UNIDAD 5: TRANFORMACIONES LINEALES, FUNCIONES LINEALES Y APLICACIONES LINEALES

Sean V y U espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, se define como aplicación lineal (AL) a la función f que satisface las siguientes 2 condiciones:

V ∧ U

F: V→U

1) $\forall\ (v, w) \in V, f(v+w) = f(v) + f(w)$ ***Condición de aditividad***
2) $\forall\ (k \in K) \wedge (v \in V),\ f(kv) = k\ f(v)$ ***Condición homotética***

Si k = 0 f (0v) = f (0) = 0 f (v) = 0 ⇒ f (0)=0

Las condiciones 1 y 2 las podemos unificar en:

$$\forall\ (a, b) \in K, \forall (v, w) \in V /\ f(av + bw) = a\ f(v) + b\ f(w)$$

Generalizando para n escalares y vectores:

$$f(a_1 v_1 +\ a_2 v_2 +\ \ldots +\ a_n v_n) = a_1\ f(v_1) + a_2\ f(v_2) + \cdots + a_n\ f(v_n);$$

$$\forall a_i \in K\ \wedge\ \forall\ v_i \in V$$

Ejemplos de aplicaciones:

A. Aplicación proyección

F: $IR^3 \rightarrow IR^3$

f (x, y, z) = (x, y, 0)

Consideremos dos vectores:

Sean v = (a, b, c) y v’= (a’, b’, c’)

f (v + v’) = f (a, b, c) + f (a’, b’, c’) = f (a+a’, b+b’, c+c’) = (a, b, 0) + (a’, b’, 0) = f(v) + f(v’)

f (kv) = f (k (a, b, c)) = f (ka, kb, kc) = (ka, kb, 0) = k (a, b, 0) = k f(v)

B. Traslación

F: $IR^2 \rightarrow IR^2$

f (x, y) = (x+1, y+2)

f (0, 0) = (1, 2) Por lo tanto, **no es aplicación lineal**

C. Sea A una matriz *m*x*n* sobre un cuerpo K:

A: $K^m \rightarrow K^n$

A es una aplicación lineal debido a que las condiciones de aditividad y producto para un escalar se cumplen en matrices. Es decir:

A (v+w) = A(v) + A(w)

A (kv) = k A (v)

$\forall$(v,w) $\in$ V $\wedge$ $\forall$ k $\in$ K

Si V es el espacio vectorial de todos los polinomios, la derivada es una aplicación lineal.

Dado V,

D: V→V

$$\frac{d(u+v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d(kv)}{dt} = k\,\frac{dv}{dt}$$

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

F: V→U siendo F una aplicación lineal de V en U

Im F es el conjunto de puntos que son imagen de V. Es decir:

$$Im\ F = \{u \in U \,/\, f(v) = u \quad para\ algun\ v \in V\}$$

El núcleo de la aplicación lineal, simbolizado como K_{er} F, es el conjunto de puntos del espacio V en el vector nulo de U.

$$Ker\ F = \{v \in V \,/\, f(v) = 0\}$$

TEOREMA DEL NÚCLEO Y LA IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea F una aplicación lineal de V en U, la imagen de F es un subespacio de U y el núcleo es un subespacio de V.

a) F (0) = 0   0 $\in$ Im F

Supongamos que u y u' pertenecen a la imagen de F:

$$u \wedge u' \in Im\ F\,;\, v \wedge v' \in V \,/\, f(v) = u \quad \wedge \quad f(v') = u'$$

$$f(av + bv') = a\,f(v) + b\,f(v') = au + bu' \quad \in \quad Im\ F$$

De este modo la imagen de F es un subespacio de U.

b) f(0) = 0

0 $\in$ K_{er} F

(v $\wedge$ w) $\in$ V $\wedge$ (a, b) $\in$ K

Si v y w pertenecen al núcleo:

f(v) = 0 $\wedge$ f(w) = 0

f (av + bw) = a f(v) + b f(w) = a.0 + b.0 = 0

<u>Ejemplo 1:</u> AL Proyección

$$Im\ F = \{(a,b,0) /\, a, b \in IR\}$$

$$K_{er}\ F = \{(0,0,c) / c \in IR\}$$

Ejemplo 2: AL Derivada al cubo

D^3: V → V

$$Im\ D = V \qquad (la\ imagen\ siempre\ es\ un\ polinomio)$$

$$K_{er}\ D = \{polinomios\ de\ grado\ \leq 2\}$$

Supongamos los vectores v_1, v_2, …, v_n que generan V y además F: V→U, que es AL, probaremos que la imagen de esos vectores generan U.

