ANALISIS NUMERICO

TRABAJO PRACTICO Nº 4:

ECUACIONES NO LINEALES

Objetivos:

- Adquirir destreza en el manejo y programación de algoritmos relacionados con ecuaciones no lineales.
- Analizar a posteriori los resultados para determinar ventajas o desventajas de los métodos utilizados
- Desarrollar criterios de selección de los métodos utilizados en la resolución de ecuaciones no lineales

---

Ejercicio 1.-

Realice un análisis para cada una de las siguientes funciones; decida si hay o no al menos una raíz en cada intervalo dado:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ en el intervalo [0,5; 1,5]

b) $f(x) = x - 2^{-x}$ en el intervalo [0,1; 2,3]

c) $f(x) = \ln(x^2) - 0{,}7$ en el intervalo [0,5; 2]

d) $f(x) = e^{-x} - x$ en el intervalo [-1;0,5]

e) $f(x) = x^5 - 32$ en el intervalo [1,3;2,9]

Ejercicio 2.-

Para los métodos de bisección, Regula Falsi, de la Secante, de Newton-Rapshon y de Punto Fijo:

a) Escriba las condiciones de inicialización para aplicar el algoritmo correspondiente.
b) Demuestre la fórmula de recurrencia
c) ¿Cuál o cuáles son los criterios de aproximación?
d) Escriba para cada método las ventajas y desventajas.
e) ¿En qué caso se puede asegurar que cada método converge?

Ejercicio 3.-

Sea la función $F(x) = e^x - 2$. Realice tres iteraciones del método de bisección para aproximar la raíz α de la ecuación F(x) = 0, utilizando [0, 1] como intervalo inicial. Acote el error $|x_3 - \alpha|$. Si aplicamos bisección en [0, 1], ¿Cuántas iteraciones son suficientes realizar para garantizar que el error $|x_n - \alpha|$ es menor que 10^{-1} ?

Ejercicio 4.-

La función $G(x) = x.sen(x)$ aparece en el estudio de vibraciones forzadas no amortiguadas. Halle, mediante bisección, el valor de $x \in [0,2]$ en el que $G(x) = 1$ con un error menor que 10^{-1}.

Ejercicio 5.-

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$.

Demuestre que f verifica las dos hipótesis del teorema de convergencia en [-1 , 1] y obtenga tres términos de la sucesión generada por el algoritmo de punto fijo $x_{n+1} = f(x_n)$ con $x_0 = 0$.

Ejercicio 6.-

Se considera la función $F(x) = e^x - 3x$

a) Demuestre gráfica y analíticamente que la ecuación $F(x) = 0$ tiene exactamente dos raíces reales y encuentre dos intervalos, cada uno de ellos con extremos enteros consecutivos, que las contengan.

b) Se quiere aproximar la raíz de la ecuación $F(x) = 0$ que pertenece a [0 ,1] usando el método de iteración de punto fijo con diferentes funciones:

$$f_1(x) = \frac{e^x}{3} \quad , \quad f_2(x) = \frac{e^x - x}{2} \quad , \quad f_3(x) = e^x - 3x$$

Estudie cuáles de estas funciones son útiles para aproximar dicha raíz.
¿Con cuál de ellas son necesarias menos iteraciones para que la cota de error sea menor que una cantidad prefijada ε, partiendo del mismo valor inicial? Fundamente

---

Ejercicio 7.-

Se considera la función $F(x) = x^3 - x - 1$.

a) Determine, gráfica y analíticamente, el número de raíces reales de la ecuación y sepárelas en intervalos de longitud uno.

b) Determine una función *f* de iteración y un intervalo [a, a +1], con a $\in$ Z, que satisfagan las hipótesis del teorema de convergencia global de punto fijo para aproximar una raíz de la ecuación *F (x) = 0* ¿Cuántas iteraciones son suficientes realizar para garantizar que el error es menor que 10^3 si x_0 es cualquier punto del intervalo de convergencia?

Ejercicio 8.-

Dada la ecuación $x.\, e^x - 1 = 0$, se pide

a) Estudiar gráficamente sus raíces y acotarlas

b) Aplicar el método de la bisección y acotar el error después de 8 iteraciones.

c) Aplicar el método de Newton hasta tener tres cifras decimales exactas.

Ejercicio 9.-

Dada la ecuación $2\pi + \frac{senx}{2} = 3x$, $x \in R$, se pide:

a) Partiendo del intervalo $[0, 2\pi]$ partiendo de la aproximación x_0, obtenida por bisección. Indique el intervalo al cual pertenece x_3.
b) Partiendo de x_3 y la vecindad hallada en a) muestre que el método de Newton es convergente y calcule con una precisión de cinco decimales por Newton-Raphson.

Ejercicio 10.-

Use el método de iteración de primer orden para aproximar la raíz de $f(x) = x^2-5x-e^x$ comenzando con $x_0 = 0$ y hasta que el error de la raíz sea menor al 1%

Ejercicio 11.-

Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$ comenzando en el intervalo [0,2], hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$

Ejercicio 12.-

Use el método de Newton - Raphson, para aproximar la raíz de la función $f(x) = e^{-x}-1/x$ con $x_0 =1$, hasta que el error de la raíz sea menor al 1%

Ejercicio 13.-

Aproxima la solución de $e^x =1/x$ con 6 decimales exactos

Ejercicio 14.-

Probar que la ecuación $f(x) = x^2 + \ln x = 0$, solo tiene una raíz real y hallarla por el método de Newton, con seis cifras decimales exactas.

Ejercicio 15.-

Utilizando el método sugerido por Dandelin encuentre la raíz real en el intervalo [2,3], hasta lograr una aproximación en el tercer decimal de la función

$f(x) = x^3-2x^2-2$.