mismos conceptos vistos en el ejemplo. Para poder aplicar el método es necesario transformar todas las inecuaciones en ecuaciones y luego conocer una primera solución factible no negativa. Para ello incorporaremos las llamadas variables de holgura y superfluas o excedentes.

Cuando se trata de una restricción del tipo:

$$\sum a_{ij} . x_j \leq b_i$$

se incorpora para transformarla en ecuación una nueva variable no negativa llamada variable de holgura que es numéricamente igual a la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de la inecuación y que representa la pérdida en esta fase del sistema.

Por ejemplo:

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 + 8x_4 + 6x_5 \leq 10\,000$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 + 8x_4 + 6x_5 + y = 10\,000$$

Si la restricción es del tipo:

$$\sum a_{ij} \; x_j \geq b_i$$

se incorpora una nueva variable para transformarla en ecuación, que es no negativa y se llama superflua y que se corresponde con un exceso en esta fase del sistema.

Por ejemplo:

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - y = 54$$

Para obtener una solución factible inicial se procede así: una vez que todas las inecuaciones se transformaron en ecuaciones se incorpora una nueva variable llamada artificial en todas las ecuaciones en las que no haya variable de holgura; por lo tanto, cada ecuación o tiene una variable de holgura o tiene una variable artificial. La primera solución factible no negativa se obtiene anulando las variables de entrada y superflua y haciendo que las variables de holgura y artificiales sean iguales al lado derecho de la ecuación.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 6 \\ 7x_1 + 8x_2 = 15 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 = 6 \\ 7x_1 + 8x_2 = 15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_6 = 15 \end{cases}$$

- variables de holgura
- variables superfluas
- variables artificiales

Costos de penalización

La introducción de variables de holgura y superflua no alteraron la naturaleza de las restricciones, por lo tanto estas se incorporan en la función objetivo con coeficiente cero. Pero las variables artificiales se agregaron a un sólo lado de la igualdad y el nuevo sistema es equivalente al anterior si las variables artificiales son cero. Para garantizar esta condición, en la función objetivo se incorporan con un coeficiente muy grande, en los cálculos manuales se le coloca "M", y que va a ser negativo en un problema de máximo o positivo en uno de mínimo. De este modo, la única forma de optimizar la función es que la variable artificial sea cero.

Forma estándar

Un PPL está en la forma estándar si todas las restricciones son igualdades y si se conoce una solución factible inicial no negativa.

$$\begin{array}{lll} \text{optimizar} & z = C^T x & \\ \text{sujeto a} & Ax = B & \text{forma matricial} \\ \text{tal que} & x \geq 0 & \end{array}$$

El vector X, es el vector columna de las incógnitas; en él están incluidas las variables de entrada, superflua, de holgura, y artificiales.

A es la matriz de todos los coeficientes de las restricciones

C^T es el renglón columna de los costos correspondientes

B es el vector columna de la derecha del sistema de ecuaciones

X_0 = B se denota la primera solución factible no negativa

Ejemplo:

Maximizar $Z = X_1 + X_2$ con las condiciones:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \ \wedge \ x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{maximización}} \begin{array}{l} Z = x_1 + x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 \\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 \geq 0 \ \wedge \ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 5, 4) = x_0$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = (1, 1, 0, 0)$$

Combinación convexa (CC)

Se dice que un conjunto de vectores $V_1, V_2, \ldots, V_P$ generan una CC si se cumplen las siguientes condiciones:

$$E_0 = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_p . V_p$$

$$a_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{p} a_i = 1$$

Ejemplo:

$$V = \frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{3} V_2 + \frac{1}{6} V_3 \quad = 1 \quad \Big\} \text{ son } \geq 0$$

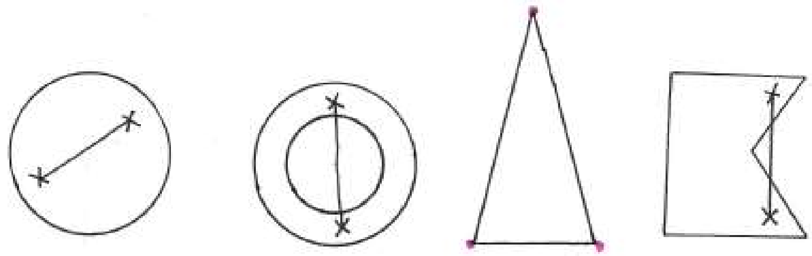
$$V = \alpha V_1 + (1 - \alpha) V_2$$

$$\alpha \geq 0 \qquad \alpha + 1 - \alpha = 1$$

Se llama segmento línea a todos los puntos que hay entre dos vectores, que se obtiene efectuando la CC entre ellos.