$F(v_1)$, $F(v_2)$, …, $F(v_n)$

u ∈ Im F

f(v) = u

$u = f(a_1v_1+a_2v_2+…+a_nv_n) = a_1\ f(v_1) + a_2\ f(v_2) + … + a_n\ f(v_n)$

En consecuencia, u_1, u_2, …, u_n generan Im F.

TEOREMA DEL SISTEMA DE GENERADORES

La imagen de un sistema de generadores, es decir, si v_1, v_2, …, v_n son un conjunto de vectores que generan V, la imagen de esos vectores generan la imagen de F: $f(v_1)$,f (v_2), …, $f(v_n)$

Demostración

Si v_1, v_2,..., v_n generan V en la aplicación lineal F, probaremos que la imagen o las imágenes generan la imagen de F. Para ello, suponemos que U pertenece a la imagen de F.

$$u\ \in Im\ F; v \in V\ /\ f(v) = u$$

$$f(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = u$$

$$a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + \cdots + a_nf(v_n) = u$$

Por lo tanto,

$f(v_1)$, $f(v_2)$, …, $f(v_n)$ generan la imagen de F.

RANGO Y NULIDAD DE UNA APLICACIÓN LINEAL (AL)

Hasta ahora, no hemos tenido en cuenta en el estudio de las AL la dimensión de los espacios. En los casos en que V es de dimensión finita vale la siguiente expresión fundamental:

dim V = dim K_{er} F + dim Im F

Esto se verifica fácilmente si analizamos la AL proyección ya estudiada. En ella se observó que la dim Im F = 2 y dim K_{er} F = 1

dim Im F + dim K_{er} F = dim V **(1)**

Se define como rango de F a la dimensión de la imagen: Rg F = dim Im F

Nulidad F = dim Ker F

por lo tanto la expresión **(1)** se puede expresar como:

dim V = Rg F + Nulidad F

Veamos el siguiente ejemplo:

f: $IR^4 \rightarrow IR^3$

f(x, y, z, t) = (x-y+z+t , x+2z-t , x+y+3z-3t)

a) Determinar una base y la dimensión de la imagen de F.

f(1,0,0,0) = (1,1,1)

f(0,1,0,0)=(-1,0,1)

f(0,0,1,0) = (1,2,3)

f(0,0,0,1)=(1,-1,3)

Armo una matriz que contenga como filas a esos vectores y la reduzco a la forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2 porque tiene 2 filas no nulas. Entonces, dim Im F = 2.

Una base de la imagen sería (1, 1,1) y (0, 1,2)

b) Determinar una base y la dimensión del núcleo

$$f(v) = 0 \quad ; \quad f(x,y,z,t) = (0,0,0) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t)$$

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x \quad + 2z - t = 0 \\ x + y + 3z - 3t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ \quad y + z - 2t = 0 \\ 2y + 2z - 4t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ \quad y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

El Sistema de Ecuaciones tiene dos variables libres, por lo tanto dim K_{er} F =2.

Si hago z= -1 y t=0 entonces la solución es (2,1,-1,0)

Si z=0 y t=1 entonces la solución es (1,2,0,1)

(2,1,-1,0) ∧ (1,2,0,1)

AL SINGULARES Y NO SINGULARES, ISOMORFISMOS

Se dice que una AL F: V →U es singular si la imagen de algún vector v bajo la AL F es cero y v es no nulo. Es decir,

$$v \in V / f(v) = 0 \ \wedge v \neq 0$$

Mientras que F es no singular si únicamente el vector 0 se aplica en cero, es decir:

$$0 \in V / f(0) = 0$$

$$K_{er}F = \{0\} \qquad \dim K_{er}\ F = 0$$

- **TEOREMA DE LA BASE**

Supongamos que una AL F: V →U es no singular, la imagen de cualquier conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

Demostración

Supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes de V. Lo que afirmamos es que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ también son linealmente independientes. Si esto fuera cierto:

$a_1 \,.\, f(v_1) + a_2 \,.\, f(v_2) + \ldots + a_n \,.\, f(v_n) = 0 = f(a_1 \,.\, v_1 + a_2 .\, v_2 + \ldots + a_n \,.\, v_n)$

porque el K_{er} F = {0}

$a_1.v_1+a_2.v_2+\ldots+a_n.v_n=0$

Para que esto se cumpla $a_1=0, a_2=0, \ldots, a_n=0$

$f(v_i)$ son vectores linealmente independientes

- **ISOMORFISMOS**

Supongamos que F es una AL de V en U y es inyectiva. Si es inyectiva, entonces 0 ∈ V, 0 ∈ U.

