INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En algunos problemas de ingeniería se hace necesario calcular el valor de la integral de una función que se conoce de manera discreta, es decir se conoce de ella un conjunto de puntos (x_i, y_i), con i = 0, 1, … , n.
Más aun, en ocasiones para una función dada en forma analítica (es decir cuando se conoce la ecuación que genera el infinito conjunto de puntos) suele ser necesario recurrir a los métodos numéricos por la utilidad, en términos computacionales, que los mismos poseen.
En este curso se abordará el problema para una sola variable, sin embargo, siempre es posible la extensión de los métodos a dos o tres dimensiones.

El problema que debemos resolver es calcular: $I = \int_a^b f(x)dx$

Disponemos para esto de un conjunto finito de puntos: (x_i, y_i) i = 0, 1, …, n y suponemos que la función f, dada en forma discreta o en forma analítica y discretizada, pertenece al espacio vectorial $C_{[a, b]}$ (IR) por lo cual es integrable.

Bajo estas condiciones, siempre sería posible hallar el polinomio de interpolación para los n+1 puntos tal que: $f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x)$ donde P_n es la función de interpolación y ε el error de interpolación, entonces:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}(\theta).(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$$

Por lo tanto: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (P_n(x) + \varepsilon(x))dx$

$$I = \underbrace{\int_a^b P_n(x)dx}_{I_n} + \underbrace{\int_a^d \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}(\theta).(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)dx}_{E_n}$$

$$I = I_n + E_n$$

El primer valor I_n es la integral aproximada y recibe el nombre de cuadratura numérica, el segundo valor E_n es el error de truncamiento.

Los métodos que veremos para calcular la integral aproximada se basan en una estructura o método general tal que: $I_n = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ donde los A_i son coeficientes a determinar.

Para poder hallar los coeficientes A_i vamos a plantear un sistema de ecuaciones lineales. Para ello vamos a definir un subespacio S de $C_{[a, b]}$ (IR) de dimensión finita, del cual se conoce una base, por ejemplo una base polinomial:

$$\mathbf{B = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ tal que } \varphi_i (x) = x^i}$$

El número de elementos de la base (n+1) debe coincidir con el número de puntos conocidos para que el sistema sea cuadrado.
Podríamos haber tomado como base los polinomios de Lagrange L_i (x) o los polinomios de Newton n(x), en esta oportunidad escogemos una base polinomial sencilla para simplificar las deducciones de las fórmulas.

El sistema de ecuaciones a resolver es: $\int_a^b \varphi_j(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i.\varphi_j(x_i)$ ***(j = 0, 1, …, n)***

Por ejemplo:

Obtenga la fórmula general de integración que le permita calcular I = $\int_0^4 f(x)dx$ considerando 3 evaluaciones de f(xi) en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
Una base B= (φ_0, φ_1, φ_2) en donde $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$ para todo x de [0,4]

Armamos el S.E.L.

$$\int_0^4 \varphi_0(x)dx = x\Big|_0^4 = 4 = \sum_{i=0}^{2} A_i.\varphi_0(x_i) = A_0.1 + A_1.1 + A_2.1$$

$$\int_0^4 \varphi_1(x)dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^4 = 8 = \sum_{i=0}^{2} A_i.\varphi_1(x_i) = A_0.1 + A_1.2 + A_2.3$$

$$\int_0^4 \varphi_2(x)dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^4 = \frac{64}{3} = \sum_{i=0}^{2} A_i.\varphi_2(x_i) = A_0.1 + A_1.4 + A_2.9$$

El sistema en forma matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ \frac{64}{3} \end{pmatrix}$ cuya solución es:

$$A_0 = \frac{8}{3} \quad A_1 = -\frac{4}{3} \quad A_2 = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto resulta: $\int_0^4 f(x)dx = \frac{4}{3}(2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)) + E(x)$

Podemos ver como resolver el sistema de ecuaciones permite obtener los coeficientes que determinan la integral aproximada para la función dada.

Métodos de Newton Cotes:

Las fórmulas de Newton-Cotes son fórmulas del tipo

$$\int_{x_0-k}^{x_n+k} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + E$$

Si k = 1 son fórmulas de tipo abierto, k = 0 son fórmulas de tipo cerrado. Estas últimas son las que vamos a trabajar en este curso.