Se llama conjunto convexo a aquel en que cualquier segmento línea tiene todos los puntos dentro del conjunto.

Se observa que el círculo es un conjunto convexo, mientras que el anillo circular no. El triángulo es conjunto convexo, mientras que la otra figura no.



Se define como puntos extremos de un conjunto convexo a aquellos que no se pueden expresar como combinaciones convexas de otros puntos.

Teorema 1

El conjunto de las posibles soluciones de un PPL o es convexo o es vacío (Ø). Lo primero que haremos es probar que si dos puntos del conjunto son solución al PPL su combinación convexa también lo será.

K es convexo si

$$\forall (x_1, x_2) \in K \times K; \quad X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ \wedge \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\text{y además} \quad \alpha_1 \geq 0 \ \wedge \ \alpha_2 \geq 0$$

$$Ax_1 = B \qquad x \in K$$

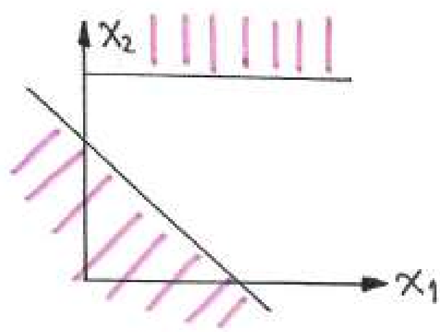
$$Ax_2 = B \qquad x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \ \wedge \ \alpha \geq 0$$

$$Ax = A\,(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha A x_1 + A x_2 - \alpha A x_2$$

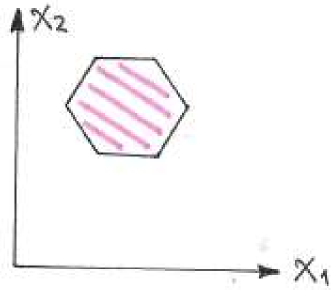
$$Ax = \alpha B + A x_2 - \alpha B = A x_2 = B$$

En realidad se pueden presentar tres situaciones frente al conjunto factible en un PPL:

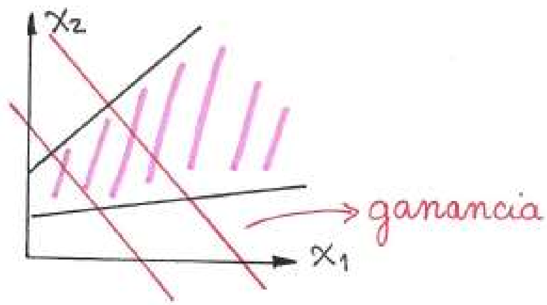
a) No hay solución factible



b) Poliedro convexo



c) Tenemos un conjunto solución (ganancia ilimitada)

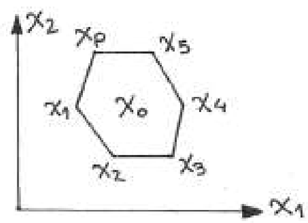


<u>Teorema 2</u>

La función objetivo de un PPL toma el valor mínimo en un punto extremo del conjunto K.

$$F(x_0) \leq F(x_i)$$

Para demostrarlo lo haremos por el absurdo. Consideramos que el mínimo se va a dar en el punto interior del conjunto convexo.



$$F(x_0) \leq F(x_i)$$

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$$

$$\sum \alpha_i = 1 \qquad \alpha_i \geq 0$$

$$F(x_0) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2) + \ldots + \alpha_p F(x_p)$$

$$F(x_m)$$

$$F(x_0) \geq \alpha_1 F(x_m) + \alpha_2 F(x_m) + \ldots + \alpha_p F(x_m)$$

$$F(x_0) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i}_{=1} F(x_m)$$

$$F(x_0) \geq F(x_m)$$

para que $F(x_0) = F(x_m) \longrightarrow x_0$ es punto extremo

El objetivo es demostrar que el óptimo está en un punto extremo.

