Introducción

La Programación Lineal es una técnica matemática muy utilizada en estudios de planificación, que trata de maximizar o minimizar un objetivo primario, sujeto a una serie de restricciones.

Los objetivos más comunes pueden concretarse en dos: maximizar beneficios o rendimientos o bien, minimizar los costos, ya sea monetarios o de medios.

Las restricciones más usuales son de carácter presupuestario, humanos, de tiempo, de energía, etc.

Ejemplos:

1) Maximizar el rendimiento de los quirófanos de un hospital, sin disminuir la calidad del servicio o el tiempo necesario para cada operación y sin incrementar el personal médico.

2) Planificar un territorio, de modo que se minimice el costo de la obra, sujeto a restricciones como un número mínimo de viviendas, un máximo número de hectáreas dedicadas a espacios verdes, un mínimo de escuelas, etc.

Concretemos un ejemplo:

Supongamos que se tienen dos alimentos, **A** y **B**, cuyos costos respectivos son \$200 y \$100 por paquete. Dichos alimentos proporcionan dos nutrientes, **M** y **N**.
Un paquete de alimento A proporciona 300 unidades del nutriente M y 4 del nutriente N.
El alimento B proporciona 100 unidades del nutriente M y 8 del nutriente N por paquete.
Si las necesidades nutritivas son de 30 000 unidades como mínimo del nutriente M y 800 del nutriente N, ¿qué cantidad hay que comprar de cada alimento, para que la inversión sea mínima?

Podemos organizar los datos en una tabla:

	Alimento A (x)	**Alimento B (y)**	
Nutriente M	300	100	30 000
Nutriente N	4	8	800
Costo	\$200	\$100	

Si **x** representa la cantidad de paquetes del alimento **A** e **y** la cantidad de paquetes del alimento **B**, podemos decir que el costo total estará representado por la expresión $\boxed{200 \cdot x + 100 \cdot y}$. Dicho costo deberá minimizarse de acuerdo con las siguientes condiciones:

Nutriente M: $300 \cdot x + 100 \cdot y \geq 30000$

Nutriente N: $4 \cdot x + 8 \cdot y \geq 800$

Además, las variables **x** e **y** no pueden ser negativas, ya que se trata de cantidades de paquetes. Esto podemos expresarlo así: $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Podemos "resumir" la situación matemáticamente así:

$$\text{Minimizar } z = 200 \cdot x + 100 \cdot y \quad \}\text{función objetivo}$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 300 \cdot x + 100 \cdot y \geq 30000 \\ 4 \cdot x + 8 \cdot y \geq 800 \end{cases} \text{restricciones o condiciones estructurales}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{restricciones o condiciones de no negatividad}$$

En general, podemos esquematizar de este modo cualquier problema de Programación Lineal:

$$\text{Optimizar (Maximizar o Minimizar) } z = f(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots x_n) \quad \}\text{función objetivo}$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} g_1(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n) \leq 0 \\ g_2(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n) \leq 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n) \leq 0 \end{cases} \text{restricciones o condic. estructurales}$$

$$x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n \geq 0 \quad \}\text{restricciones o condiciones de no negatividad}$$

La solución del problema consiste en encontrar los valores $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots x_n$ que optimicen la función objetivo, al tiempo que verifiquen todas las restricciones, tanto las estructurales como las de no negatividad. Dicha solución se llama SOLUCIÓN ÓPTIMA. Las variables $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots x_n$ se llaman VARIABLES ESTRUCTURALES O DE DECISIÓN.

El conjunto de todas las soluciones posibles se llama CONJUNTO DE SOLUCIONES FACTIBLES o REGIÓN FACTIBLE. Dicho conjunto puede o no estar acotado.

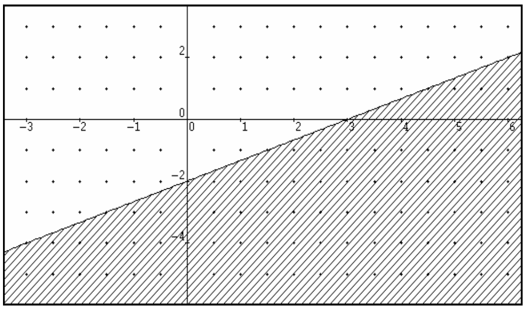
SOLUCIÓN GRÁFICA

Si el problema de programación lineal es en dos variables, como en el ejemplo anterior, admite de manera sencilla una solución gráfica, ya que cada una de las restricciones representa un semiplano.

Ejemplos:

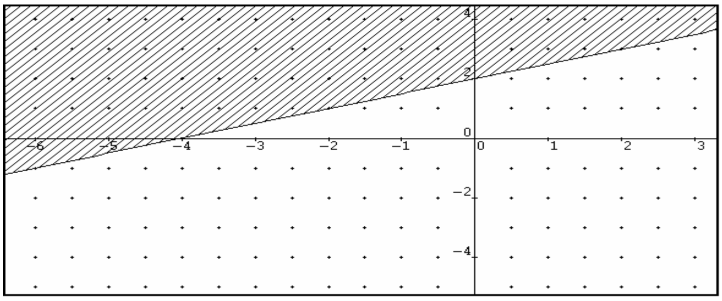
1) Representa gráficamente la inecuación $2x - 3y \geq 6$

Transformamos la desigualdad en una igualdad, la cual representa la recta borde o frontera del semiplano a representar: $2x - 3y = 6$. Es cómodo, si la recta no contiene al origen de coordenadas, expresar dicha ecuación en forma segmentaria para su representación: $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$.

