PARTE I: ***Programación matemática***

Capítulo 1

Programación matemática

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En un *problema de optimización*, se busca maximizar o minimizar una cantidad específica llamada *objetivo*, la cual depende de un número finito de variables de entrada. Estas variables pueden ser independientes entre sí o estar relacionadas a través de una o más *restricciones*.

Ejemplo 1.1 El problema:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:} \quad & z = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

es un problema de optimización para el objetivo z. Las variables de entrada son x_1 y x_2, que deben cumplir dos restricciones: x_1 debe ser 3 unidades mayor que x_2; además x_2 debe ser mayor o igual que 2. Se desea obtener valores para las variables de entrada que minimicen la suma de sus cuadrados, sujetos a las limitaciones impuestas por las restricciones.

Un programa matemático (1.1) es *lineal* si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y cada $g_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ se dan como funciones matemáticas y como relaciones funcionales (como sucede en el Ej. 1.1). Los programas matemáticos tratados en este libro tienen la forma:

$$\begin{aligned} \text{optimícese:} \quad & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{con las condiciones:} \quad & \left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{matrix}\right. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Cada una de las m relaciones restringidas en (1.1) emplea uno de los tres signos $\leq$, $=$, $\geq$. Los programas matemáticos *sin restricciones* están cubiertos por la formalización (1.1), si se selecciona cada función g_i como cero y cada constante b_i como cero.

PROGRAMACIÓN LINEAL

Un programa matemático (1.1) es *lineal* si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y cada $g_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ son lineales en cada uno de sus argumentos; esto es, si:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (1.2)$$

y

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (1.3)$$

donde c_j y a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes conocidas.

Cualquier otro programa matemático es *no lineal*. Entonces, el ejemplo 1.1 describe un programa no lineal, en vista de la forma de z.

PROGRAMACIÓN ENTERA

Un *programa entero* es un programa lineal, con la restricción adicional de que las variables de entrada son números enteros. No es necesario que los coeficientes en (1.2) y (1.3), y las constantes en (1.1) también sean números enteros, pero a menudo éste será el caso.

PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA

Un *programa cuadrático* es un programa matemático en el cual cada restricción es lineal —es decir, cada función de restricción tiene la forma (1.3)—, pero el objetivo es de la forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \tag{1.4}$$

donde c_{ij} y d_i son constantes conocidas.

El programa dado en el ejemplo 1.1 es cuadrático. Ambas restricciones son lineales y el objetivo tiene la forma (1.4), con $n = 2$ (dos variables), $c_{11} = 1$; $c_{12} = c_{21} = 0$, $c_{22} = 1$, y $d_1 = d_2 = 0$.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los problemas de optimización se plantean muy a menudo verbalmente. El procedimiento para la solución consiste en realizar un modelo del problema con un programa matemático y después resolver el programa mediante las técnicas descritas en los capítulos 2 al 15. Se recomienda el siguiente enfoque para transformar un problema verbal en un programa matemático:

PASO 1 Determínese la cantidad que se optimizará y exprésese como una función matemática. Hacer esto sirve para definir las variables de entrada.

PASO 2 Identifíquense todos los requerimientos, restricciones y limitaciones estipulados, y exprésense matemáticamente. Estos requerimientos constituyen las restricciones.

PASO 3 Exprésense todas aquellas condiciones ocultas. Tales condiciones no están estipuladas explícitamente en el problema, pero se hacen evidentes a partir de la situación física para la que se está planteando el modelo. Generalmente, involucran requerimientos de no negatividad o de ser enteras, para las variables de entrada.

CONVENCIÓN PARA LAS SOLUCIONES

En cualquier programa matemático, se busca *una* solución. Si existe un cierto número de soluciones igualmente óptimas, entonces cualquiera de ellas se puede emplear. *No hay preferencia entre soluciones igualmente óptimas, si no existe una preferencia estipulada en las restricciones.*

Problemas resueltos

1.1 Un expendio de carnes de la ciudad acostumbra preparar la carne para albondigón con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 80% de carne y 20% de grasa, y le cuesta a la tienda 80 ¢ por libra; la carne de cerdo contiene 68% de carne y 32% de grasa, y cuesta 60 ¢ por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda en cada libra de albondigón, si se desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de 25%?

El objetivo es minimizar el costo (en centavos), z, de una libra de albondigón, donde:

$z \equiv$ 80 veces el número de libras de carne molida de res, más 60 veces el número de libras de carne molida de cerdo empleadas.

Si se define:

$x_1 \equiv$ número de libras de carne molida de res empleadas en cada libra de albondigón

$x_2 \equiv$ número de libras de carne molida de cerdo empleadas en cada libra de albondigón,

el objetivo se expresa como:

$$\text{minimícese:} \quad z = 80x_1 + 60x_2 \tag{1}$$

Cada libra de albondigón tendrá $0.20\,x_1$ libras de grasa provenientes de la carne de res y $0.32\,x_2$ libras de grasa de la carne de cerdo. El contenido total de grasa de una libra de albondigón no debe ser mayor de 0.25 libras. Entonces:

$$0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \tag{2}$$

El número de libras de carne de res y de cerdo empleadas en cada libra de albondigón debe sumar 1; entonces:

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{3}$$

Finalmente, la tienda no puede usar cantidades negativas de ninguna de las carnes, así que hay dos restricciones de no negatividad: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Combinando estas condiciones con (1), (2) y (3), se tiene:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:} \quad & z = 80x_1 + 60x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ & x_1 + \quad x_2 = \ 1 \\ \text{con:} \quad & \text{con todas las variables no negativas} \end{aligned} \tag{4}$$

El sistema (4) es un programa lineal. Como sólo hay dos variables, se puede dar solución gráfica.

1.2 Resuélvase gráficamente el programa lineal (4) del problema 1.1.

Véase la figura 1-1. La *región factible* —conjunto de puntos (x_1, x_2) que satisface todas las restricciones, incluyendo las condiciones de no negatividad— es la sección de la figura delimitada por líneas gruesas. Para determinar z^*, valor mínimo de z, se seleccionan arbitrariamente valores de z y se grafican los objetivos asociados. Seleccionando $z = 70$ y después $z = 75$, se obtienen los objetivos:

$$70 = 80x_1 + 60x_2 \qquad \text{y} \qquad 75 = 80x_1 + 60x_2$$

respectivamente. Sus gráficas son las líneas punteadas de la figura 1-1. Se ve que z^* se considerará en el extremo superior del segmento factible, lo cual es la intersección de las dos líneas.

$$0.20x_1 + 0.32x_2 = 0.25 \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 1$$

La solución simultánea de estas ecuaciones da $x_1^* = 7/12$, $x_2^* = 5/12$; entonces:

$$z^* = 80(7/12) + 60(5/12) = 71.67¢$$

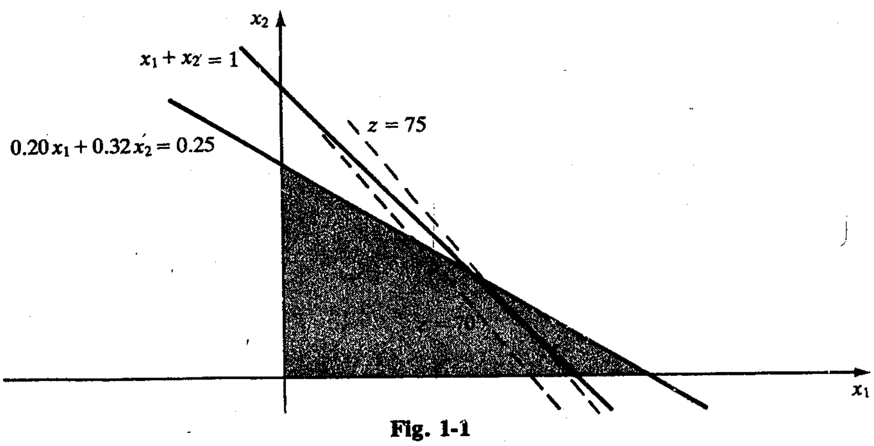

Fig. 1-1

1.3 Un fabricante de muebles tiene 6 unidades de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará biombos decorativos. Con anterioridad, se han vendido bien dos modelos, de manera que se limitará a producir estos dos. Estima que el modelo I requiere 2 unidades de madera y 7 horas del tiempo disponible, mientras que el modelo II requiere 1 unidad de madera y 8 horas. Los precios de los modelos son \$120 y \$80, respectivamente. ¿Cuántos biombos de cada modelo debe fabricar si desea maximizar su ingreso en la venta?