El Método Simplex para restricciones del tipo $A\,x \,\leq\, b$

Comenzamos presentando el método para un problema de máximo.

$$\text{maxm} \quad (1) \quad \left. P = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + \ldots + C_n x_n \right\} \begin{array}{l}\text{función}\\ \text{objetivo}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sujeto a} \quad (2) \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \leq b_i \\ \qquad \text{con} \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad \text{donde} \quad b_i \geq 0 \quad (3) \quad x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \,, \ldots ,\, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{conjunto}\\ \text{factible}\\ \text{(conjunto}\\ \text{convexo)}\end{array}$$

Conjunto factible **(2)** y **(3)** es un conjunto convexo que resultó de la intersección de espacios en IR^n y si el PPL tiene solución óptima, ésta se encontrará en un punto extremo del conjunto factible.

$$\begin{array}{ll} \text{MAXIM} & Cx \\ \text{sujeto a} & Ax \leq b \\ \quad \text{con} & x \geq 0 \;\wedge\; b \geq 0 \end{array}$$

$$A_{m \times n} = (a_{ij})$$

C: vector de n columnas al igual que X

b: vector columna de m variables

$$(4) \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n + \overbrace{y_i}^{\text{variable de holgura}} = b_i$$

$$(A \; I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$$

Se le añadió a la matriz A, la matriz identidad de orden I_{mxn} para formar la matriz de coeficientes que va a ser de orden m x (m+n)

$$(5) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Los puntos esquina del conjunto factible se representan por aquellas soluciones en que n de las n+m variables se hagan cero. Las variables que se hacen cero para producir un punto esquina se llaman variables no básicas para ese punto esquina, mientras que las que no son cero se llaman variables básicas, representando el conjunto una solución factible básica.

El método consiste en obtener el máximo empezando desde algún punto esquina que va a ser la primera solución factible y luego ver de qué manera saltar a otro punto esquina de modo de incrementar rápidamente la función objetivo. Interpretaremos el método en el ejemplo:

	Lancha	Carrera	Paseo	(Restricciones)
N°	x_1	x_2	x_3	25
L	2	1	3	51 (semanas)
Ganancia	5	4	6	

(6) $P = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$

(7) sujeto a: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 25$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 51$$

$$x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_3 \geq 0$$

(8) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 = 51 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0 \wedge y_2 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 51 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Podemos expresar todo esto en la TABLA INICIAL

(10)

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
y_1	1	1	1	1	0	25
y_2	2	1	3	0	1	51
P	-5	-4	-6	0	0	0

La tabla contiene a la matriz aumentada del sistema de ecuaciones **(8)**; la última fila representa la función objetivo, sólo que está expresada en la forma $P - 5X_1 - 4X_2 - 6X_3=0$ y se llama fila objetiva. En un punto esquina donde n es 3 obviamente 3 de las n+m variables tienen que anularse y ser las variables NO básicas en ese punto esquina. En este caso, $X_1=X_2=X_3=0$. La solución factible $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2) = (0, 0, 0, 25, 51)$ corresponde al punto del plano $(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0)$.

Se observa en la tabla que las variables básicas etiquetan filas y columnas y que además se observa que en la tabla **(10)** los vectores columna debajo de Y_1 e Y_2 son vectores canónicos y finalmente en la última columna aparecen los valores que les corresponden a las variables básicas en ese punto esquina (25 y 51).