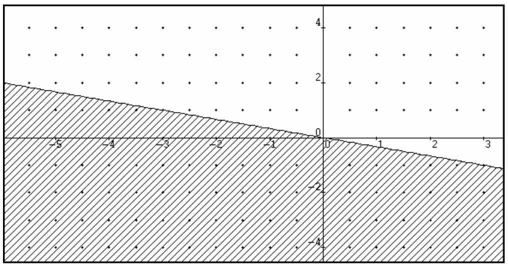


Para decidir cuál es el semiplano deseado se reemplaza cualquier punto de coordenadas $(x; y)$ en la inecuación, observando si dicho punto la satisface o no. Si es posible, se utiliza, por comodidad, el punto $(0;0)$. En efecto, $(0;0)$ no satisface la inecuación, ya que $0 \leq 6$, por lo tanto, se toma al semiplano que no contiene al $(0;0)$.

2) Representa gráficamente la inecuación $-x + 2y \geq 4$



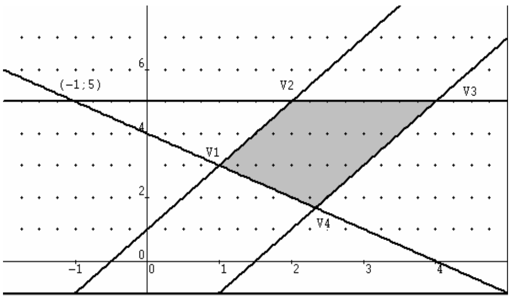
3) Representa gráficamente la inecuación $x + 3y \leq 0$



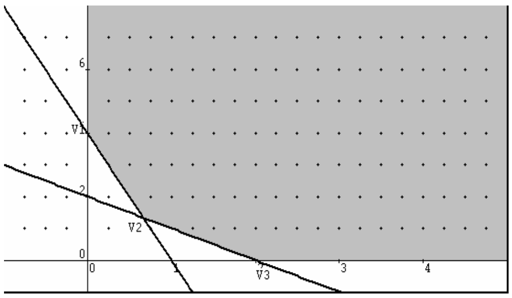
Como la recta $x + 3y = 0$ contiene al punto $(0;0)$, reemplazamos por las coordenadas de cualquier otro punto, para saber si satisface o no la inecuación. Por ejemplo, reemplazando por las coordenadas del punto $(2;2)$, nos queda

$2 + 3 \cdot 2 \geq 0$. Por lo tanto, se toma el semiplano que no contiene al punto $(2;2)$.

Cuando las restricciones son varias, el conjunto de soluciones es una porción del plano, que puede estar acotada o no. Dicha porción del plano se llama <u>zona factible</u> o <u>región factible.</u> <u>Ejemplos</u>:



Acotado



No Acotado

<u>Punto Extremo o Vértice</u>:

Es cada una de las soluciones que son intersección de las rectas que definen las restricciones que determinan la zona o región factible. Si la misma está acotada, los puntos extremos son los vértices de un polígono.

<u>Propiedad</u>: La solución óptima de un problema de Programación Lineal se encuentra siempre en un punto extremo de la región factible.

<u>Observación</u>: No todas las intersecciones de las rectas son puntos extremos o vértices. Por ejemplo, en el gráfico de la izquierda, el punto $(-1;5)$ es intersección de dos rectas pero no es un vértice de la zona factible.

Ejemplo: Maximizar z = $2x + 3y$

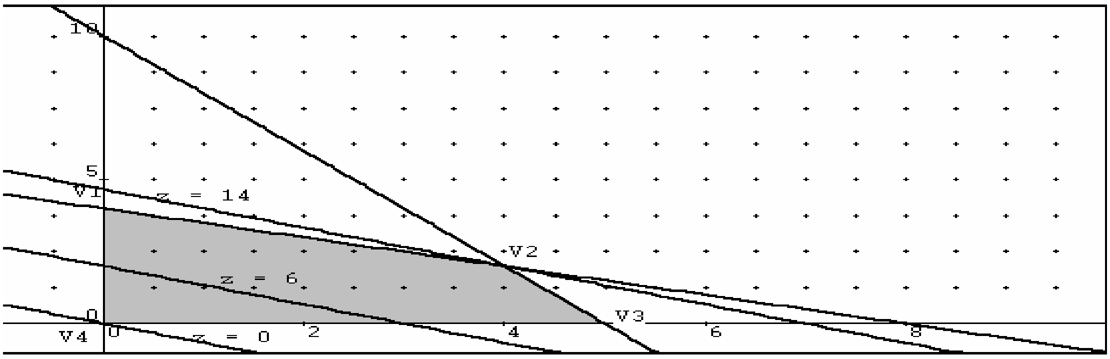
sujeto a $\begin{cases} 2x + y \le 10 \\ x + 2y \le 8 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$ los vértices son

$$V_1\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = (0;4)$$

$$V_2\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow V_2 = (4;2)$$

$$V_3\begin{cases} 2x + y = 10 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow V_3 = (5;0)$$

$$V_4\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow V_4 = (0;0)$$



Rectas de Nivel:

Llamamos rectas de nivel asociadas a la función objetivo z a las rectas de ecuación z = k, es decir de la forma ax + by = k. En el ejemplo, éstas serán rectas de la forma 2x + 3y = k.

Las rectas de nivel que nos interesan son las que atraviesan la región factible. Vemos que, gráficamente, el máximo valor de z se obtiene a medida que las rectas de nivel se desplazan hacia arriba.

Podemos buscar algebraicamente el $z_{máx}$, reemplazando las coordenadas de los vértices en la función objetivo z = 2x + 3y:

$$V_1 = (0;4) \Rightarrow z_1 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

$$\boxed{V_2 = (4;2) \Rightarrow z_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14 = z_{max}}$$

$$V_3 = (5;0) \Rightarrow z_3 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 10$$

$$V_4 = (0;0) \Rightarrow z_4 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

Diremos que la solución óptima es S = $(4;2)$, pues para ese vértice, z es máximo.

Soluciones Óptimas Alternativas

Hemos dicho que la solución óptima de un problema de PL se encuentra siempre en un punto extremo o vértice de la región factible. Existe la posibilidad de más de una solución óptima. En ese caso diremos que el problema tiene soluciones óptimas alternativas.

