INTEGRALES IMPROPIAS:

Cuando trabajamos con integrales definidas, hemos requerido que se cumplan dos condiciones:

- El recinto de integración, o sea el intervalo [a,b] debe ser finito.
- El integrando, o sea la función debe estar acotada en dicho intervalo.

En la práctica, aparecen integrales que no cumplen una o ambas condiciones. Esto dá origen a un nuevo tipo de integrales que las llamaremos impropias, y las clasificamos para su estudio en tipo I y tipo II. Ejemplo de estas integrales son:

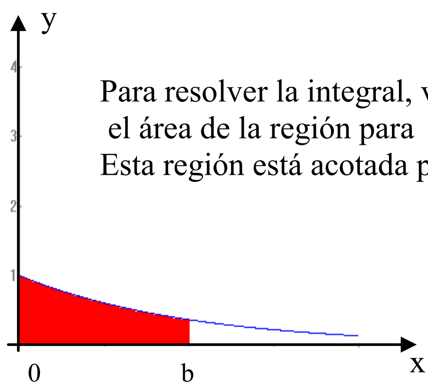
a) $\int_0^{\infty} e^{\frac{-x}{2}}\,dx$ es un ejemplo en que el intervalo no es finito (tipo I)

b) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ es un ejemplo de una función no definida para toda x en [a,b] (tipo II)

Vamos a considerar cada uno de estos casos:

I- Integrales impropias tipo I:

Para la integral $\int_0^{\infty} e^{\frac{-x}{2}}\,dx$ podríamos pensar en un área bajo la curva infinita.



Para resolver la integral, vamos a considerar el área de la región para $0 \le x \le b$

Esta región está acotada por derecha por $x = b$

$$A(b) = \int_a^{b} e^{\frac{-x}{2}}\,dx = -2\left[e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^b = -2e^{\frac{-b}{2}} + 2$$

Como el extremo superior de la integral es ∞ no b, para hallar el valor de la integral vamos a determinar el límite de A(b) cuando $b \to \infty$

$\lim\limits_{b\to\infty} A(b) = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-2e^{\frac{-b}{2}} + 2\right) = 2$ Este es el valor que le asignamos al área bajo la curva

Cuando un extremo de integración o ambos extremos son infinitos, el cálculo de la integral lo hacemos como:

1. **Si f(x) es continua en [a,∞), entonces**

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)dx$$

2. **Si f(x) es continua en (-∞,b], entonces:**

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)dx$$

3. **Si f(x) es continua en (-∞,∞), entonces:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

Donde c es cualquier número real, y se aplica para cada extremo cada uno de los casos anteriores. En cada caso, si el límite es finito, decimos que la integral impropia converge y el límite es el valor de esta integral. Si el límite no existe, decimos que la integral impropia diverge.

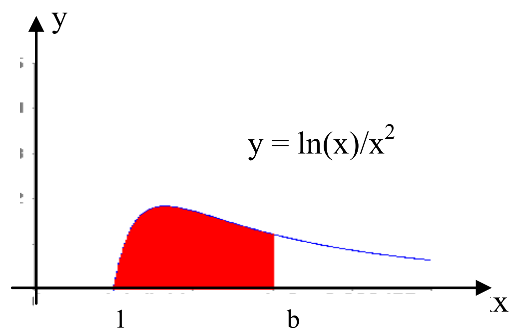
Ejemplos:

1) Evaluar $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\ln(x)}{x^2}dx$

Resolvemos esta integral aplicando el método de partes:

Llamamos $u = \ln(x)$ $\qquad du = \dfrac{1}{x}dx$

$dv = \dfrac{1}{x^2}dx$ $\qquad v = -\,x^{-1}$



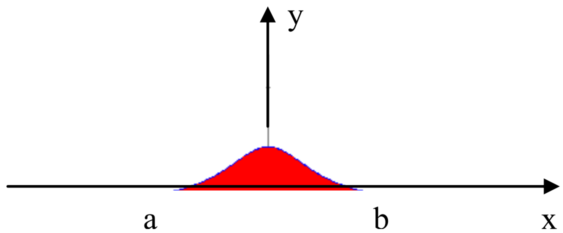
$$\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\lim_{b\to\infty}\left[\ln(x)\frac{1}{x}\right]_1^b + \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b} - 0 - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} + 1$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right] - 0 + 1$$

La integral $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}dx$ converge y su valor es 1

2) Evaluar $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$



De acuerdo con la definición del punto 3, podeemos escribir la integral como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

siendo c = 0

Resolvemos cada integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx$$ el integrando es una primitiva de f(x) = arctg(x)

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = 0 - (-\pi/2) = \pi/2$$

Dela misma forma resolvemos la segunda integral

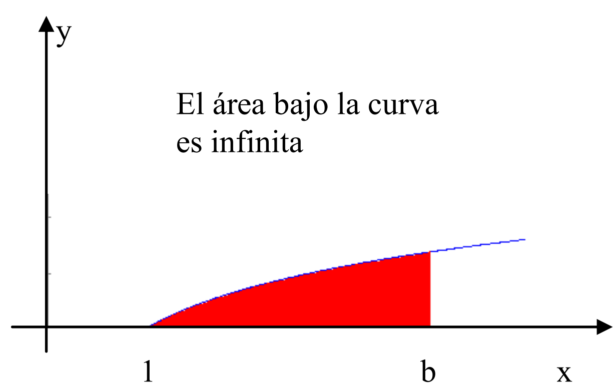
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \pi/2 - 0 = \pi/2$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$

3) Evaluar $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx$



$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left.\ln x\right|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b - 0 = \infty$$

Esta integral no converge.