El objetivo es maximizar el ingreso (en dólares), el cual se denotará z:

$z \equiv$ 120 veces el número producido de biombos modelo I, más 80 veces el número producido de biombos modelo II.

Haciendo:

$x_1 \equiv$ número a producir de biombos modelo I
$x_2 \equiv$ número a producir de biombos modelo II,

se expresa el objetivo como:

$$\text{maximícese:} \quad z = 120x_1 + 80x_2 \tag{1}$$

El fabricante está sujeto a una restricción en lo referente a la madera. Como cada modelo I requiere 2 unidades de madera, se les deberán asignar $2x_1$ unidades; igualmente se deberán asignar $1x_2$ unidades de madera a los biombos del modelo II. Entonces, la restricción en madera es:

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \tag{2}$$

El fabricante tiene también una restricción en lo que respecta al tiempo. Los biombos modelo I tomarán $7x_1$ horas y los biombos modelo II $8x_2$ horas; por lo tanto:

$$7x_1 + 8x_2 \leq 28 \tag{3}$$

Es obvio que no se pueden producir cantidades negativas de uno u otro tipo de biombo, así que dos restricciones de no negatividad son $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Además, ya que no hay ingresos por concepto de biombos parcialmente terminados, otra condición oculta es que x_1 y x_2 deben ser enteros. Combinando estas condiciones ocultas con (1), (2) y (3), se obtiene el programa matemático:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 120x_1 + 80x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 \leq 28 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables enteras y no negativas.} \end{aligned} \tag{4}$$

El sistema (4) es un programa entero. Como sólo hay dos variables, se puede dar una solución gráfica.

1.4 Dése una solución gráfica al programa entero (4) del problema 1.3.

Véase la figura 1-2. La región factible es el conjunto de puntos enteros (marcados por cruces) dentro de la región sombreada. Las líneas punteadas son las gráficas de la función objetivo, cuando se dan arbitrariamente a z los valores 240, 330 y 380. Se ve que la línea z, a través del punto (3, 0), dará el máximo deseado; entonces, el fabricante deberá producir tres biombos modelo I y ninguno del modelo II, para un ingreso máximo de:

$$z^* = 120(3) + 80(0) = \$360$$

Obsérvese que esta solución óptima *no* se obtuvo resolviendo primero el programa lineal asociado (el mismo problema sin las restricciones enteras) y luego aproximando al punto entero factible más cercano. De hecho, la región factible para el programa lineal asociado es el área sombreada de la figura 1-2; así que la solución óptima ocurre en el punto marcado con un círculo. Pero en el punto entero factible más cercano (2, 1), la función objetivo tiene el valor $z = 120(2) + 80(1) = \$320$, que es \$40 menos que el verdadero óptimo.

En el problema 7.8, se da otro posible procedimiento de solución para el problema 1.3.

1.5 La compañía Minas Universal opera tres minas en West Virginia. El mineral de cada una se separa, antes de embarcarse, en dos grados. La capacidad diaria de producción de las mimas así como sus costos diarios de operación son los siguientes:

	Mineral de grado alto, ton/día	Mineral de grado bajo, ton/día	Costo de operación, \$1 000/día
Mina I	4	4	20
Mina II	6	4	22
Mina III	1	6	18

La Universal se comprometió a entregar 54 toneladas de mineral de grado alto y 65 toneladas de mineral de grado bajo para fines de la siguiente semana. Además, tiene contratos de trabajo que garantizan a los trabajadores de ambas minas el pago del día completo por cada día o fracción de día que la mina esté abierta. Determínese el número de días que cada mina debería operar durante la siguiente semana, si Minas Universal ha de cumplir su compromiso a un costo total mínimo.

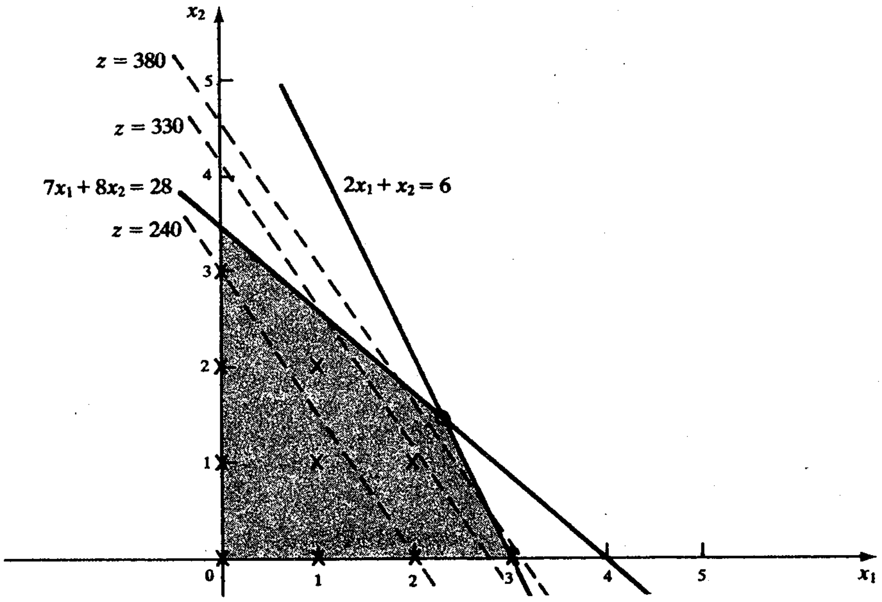

Fig. 1-2

Denótense con x_1, x_2 y x_3, respectivamente, el número de días que las minas I, II y III habrán de operar durante la semana venidera. Entonces, el objetivo(expresado en \$1000) es:

$$\text{minimícese:} \quad z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 \tag{1}$$

La demanda de mineral de grado alto es:

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54 \tag{2}$$

y la demanda de mineral de grado bajo es:

$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65 \tag{3}$$

Como ninguna mina puede operar un número negativo de días, tres restricciones de no negatividad son $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Por otro lado, como ninguna mina puede operar más de 7 días a la semana, otras tres restricciones son $x_1 \leq 7$, $x_2 \leq 7$ y $x_3 \leq 7$. Finalmente, debido a los contratos laborales, Minas Universal no tiene nada qué ganar al operar una mina parte de un día; en consecuencia, x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros. Combinando las restricciones con (1), (2) y (3), se obtiene el programa matemático:

$$\begin{aligned} \text{minimícese:} \quad & z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54 \\ & 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65 \\ & x_1 \leq 7 \\ & x_2 \leq 7 \\ & x_3 \leq 7 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables enteras y no negativas.} \end{aligned} \tag{4}$$

El sistema (4) es un programa entero; su solución se determina en el problema 7.4.