El último registro es el valor de la función objetiva. En resumen, esta tabla representa la situación del PPL en el punto esquina $(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0)$

Obtención de la siguiente tabla: (CLASE 22/08)

Deseamos mover a un punto esquina adyacente de manera que P se incremente lo más rápido posible, para ello debemos transformar una de las variables no básicas (nulas) en positivas y simultáneamente transformar una de las variables básicas en no básicas. Para determinar qué variable se hace positiva analizamos la función objetivo

$P = 5\,X_1 + 4\,X_2 + 6\,X_3$

y elegimos como variable básica entrante a aquella que incrementa a P lo más rápido posible (en el ejemplo, X_3) que se corresponde con el de la variable que tiene en la fila objetivo de la tabla **(10)** el coeficiente de mayor magnitud negativo (en el ejemplo, el -6). La columna de dicha variable se llamará columna pivote.

Para determinar la variable básica saliente se elige aquella en el que el cociente del último registro y el registro de la columna pivote me dé el más pequeño y positivo. Veremos por qué: como nos estamos moviendo hacia otro punto esquina para permitir que X_3 se convierta en positivo, debemos hacer que una de las variables básicas Y_1 o Y_2 se transforme en cero.

$X_1 = X_2 = 0$

$Y_1 = 25 - X_3$

$Y_2 = 51 - 3\,X_3$

$Y_1 = 0 \Rightarrow X_3 = 25$

$Y_2 = 51 - 3 \,.\, 25 \leq 0$ → *por esto se elige la menor razón no negativa*

NO se cumple

$Y_1 \geq 0 \qquad Y_2 \geq 0$

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	
Y_1	1/3	2/3	0	1	-1/3	8
X_3	2/3	1/3	1	0	1/3	17
P	-1	-2	0	0	2	102

En este ejemplo, maximizamos.

En el caso de minimizar, se trabaja de la siguiente manera:

$(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 17)$

el único que modifiqué

$(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2) = (0, 0, 17, 8, 0)$

Para obtener la siguiente tabla

X_2 es la columna pivote

Para ver cuál es la fila pivote (variable básica saliente) analizo cuál es la menor razón no negativa: → **8/ (2/3) = 12** (Y_1)

→ 17/ (1/3) = 51

Armo la tabla:

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	
X_2	1/2	1	0	3/2	-1/2	12
X_3	1/2	0	1	-1/2	1/2	13
P	0	0	0	3	1	126 $\longrightarrow$

$(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2) = (0, 12, 13, 0, 0)$

$P = 5 . 0 + 4 . 12 + 13 . 6 =$ **126** $\longrightarrow$ ***valor óptimo***

Caso de minimizar

[Mínimo de f(x)] = - [Máximo de f(x)]

En el ejemplo anterior:

$\min f(x) = -5 X_1 - 4X_2 - 6 X_3$

$\min f(x) = -126$

$(X_2 = 12 \quad \wedge \quad X_3 = 13)$

MÉTODO SIMPLEX PARA RESTRICCIONES GENERALES

El método simplex para restricciones generales tiene dos fases bien marcadas: la fase **A)** hallar un punto esquina del conjunto factible y luego la fase **B)** es desplazarse a otro punto esquina de modo que aumente el óptimo, además de la incorporación de las variables de holgura, vistas anteriormente, puede ser necesaria la incorporación de variables superfluas también no negativas, y además se van a incorporar un conjunto de variables artificiales en aquellas restricciones que no haya variable de holgura.

La idea es resolver el siguiente ejemplo:

Se trata de dos talleres que producen tableros, cada taller produce los mismos tipos de tableros. La siguiente tabla muestra la producción y el costo de operación de cada tipo de tablero y la columna de mas a la derecha los requerimientos para un periodo de seis meses. Hallar el número de días que debe trabajar cada taller durante los seis meses para proporcionar de la manera más económica los tableros requeridos

	T_1 por día	T_2 por día	DEM SEM
A	100	20	2000 tab
B	40	80	3200 tab
C	60	60	3600 tab
COSTOS	\$3000	\$2000	

$C = 3000 X_1 + 2000 X_2$ **(1)** *siendo X_1 y X_2 los días que trabaja cada taller*

$$\left.\begin{array}{l} 100 X_1 + 20 X_2 \geq 2000 \\ 40 X_1 + 80 X_2 \geq 3200 \\ 60 X_1 + 60 X_2 \geq 3600 \end{array}\right\} \quad \textbf{(2)}$$

$$\begin{array}{l} 100 X_1 + 20 X_2 - Y_1 + q_1 = 2000 \\ 40 X_1 + 80 X_2 - Y_2 + q_2 = 3200 \\ 60 X_1 + 60 X_2 - Y_3 + q_3 = 3600 \end{array} \qquad \textbf{(3)}$$