II- <u>Integrales impropias tipo II:</u>

Cuando el integrando se vuelve infinito en un punto interior o en un extremo del intervalo, el cálculo de la integral lo hacemos como:

1. **Si f(x) es continua en (a,b] y discontinua en a, entonces:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

2. **Si f(x) es continua en [a,b) y discontinua en b, entonces:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

3. **Si f(x) es discontinua en c, donde a<c< b, y continua en [a,c) u (c,b], entonces:**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

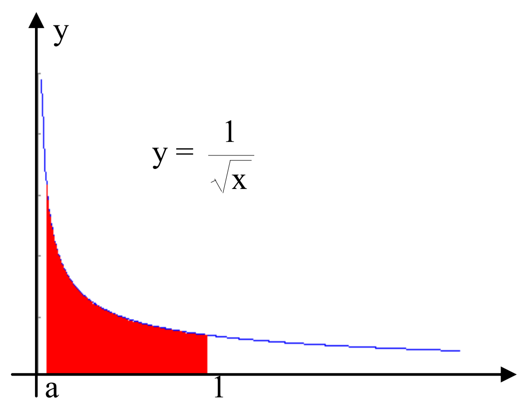
En cada caso, si el límite es finito, decimos que la integral impropia converge y el límite es el valor de esta integral. Si el límite no existe, decimos que la integral impropia diverge. En el punto 3 deben ser convergentes las 2 integrales del segundo miembro.

<u>Ejemplos</u>:

1) Evaluar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left| 2.\sqrt{x} \right|_a^1 = 2 - \lim_{a \to 0^+} 2\sqrt{a} = 2$$

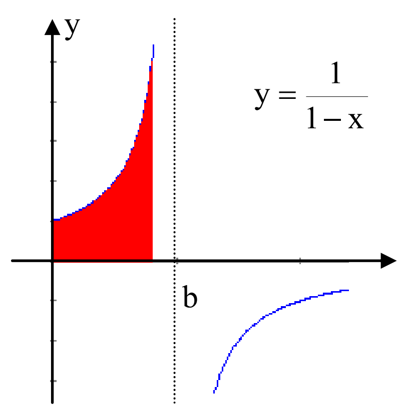


El área bajo la curva es finita e igual a 2

2) Evaluar $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x} dx$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \left| -\ln(1-x) \right|_0^b = \lim_{b \to 1^-} \left[-\ln(1-b) - 0 \right] = \infty$$



La integral diverge, el área bajo la curva es infinita.

3) Evaluar $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

Un cálculo incorrecto de esta integral es: $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \left[\ln|x-1|\right]_0^3 = \ln 2 - 0$

El área bajo la curva es un valor finito. El integrando no es continuo en un punto interior del intervalo, si observamos la función, esta presenta una asíntota vertical en x = 1. El cálculo correcto es: $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

Donde: $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c\to 1^-} \left[\ln|x-1|\right]_0^c = \lim_{c\to 1^-} \ln|c-1| - \ln|-1| = -\infty$

El cálculo de la otra integral no lo hacemos porque la convergencia de la integral requiere que en el segundo miembro ambas integrales sean finitas.

Vemos a partir de este ejemplo, la importancia de determinar el dominio de la función integrando, para no incurrir en el error de tratarla como una integral ordinaria.

4) Evaluar $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \int_1^4 (x-2)^{2/3}\,dx$

El integrando tiene una discontinuidad en x = 2 que pertenece al intervalo e integración. La resolvemos a partir de un límite.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \int_1^2 (x-2)^{2/3}\,dx + \int_2^4 (x-2)^{2/3}\,dx$$

$$\int_1^2 (x-2)^{2/3}\,dx = \lim_{c\to 2^-} \frac{3}{5}\left|(x-2)^{5/3}\right|_1^2$$

$$= \lim_{c\to 2^-} \frac{3}{5}(c-2)^{5/3} - \frac{3}{5}(-1)^{5/3} = \frac{3}{5}$$

La segunda integral nos queda:

$$\int_2^4 (x-2)^{2/3}\,dx = \lim_{c\to 2^+} \frac{3}{5}\left|(x-2)^{5/3}\right|_c^4$$

$$= \frac{3}{5}(2)^{5/3} - \lim_{c\to 2^-} \frac{3}{5}(c-2)^{5/3} = \frac{3}{5}(2)^{\frac{5}{3}}$$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{4}$$ La integral es convergente.