Demostraremos que el recíproco también es cierto. Partiendo de que la AL es no singular, las imágenes de dos vectores son iguales:

$$F(v) = F(w) \;\; \Rightarrow \;\; F(v) - F(w) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; F(v-w) = 0 \;\; \Longrightarrow v - w = 0 \;\; \Longrightarrow v = w$$

Por lo tanto, si es no singular es inyectiva.

Decimos que una AL F: V→U es un isomorfismo si es lineal y biyectiva (inyectiva y subyectiva al mismo tiempo). En ese caso, los espacios V y U se llaman isomorfos. Si existe algún isomorfismo, para F: V→U es aplicable el siguiente teorema:

Teorema del isomorfismo

Supongamos que V tiene dimensión finita y que F: V →U es lineal, entonces F es un isomorfismo si y sólo si es no singular.

Demostración

Si es no singular:

0 ∈ V se aplica en 0 ∈ U

K_{er} F = {0}   dim K_{er} F = 0

Teniendo en cuenta la dimensión para dominios finitos:

dim V = dim K_{er} F + dim Im F

dim V = dim Im F = dim U

U = Im F

La aplicación es subyectiva.

OPERACIONES CON AL

Podemos combinar las AL y obtener nuevas AL.

Supongamos F: V →U y G: V →U

La SUMA de esas AL se define así:

(F+G) v = F(v) + G(v)

y vamos a demostrar que esta nueva aplicación va a ser lineal si y sólo si F y G son lineales. Asimismo, para cualquier k ∈ K:

$$\forall\,(k \in K) \wedge \forall(v \in V); \quad (kF)(v) = k\,F(v)$$

$$k\,F(av + bw) = k\left(aF(v) + bF(w)\right) = ak\,F(v) + bk\,F(w) = a(kF)(v) + b(kF)(w)$$

$$\forall(a,b) \in K \;\wedge\; \forall(v,w) \in V$$

$$(F+G)(av+bw) = F(av+bw) + G(av+bw) = aF(v) + bF(w) + aG(v) + bG(w)$$

$$= a(F+G)v + b(F+G)w$$

COMPOSICIÓN DE AL

Sean V, U y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y F:V→U, G: U→W

Se define entonces la función composición (G∘F)(v) = G(F(v)) de V en W, y vamos a comprobar que esa aplicación es lineal siempre que F y G sean lineales.

$$\forall(a,b) \in K \;\wedge\; \forall(v,w) \in V$$

$$(G \circ F)(av+bw) = G \circ \left(F(av+bw)\right) = G \circ \left(aF(v) + bF(w)\right)$$
$$= a(G \circ F)(v) + b(G \circ F)(w)$$

Y esto da lugar al siguiente teorema:

Si V, U y W son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, F y F’ son AL de V en U.

$$F: V \to U \;\;\wedge\; F': V \to U$$

$$G: U \to W \;\wedge G': U \to W$$

Entonces, son válidas las siguientes tres expresiones:

1) $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$
2) $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$
3) $k(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF)$

ÁLGEBRA DE OPERADORES LINEALES: A(v)

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sean las AL F: $V \to V$. Estas aplicaciones se llaman operadores lineales o transformaciones lineales en V, y llamamos A(v) para designar el espacio de estas AL. Además, si F y G son AL en V, la composición G∘F existe y es también una AL en V, es decir: GF ∈ A(v), y lo podemos definir como un “producto” en ese espacio, por lo tanto, el álgebra A(v) es un espacio vectorial sobre un cuerpo K en el que se ha definido la operación producto, que además satisface para todo F, G, H que pertenecen a V y para todo k perteneciente a K, las siguientes expresiones:

1) F(G+H)= FG + FH
2) (G+H) F = GF + HF
3) k (GF) = (k G) F = G(k F)

Además, si rige la propiedad asociativa que verifica (FG) H = F (GH) se dice que A(v) es un álgebra de operadores lineales asociativa.

POLINOMIOS DE OPERADORES LINEALES

Si consideramos la AL identidad I: V→V ∈ A(v). Además si consideramos una aplicación T ∈A(v), podemos efectuar el producto T . I = I . T = T.

También podemos efectuar el producto de T:

T.T=T^2

T.T.T=T^3

En general:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$P(x) = a_0I + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n$$

$$a_0I = a_0$$

$$P(x) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n$$

Veamos un ejemplo:

Supongamos una aplicación lineal T: IR^3→IR^3 y que está definida así: T(x,y,z) = (0,x,y).