FORMULAS DE TIPO CERRADO:

- Si **n =1** entonces sólo se tienen las evaluaciones en los puntos x_0 y x_1 tales que $x_0 < x_1$, $x_0 - x_1 = h$, B= (φ_0, φ_1) con $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, se forma el sistema:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_j(x)dx = \sum_{i=0}^{1} A_i \varphi_j(x_i) \qquad (j = 0, 1)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_0(x)dx = x\Big|_{x_0}^{x_1} = x_1 - x_0 = h = \sum_{i=0}^{1} A_i \varphi_0(x_i) = A_0.1 + A_1.1$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x)dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{1}{2}(x_1{}^2 - x_0{}^2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = \frac{h}{2}(x_1 + x_0) = \sum_{i=0}^{1} A_i \varphi_1(x_i) = A_0.x_0 + A_1.x_1$$

$$\begin{cases} A_1 + A_0 = h \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = \dfrac{h}{2}(x_1 + x_0) \end{cases}$$

La solución de este sistema es $A_0 = A_1 = \dfrac{h}{2}$, valores que reemplazando dan la expresión:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + E$$

En donde el valor del error está dado por

$$E = \frac{f^2(\alpha)}{2!}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)dx = \frac{-1}{12}h^3 f^2(\alpha) \qquad (\alpha \in [x_0, x_1])$$

La FORMULA DEL TRAPECIO que acabamos de obtener es entonces:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12} f^2(\alpha) \qquad (\alpha \in [x_0, x_1])}$$

Ahora bien si se quiere calcular la integral numérica de x_0 a x_n hay que aplicar a cada x_i , x_{i+1} la regla del Trapecio y aplicar propiedades de integración, lo que genera lo que se denomina Regla del Trapecio generalizada o Regla del Trapecio compuesta:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx =$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f^2(\alpha_1) + ... + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] - \frac{h^3}{12} f^2(\alpha_n) \qquad (\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i])$$

Por lo cual resulta:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)) - \frac{nh^3}{12} f^2(\theta) \qquad (\theta \in [x_0, x_n])}$$

- Si **n = 2** disponemos de la evaluación en los puntos x_0, x_1, x_2 de manera similar y considerando la base polinomial: B = { φ_0, φ_1, φ_2)) con $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$ se arma el sistema:

$$\int_{x_0}^{x_2} \varphi_j(x)dx = \sum_{i=0}^{2} A_i \varphi_j(x_i) \qquad \textbf{\textit{(j = 0,....,n)}}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_0 + A_2 = 2h \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 = \dfrac{h}{2}(x_2 + x_0) \\ A_0 x^2{}_0 + A_1 x^2{}_1 + A_2 x^2{}_2 = \dfrac{2h}{3}(x^2{}_2 + x_0 x_2 + x_0^2) \end{cases}$$

Cuya solución es: $A_0 = A_2 = \dfrac{h}{3}$ *y* $A_1 = \dfrac{4}{3}h$ que si los reemplazamos en la expresión:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + E$$

Que es el modo de cálculo de la integral aproximada por el método de Simpson de orden 3.
Resta ahora la determinación del error de truncamiento E.

Para lo cual se parte de considerar que $E = \dfrac{f^m}{m!}(\theta).c_m$ siendo c_m el error que se comete al integrar un polinomio de grado m.
La regla de Simpson es una regla de orden 3 (integra en forma exacta polinomios de grado hasta 3) por lo tanto para la determinación del error se parte de tomar un polinomio de grado 4 y de trabajando la expresión respectiva se deduce la expresión del error como:

$$E = -\frac{h^5}{90}.f^4(\xi) \qquad \xi \in [x_0, x_2]$$

Entonces la FORMULA DE SIMPON en tres puntos es:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^4(\xi) \qquad \xi \in [x_0, x_2]}$$

Esta regla tiene un error del orden de h^5 : $O(h^5)$ lo que evidencia que para valores de h convenientes ofrece una muy buena aproximación al valor exacto.

La Regla de Simpson compuesta o generalizada, es decir aquella que sirve para poder aplicarla en el intervalo $[x_0, x_n]$ es:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{(n-2)/2} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{(n-2)/2} f(x_{2i}) + f(x_n)\right) - \frac{nh^5}{2.90} f^4(\alpha) \qquad \alpha \in [x_0, x_n]}$$