✋Resuelve el siguiente problema de PL para comprobar lo dicho:

Maximizar z = $20x_1 + 15x_2$ sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 60 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 60 \\ x_1 \le 10 \\ x_2 \le 12 \end{cases}$ con x_1 y x_2 no negativas.

Ausencia de Solución Factible

A veces sucede que no existen puntos que cumplan simultáneamente todas las restricciones. Esto significa que no hay región factible, o mejor dicho, el conjunto de soluciones o zona factible es vacío.

Puedes verificarlo en el siguiente ejemplo.

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

sujeto a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 24 \end{cases}$ con todas las variables no negativas.

Soluciones No acotadas

Supongamos que se desea resolver el siguiente problema:

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \end{cases}$ con todas las variables no negativas.

En este caso, la función objetivo z puede ser llevada hacia fuera tanto como se desee. Se dice que el problema tiene "solución no acotada".

Solución del problema inicial: (alimentos A y B y nutrientes M y N)

$$\text{Minimizar } z = \underbrace{200 \cdot x + 100 \cdot y}_{\text{función objetivo}}$$

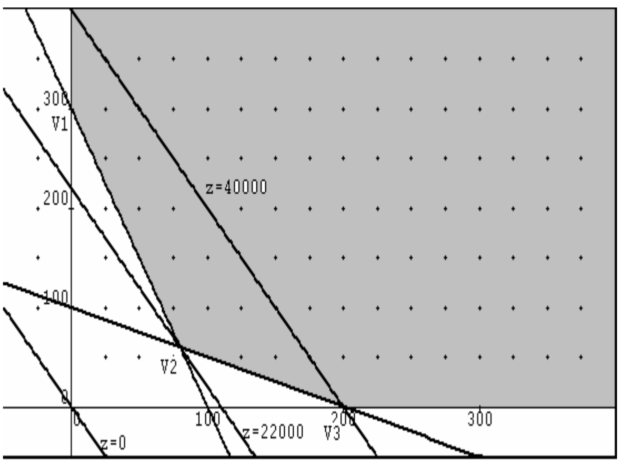
$$\text{sujeto a } \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 300 \cdot x + 100 \cdot y \geq 30000 \\ 4 \cdot x + 8 \cdot y \geq 800 \end{array}\right\} \text{restricciones} \\ \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \text{condiciones de no negatividad} \end{cases}$$

Los vértices del la región factible son:

$$V_1 = (0;300) \Rightarrow z_1 = 200 \cdot 0 + 100 \cdot 300 = 30000$$

$$\boxed{V_2 = (80;60) \Rightarrow z_2 = 200 \cdot 80 + 100 \cdot 60 = 22000 = z_{mín}}$$

$$V_3 = (200;0) \Rightarrow z_3 = 200 \cdot 200 + 100 \cdot 0 = 40000$$



EL MÉTODO SIMPLEX

La utilización del método gráfico para la resolución de problemas de Programación Lineal se limita a problemas en dos variables, ya que puede ser representado en el plano de dos dimensiones.

En aplicaciones concretas, los problemas de PL requieren una gran cantidad de variables, llamadas **variables de decisión** y de restricciones. Tales problemas son resueltos por métodos computarizados y se basan en la aplicación del llamado "Método Simplex".

Requisitos del Método Simplex:

3) Todas las restricciones deben formularse como ecuaciones.
4) El miembro derecho de una restricción no puede ser negativo.
5) Todas las variables están restringidas a valores no negativos.

Requisito 1:

En general, las restricciones son desigualdades, es decir, inecuaciones. La transformación de desigualdades (inecuaciones) en igualdades (ecuaciones), varía según la naturaleza de la restricción.

a) Variables de Holgura:

Para cada restricción del tipo "≤" (menor o igual), se añade una variable no negativa llamada variable de holgura, que "equilibra" ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo:

Cierta fábrica produce dos productos **A** y **B**. Con $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ denotamos el número de unidades fabricadas de **A** y **B** respectivamente. Dichos productos se fabrican en dos departamentos **D1** y **D2** cuya disponibilidad en horas son 50 y 60 respectivamente.

En el departamento D1 se necesitan 2 horas para elaborar el producto A y 3 horas para elaborar el producto B.

En el departamento D2 se necesitan 4 horas para elaborar el producto A y 2 horas para elaborar el producto B.

De acuerdo con tales condiciones, las restricciones serán:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 50 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 60 \end{cases}.$$

Tales desigualdades podemos convertirlas en igualdades, agregando dos variables no negativas, x_3 y x_4, una en cada una de las desigualdades. Así resultarán las siguientes ecuaciones: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 50 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \end{cases}$.

Las variables x_3 y x_4 agregadas se llaman variables de holgura. En el ejemplo, tales variables representarían el número de horas que no se emplean en cada departamento. De este modo, si por ejemplo, $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$, es decir si se fabrican 5 unidades del producto A y 10 unidades del producto B, reemplazando en las ecuaciones resulta:

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + x_3 = 50 \\ 4 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + x_4 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40 + x_3 = 50 \\ 40 + x_4 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 10 \\ x_4 = 20 \end{cases}$$

Esto significa que fabricando tales cantidades de cada producto, sobrarán 10 horas en el departamento 1 y 20 horas en el departamento 2.

b) Variables Superfluas o de Demasía:

Si una restricción es de "≥" (mayor o igual), se debe "quitar" o sustraer una variable no negativa, llamada variable superflua o de demasía.