1.6 Un fabricante está iniciando la última semana de producción de cuatro modelos diferentes de consolas de madera para televisores, clasificadas como I, II, III y IV, cada uno de los cuales debe ensamblarse y después decorarse. Los modelos requieren 4, 5, 3 y 5 horas, respectivamente, para el decorado. Las ganancias por modelo son, respectivamente, \$7, \$7, \$6 y \$9. El fabricante tiene 30 000 h disponibles para ensamblar estos productos (750 ensambladores trabajando 40 h semana) y 20 000 h disponibles para decorar (500 decoradores trabajando 40 h semana). ¿Cuántas unidades de cada modelo debe producir el fabricante durante esta semana para maximizar la ganancia? Considérese que todas las unidades pueden venderse.

El objetivo es maximizar la ganancia (en dólares), lo cual se denotará z. Haciendo:

$x_1 \equiv$ número de consolas modelo I a producir en la semana
$x_2 \equiv$ número de consolas modelo II a producir en la semana
$x_3 \equiv$ número de consolas modelo III a producir en la semana
$x_4 \equiv$ número de consolas modelo IV a producir en la semana

se plantea el objetivo como:

$$\text{maximícese:} \quad z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 \tag{1}$$

Hay restricciones en cuanto al tiempo total disponible para el ensamblado y en lo referente al tiempo total disponible para el decorado. Éstas se plantean, respectivamente, con el modelo:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000 \tag{2}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20\,000 \tag{3}$$

Como no se pueden producir cantidades negativas, cuatro restricciones de no negatividad son $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Además, ya que es la última semana de producción, los modelos que estén parcialmente terminados al finalizar la semana, quedarán sin terminar, y por lo tanto no producirán ganancia. Para evitar estas posibilidades, se requiere un valor entero para cada variable. Combinando las condiciones de no negatividad con (1), (2) y (3), se obtiene el programa matemático:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20\,000 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables enteras y no negativas.} \end{aligned} \tag{4}$$

El sistema (4) es un programa entero; su solución se obtiene en el problema 6.4.

1.7 La Refinería Azteca produce dos tipos de gasolina sin plomo, regular y extra, los cuales vende a su cadena de estaciones de servicio en \$12 y \$14 por barril, respectivamente. Ambos tipos se preparan del inventario de la Azteca de petróleo nacional refinado y de petróleo importado refinado, y deben cumplir con las siguientes especificaciones:

	Presión máxima de vapor	Octanaje mínimo	Demanda máxima, barriles/semana	Entregas mínimas, barriles/semana
Regular	23	88	100 000	50 000
Extra	23	93	20 000	5 000

Las características del inventario de petróleos refinados son las siguientes:

	Presión de vapor	Octanaje	Inventario, barriles	Costo, \$/barril
Nacional	25	87	40 000	8
Importado	15	98	60 000	15

¿Qué cantidades de los dos petróleos (nacional e importado) deberá mezclar la Azteca en ambas gasolinas, a fin de maximizar la ganancia semanal?

Haciendo:

$x_1 \equiv$ barriles de petróleo nacional mezclado en la regular
$x_2 \equiv$ barriles de petróleo importado mezclado en la regular
$x_3 \equiv$ barriles de petróleo nacional mezclado en la extra
$x_4 \equiv$ barriles de petróleo importado mezclado en la extra

Se producirá una cantidad $x_1 + x_2$ de gasolina regular y generará un ingreso de $12(x_1 + x_2)$; se producirá una cantidad $x_3 + x_4$ de extra y generará un ingreso de $14(x_3 + x_4)$. Se usará una cantidad $x_1 + x_3$ de petróleo nacional, a un costo de $8(x_1 + x_3)$; se usará una cantidad $x_2 + x_4$ de importado, a un costo de $15(x_2 + x_4)$. La ganancia total, z, es el ingreso menos el costo:

$$\text{maximícese:} \quad z = 12(x_1 + x_2) + 14(x_3 + x_4) - 8(x_1 + x_3) - 15(x_2 + x_4)$$
$$= 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 \qquad (1)$$

Hay limitaciones impuestas a la producción por la demanda, la disponibilidad de suministros y las especificaciones de la mezcla. Se tiene de las demandas:

$$x_1 + x_2 \leq 100\,000 \quad \text{(demanda máxima de regular)} \qquad (2)$$
$$x_3 + x_4 \leq 20\,000 \quad \text{(demanda máxima de extra)} \qquad (3)$$
$$x_1 + x_2 \geq 50\,000 \quad \text{(requerimiento máximo regular)} \qquad (4)$$
$$x_3 + x_4 \geq 5\,000 \quad \text{(requerimiento mínimo de extra)} \qquad (5)$$

De la disponibilidad:

$$x_1 + x_3 \leq 40\,000 \quad \text{(nacional)} \qquad (6)$$
$$x_2 + x_4 \leq 60\,000 \quad \text{(importado)} \qquad (7)$$

Los componentes de una mezcla contribuyen al octanaje general, según sus porcentajes por peso; asimismo para la presión de vapor. Entonces, el octanaje de la regular es:

$$87\frac{x_1}{x_1 + x_2} + 98\frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

y el requerimiento de que éste sea de por lo menos 88, lleva a:

$$x_1 - 10x_2 \leq 0 \qquad (8)$$

Igualmente, se obtiene:

$$6x_3 - 5x_4 \leq 0 \quad \text{(restricción de octanaje de la extra)} \qquad (9)$$
$$2x_1 - 8x_2 \leq 0 \quad \text{(restricción de presión de vapor de la regular)} \qquad (10)$$
$$2x_3 - 8x_4 \leq 0 \quad \text{(restricción de presión de vapor de la extra)} \qquad (11)$$

Combinando de (1) hasta (11) con las cuatro restricciones de no negatividad de las cuatro variables, se obtiene el programa matemático:

$$\text{maximícese:} \quad z = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$$

$$\begin{array}{lrrrrl}
\text{con las condiciones:} & x_1 + & x_2 & & & \leq 100\,000 \\
& & & x_3 + & x_4 & \leq 20\,000 \\
& x_1 & & + x_3 & & \leq 40\,000 \\
& & x_2 & & + x_4 & \leq 60\,000 \\
& x_1 - & 10x_2 & & & \leq 0 \\
& & & 6x_3 - & 5x_4 & \leq 0 \\
& 2x_1 - & 8x_2 & & & \leq 0 \\
& & & 2x_3 - & 8x_4 & \leq 0 \\
& x_1 + & x_2 & & & \geq 50\,000 \\
& & & x_3 + & x_4 & \geq 5\,000
\end{array} \qquad (12)$$

con: todas las variables no negativas.

El sistema (12) es un programa lineal; su solución se obtiene en el problema 4.7.

1.8 Una excursionista planea salir de campamento. Hay cinco artículos que desea llevar consigo, pero entre todos sobrepasan las 60 lb que considera que puede cargar. Para auxiliarse en la selección, ha asignado un valor a cada artículo en orden ascendente de importancia:

Artículo	1	2	3	4	5
Peso, lb	52	23	35	15	7
Valor	100	60	70	15	15

¿Qué artículos deberá llevar para maximizar el valor total, sin sobrepasar la restricción de peso?

Haciendo que x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) indique la cantidad a llevar del artículo i, se puede plantear el objetivo como:

$$\text{maximícese:} \quad z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5 \tag{1}$$

La restricción de peso es:

$$52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \tag{2}$$

Ya que cada artículo se llevará o no se llevará, cada variable debe ser 1 o 0. Estas condiciones se cumplirán, si se pide que cada variable sea no negativa, no mayor que 1 y entera. Combinando estas restricciones con (1) y (2), se tiene el programa matemático:

$$\begin{array}{rl} \text{maximícese:} & z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5 \\ \text{con las condiciones:} & 52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_4 \leq 1 \\ & x_5 \leq 1 \\ \text{con:} & \text{todas las variables enteras no negativas.} \end{array} \tag{3}$$

El sistema (3) es un programa entero; su solución se obtiene en el problema 6.7 y, nuevamente, en el problema 14.16.