$P = -3000\,X_1 - 2000\,X_2 - M\,q_1 - M\,q_2 - M\,q_3$

$P + 3000\,X_1 + 2000\,X_2 + M\,q_1 + M\,q_2 + M\,q_3 = 0$

TABLA INICIAL

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2	q_3	
q_1	100	20	−1	0	0	1	0	0	2000
q_2	40	80	0	−1	0	0	1	0	3200
q_3	60	60	0	0	−1	0	0	1	3600
	$3000 - 200M$	$2000 - 160M$	M	M	M	0	0	0	$8800M$

En la fila objetivo deben estar los datos que nos indiquen que variable no básica se convertirá en positiva (básica). Si observamos las ecuaciones que hay en **(3)** y consideramos que X_1 es la que va a transformarse en positiva para mantener los valores de las ecuaciones, q_1 debe decrecer en 100 unidades, q_2 en 40 unidades y q_3 en 60 unidades. Este incremento unitario en q_1 se ve reflejado en la función objetivo como:

$3000 - M\,100 - M\,40 - M\,60 = 3000 - 200\,M$

$2000 - M\,20 - M\,80 - M\,60 = 2000 - 160M$

Además, si observamos la columna de las variables superfluas va acompañada con una M porque un incremento de una unidad en la q_i correspondiente trae asociado un incremento de una unidad en la correspondiente variable superflua. Finalmente, el último registro se corresponde con la suma de las variables artificiales.

Para obtener la siguiente tabla tenemos que usar los mismos criterios vistos en el problema anterior.

~

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2	q_3	
x_1	1	0.2	−0.01	0	0	0.01	0	0	20
q_2	0	72	0.4	−1	0	−0.4	1	0	2400
q_3	0	48	0.6	0	−1	−0.6	0	1	2400
P	0	$1400 - 120M$	$30 - M$	M	M	$-30 + 2M$	0	0	$-60000 - 4800M$

~ [illegible]

~

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2	q_3	
x_1	1	0	−0.0111	0.0028	0	0.0111	−0.0028	0	13.33
x_2	0	1	0.0056	−0.0139	0	−0.0056	0.0139	0	33.33
q_3	0	0	0.3333	0.6667	−1	−0.3333	−0.6667	1	800
P	0	0	$22.222 - 0.333M$	$19.44 - 0.667M$	M	$-22.22 + 1.333M$	$-19.44 + 1.667M$	0	$-106667 - 800M$

~

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2	q_3	
x_1	1	0	−0.0125	0	0.0042	0.0125	0	−0.0042	10
x_2	0	1	0.0125	0	−0.0208	−0.0125	0	0.0208	50
y_2	0	0	0.5	1	−1.5	−0.5	−1	1.5	1200
P	0	0	12.5	0	29.17	$-12.5 + M$	M	$-29.17 + M$	−130000

La fila objetivo ya no contiene más registros negativos (recordemos que M es positivo y grande), así que ya terminamos. El máximo de P es $-130\,000$ cuando $x_1 = 10$ y $x_2 = 50$. Así, el costo mínimo C es de $130 000 cuando $x_1 = 10$ y $x_2 = 50$. Obsérvese que en este problema las variables artificiales no llegaron a cero hasta haber calculado la tabla final.

La tabla anterior indica que la ejecución del método simplex con papel y lápiz puede ser una tarea tremenda. Sin embargo, para un computador no es difícil. El programa SIMPLEX tiene una opción que permite al usuario controlar la ejecución del método simplex sin tener que hacer los cálculos.

Sólo necesitamos modificar el paso 2 del recuadro de la página 432, en la sección 9.1, a fin de obtener un esbozo para el método simplex para un problema general de programación lineal. Obsérvese que cada problema de programación lineal se describe como uno de maximización antes de formar la tabla inicial.