Supongamos, en el ejemplo anterior, que la producción combinada de ambos productos debe ser como mínimo de 25 unidades. Tal condición será representada mediante la restricción

$$x_1 + x_2 \geq 25$$

Para transformar dicha inecuación en ecuación, restamos una nueva variable x_5 llamada superflua. Resultará entonces la igualdad

$$x_1 + x_2 \qquad - x_5 = 25$$

Podemos interpretar que, si por ejemplo, se fabrican 20 unidades del producto A y 35 unidades del producto B, la producción combinada de ambos productos excede a la cantidad mínima en 30 unidades. Esto podemos observarlo reemplazando:

$$20 + 35 \qquad - x_5 = 25 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 30$$

c) Variables Artificiales:

En las restricciones de "≥" y también en las de "=", debe agregarse además una variable llamada artificial. Esta variable carece de significado, sólo sirve de "punto de arranque", ya que en la matriz de resolución deben estar siempre las columnas de la matriz identidad, como se verá más adelante.

En el ejemplo dado, debemos entonces agregar una variable artificial x_6, de modo que la igualdad será finalmente: $x_1 + x_2 \qquad - x_5 + x_6 = 25$

Así, en el ejemplo dado, el conjunto de restricciones original estaría dado por el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

que puede indicarse también $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 25 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Mediante la transformación de desigualdades en igualdades, dicho conjunto de restricciones será llevado a la forma

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 50 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \qquad = 60 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_5 + x_6 = 25 \end{cases}$$ con todas las variables no negativas

Esta nueva forma se llama forma estándar.

Observamos que la matriz ampliada asociada a este sistema de ecuaciones, contiene en las columnas 3ª, 4ª y 6ª las columnas de la matriz identidad 3x3. De no haberse agregado una variable artificial, faltaría la última columna de dicha matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 25 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{cccccc} & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

Introducción de variables en la función objetivo:

Todas las variables deben agregarse también en la función objetivo de la siguiente manera: las variables de holgura y las variables superfluas, serán agregadas con coeficiente 0 (cero), mientras que las artificiales se agregarán con un coeficiente M, el mismo para todas, teniendo en cuenta que si estamos minimizando, se sumará M (+M) y si estamos maximizando, se restará M (–M). Dicho coeficiente M representa un número tan grande como se quiera. Una contribución muy grande negativa (positiva) en un problema de maximización (minimización) no crea incentivos para que la variable artificial sea positiva. De hecho, existe un enorme incentivo para hacerla cero.

Veamos otro ejemplo para llevar todo a la forma estándar:

Maximizar $z = 5x_1 + 10x_2$ sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 40 \\ x_1 - 2x_2 = 25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Se estandariza así:

Maximizar $z = 5x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6$

sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 40 \\ x_1 - 2x_2 + x_6 = 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$

Si el problema fuera de minimización, la única modificación en la estandarización estará dada en la función objetivo del siguiente modo:

Minimizar $z = 5x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$

Las restricciones no sufren modificación.

Requisito 2: Si una restricción tiene el miembro derecho negativo, se multiplican ambos miembros por –1 para convertirlo en positivo. Recordemos que cuando esto sucede en una desigualdad, se invierte el sentido de la misma.

Ejemplos:

a) $2x_1 - 5x_2 \leq -10$ resultará $-2x_1 + 5x_2 \geq 10$

b) $-x_1 + 6x_2 \geq -100$ resultará $x_1 - 6x_2 \leq 100$

c) $5x_1 - 2x_2 = -25$ resultará $-5x_1 + 2x_2 = 25$

Requisito 3:

La tercera condición del método simplex señala que se restrinjan todas las variables a valores no negativos. Se cuenta con técnicas especializadas para ocuparse de variables *capaces* de adoptar valores negativos, pero tales variables no las estudiaremos en este curso. Lo único que mencionamos es que las variables de holgura, superfluas y artificiales pueden restringirse también a que no sean negativas, del mismo modo que *naturalmente* no son negativas las variables de decisión.

SOLUCIONES FACTIBLES BÁSICAS

Una vez que un problema de PL ha sido convertido en la forma estándar en la cual todas las restricciones se formulan como igualdades y se han agregado variables complementarias, el sistema resultante tiene más variables que ecuaciones.

Pongamos el caso de un problema generalizado de este tipo que posea **m** restricciones del tipo "≤" y **n** variables de decisión. Una vez transformado en la forma estándar, habrá **m** restricciones estructurales, **n** variables de decisión y **m** variables de holgura. Por lo tanto, el sistema de restricciones puede considerarse un sistema **m x (n + m)**, donde será **m < n + m** (sin considerar las restricciones de no negatividad). Es decir que el número de ecuaciones es menor que el de variables. Si tal sistema es compatible, será indeterminado. Es decir, si tiene solución, habrá un número infinito de ellas.

Veamos algunas definiciones que son importantes para las explicaciones que se darán más tarde. Supongamos la forma estándar de un problema de PL que tiene **m** restricciones estructurales y **n'** variables reales (o de decisión) y complementarias:

Solución Factible:

Es cualquier conjunto de valores de **n'** variables que satisface todas las restricciones, incluyendo las de no negatividad.

Solución Básica:

Es cualquier solución que se obtiene al hacer igual a cero **n' – m** variables y resolviendo el sistema para las **m** restantes. Las **m** variables resueltas se llaman **variables básicas**. Las **n' – m** variables que se hicieron cero se llaman **no básicas**.

Solución Factible Básica:

Es cualquier solución básica que además cumple las condiciones de no negatividad.

Ejemplifiquemos estas definiciones en el siguiente problema:

Maximizar z = $5x_1 + 6x_2$ sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 260 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Su forma estándar será:

Maximizar z = $5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$

sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 120 \\ 4x_1 + 6x_2 \qquad + x_4 = 260 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Una solución factible podría ser, haciendo $x_1 = 5$ y $x_2 = 5$, $S = (5\,;5\,;95\,;210)$, pues reemplazando en el sistema de ecuaciones ya estandarizado tendremos:

$$\begin{cases} 15 + 10 + x_3 \qquad = 120 \\ 20 + 30 \qquad + x_4 = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 95 \\ x_4 = 210 \end{cases}$$

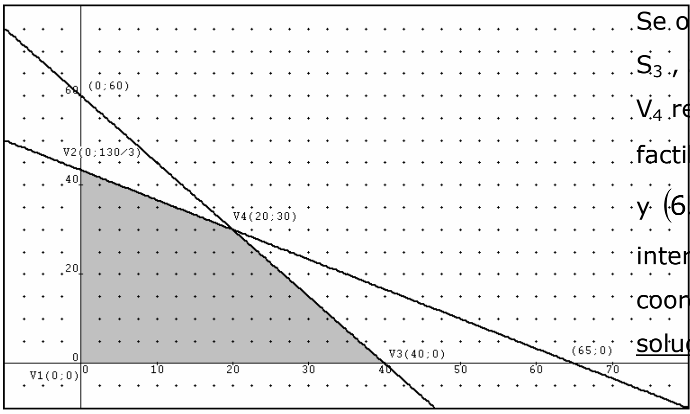
Dicha solución es factible porque satisface todas las condiciones.