× **1.9** Una tienda de autoservicio que funciona las 24 horas tiene los siguientes requerimientos mínimos para los cajeros:

Periodo	1	2	3	4	5	6
Hora del día (24-h)	3–7	7–11	11–15	15–19	19–23	23–3
Número mínimo	7	20	14	20	10	5

El periodo 1 sigue inmediatamente a continuación del periodo 6. Un cajero trabaja ocho horas consecutivas, empezando al inicio de uno de los seis periodos. Determínese qué grupo diario de empleados satisface las necesidades con el mínimo de personal.

Haciendo x_i ($i = 1, 2, ..., 6$) igual al número de cajeros que *empiezan* a trabajar al inicio del periodo i, se puede plantear el modelo para este problema, mediante el programa matemático:

$$
\begin{aligned}
\text{minimícese:}\quad & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{con las condiciones:}\quad & x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + x_6 \geq 7 \\
& x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad \geq 20 \\
& \quad x_2 + x_3 \qquad\qquad \geq 14 \\
& \qquad x_3 + x_4 \qquad\quad \geq 20 \\
& \qquad\quad x_4 + x_5 \qquad \geq 10 \\
& \qquad\qquad x_5 + x_6 \geq 5 \\
\text{con:}\quad & \text{todas las variables enteras y no negativas.}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

El sistema (1) es un programa entero; su solución se obtiene en el problema 6.3.

1.10 Una tienda de quesos tiene 20 lb de una mezcla de frutas de estación y 60 lb de un queso caro, con los cuales se prepararán dos tipos de queso para untar, fino y normal, que son populares durante la semana de Navidad. Cada libra del queso fino para untar se compone de 0.2 lb de la mezcla de frutas, 0.3 lb del queso caro y 0.5 lb de un queso de relleno, que es barato y del cual se tiene abundante reserva. Debido a las políticas de precios empleadas en el pasado por la tienda, se sabe que la demanda para cada tipo de queso para untar depende de su precio, de la siguiente forma:

$$D_1 = 190 - 25P_1 \qquad \text{y} \qquad D_2 = 250 - 50P_2$$

Donde D denota la demanda (en libras), P denota el precio (en dólares por libra), y los subíndices 1 y 2 se refieren respectivamente al queso para untar fino y normal. ¿Cuántas libras de cada tipo de queso para untar deben prepararse, y qué precios deben establecerse, si se desea maximizar el ingreso y vender totalmente ambos tipos hacia el fin de la semana de Navidad?

Sean x_1 las libras de queso fino para untar y x_2 las libras de queso normal para untar, que se van a preparar. Si se puede vender todo el producto, el objetivo es:

$$\text{maximícese:} \quad z = P_1x_1 + P_2x_2 \tag{1}$$

Ahora bien, todo el producto se venderá con seguridad (y nada quedará en existencia), si la producción no excede a la demanda; es decir, si $x_1 \leq D_1$ y $x_2 \leq D_2$. Esto da las restricciones:

$$x_1 + 25P_1 \leq 190 \qquad \text{y} \qquad x_2 + 50P_2 \leq 250 \tag{2}$$

Debido a la cantidad de mezcla de frutas de que se dispone,

$$0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 20 \tag{3}$$

y por la cantidad de queso caro disponible,

$$0.8x_1 + 0.3x_2 \leq 60 \tag{4}$$

No hay restricción en cuanto al queso de relleno, ya que la tienda tiene el que sea necesario. Finalmente, ni el precio ni la producción pueden ser negativos; así que cuatro restricciones de no negatividad son: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $P_1 \geq 0$, y $P_2 \geq 0$. Combinando estas condiciones con las expresiones del (1) al (4), se obtiene el programa:

$$
\begin{aligned}
\text{maximícese:}\quad & z = P_1x_1 + P_2x_2 \\
\text{con las condiciones:}\quad & 0.2x_1 + 0.2x_2 \qquad\qquad \leq 20 \\
& 0.8x_1 + 0.3x_2 \qquad\qquad \leq 60 \\
& \quad x_1 \qquad + 25P_1 \qquad \leq 190 \\
& \qquad\quad x_2 \qquad + 50P_2 \leq 250 \\
\text{con:}\quad & \text{todas las variables no negativas.}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

El sistema (5) es un programa cuadrático en las variables x_1, x_2, P_1 y P_2. Se puede simplificar si se toma en cuenta que para cualquier valor fijo positivo de x_1 y x_2, la función objetivo aumenta conforme P_1 o P_2 aumenta. Entonces, para un máximo, P_1 o P_2 deben ser tales que las restricciones (2) se transformen en ecuaciones; por tanto, P_1 y P_2 pueden eliminarse de la función objetivo. Se tiene entonces un programa cuadrático en x_1 y x_2,

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = (7.6 - 0.04x_1)x_1 + (5 - 0.02x_2)x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 0.2x_1 + 0.2x_2 \le 20 \\ & 0.8x_1 + 0.3x_2 \le 60 \qquad (6) \\ \text{con:} \quad & x_1 \text{ y } x_2 \text{ no negativos.} \end{aligned}$$

Éste se resuelve gráficamente con facilidad.

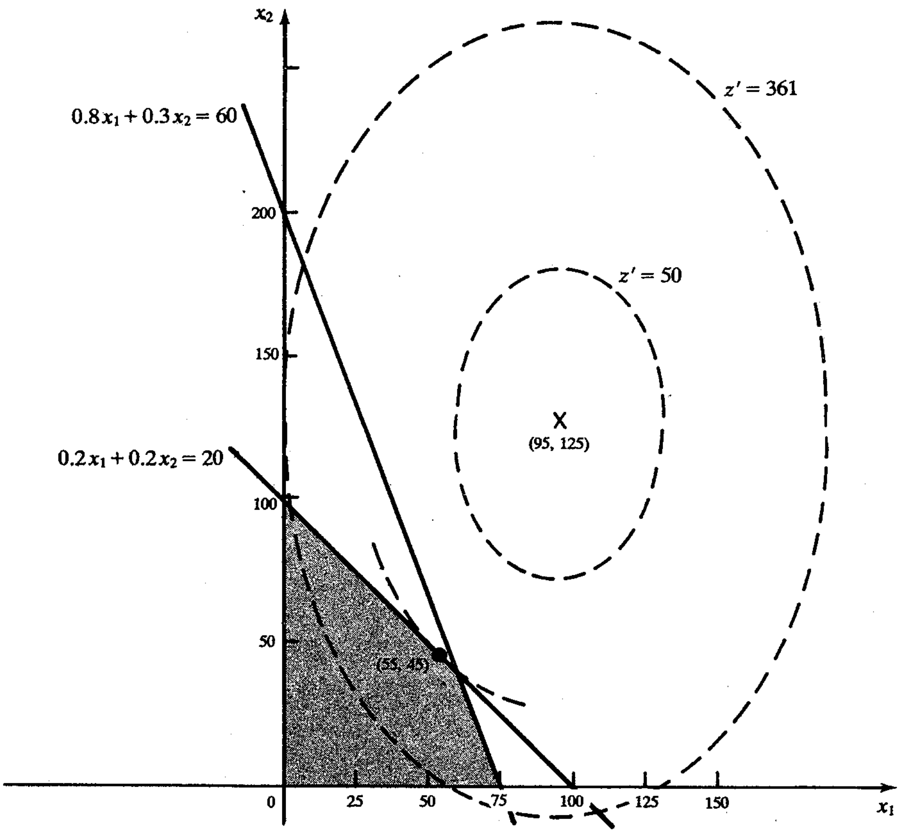

Fig. 1-3

1.11 Dése una solución gráfica del programa cuadrático (6) del problema 1.10.

Para graficar, es conveniente completar el cuadrado en la función objetivo, quedando:

$$\text{maximícese:} \quad z = 673.5 - 0.04(x_1 - 95)^2 - 0.02(x_2 - 125)^2$$

lo cual es equivalente a:

$$\text{minimícese:} \quad z' = 0.04(x_1 - 95)^2 + 0.02(x_2 - 125)^2 \qquad (1)$$