T+I = T(x,y,z) + I (x,y,z)

v=(a,b,c)

T+I = T(a,b,c) + I(a,b,c)

T+I = (0,a,b) + (a,b,c) = (a, a+b, b+c)

Podemos también calcular T^3

T^3(a,b,c) = T^2(0,a,b) = T(0,0,a) = (0,0,0)

OPERADORES INVERTIBLES

Decimos que un operador T:V→V es invertible si existe T^{-1} ϵ V / T .T^{-1} = T^{-1}.T = I

Para que un operador sea invertible es necesario y suficiente que sea inyectivo y subyectivo (que sea biyectivo), de este modo en particular, si T es invertible solamente 0 debe aplicarse en sí mismo: T debe ser NO SINGULAR. Probaremos ahora que el recíproco no siempre es cierto con el siguiente ejemplo:

Si V es el espacio vectorial de todos los polinomios y el operador T: V→V está definido así:

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n)$$
$$a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \cdots + a_n t^{n+1}$$

Si bien es no singular, no es subyectivo, y por lo tanto no es invertible. La situación cambia radicalmente cuando la dimensión de V es finita, dando origen al siguiente teorema:

Teorema de los operadores invertibles

Supongamos que T es un operador lineal T: V→V y además V es de dimensión finita. Son equivalentes las siguientes cuatro expresiones:

1) T es no singular K_{er} T = {0}
2) T es inyectiva
3) T es suprayectiva
4) T es inyectiva y suprayectiva

Según ya vimos, las expresiones 1 y 2 son equivalentes, por lo tanto para demostrar el teorema sólo necesitamos probar que 1 y 3 son equivalentes y 4 se desprenderá de esta igualdad. Para ello tenemos en cuenta la expresión de la dimensión en AL:

dim V = dim K_{er} F + dim Im F

dim V = dim K_{er} T + dim Im T

dim K_{er} T = 0

dim V = dim Im F ;   V = Im F es decir que es suprayectiva.

Recíprocamente, si T es suprayectivo, V = Im T, entonces dim V = dim Im T

dim V = dim Im T + dim K_{er} T

dim K_{er} T = 0

K_{er} T = {0}

Ejemplo:

Supongamos el operador T(x,y) = (y, 2x-y) = (0,0)

Calcular T^{-1}

y=0

2x-y = 0

Entonces T es NO SINGULAR

Supongamos que (s,t) sean las imágenes de x e y bajo T, es decir: T(x,y)=(s,t). Por consiguiente, x e y debieran ser:

T^{-1}(s,t) = (x,y)

T(x,y) = (y, 2x-y)=(s,t)

y=s

2x-y=t

x= ½ s + ½ t

Por lo tanto:

T^{-1}(s,t) = (½ s+ ½ t, s)

CONSIDERACIONES A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Consideremos un SEL sobre un cuerpo K que tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Podemos representar al SEL así: Ax = b

Consideremos que en este sistema A es una matriz n cuadrada. Supongamos que esta AL es no singular, entonces Ax = 0 se verifica sólo para el vector nulo, por lo tanto la Aplicación es lineal y es biyectiva.

Por lo tanto, el SEL tiene una única solución para cada valor de b.

Si A es una aplicación singular (rango < número de incógnitas) el SEL tiene infinitas soluciones o no tiene solución. Dicho de otra forma:

Si Ax = b, el sistema homogéneo asociado, si tiene solución única (solución trivial), Ax va a tener solución para cualquier valor de b, mientras que si el sistema homogéneo asociado tiene solución no nula podrá ocurrir: que haya valores de b_i para los que el sistema no tenga solución, o que exista una solución pero que esta no sea única.

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sea F: V→W ambos espacios sobre un mismo cuerpo K.

Llamamos β a un conjunto de vectores que son base del primer espacio vectorial y β' es una base del segundo espacio vectorial. Podemos expresar la imagen del vector u_1:

$$\beta = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \rightarrow \quad base\ V$$

$$\beta' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n) \quad \rightarrow \quad base\ W$$

$$f(u_1) = a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + \cdots + a_{m1}u'_n = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = a_{12}u'_1 + a_{22}u'_2 + \cdots + a_{m2}u'_n = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$f(u_n) = a_{1n}u'_1 + a_{2n}u'_2 + \cdots + a_{mn}u'_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = W$$

La matriz A contiene las imágenes de los vectores básicos de β expresado en β’ y se llama matriz asociada a la transformación lineal en dichas bases. Veamos un ejemplo:

f: $IR^3 \to IR^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En definitiva, lleva un vector del primer espacio al segundo espacio.

La matriz asociada de una transformación lineal tiene m filas y n columnas. El número de filas lo determina la dimensión del codominio, y el número de columnas la dimensión del dominio.