CLASE 3

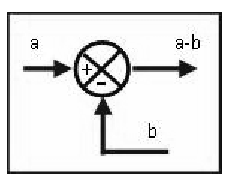
DIAGRAMA DE BLOQUES

Un sistema lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques que es una representación gráfica del modelo matemático de un sistema. El diagrama está formado por puntos suma, bloques y puntos de ramificación, en muchos casos estos diagramas permiten entender el comportamiento y conexión del sistema. En un diagrama de bloques se unen todas las variables del sistema, para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los elementos se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales. La señal solo puede pasar en la dirección de la flechas.

En esta materia se utilizarán como herramienta para encontrar el modelo en el espacio de estado, por este motivo debe tener la mayor cantidad posible de información proporcionada por cada bloque, en todos los casos se tratará de sistemas con realimentación para relacionar de esta manera las variables de estado del sistema.

PUNTO SUMA

Un círculo con una cruz es el símbolo que indica una operación de suma. El signo de más o de menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse

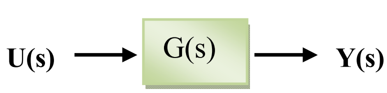


.

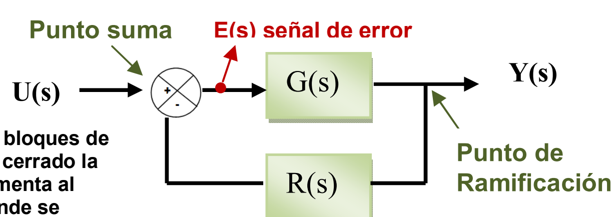
PUNTO DE RAMIFICACION

Un punto de ramificación es aquel a partir del cual la señal de un bloque va a otros bloques o puntos suma.

SISTEMA EN LAZO ABIERTO



SISTEMA EN LAZO CERRADO



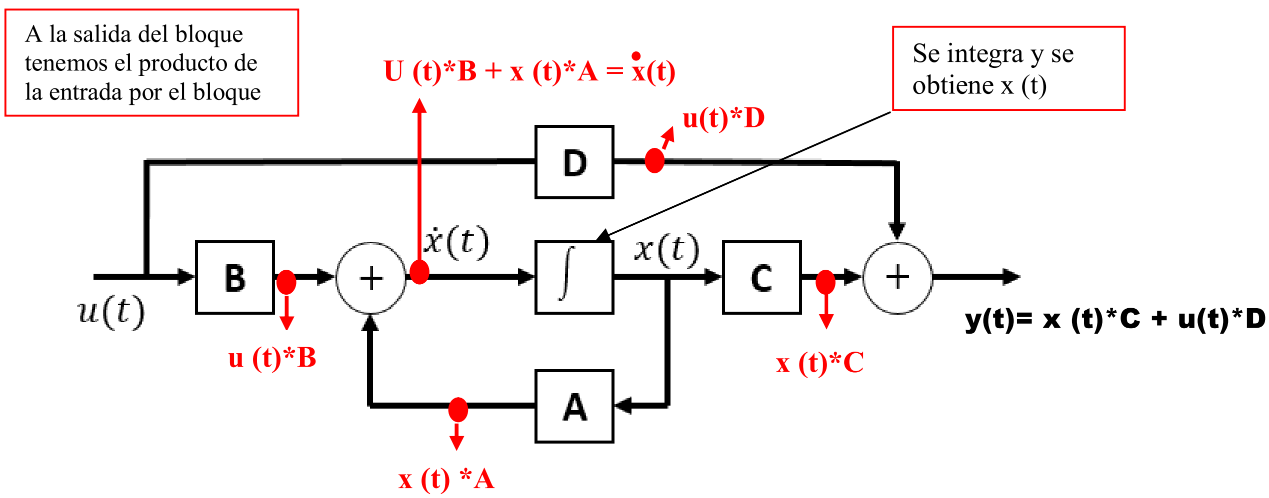
En un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado la salida Y(s) se realimenta al punto suma, en donde se compara con la entrada de referencia U(s).