Como las restricciones son lineales, la región factible está limitada por líneas rectas; esta región aparece sombreada en la figura 1.3. Para cualquier valor particular de z', (1) define una elipse con centro en (95,125), y dos de estas elipses se muestran en la figura 1-3, como curvas punteadas. El valor mínimo de z' corresponderá a aquella elipse definida por (1) que sea tangente a la línea

$$0.2x_1 + 0.2x_2 = 20 \qquad (2)$$

Para encontrar el punto de tangencia, se igualan las pendientes de la línea y de la elipse,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2(x_1 - 95)}{x_2 - 125}$$

obtenidas por diferenciación implícita de (2) y de (1), respectivamente. Esto da:

$$x_2 = 2x_1 - 65 \qquad (3)$$

La solución simultánea de (2) y (3) da el resultado óptimo al problema 1-10:

$x_1^* = 55$ lb de queso fino para untar $\qquad x_2^* = 45$ lb de queso normal para untar

1.12 Un fabricante de plásticos tiene en existencia, en una de sus fábricas, 1 200 cajas de envoltura transparente y otras 1 000 cajas en su segunda fábrica. El fabricante tiene órdenes para este producto por parte de tres diferentes detallistas, en cantidades 1 000, 700 y 500 cajas, respectivamente. Los costos unitarios de envío (en centavos por caja) de las fábricas a los detallistas son los siguientes:

	Detallista 1	Detallista 2	Detallista 3
Fábrica 1	14	13	11
Fábrica 2	13	13	12

Determínese una cédula de embarque de costo mínimo, para satisfacer toda la demanda con el inventario actual.

Escribiendo x_{ij} $(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ como el número de cajas que se enviarán de la fábrica i al detallista j, se tiene como objetivo (en centavos):

$$\text{minimícese:} \quad z = 14x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 13x_{21} + 13x_{22} + 12x_{23}$$

Ya que las cantidades que se enviarán de las fábricas no pueden exceder a las existencias,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1200 \quad \text{(envíos de la fábrica 1)}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000 \quad \text{(envíos de la fábrica 2)}$$

Además, las cantidades totales enviadas a los detallistas deben cubrir sus demandas; entonces:

$$x_{11} + x_{21} \geq 1000 \quad \text{(envíos al detallista 1)}$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 700 \quad \text{(envíos al detallista 2)}$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 500 \quad \text{(envíos al detallista 3)}$$

Debido a que la existencia total (1 200 + 1 000) es igual a la demanda total (1 000 + 700 + 500), cada desigualdad de restricción se puede cambiar a una igualdad. Haciendo esto e incluyendo las condiciones de no negatividad de que ningún envío sea negativo y ninguna caja se divida para enviarse, se obtiene el programa matemático:

$$\begin{array}{rllllllll}
\text{minimícese:} & z = 14x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 13x_{21} + 13x_{22} + 12x_{23} \\
\text{con las condiciones:} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & & & = 1200 \\
& & x_{21} + x_{22} + x_{23} & & = 1000 \\
& x_{11} & + x_{21} & & = 1000 \\
& x_{12} & & + x_{22} & = 700 \\
& x_{13} & & + x_{23} & = 500 \\
\text{con:} & \text{todas las variables enteras y no negativas.}
\end{array} \qquad (1)$$

El sistema (1) es un programa entero; su solución se obtiene en el problema 7.3 y, nuevamente, en el problema 8.6.

1.13 Una competencia de relevos de 400 metros incluye a cuatro diferentes nadadores, quienes nadan sucesivamente 100 metros de dorso, de pecho, de mariposa y libre. Un entrenador tiene seis nadadores muy veloces, cuyos tiempos esperados (en segundos) en los eventos individuales se dan en la Tabla 1-1.

¿Cómo deberá el entrenador asignar los nadadores a los relevos, a fin de minimizar la suma de sus tiempos?

Tabla 1-1

	Evento 1 (dorso)	Evento 2 (Nado de pecho)	Evento 3 (mariposa)	Evento 4 (libre)
Nadador 1	65	73	63	57
Nadador 2	67	70	65	58
Nadador 3	68	72	69	55
Nadador 4	67	75	70	59
Nadador 5	71	69	75	57
Nadador 6	69	71	66	59

El objetivo es minimizar el tiempo total, que se denotará z. Empleando variables de doble subíndice x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, 6; j = 1, 2, 3, 4$) para designar el número de veces que el nadador i se destinará al evento j, se puede formular así el objetivo:

$$\text{minimícese:} \quad z = 65x_{11} + 73x_{12} + 63x_{13} + 57x_{14} + 67x_{21} + \cdots + 66x_{63} + 59x_{64}$$

Ya que ningún nadador puede destinarse a más de un evento,

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} \leq 1 \end{gathered}$$

Como para cada evento debe haber un nadador, se tiene también:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} = 1 \end{gathered}$$

Estas 10 restricciones, combinadas con el objetivo y las condiciones de no negatividad de que cada variable sea entera y no negativa, forman un programa entero. Su solución se obtiene en el problema 9.4.

1.14 Una importante compañía petrolera desea construir una refinería que recibirá suministros desde tres ciudades portuarias. El puerto B está 300 km al este y 400 km al norte del puerto A, mientras que el puerto C está 400 km al este y 100 km al sur del puerto B. Determínese la localización de la refinería, de tal manera que la cantidad total de tubería necesaria para conectar a la refinería con los puertos se minimice.

El objetivo es equivalente a minimizar la suma de las distancias entre la refinería y los tres puertos. Como ayuda para calcular esta suma, se establece un sistema coordenado, figura 1-4, con el puerto A como origen. En este sistema, el puerto B tiene coordenadas (300, 400) y el puerto C tiene coordenadas (700, 300).

Con (x_1, x_2) indicando las coordenadas desconocidas de la refinería, el objetivo es:

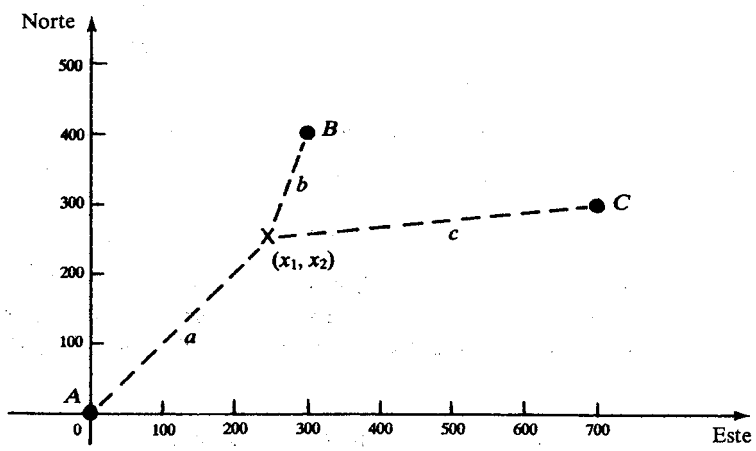

Fig. 1-4

$$\text{minimícese:} \quad z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2} + \sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2} \qquad (1)$$

No hay restricciones en cuanto a las coordenadas de la refinería, ni condiciones de no negatividad; por ejemplo, un valor negativo de x_1 significa tan sólo que la refinería deberá localizarse al este del puerto A. La ecuación (1) es un programa matemático, no lineal, sin restricciones; su solución se obtiene en el problema 11.11. Véase también el problema 1-26.