Veamos cuáles son las soluciones básicas, organizándolas en el siguiente cuadro:

Número de Orden	**Variables No Básicas** (las que se hacen igual a cero)	**Variables Básicas** (las que se resuelven)	**Solución Básica**
1	x_1 , x_2	$x_3 = 120$, $x_4 = 260$	$S_1 = (0\,;0\,;120\,;260)$
2	x_1 , x_3	$x_2 = 60$, $x_4 = -100$	$S_2 = (0\,;60\,;0\,;-100)$
3	x_1 , x_4	$x_2 = 130/3$, $x_3 = 100/3$	$S_3 = (0\,;130/3\,;100/3\,;0)$
4	x_2 , x_3	$x_1 = 40$, $x_4 = 100$	$S_4 = (40\,;0\,;0\,;100)$
5	x_2 , x_4	$x_1 = 65$, $x_3 = -75$	$S_5 = (65\,;0\,;-75\,;0)$
6	x_3 , x_4	$x_1 = 20$, $x_2 = 30$	$S_6 = (20\,;30\,;0\,;0)$

Las soluciones S_2 y S_5 no son soluciones factibles, por cuanto no cumplen con las condiciones de no negatividad. Las soluciones S_1 , S_3 , S_4 y S_6 son soluciones factibles básicas (SFB).

Analicemos gráficamente:



Se observa que las soluciones factibles básicas S_1 , S_3 , S_4 y S_6 corresponden a los vértices V_1, V_2, V_3, y V_4 respectivamente, mientras que las soluciones no factibles S_2 y S_5 corresponden a los puntos $(0\,;60)$ y $(65\,;0)$ respectivamente. Dichos puntos son las intersecciones de las rectas con los ejes coordenados que no son vértices del polígono de solución o región factible.

A continuación, explicaremos el algoritmo del método simplex.

EL ALGORITMO DEL MÉTODO SIMPLEX

Continuamos con el ejemplo anterior donde resolvemos el siguiente problema de PL,

Maximizar z = $5x_1 + 6x_2$ sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 260 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

cuya forma estándar es:

Maximizar z = $5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$

sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_4 = 260 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Tal como dijimos anteriormente, las restricciones forman un sistema de, en este caso particular, 2 ecuaciones con 4 incógnitas. Podemos incorporar al sistema la función objetivo, igualándola a cero. Es decir, si hacemos $-5x_1 - 6x_2 + z = 0$, el sistema resultará:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_4 = 260 \\ -5x_1 - 6x_2 + z = 0 \end{cases}$$

Le damos a este sistema forma matricial o de tabla, colocando a la izquierda de la misma, cuáles son las variable básicas (Éstas coinciden con las que determinan la matriz identidad). Pueden colocarse, también a la izquierda, los coeficientes de la las variable básicas en la función objetivo, para una lectura más cómoda de la solución.

			x_1	x_2	x_3	x_4	z	
	x_3	0	3	2	1	0	0	120
←	x_4	0	4	6	0	1	0	260
	z		−5	−6	0	0	1	0
				↑				

TABLA I

$S_1 = (0\,;0\,;120\,;260)$

z = 0

Podemos "leer" en esta tabla una SFB inicial, donde x_1 y x_2 son variables <u>no básicas</u> ($x_1 = x_2 = 0$), $x_3 = 120$ y $x_4 = 260$. O sea $S_1 = (0\,;0\,;120\,;260)$. Para esta solución z = 0, lo cual puede leerse en el último elemento de la tabla, o bien, reemplazando en la función objetivo
$z = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5\cdot 0 + 6\cdot 0 + 0\cdot 120 + 0\cdot 260 = 0$. Como $x_1 = x_2 = 0$, podemos leer en la tabla simplemente $z = 0\cdot 120 + 0\cdot 260 = 0$ (Los coeficientes "cero" los hemos colocado a la izquierda de la matriz).

Buscamos una SFB "mejor" que la anterior, donde x_1 y x_2 son no básicas (iguales a 0). Debemos decidir cuál de ellas convertiremos en básica (no nula):

- Si hacemos $x_1 \neq 0$ (básica) y $x_2 = 0$ (no básica), tendremos en la función objetivo $z = 5x_1$. Esto significa que por cada vez que x_1 aumente, z lo hará 5 veces.
- Si hacemos $x_1 = 0$ (no básica) y $x_2 \neq 0$ (básica), tendremos en la función objetivo $z = 6x_2$. Por cada aumento de x_2 , z aumentará 6 veces.

Como se trata de maximizar z, conviene entonces que x_2 se convierta en básica ($x_2 \neq 0$). Llamaremos a x_2 <u>variable entrante</u> y será buscada en el último renglón de la tabla como la "más negativa".

Hay que buscar una <u>variable saliente</u> para que x_2 ocupe su lugar. Esta variable saliente nos dirá en cuánto podemos aumentar x_2.