La salida del bloque Y(s) se obtiene multiplicando la función de transferencia G(s) por la entrada al bloque E(s)
E(s) es llamada señal de error E(s) = U(s) – R(s) Y(s)

Representación en un diagrama de bloque del modelo de estado

Ecuación de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



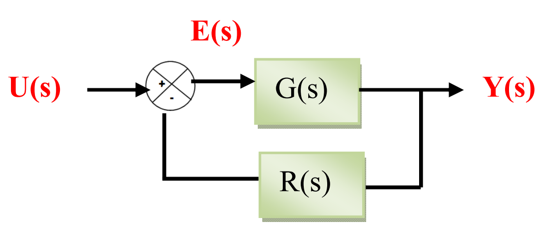
Importante: En el diagrama no se ha respetado el orden del producto matricial

¿COMO PODEMOS CONSTRUIR EL DIAGRAMA DE BLOQUE DE UN SISTEMA DE LAZO CERRADO?

Tenemos en cuenta:

- G(s) es la función de transferencia del lazo directo.
- R(s) es la función de transferencia del lazo de realimentación.

Para calcular la función de transferencia del sistema H(s) seguimos el lazo:



Hacemos el diagrama a partir de la función de transferencia

E(s) =U(s) – R(s)*Y(s)

Y(s) = E(s)*G(s)

Se reemplaza E(s): **Y(s) = [U(s) – R(s)*Y(s)] *G(s)**

Y(s) = U(s)*G(s) – R(s)*Y(s) *G(s)

Y(s) + R(s) *Y(s) *G(s) = U(s)*G(s)

Y(s) [1+R(s) * G(s)] = U(s) *G(s) despejando Y(s) = U(s) *G(s)/[1+R(s)*G(s)

Se divide m.a.m por U(s)

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + R(s) * G(s)}}$$

Hacer el diagrama de bloques del sistema cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6}$$

En variable de estado, los bloques que contengan a s, deben ser integradores significa que la s debe estar dividiendo.

Va a tener tantos bloques integradores como indique el orden de la ecuación diferencial

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\ \ R(s)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} = \frac{1}{(s^2 + 4s)\left(1 + \frac{6}{s^2 + 4s}\right)} = \frac{\frac{1}{s^2 + 4s}}{\left(1 + \left(\frac{1}{s^2 + 4s}\right)(6)\right)}$$

comparo $\quad G(s) = \frac{6}{s^2 + 4s} \quad$ y $R(s) = 6$

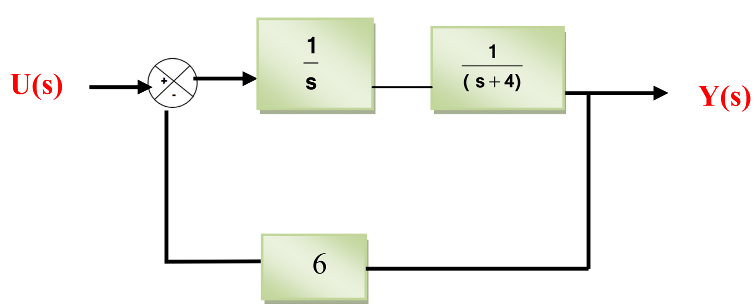


Diagrama de bloques para el sistema masa- resorte – amortiguador

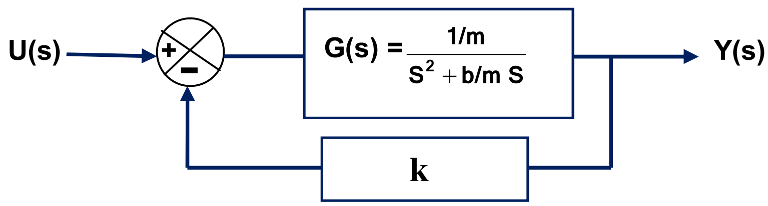
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} * b + x(t) * k = F(t) \quad \Rightarrow \quad m\,s^2X(s) + b\,s\,X(s) + k\,X(s) = F(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{m\,s^2 + b\,s + k} = \frac{1/m}{s^2 + b/m\,s + k/m}$$

Conviene llevarlo a la forma: $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + R(s) * G(s)}$

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + b\,s + k} = \frac{1}{(ms^2 + b\,s)\left(1 + \frac{k}{ms^2 + b\,s}\right)} = \frac{\frac{1}{(ms^2 + b\,s)}}{\left(1 + \frac{k}{ms^2 + b\,s}\right)} = \frac{\frac{1}{s(ms + b\,)}}{\left(1 + \frac{k}{ms^2 + b\,s}\right)}$$

$$H(s)=\frac{1}{ms^2+b\,s+k}=\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}=\frac{\frac{1}{m}}{\left(s^2+\frac{b}{m}s\right)\left(1+\frac{\frac{k}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s}\right)}=\frac{\frac{1}{m\left(s^2+\frac{b}{m}s\right)}}{\left(1+\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s}*k\right)}$$