1.15 Una persona tiene $4 000 que desea invertir y se le presentan tres opciones. Cada opción requiere depósitos en cantidades de $1 000; el inversionista puede colocar todo el dinero entre las tres. Las ganancias esperadas se presentan en la siguiente tabla:

	Dólares invertidos				
	0	1000	2000	3000	4000
Ganancia en la oportunidad 1	0	2000	5000	6000	7000
Ganancia en la oportunidad 2	0	1000	3000	6000	7000
Ganancia en la oportunidad 3	0	1000	4000	5000	8000

¿Cuánto dinero deberá invertirse en cada opción para obtener la mayor ganancia total?

El objetivo es maximizar la ganancia total, denotada z, la cual es la suma de la ganancia de cada una de las opciones. Todas las inversiones tienen la restricción de ser múltiplos enteros de la unidad $1 000. Haciendo que $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) denote la ganancia (en unidades de mil dólares) de la opción i, cuando se invierten en ella x unidades de dinero, se puede cambiar la tabla de ganancias como se muestra en la tabla 1-2.

Tabla 1-2

f \ x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	0	2	5	6	7
$f_2(x)$	0	1	3	6	7
$f_3(x)$	0	1	4	5	8

Definiendo x_i ($i = 1, 2, 3$) como el número de unidades de dinero invertidas en la opción i, se puede formular el objetivo como:

$$\text{maximícese:} \quad z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \qquad (1)$$

Ya que la persona tiene sólo 4 unidades de dinero que invertir,

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \qquad (2)$$

Agregando a (1) y (2) las condiciones de no negatividad de que x_1, x_2 y x_3 sean enteras no negativas, se obtiene el programa matemático:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \\ \text{con las condiciones:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables enteras y no negativas.} \end{aligned} \qquad (3)$$

Graficando $f_i(x)$ con respecto a x para cada función da una gráfica que no es una línea recta. Por lo tanto, el sistema (3) es un programa no lineal; su solución se obtiene en el problema 14.1.

Problemas suplementarios

Plantee, sin resolver, los programas matemáticos que presentan el modelo de los problemas 1.16 a 1.25.

1.16 Fay Klein ha desarrollado dos tipos de juegos de salón para adultos, hechos a mano, que vende a tiendas en todo el país. Aunque la demanda de estos juegos excede su capacidad de producción, la señora Klein continúa trabajando sola y limita su trabajo semanal a 50 h. El juego tipo I se produce en 3.5 horas y arroja una ganancia de $28, mientras que el juego II toma 4 horas para su producción y da una ganancia de $31. ¿Cuántos juegos de cada tipo deberá producir semanalmente la señora Klein, si su objetivo es maximizar la ganancia total?

1.17 Una tienda de animales ha determinado que cada hamster debería recibir diariamente al menos 70 unidades de proteína, 100 unidades de carbohidratos y 20 unidades de grasa. Si la tienda vende los seis tipos de alimento mostrados en la tabla 1-3, ¿qué mezcla de alimento satisface las necesidades a un costo mínimo para la tienda?

Tabla 1-3

Alimento	Proteínas, unidades/onza	Carbohidratos, unidades/onza	Grasa, unidades/onza	Costo, ¢/onza
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

1.18 Una compañía manufacturera local produce ~~cuatro~~ 3 diferentes productos metálicos que deben maquinarse, pulirse y ensamblarse. Las necesidades específicas de tiempo (en horas) para cada producto son las siguientes:

	Maquinado, h	Pulido, h	Ensamble, h
Producto I	3	1	2
Producto II	2	1	1
Producto III	2	2	2
Producto IV	4	3	1

La compañía dispone semanalmente de 480 horas para el maquinado, 400 horas para pulido y 400 horas para ensamble. Las ganancias unitarias por producto son $6, $4, $6 y $8, respectivamente. La compañía tiene un contrato con un distribuidor en el que se compromete a entregar semanalmente 50 unidades del producto I y 100 unidades de cualquier combinación de los productos I, II y III, según sea la producción, pero sólo un máximo de 25 unidades del producto IV. ¿Cuántas unidades de cada producto debería fabricar semanalmente la compañía, a fin de cumplir con todas las condiciones del contrato y maximizar la ganancia total? Considérese que las piezas incompletas pueden terminarse la siguiente semana.

1.19 Un proveedor debe preparar con cinco bebidas de fruta en existencia, 500 gal de un ponche que contenga por lo menos 20% de jugo de naranja, 10% de jugo de toronja y 5% de jugo de arándano. Si los datos del inventario son los que se presentan a continuación, ¿qué cantidad de cada bebida de fruta deberá emplear el proveedor a fin de obtener la composición requerida a un costo total mínimo?

	Jugo de naranja, %	Jugo de toronja, %	Jugo de arándano, %	Existencias, gal	Costo, $/gal
Bebida A	40	40	0	200	1.50
Bebida B	5	10	20	400	0.75
Bebida C	100	0	0	100	2.00
Bebida D	0	100	0	50	1.75
Bebida E	0	0	0	800	0.25

1.20 Una comunidad ha reunido $250 000 para desarrollar nuevas áreas de eliminación de desechos. Hay siete sitios disponibles, cuyos costos de desarrollo y capacidades se muestran a continuación. ¿Qué sitios deberá desarrollar la comunidad?

Sitio	A	B	C	D	E	F	G
Capacidad, ton/semana	20	17	15	15	10	8	5
Costo, $1000	145	92	70	70	84	14	47

1.21 Una corporación de semiconductores produce un módulo específico de estado sólido, el cual se suministra a cuatro diferentes fabricantes de televisores. El módulo puede producirse en cualquiera de las tres plantas de la corporación, aunque los costos varían debido a la diferente eficiencia de producción de cada una. Específicamente, cuesta $1.10 producir un módulo en la planta A, $0.95 en la planta B y $1.03 en la planta C. Las capacidades mensuales de producción de las plantas son 7 500, 10 000 y 8 100 módulos, respectivamente. Las estimaciones de venta predicen una demanda mensual de 4 200, 8 300, 6 300 y 2 700 módulos, para los fabricantes de televisores I, II, III y IV, respectivamente. Si los costos de envío (en dólares) para embarcar un módulo de una de las fábricas a un fabricante se muestran a continuación, encuéntrese una cédula de producción que cubra todas las necesidades a un costo mínimo total.

	I	II	III	IV
A	0.11	0.13	0.09	0.19
B	0.12	0.16	0.10	0.14
C	0.14	0.13	0.12	0.15

1.22 La jefa del departamento de carnes de una tienda de autoservicio se encuentra la mañana del sábado con que dispone de una existencia de 200 lb de bola, 800 lb de solomillo y 150 lb de carne de cerdo que se emplearán para preparar carne molida para hamburguesas, tortitas de carne para día de campo y albondigón. La demanda de cada tipo de carne siempre excede la existencia de la tienda. La carne para hamburguesas debe contener por lo menos 20% de bola molida y 50% de solomillo molido (por peso); las tortitas deben ser al menos 20% de molida de cerdo y 50% de solomillo molido; y la carne para albondigón al menos 10% de bola molida, 30% de molida de cerdo y 40% de solomillo molido. El resto de cada producto lo constituye un relleno barato, no de carne, del cual la tienda tiene una cantidad ilimitada. ¿Cuántas libras de cada producto deben prepararse, si la jefa del departamento desea minimizar la cantidad de carne que permanezca almacenada en la tienda después del domingo?

