Universidad de Mendoza
Facultad de Ingeniería

TRABAJO PRACTICO Nº 3
FUNCIONES LINEALES

OBJETIVOS

- Ampliar el estudio de las funciones a las funciones lineales y las matrices asociadas a ellas.
- Reconocer y determinar los subespacios núcleo e imagen asociados a la función lineal.
- Identificar y diferenciar aplicaciones lineales singulares y no singulares.

PARTE A: PARA TRABAJAR EN CLASE

1) Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales

a) $f : R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (y, x)$

b) $f : R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (2.x + 3y, x - 3y)$

c) $f : R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$

2) Indique cuales opciones contienen un vector en el núcleo de la transformación lineal de R^3 en R^3 definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+3z \\ 23x-15y-18z \\ -5x-3y-3z \end{bmatrix}$$

a) $v_1 = (0,0,0)$, b) $v_2 = (12,-28,8)$, c) $v_3 = (1,-2,1)$,
d) $v_4 = (3,-7,2)$, e) $v_5 = (2,-4,-4)$ y f) v_6 =f(9,-18-15)

3) Determinar el núcleo de la transformación lineal de R^3 en R^2 definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+z \end{bmatrix}$$

4) Indique cuales opciones contienen un vector en el núcleo de la transformación lineal de R^3 en R^3 definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+5y+z \\ 8x-12y-6z \\ -4x-2y-4z \end{bmatrix}$$

a) $v_1 = (0,0,0)$, b) $v_2 = (2,8,-4)$, c) $v_3 = (-23,-52,6)$,
d) $v_4 = (5,12,-2)$, e) $v_5 = (-3,1,-1)$

Y determinar la imagen de dicha transformación lineal.

5) Sea una aplicación lineal $f : R^4 \rightarrow R^3$ de la que se sabe que: f(1,0, 0,0) = (1, 2, -1); f (0, 1, 0,0) = (1, 0, 1); f (0, 0, 1,0) = (-1, 1, -2); f (0, 0, 0,1) = (1, 0, 1) ; Escribe la matriz asociada a f respecto de unas bases y resuelve la ecuación f (x, y, z, t) = (0,0,0)

6) Sea f una aplicación lineal tal que f (1, 0, 0) = (1, 0, 0); f (1, 1, 0) = (0, 1, 0); f (1, 1, 1) = (0, 0, 1); obtener la imagen según f del vector (1, 2, 3)

7) Sea la aplicación lineal $f : R^3 \rightarrow R^3$ definida como:
f (x, y, z) = ((m-2).x + 2.y - z; 2.x + m.y + 2.z; 2.m.x + 2.(m+1).y + (m+1).z. Escribe la matriz asociada a f respecto de una base de R^3. Calcula las soluciones de f (x, y, z) = (0, 0, 0) según los valores de m.

8) Sea la aplicación lineal $f: R^3 \rightarrow R^3$ definida como:
f (x, y, z) = (x + y + z; m.x + 2.z; 2.m.x + (1- m).y+ z; x – y + m.z). Escribe la matriz asociada a f respecto de una base de R^3. Se considera la ecuación f (x, y, z) = (3.m, m, m - 2). Determine los valores de m para los que tiene solución y los valores de m para los que no tiene solución.

9) Considere la aplicación $f : R^3 \rightarrow R^2$ definida por :
f(x, y, z) = (y.z, x^2), calcular f(2, 3, 4), f(5, -2, 7) y $f^{-1}(0, 0)$ es decir todos los vectores v tales que f(v) = 0

10) Sea $f : R^5 \rightarrow R^3$ la aplicación lineal definida según:
f(x, y, z, s, t) = (x + 2.y + z -3.s+ 4.t, 2.x + 5.y + 4.z – 5.s + 5t, x 4.y 5.z – s – 2.t) . Hallar una base y la dimensión de la imagen de f.

11) Defínase $H: R^3 \rightarrow R^3$ por H(x, y, z) = (x +y – 2z, x +2y +z, 2x + 2y -3z)
a) Probar que H es no singular y b) Hallar un expresión para H^{-1}

12) Defínase $f: R^3 \rightarrow R^2$ y $g: R^3 \rightarrow R^2$ por f(x, y, z) = (2x, y + z) y g(x, y, z) = (x - z,y) respectivamente. Encontrar expresiones que definan las aplicaciones a) f + g, b) 3f, c) 2f – 5g.

13) Sean S y T operadores lineales en R^2 definidos por S(x, y) = (y, x) y T(x, y) = (0, x). Encontrar las expresiones que definen los operadores a) S + T, b) 2S – 3T, c) ST, d)TS, e) S^2 y f) T^2

14) Halle la matriz asociada a la transformación lineal T: $R^3 \to R^3$ definida por $T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - Y + 2Z \\ 3X + Y + 4Z \\ 5X - Y + 8Z \end{bmatrix}$

Con respecto a las bases canónicas

15) Sea T: $R^3 \to R^3$ definida por $T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - Y + 2Z \\ 3X + Y + 4Z \\ 5X - Y + 8Z \end{bmatrix}$

Use la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas (calculadas en el ejercicio 15) para hallar el núcleo de T, la nulidad, la imagen de T y el rango de T.

PARTE B: PARA TRABAJAR SOLOS Y DISCUTIR EN CONSULTA

1) Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales

a) $f : R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x - y^2, y + 2z)$

b) $f : R^3 \to R^4$ $f(x_1, x_2, x_3) = (2.x_1 + x_2 - 2.x_3, 3.x_2 - x_3, x_1 + 2.x_2 + 3.x_3, 4.x_1 - x_2 + x_3)$

c) $f : R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x - z, y - z + 1)$

2) Considere la aplicación matricial B : $R^3 \to R^3$ con B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Encontrar la dimensión y una base de a) el núcleo de B, b) la imagen de B.

3) Determinar si cada aplicación lineal es o no singular. Si es singular, encontrar un vector no nulo v cuya imagen sea 0.

a) f: $R^2 \to R^2$, f(x, y) = (x - y, x – 2y) b) g: $R^2 \to R^2$, f(x, y) = (2x - 4y, 3x – 6

4) Hallar, si es posible, una aplicación lineal f : R4 → R3 tal que kerf =< (0; 1;−1; 1); (0; 1; 0; 1) > e Imf =< (1; 0; 1); (2; 1; 0) >.

5).- Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal f : $R^4 \to P_2(x)$ cuya matriz asociada (empleando notación por filas) respecto de la base canónica de R^4 y {1; x; x2} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

6) Suponga que la matriz asociada a la transformación lineal T: $R^3 \to R^3$ con respecto a las bases canónicas es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Halle T(0,1,0), T(1,1,-1) y T(x,y,z)

7) Sean f: $R^2 \to R^3$, g: $R^2 \to R^2$, dos aplicaciones lineales definidas por

f (1, 1) = (5, 2,3), f (2, 3) = (2, 0,4)
g (-2,4,2) = (1,1,1,1), g (1,0,-1) = (2,-1,3,4), g (-1,2,0) = (0,1,0,1),

Hallar:

a) las matrices asociadas a las aplicaciones lineales f y g respecto de las bases canónicas.
b) La expresión analítica de dichas expresiones lineales.
c) La expresión analítica de las aplicaciones f+g y g º f, si fuese posible.
d) Los núcleos de f y g y sus respectivas ecuaciones.
e) Lo mismo para las imágenes.

8) Sean S y T operadores lineales en R^2 definidos por S(x, y) = (0, x) y T(x, y) = (x, 0). Probar que TS = 0 pero ST no es cero. Probar así mismo que $T^2 = T$