Como $x_1 = 0$, tendremos que $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 120 \\ 6x_2 + x_4 = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - 2x_2 \\ x_4 = 260 - 6x_2 \end{cases}$. Dado que x_3 y x_4 no pueden ser negativas, tendremos en cuenta que $\begin{cases} 120 - 2x_2 \geq 0 \\ 260 - 6x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq \dfrac{120}{2} = 60 \\ x_2 \leq \dfrac{260}{6} \cong 43{,}3 \end{cases}$. Debemos elegir el menor de tales cocientes, ya que estas condiciones son simultáneas. De hecho, si eligiéramos, por ejemplo, $x_2 = 50$, x_4 resultaría negativa, contradiciendo la tercera condición del método simplex.

En la práctica, simplemente hacemos los cocientes $\frac{120}{2}$ y $\frac{260}{6}$, que se obtienen, si observamos la tabla, dividiendo cada resultado en la última columna por su correspondiente en la columna elegida de la variable entrante. Como el cociente elegido es $\frac{260}{6}$, de la 2ª fila, se convierte x_4 en variable saliente. Es decir que x_4 se convierte ahora en variable no básica ($x_1 = 0$ y $x_4 = 0$).

Ahora serán básicas x_2 y x_3, mientras que x_1 y x_4 serán no básicas. La columna de x_2 será ocupada por la columna $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que correspondía a x_4. Nuestra próxima solución tendrá la forma $S_2 = (0\,;?\,;?\,;0)$ y será "mejor" que S_1.

Para hallar los valores de x_2 y de x_3 debemos cambiar nuestra matriz o tabla, por una equivalente, en la cual la columna de x_2 sea ocupada por la columna $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Podemos hallar una matriz equivalente, haciendo operaciones elementales entre filas. El elemento "6" de la Tabla I, intersección de las fila y columna elegidas, será el "pivote". Éste se transforma en "1" y hacemos "0" los elementos que están por encima y por debajo del pivote.

A la izquierda de la tabla, x_4 se reemplaza por x_2 y su correspondiente coeficiente en la función objetivo.

			x_1	x_2	x_3	x_4	z	
←	x_3	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{100}{3}$
	x_2	6	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{130}{3}$
	z		-1	0	0	1	1	260
			↑					

TABLA II

$S_2 = \left(0\,;\frac{130}{3}\,;\frac{100}{3}\,;0\right)$

$z = 260$

La nueva SFB será $S_2 = \left(0\,;\frac{130}{3}\,;\frac{100}{3}\,;0\right)$, para la cual $z = 260 = 6 \cdot \frac{130}{3} + 0 \cdot \frac{100}{3}$.

Si tenemos en cuenta la última fila de la matriz, su ecuación correspondiente es $-x_1 + x_4 + z = 260$. Despejando z, tenemos que $z = 260 + x_1 - x_4$.

La variable x_4 se resta de 260, es decir que es conveniente que sea nula (recordemos que no puede ser negativa); pero x_1 se suma a 260, esto significa que si x_1 no fuera cero, tendríamos un z más grande que 260. Significa que convendría que x_1 fuera básica ($x_1 \neq 0$). Debemos convertirla en variable entrante. En la práctica, estamos eligiendo nuevamente la columna correspondiente al "más negativo", en este caso, x_1.

Repetimos el proceso, en busca de una solución mejor, es decir un z mayor que 260. Efectuamos los cocientes correspondientes: $\frac{100}{3} \div \frac{5}{3} = 20$ y $\frac{130}{3} \div \frac{2}{3} = 65$ y elegimos el menor para decidir cuál es la variable saliente. En este caso, corresponde a la primera fila, o sea que x_3 es la variable saliente y $\frac{5}{3}$ es el nuevo pivote para hallar una matriz equivalente a la Tabla II, en la cual la columna de x_1 será reemplazada por la columna $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

		x_1	x_2	x_3	x_4	z	
x_1	5	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	20
x_2	6	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	30
z		0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	280

TABLA III

$S_3 = (20\,;30\,;0\,;0)$

z = 280

Razonando análogamente al paso anterior, la ecuación correspondiente a la última fila será ahora $\frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 + z = 280$, de donde resulta, despejando z, $z = 280 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4$.

No podremos encontrar un z mejor que el obtenido, ya que x_3 y x_4 se están quitando a 280. Es conveniente que permanezcan siendo cero (variables no básicas).

Por lo tanto, $z_{máx}$ = 280 es el máximo valor y se obtiene para $S_3 = (20\,;30\,;0\,;0)$. En la práctica, nos damos cuenta de que el proceso ha terminado porque no hay valores negativos en la última fila de la matriz.

Soluciones No Acotadas

Si no existen cocientes en una tabla simplex, entonces el problema de PL tiene una solución no acotada. Específicamente, esta es una manera de decir que no existe solución óptima.

Ejemplo:

Maximizar z = $x_1 + 4x_2 - x_3$ sujeto a $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 - 2x_3 \le 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 12 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Su forma estándar es:

Maximizar z = $x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5$

sujeto a $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 = 12 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

TABLA I

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		
	x_4	0	−5	6	−2	1	0	0	30	30:6=5
←	x_5	0	−1	3	6	0	1	0	12	12:3=4
	z		−1	−4	1	0	0	1	0	
				↑						

$S_1 = (0\,;0\,;0\,;30\,;12)$ y $z = 0$. El "más negativo" es -4, por lo cual se convierte a x_2 en variable entrante. Eligiendo el menor de los cocientes, se convierte a x_5 en variable saliente. Construimos la segunda tabla:

TABLA II

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		
x_4	0	−3	0	−14	1	−2	0	6	6:(-3)=(sin cociente)
x_2	4	−1/3	1	2	0	1/3	0	4	4:(-1/3)= (sin cociente)
z		−7/3	0	9	0	4/3	1	16	
		↑							

Diremos que este problema tiene una <u>solución no acotada</u>.