1.23 Un bufete de abogados ha aceptado cinco nuevos casos, cada uno de los cuales puede ser llevado adecuadamente por cualquiera de los cinco asociados más recientes. Debido a la diferencia en experiencia y práctica, los abogados emplearán distintos tiempos en los casos. Uno de los asociados más experimentados ha estimado las necesidades de tiempo (en horas) como sigue:

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Abogado 1	145	122	130	95	115
Abogado 2	80	63	85	48	78
Abogado 3	121	107	93	69	95
Abogado 4	118	83	116	80	105
Abogado 5	97	75	120	80	111

Determínese la forma óptima de asignar los casos a los abogados, de manera que cada uno de ellos se dedique a un caso diferente y que el tiempo total de horas empleadas sea mínimo.

1.24 Motores Recreativos fabrica carritos para golf y vehículos para nieve en sus tres plantas. La planta A produce diariamente 40 carritos para golf y 35 para nieve; la planta B produce diariamente 65 carritos para golf y ninguno para nieve. La planta C produce diariamente 53 vehículos para nieve y ninguno para golf. Los costos diarios de operación de las plantas A, B y C son, respectivamente, $210 000, $190 000 y $182 000. ¿Cuántos días (incluyendo domingos y días de fiesta) deberá operar cada planta durante el mes de septiembre, a fin de lograr una producción de 1 500 carritos de golf y 1 100 vehículos para nieve, a un costo mínimo? Considérese que los contratos de trabajo requieren que una vez que la planta se abre, los trabajadores reciban el pago de todo el día.

1.25 La Compañía Futura produce dos tipos de fertilizantes agrícolas, Futura Normal y Futura Extra. El Futura Normal está compuesto de 25% de ingredientes activos y 75% de ingredientes inertes, mientras que el Futura Extra contiene 40% de ingredientes activos y 60% de ingredientes inertes. La capacidad de bodega limita los inventarios a 500 ton de ingredientes activos y 1 200 ton de ingredientes inertes, y las bodegas se surten completamente una vez a la semana.

El Futura Normal es similar a otros fertilizantes en el mercado y tiene un precio competitivo de $250 ton. A este precio, la compañía no tiene problema para vender todo el Futura Normal que produce, así que no hay restricción en cuanto a su precio. Desde luego, la demanda no depende del precio, y basándose en la experiencia pasada se ha fijado que el precio P (en dólares) y la demanda D (en toneladas) están relacionados por $P = 600 - D$. ¿Cuántas toneladas de cada tipo deberá producir semanalmente la Compañía Futura a fin de maximizar el ingreso?

1.26 *Explíquese por qué lo siguiente es una solución análoga al problema 1.14.* Considérese que la figura 1-4 representa la parte superior de una mesa alta. Se hacen pequeñas perforaciones a la superficie de la mesa en los puntos A, B y C. Tres de los extremos de tres trozos de cordel están unidos mediante un nudo, que descansa en la superficie de la mesa; los tres extremos libres se hacen pasar a través de las perforaciones y, por abajo de la mesa, se les cuelgan tres pesos iguales. Entonces, sin considerar la fricción, la posición de equilibrio del nudo da la localización óptima de la refinería.

Capítulo 2

Programación lineal: forma estándar

En el capítulo 4 se describe un método para resolver programas lineales con muchas variables. Para iniciar el método, se deben transformar todas las restricciones en forma de desigualdades a igualdades y se debe conocer una solución factible no negativa.

CONDICIONES DE NO NEGATIVIDAD

Cualquier variable que aún no haya sido sujeta a restricción de no negatividad, se reemplaza por la diferencia entre dos de las nuevas variables que tengan esta restricción (véase el problema 2.6).

Las restricciones lineales (Capítulo 1) son de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \sim b_i \tag{2.1}$$

donde $\sim$ representa una de las relaciones $\leq$, $\geq$, $=$ (no necesariamente la misma para cada i). Las constantes b_i se pueden considerar siempre como no negativas.

Ejemplo 2.1 La restricción $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq -5$ se multiplica por -1 para obtener $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 5$, la cual tiene un lado derecho positivo.

VARIABLES DE HOLGURA Y VARIABLES SUPERFLUAS

Una restricción lineal de forma $\Sigma\, a_{ij}x_j \leq b_i$ se puede convertir en una ecuación, agregando una nueva variable no negativa al lado izquierdo de la desigualdad. Esta variable es numéricamente igual a la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de la desigualdad, y se conoce como *variable de holgura*. Representa el desperdicio involucrado en esta fase del sistema, cuyo modelo está dado por la restricción.

Ejemplo 2.2 La primera restricción del problema 1.6 es:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$$

El lado izquierdo de esta desigualdad es el modelo correspondiente al total de horas empleadas para ensamblar todas las consolas de los televisores, mientras que el lado derecho es el total de horas disponibles. Esta desigualdad se transforma en la ecuación:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 30\,000$$

al añadir la variable de holgura x_5 al lado izquierdo de la desigualdad. Aquí x_5 representa el número de horas de ensamble de que dispone, pero no usa, el fabricante.

Una restricción lineal de forma $\Sigma\, a_{ij}x_j \geq b_i$ se puede convertir en una desigualdad, restando una nueva variable no negativa del lado izquierdo de la desigualdad. Esta variable es numéricamente igual a la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la desigualdad, y se conoce como *variable superflua*. Representa el exceso de entrada en esta fase del sistema cuyo modelo está dado por la restricción.

Capítulo 2

Programación lineal: forma estándar

En el capítulo 4 se describe un método para resolver programas lineales con muchas variables. Para iniciar el método, se deben transformar todas las restricciones en forma de desigualdades a igualdades y se debe conocer una solución factible no negativa.

CONDICIONES DE NO NEGATIVIDAD

Cualquier variable que aún no haya sido sujeta a restricción de no negatividad, se reemplaza por la diferencia entre dos de las nuevas variables que tengan esta restricción (véase el problema 2.6).

Las restricciones lineales (Capítulo 1) son de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \sim b_i \tag{2.1}$$

donde $\sim$ representa una de las relaciones $\leq$, $\geq$, $=$ (no necesariamente la misma para cada i). Las constantes b_i se pueden considerar siempre como no negativas.

Ejemplo 2.1 La restricción $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq -5$ se multiplica por -1 para obtener $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 5$, la cual tiene un lado derecho positivo.

VARIABLES DE HOLGURA Y VARIABLES SUPERFLUAS

Una restricción lineal de forma $\Sigma\ a_{ij}x_j \leq b_i$ se puede convertir en una ecuación, agregando una nueva variable no negativa al lado izquierdo de la desigualdad. Esta variable es numéricamente igual a la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de la desigualdad, y se conoce como *variable de holgura*. Representa el desperdicio involucrado en esta fase del sistema, cuyo modelo está dado por la restricción.

Ejemplo 2.2 La primera restricción del problema 1.6 es:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$$

El lado izquierdo de esta desigualdad es el modelo correspondiente al total de horas empleadas para ensamblar todas las consolas de los televisores, mientras que el lado derecho es el total de horas disponibles. Esta desigualdad se transforma en la ecuación:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 30\,000$$

al añadir la variable de holgura x_5 al lado izquierdo de la desigualdad. Aquí x_5 representa el número de horas de ensamble de que dispone, pero no usa, el fabricante.

Una restricción lineal de forma $\Sigma\ a_{ij}x_j \geq b_i$ se puede convertir en una desigualdad, restando una nueva variable no negativa del lado izquierdo de la desigualdad. Esta variable es numéricamente igual a la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la desigualdad, y se conoce como *variable superflua*. Representa el exceso de entrada en esta fase del sistema cuyo modelo está dado por la restricción.