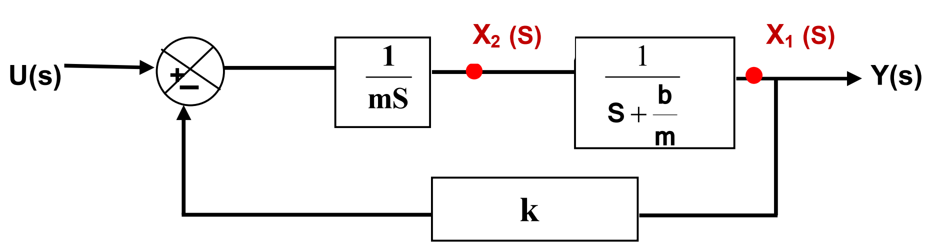


El factor s^2 indica que la función de entrada se ha derivado dos veces, para encontrar la primitiva se debe derivar dos veces. Para aplicar diagrama de bloques para variable de estado se debe tener en cuenta:

- Los bloques deben solo integradores o constantes.
- En cada bloque figura una sola operación sobre la función de entrada
- Se debe trabajar algebraicamente la función de transferencia para obtener G(s) y R(s)
- Las variables de estado se toman a la salida del bloque integrador
  (al bloque entra la función derivada y sale la función sin derivar)

$$G(s)=\frac{1/m}{S^2+b/m\,S}=\frac{1/m}{S(S+b/m)}=\left(\frac{1/m}{S}\right)\left(\frac{1}{S+\frac{b}{m}}\right)$$

Reemplazando: $$H(s)=\frac{\frac{1/m}{s}\cdot\frac{1}{(s+b/m)}}{\left(1+\frac{1/m}{s}\cdot\frac{1}{(s+b/m)}*k\right)}$$



➢ OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO A PARTIR DEL DIAGRAMA DE BLOQUES

$$\begin{cases} X_1(s) = X_2(s)^* \dfrac{1}{S + \dfrac{b}{m}} \\ X_2(s) = [U(s) - k^* X_1(s)]^* \dfrac{1}{mS} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^* X_1(s) + b/m^* X_1(s) = X_2(s) \\ S^* X_2(s) = U(s)/m - k/m^* X_1(s) \end{cases}$$

PARA OBTENER LAS ECUACIONES DE ESTADO SE ANTITRANSFORMA MIEMBRO A MIEMBRO

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{b}{m} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m} x_1(t) + \frac{u(t)}{m}$$

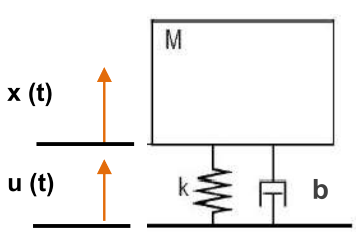
En forma matricial $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

Salida : $$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Modelo en el espacio de estado

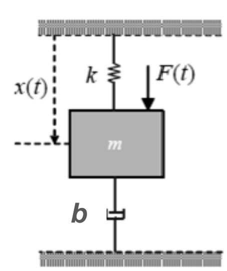
1 ***APLICACIONES DE DIAGRAMAS DE BLOQUES***

La siguiente figura representa un sistema simplificado de amortiguación de un automóvil o se puede utilizar para modelar un sismógrafo simple.



Si la comparamos con el sistema

Ahora F (t) = x (t) – u (t)
entrada



Ecuación de equilibrio

$$\sum F = m.a \Rightarrow m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -b\frac{d[x(t)-u(t)]}{dt} - k[x(t)-u(t)]$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -b\frac{dx(t)}{dt} + b\frac{du(t)}{dt} - b\frac{dx(t)}{dt} + ku(t)$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = b\frac{du(t)}{dt} + ku(t)$$

Funcion de transferencia $\Rightarrow$ encontrar el modelo de estado a partir de un diagrama de bloques

$$m\,s^2X(s) + bsX(s) + k\,X(s) = b\,s\,U(s) + k\,U(s)$$

$$X(s)\,[m\,s^2 + bs + k] = U(s)\,[b\,s + k]$$

$$X(s) = \frac{U(s)\,[b\,s + k]}{[m\,s^2 + bs + k]} \quad \text{divido por } U(s) \Rightarrow H(s) = \frac{b\,s + k}{m\,s^2 + bs + k}$$

Hallar el modelo en el espacio de estado