ANALISIS NUMERICO

TRABAJO PRÁCTICO

INTEGRACIÓN Y DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

Objetivos:

- *Reconocer el modelo matemático que involucra un problema de integración numérica; de diferenciación numérica; y de valores iniciales en ecuaciones diferenciales.*
- *Resolver problemas básicos de integración numérica aplicando el Método general y los métodos de Newton – Cote: Trapecio y Simpson; de diferenciación numérica aplicando fórmulas en diferencias hacia delante y en diferencias centradas; y de ecuaciones diferenciales (PVI) aplicando el Método de Euler y el de Runge-Kutta.*
- *Tomar conciencia de los errores que se cometen al resolver aplicando los métodos abordados en esta unidad.*

Primera parte: Problemas rutinarios

Problema 1. Considere la integral:

$$\int_0^1 x.sen(x)\ dx$$

a) Calcule la integral aproximada por la regla del Trapecio para h = 0.1, determine el error del método. (Trabaje con 6 decimales como mínimo)

b) Resuelva con calculadora, determine el error absoluto entre el supuestamente exacto y el aproximado y elabore una conclusión.

Problema 2. Dada la integral: $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\ dx$

a) Calcule el valor aproximado utilizando regla del Trapecio con n = 8 sub intervalos. Resuelva con calculadora y compare elaborando una conclusión. Trabaje con un mínimo de 5 decimales.

b) Reitere el cálculo aplicando Regla de Simpson, compare los tres resultados y elabore una nueva conclusión.

Problema 3. Determine el área bajo la curva de la función f(x) = $+\sqrt{x}$ entre los argumentos 1.00 y 1.30 por la fórmula de Simpson con 10 subintervalos. Determine el error del método. Calcule la integral por método directo y concluya respecto a la precisión del cálculo aproximado.

Problema 4. (a) Resuelva la siguiente integral por Trapecio y Simpson para n = 6, calcule por método directo, determine los errores relativos porcentuales en ambos casos, concluya.

$$\int_0^3 x^2 . e^x \, dx$$

(b) Utilice la discretización del punto anterior para determinar la derivada en x = 1,5. Resuelva por cálculo directo y elabore una conclusión.

Problema 5.

a) Utilice las fórmulas hacia delante para aproximar la derivada primera correspondiente a la función $f(x) = x^2 \cos(x)$ en x = 1, trabaje para h = 0.1 y para h = 0.01, cinco decimales. Determine el error del método.

b) Utilice las fórmulas centradas para aproximar nuevamente la derivada primera de la función $f(x) = x^2 \cos(x)$ en x = 1, trabaje para h = 0.1 y para h = 0.01, cinco decimales.

c) Resuelva por cálculo directo, determine error absoluto elabore una conclusión respecto a los méritos de la aproximación.

Problema 6. Calcule el valor de la derivada primera en x = 0.4 de la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ trabajando con un paso h = 0.1 y h = 0.01 por diferencias centradas y por diferencias hacia adelante y cinco cifras decimales.

Resuelva por cálculo directo, determine error relativo porcentual, elabore una conclusión respecto a los méritos de las aproximaciones obtenidas.

Problema 7. Con el Método de Euler genere una solución particular en [0, 4] con un paso h = 0.5 para la ecuación dada, con la condición inicial de que x = 0 y = 1:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Sabiendo que la solución exacta es: $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10\,x^2 + 8.5x + 1$ compare los resultados obtenidos para los valores indicados siendo y = 1 para x = 0.

Repita los cálculos para h = 0,1 y h = 0,05 y concluya.

Problema 8. Aplique el método de Runge Kutta de cuarto orden en el siguiente caso, para x de 0 a 2 con h = 0,5.

$$\frac{dy}{dx} = y.x^2 - 1{,}1\,y \quad con\ y(0) = 1$$

Problema 9. Considere el siguiente problema de valores iniciales, cuya solución exacta es: *y (t) = t ² . (e ᵗ – e)*

$$y' = \frac{2}{t}.y + t^2.e^t \qquad 1 \le t \le 1.5 \qquad y(1) = 0$$

a) Obtenga la solución numérica para dos pasos de cálculo distintos h = 0.1 y h = 0.05, en el primer caso utilice Runge Kutta y en el segundo caso Euler.

b) Halle el valor por cálculo directo para x = 1.5 y determine el error relativo y porcentual en función a los valores obtenidos en el ítem anterior.

Trabaje con cuatro cifras decimales.

Segunda Parte: Trabajo de laboratorio

Para resolver siguientes problemas, vamos a usar planilla Excel, aunque también necesitaremos un poco de trabajo manual.

Problema 1. El cálculo directo de la siguiente integral es:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(10 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)\right)^2 dt = 15.41260805$$

Resuelva por Trapecio y Simpson en los siguientes casos, calcule el error relativo porcentual en cada uno respecto del directo y concluya.

Para: (a) n = 8 - (b) n = 16 - (c) n = 32

Problema 2. Una cuerda vibra adoptando la forma, y = sen x entre las abscisas $x = 0$ y $x = 4$ en un instante t_0.

Calcule aproximadamente la longitud de la cuerda, utilizando un método numérico con $n = 8$.

Dado que hay que calcular la longitud de la función *f*(*x*) = sen *x*, entre *x* = 0 y *x* = 4 considere la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + cos^2(x)}\, dx$$

Resuelva por calculadora y compare los resultados, concluya.

Problema 3. Una partícula de masa *m* se mueve a través de un fluido sujeta a una resistencia viscosa *R*, que es función de la velocidad *v*. La relación entre la resistencia *R*, la velocidad *v* y el tiempo *t* está dada por la segunda ley de Newton:

$$m.\frac{dv}{dt} = R(v) \qquad \text{la cual se puede reescribir como} \qquad t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(v)}\, dv$$

Supóngase que $R(v) = -v\sqrt{v}$ para un determinado fluido, donde R esta dado en Newton y v en m / s; si m = 10 kg y v(0) = 10 m / s, calcule el tiempo que se requiere para que la partícula disminuya su velocidad a 5 m / s usando el método de Simpson con un paso h = 0.5. Calcule por método directo y valore los méritos de la aproximación obtenida.

Problema 4. Determine por diferencias centradas y por diferencias hacia delante en dos puntos y en cuatro puntos la derivada primera en x = $\frac{\pi}{4}$ de la función sen(x) utilizando como paso h = $\frac{\pi}{12}$. Determine el error cometido.

Halle el valor de la derivada por cálculo directo y calcule los errores porcentuales con respecto a los valores obtenidos en el ítem anterior. Elabore una conclusión.

Problema 5. Sea f(x) = 3 x e^x – cos (x), aproxime por fórmulas centradas y por fórmulas hacia delante la f´(1.3) con h= 0.1 y con h= 0.01.

Compare ambos resultados y determine los errores porcentuales a partir de la resolución por cálculo directo. Elabore una conclusión respeto a los méritos de los métodos aproximados.

Problema 6. Aproxime el siguiente problema por el método de Euler y por el método de Runge Kutta, avanzando cinco pasos en la solución numérica para h = 0.01.

$$\frac{du}{dt} = u + t \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = 1$$

Compare con los resultados obtenidos si se sabe que la solución exacta es:
$u(t) = 2.e^t - t - 1$

Analice la precisión en cada caso.

Problema 7. Aplique el método de Euler y método de Runge Kutta de cuarto orden en el siguiente caso, para x de 0 a 1 con h = 0,2.

$$\frac{dy}{dx} = -2y + 4\,e^{-x} \quad con\ y(0) = 2$$

Compare los resultados obtenidos y concluya.