Ejemplo 2.3 La primera restricción en el problema 1.5 es:

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$

El lado izquierdo de esta desigualdad representa la salida combinada de mineral de grado alto proveniente de las tres minas, mientras que el lado derecho es el tonelaje mínimo del mineral requerido para cumplir con las obligaciones del contrato. Esta desigualdad se transforma en la ecuación:

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 54$$

al restar la variable superflua x_4 del lado izquierdo de la desigualdad. Aquí x_4 representa la cantidad de mineral de grado alto extraída por encima de la cantidad necesaria para cumplir el contrato.

GENERACIÓN DE UNA SOLUCIÓN FACTIBLE INICIAL

Después de que todas las restricciones lineales (con lados derechos no negativos) se han transformado en igualdades, introduciendo variables de holgura y superfluas donde sea necesario, agréguese una nueva variable llamada *variable artificial* al lado izquierdo de cada ecuación de restricciones que no contenga una variable de holgura. Ahora cada ecuación de restricción contendrá o una variable de holgura o una variable artificial. Una solución inicial no negativa para este nuevo conjunto de restricciones se obtiene haciendo cada variable de holgura y cada variable artificial igual al lado derecho de la ecuación en la cual aparecen y haciendo las otras variables, incluyendo las variables superfluas, iguales a cero.

Ejemplo 2.4 El conjunto de restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 6 \\ 7x_1 + 8x_2 &= 15 \end{aligned}$$

se transforma en un sistema de ecuaciones agregando una variable de holgura x_3, al lado izquierdo de la primera restricción, y restando una variable superflua, x_4, del lado izquierdo de la segunda restricción. El nuevo sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \quad\quad - x_4 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 \quad\quad\quad\quad &= 15 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si ahora se agregan respectivamente las variables artificiales x_5 y x_6 al lado izquierdo de las dos últimas restricciones del sistema (2.2), es decir, a las restricciones sin una variable de holgura; el resultado es:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \quad\quad - x_4 + x_5 \quad &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= 15 \end{aligned}$$

Una solución *no negativa* a este último sistema es $x_3 = 3, x_5 = 6, x_6 = 15$ y $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. (Nótese, sin embargo, que $x_1 = 0, x_2 = 0$ *no* es una solución al conjunto inicial de restricciones.)

Ocasionalmente, se puede generar fácilmente una solución sin un conjunto completo de variables de holgura y artificiales. Un ejemplo de esto lo constituye el problema 2.5.

COSTOS DE PENALIZACIÓN

La introducción de variables de holgura y superfluas no altera ni a la naturaleza de las restricciones ni al objetivo. Por consiguiente, estas variables se incorporan a la función objetivo con coeficientes cero. Las variables artificiales, sin embargo, cambian la naturaleza de las restricciones. Ya que se agregan sólo a un lado de una desigualdad, el nuevo sistema es equivalente al sistema anterior de restricciones sólo si las variables artificiales son cero. Para garantizar estas condiciones en la solución óptima (en contraste con la solución inicial), las variables artificiales se incorporan en la función objetivo con coeficientes positivos muy grandes si se trata de un programa de minimización, o con coeficientes negativos muy grandes si se trata de un programa de maximización. Estos coeficientes, que se denotan M o $-M$, donde M se considera un número positivo muy grande, representan el (severo) costo de penalización en el que se ha incurrido al hacer una asignación unitaria a las variables artificiales.

En cálculos manuales, los costos de penalización pueden dejarse como $\pm M$. En cálculos obtenidos con el empleo de computadora (u ordenador), a M debe asignársele un valor numérico, generalmente tres o cuatro veces mayor que cualquier otro número en el programa.

FORMA TÍPICA

Un programa lineal está en *forma estándar* si todas las restricciones son igualdades y si se conoce una solución factible. En notación matricial, la forma estándar es:

$$\begin{aligned} \text{optimícese:} \quad & z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\ \text{con la condición:} \quad & \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\ \text{con:} \quad & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector columna de incógnitas, incluyendo todas las variables de holgura, superfluas y artificiales; $\mathbf{C}^T$ es el vector renglón de los costos correspondientes; $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes de las ecuaciones de restricciones; y $\mathbf{B}$ es el vector columna de los lados derechos de las ecuaciones de restricciones. [*Nota:* En el resto del libro, normalmente se representará a los vectores como matrices de una columna y simplemente se hablará de "vector", en vez de "vector columna". El exponente **T** indica transposición.] Si $\mathbf{X}_0$ denota sólo al vector de las variables de holgura y artificiales, entonces la solución factible inicial está dada por $\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}$, entendiéndose que a toda variable en $\mathbf{X}$ que no se incluya en $\mathbf{X}_0$ se le asigna un valor cero.

Problemas resueltos

2.1 Póngase el siguiente programa en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ \text{con:} \quad & x_1 \text{ y } x_2 \text{ no negativas.} \end{aligned}$$

Agregando las variables de holgura x_3 y x_4, respectivamente, a los lados izquierdos de las restricciones e incluyendo en el objetivo estas nuevas variables con coeficientes de costo cero, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{con las condiciones:} \quad & x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned} \tag{1}$$

Ya que cada ecuación de restricción contiene una variable de holgura, no se necesitan variables artificiales; una solución factible inicial es $x_3 = 5$, $x_4 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$. El sistema (1) está en la forma estándar (2.3), si se define:

$$\mathbf{X} \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \qquad \mathbf{C} \equiv [1, 1, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 \equiv \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

2.2 Póngase el siguiente programa en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 80x_1 + 60x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 0.20x_1 + 0.32x_2 \le 0.25 \\ & x_1 + \quad x_2 = 1 \\ \text{con:} \quad & x_1 \text{ y } x_2 \text{ no negativa.} \end{aligned}$$

Para convertir la primera restricción en una igualdad, agréguese una variable de holgura x_3 al lado izquierdo. Ya que la segunda restricción, una ecuación, no contiene una variable de holgura, agréguese una variable artificial x_4 al lado izquierdo. Ambas nuevas variables se incluyen en la función objetivo, la variable de holgura con coeficiente de costo cero y la variable artificial con coeficiente de costo negativo muy grande, dando el programa:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 - Mx_4 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ & x_1 + \quad x_2 \quad + x_4 = 1 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Este programa está en forma estándar, con una solución factible inicial $x_3 = 0.25$, $x_4 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$.

2.3 Resuélvase nuevamente el problema 2-2, si se ha de minimizar el objetivo.

El único cambio está en el coeficiente de costo asociado con la variable artificial; se vuelve $+M$, en vez de $-M$.

2.4 Póngase el siguiente problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 6x_1 + \ x_2 \ge 6 \\ & 4x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ \text{con:} \quad & x_1 \text{ y } x_2 \text{ no negativas.} \end{aligned}$$

Restando las variables superfluas x_3, x_4 y x_5, respectivamente, de los lados izquierdos de las restricciones e incluyendo en el objetivo cada nueva variable con un coeficiente de costo cero, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 6x_1 + \ x_2 - x_3 = 6 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 = 4 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Ya que ninguna ecuación de restricción contiene una variable de holgura, el siguiente paso consiste en añadir las variables artificiales x_6, x_7 y x_8, respectivamente, a los lados izquierdos de las ecuaciones. También se incluyen en el objetivo estas variables con muy grandes coeficientes negativos de costo. El programa se transforma en:

$$\begin{aligned} \text{maximícese:} \quad & z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \\ \text{con las condiciones:} \quad & 6x_1 + \ x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 4 \\ \text{con:} \quad & \text{todas las variables no negativas.} \end{aligned}$$

Este programa está en forma estándar, con una solución factible inicial de $x_6 = 6$, $x_7 = 12$, $x_8 = 4$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.