<u>Soluciones Óptimas Múltiples</u>

Existe la posibilidad de hallar más de una solución óptima. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Maximizar $z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3$ sujeto a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 \le 10 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Su forma estándar es:

Maximizar $z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5$

sujeto a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_5 = 10 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

TABLA I

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		
←	x_4	0	1	2	3	1	0	0	6	6:3=2
	x_5	0	−2	−5	1	0	1	0	10	10:1=10
	z		1	−4	−6	0	0	1	0	
					↑					

$S_1 = (0\,;0\,;0\,;6\,;10)$ y $z = 0$. El "más negativo" es -6, por lo cual se convierte a x_3 en variable entrante. Eligiendo el menor de los cocientes, se convierte a x_4 en variable saliente. Construimos la segunda tabla:

TABLA II

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		
←	x_3	6	1/3	2/3	1	1/3	0	0	2	2:(2/3)=3
	x_5	0	−7/3	−17/3	0	−1/3	1	0	8	sin cociente
	z		3	0	0	2	0	1	12	
				↑						

$S_2 = (0\,;0\,;2\,;0\,;8)$ y $z = 12$. Observamos que no hay valores negativos en la última fila de los "indicadores", pero el hecho de que haya un "0" en una variable estructural no básica (x_2) nos indica la existencia de otra solución óptima, como comprobaremos en la tabla III, donde convertiremos a x_2 en variable básica. La variable saliente es x_3 ya que en la segunda fila no hay cociente, por ser –17/3 un valor negativo.

TABLA III

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
x_2	4	1/2	1	3/2	1/2	0	0	3
x_5	0	1/2	0	17/2	5/2	1	0	25
z		3	0	0	2	0	1	12

Obtenemos la solución $S_3 = (0\,;3\,;0\,;0\,;25)$ pero z = 12, es decir no hemos "mejorado" el valor de z.

Variables artificiales

Supongamos el siguiente problema de PL:

Maximizar z = $x_1 + 2x_2$ sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Su forma estándar sería:

Maximizar z = $x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$

sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad = 9 \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 = 1 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Para comenzar el simplex, necesitamos una SFB donde todas las variables estructurales son cero. Pero en este caso, haciendo x_1 = 0 y x_2 = 0, no obtenemos una solución factible. De hecho, cuando $x_1 = x_2 = 0$, resulta x_4 = –1. Es decir, no se cumple la condición de no negatividad.

Es por ello que debemos agregar una variable artificial a la 2ª restricción. Como hemos dicho anteriormente, en la función objetivo, dicha variable se agrega con un coeficiente M, que se resta por tratarse de un problema de maximización. Entonces, la forma estándar de este problema es:

Maximizar z = $x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$

sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 9 \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Confeccionamos la primer tabla correspondiente:

TABLA I

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
			1	2	0	0	– M	
	x_3	0	1	1	1	0	0	9
←	x_5	–M	1	–1	0	–1	1	1
			–1 – M	–2 + M	0	M	0	
			↑					

Estamos utilizando otro procedimiento, equivalente al anterior: debajo de cada una de las variables colocamos sus coeficientes en la función objetivo. Para completar la última efectuamos los siguientes cálculos:

Columna de x_1: $-[1-(0\cdot 1+(-M)\cdot 1)] = -[1-(-M)] = -[1+M] = -1-M$. (El signo – delante del corchete, corresponde por estar maximizando).

Columna de x_2: $-[2-(0\cdot 1+(-M)\cdot(-1))] = -[2-M] = -2+M$.

Columna de x_3: $-[0-(0\cdot 1+(-M)\cdot 0)] = -[0-0] = 0$.

Columna de x_4: $-[0-(0\cdot 0+(-M)\cdot(-1))] = -[0-M] = -0+M = M$.

Columna de x_5: $-[-M-(0\cdot 0+(-M)\cdot 1)] = -[-M+M] = 0$.

La SFB inicial es $(0;0;9;0;1)$ para la cual z = $0\cdot 9+(-M)\cdot 1 = -M$

El indicador más negativo es –1 – M ya que M es un valor muy grande. Realizando los cocientes correspondientes (9:1=9 y 1:1=1), elegimos la 2ª fila, es decir la variable saliente es x_5. Como la variable saliente es una variable artificial, en la siguiente tabla podemos eliminar su columna.

TABLA II

			x_1	x_2	x_3	x_4	
			1	2	0	0	
←	x_3	0	0	2	1	1	8
	x_1	1	1	–1	0	–1	1
			0	–3	0	–1	
				↑			

En este paso tenemos: $S_2 = (1;0;8;0;0)$ y z = 1.

TABLA III

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		1	2	0	0	
x_2	2	0	1	½	½	4
x_1	1	1	0	½	–½	5
		0	0	3/2	½	

No hay indicadores negativos en la última fila, es decir que hemos llegado a la solución:

$\boxed{S_3 = (5;4;0;0;0)}$ y $\boxed{z_{máx}} = 1\cdot 5+2\cdot 4 = \boxed{13}$

Puedes resolver el siguiente **ejemplo propuesto**:

Maximizar z = $2x_1+x_2$ sujeto a $\begin{cases} x_1+x_2 \le 12 \\ x_1+2x_2 \le 20 \\ -x_1+x_2 \ge 2 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

La solución de este problema es $z_{máx}$= 17, que se verifica para la solución S = $(5;7;0;1;0;0)$

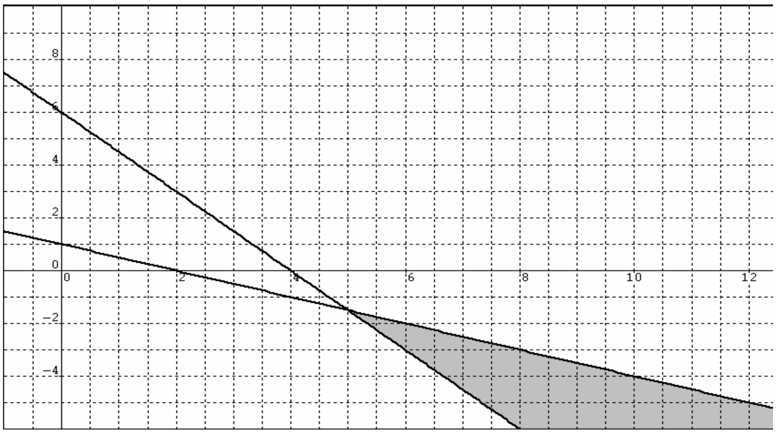
Regiones Factibles Vacías

En algunos casos puede suceder que el simplex termine y no todas las variables artificiales sean cero. Esto significará que la región factible es vacía y por lo tanto, no existe una solución óptima. Esta situación puede observarse en el siguiente ejemplo:

Maximizar z = $2x_1+3x_2$ sujeto a $\begin{cases} x_1+2x_2 \le 2 \\ 6x_1+4x_2 \ge 24 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

La solución de este problema <u>sería</u> $z_{máx}$= 4 – 12M, que se da para la solución S = $(2\,;0\,;0\,;0\,;12)$. Puedes comprobarlo realizando las tablas – simplex correspondientes. Pero hemos dicho que M es un valor positivo muy grande, es decir que $z_{máx}$= 4 – 12M <u>no es una solución óptima</u>, ya que estamos tratando de "maximizar" y obviamente, 4 – 12M será siempre un valor negativo.

Como se trata de un problema de dos variables, podemos observar gráficamente la situación:



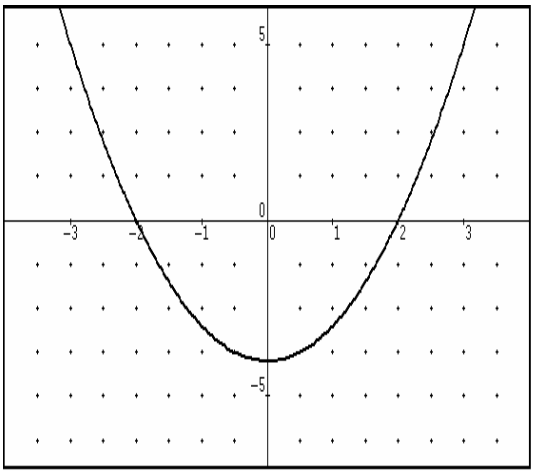
La zona sombreada corresponde a las restricciones $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 6x_1 + 4x_2 \ge 24 \end{cases}$, pero no se satisfacen las condiciones de no negatividad. Es decir, la zona sombreada no tiene intersección con el primer cuadrante, donde las variables son positivas.

MINIMIZACIÓN

Hasta este momento hemos utilizado el método simplex para <u>maximizar</u> una función objetivo.

Para <u>MINIMIZAR</u> una función objetivo, es suficiente con maximizar su negativo. Sucede lo mismo que con cualquier función. Por ejemplo:

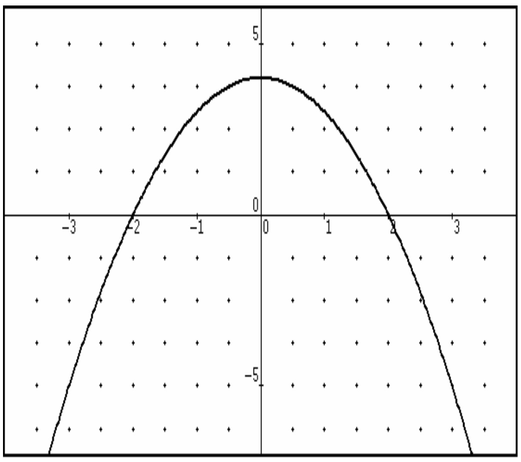
Sea la función f(x) = $x^2 - 4$



El valor mínimo de f es –4 y ocurre cuando x = 0.

La función opuesta de f es:

$-f\,(x) = -\left(x^2 - 4\right) = -x^2 + 4$



El valor máximo es 4 = –(– 4), que también ocurre cuando x = 0.

Esto significa que el mínimo de f es igual al negativo del máximo de –f .

Por lo tanto, lo único que cambiará en un <u>simplex de minimización</u> es:

- Las variables artificiales se agregan a la función objetivo con coeficiente +M.
- En el último renglón de cada tabla simplex <u>no se cambia el signo de los resultados</u>.

<u>Ejemplo</u>:

Resolvamos el siguiente problema de minimización:

Minimizar $z = x_1 + 2x_2$ sujeto a $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Su forma estándar es:

Minimizar $z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$ sujeto a

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2 \end{cases}$ con todas las variables no negativas

Confeccionamos la primera tabla correspondiente:

TABLA I

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
			1	2	0	0	M	M	
←	x_5	M	–2	1	–1	0	1	0	1
	x_6	M	–1	1	0	–1	0	1	2
			1 + 3M	2 – 2M	M	M	0	0	
				↑					

Dado que M es un valor muy grande, el “más negativo”, es 2 – 2M. En la siguiente tabla no es necesario completar la columna de x_5, ya que ésta es la variable saliente y se trata de una variable artificial.

TABLA II

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
			1	2	0	0	M	M	
	x_2	2	–2	1	–1	0	---	0	1
←	x_6	M	1	0	1	–1	---	1	1
			5 - M	0	2 - M	M	---	0	
					↑				

En este caso, el “más negativo” es 2 – M, ya que como M es un valor muy grande, por ejemplo M = 1000, tendremos: 5 – M = –995 y 2 – M = –998. Es menor 2 – M.

TABLA III

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
		1	2	0	0	M	M	
x_2	2	–1	1	0	–1	---	---	2
x_3	0	1	0	1	–1	---	---	1
		3	0	0	2	---	---	

No hay "indicadores" negativos en la última fila, así que hemos llegado al final del simplex. Tenemos entonces que $\mathbf{z_{mín}} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = \mathbf{4}$. Éste valor mínimo de z se verifica para la solución $S = (0\,;2\,;1\,;0\,;0\,;0)$.

Podemos resolver gráficamente, ya que se trata de un problema con dos variables: