FUNCIONES LINEALES

- Una función F definida de V (K) en W (K) , dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, cuyo esquema es: $f: V \rightarrow W$

$$u \rightarrow f(u)$$

que a cada vector u de V le hace corresponder un único vector f (u) de W , es lineal si verifica:

- Para todo par de vectores de V : $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- Para todo escalar t y para todo vector u de V: $f(t.u) = t.f(u)$

La primera condición se la conoce como *aditividad*, indica que la función respeta las operaciones internas definidas en los espacios vectoriales involucrados, la segunda se denomina *homogeneidad* y está indicando que la función también respeta las operaciones externas.

- Propiedades de una función lineal:

Si f es una función lineal de V (K) en W (K) entonces:

1 – $f(\bar{0}) = \bar{0}'$ $(\bar{0} \in V, \bar{0}' \in W)$

demostración:

$f(\bar{0}) = f(0.u) = 0.f(u) = \bar{0}'$

2 – $f(-u) = -f(u)$ (para cualquier u de V)

demostración:

$f(-u) = f(-1.u) = -1.f(u) = -f(u)$

3 – $f(u-v) = f(u) - f(v)$ (cualesquiera sean u y v de V)

demostración:

$f(u-v) = f(u) + f(-v) = f(u) + (-f(v)) = f(u) - f(v)$

- Clasificación de las funciones lineales:

Se tiene una función lineal f de V (K) en W (K):

- Si f es inyectiva recibe el nombre de *monomorfismo*
- Si f es suryectiva recibe el nombre de *epimorfismo*
- Si f es biyectiva recibe el nombre de *isomorfismo*
- Si en f V = W recibe el nombre de *endomorfismo*
- Si f es un endomorfismo y es biyectiva recibe el nombre de *automorfismo*

- Núcleo e Imagen de una función lineal:

Sea f una función lineal de V (K) en W (K), asociados a esta función existen dos subconjuntos, uno del conjunto de partida y otro del conjunto de llegada, que reciben el nombre de Núcleo (o Ker) de la función e Imagen de la función, los definimos:

$N(f) = \{ u / u \in V \wedge f(u) = \bar{0}', \bar{0}' \in W \}$ son todos los vectores de V que tienen como imagen al vector nulo de W

$Im(f) = \{ v / v \in W \wedge (\exists u \in V) : f(u) = v \}$ son todos los vectores de W que son imagen de algún vector u de V

Los subconjuntos N (f) e Im (f) son subespacios de V y de W respectivamente.

FUNCIONES LINEALES

- Los subespacios Núcleo e Imagen de f:

Sea f : v $\rightarrow$ W una función lineal

El conjunto Núcleo de f es un subespacio del dominio:

Demostración: $N(f) = \{ u / u \in V \wedge f(u) = \bar{0} \}$

- $N(f) \neq \varnothing$ ya que al menos $u = \bar{0}$ está en el conjunto.
- $N(f) \subset V$ por definición del conjunto Núcleo.
- $u \in N(f)$, $f(u) = \bar{0}$ y $v \in N(f)$, $f(v) = \bar{0}$ entonces $u + v \in N(f)$, ya que:
  $f(u + v) = f(u) + f(v) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ (por ser f lineal)
- $t \in K$ y $u \in N(f)$, $f(u) = \bar{0}$ entonces $t . u \in N(f)$, ya que:
  $f(t . u) = t . f(u) = t . \bar{0} = \bar{0}$ (por ser f lineal)

El conjunto Imagen de f es un subespacio del codominio:

Demostración: $Im(f) = \{ v / v \in W \wedge (\exists u \in V) : f(u) = v \}$

- $Im(f) \neq \varnothing$ ya que al menos el vector $\bar{0}$ está en el conjunto ($f(\bar{0}) = \bar{0}$)
- $Im(f) \subset W$ por definición del conjunto imagen.
- $v \in Im(f)$, $v = f(u)$, $u \in V$ y $v' \in Im(f)$, $v' = f(u')$, $u' \in V$, $v + v' \in Im(f)$ ya que:
  $v + v' = f(u) + f(u') = f(u + u')$, entonces existe $u + u'$ en V del cual $v + v'$ es imagen
- $t \in K$ y $v \in Im(f)$, $v = f(u)$, $u \in V$ y resulta que $t . v \in Im(f)$ ya que:
  $t . v = t . f(u) = f(t.u)$, entonces existe en V un vector t.u del cual t.v es su imagen

- El subespacio de los vectores invariantes

Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo en V(K), el conjunto de vectores invariantes por f es un subespacio de V: $I = \{ u / u \in V \wedge f(u) = u \}$

Demostración:

- $I \neq \varnothing$ ya que al menos el vector $\bar{0}$ está en el conjunto ($f(\bar{0}) = \bar{0}$)
- $I \subset V$ por definición del conjunto.
- $u \in I$, $f(u) = u$ y $v \in I$, $f(v) = v$ entonces $u + v \in I$, ya que:
  $f(u + v) = f(u) + f(v) = u + v$ (por ser f lineal)
- $t \in K$ y $u \in I$, $f(u) = u$ entonces $t . u \in I$, ya que:
  $f(t . u) = t . f(u) = t . u$ (por ser f lineal)

Teorema 1:

Una función lineal $f : V \rightarrow W$, ambos espacios vectoriales sobre el cuerpo K, es inyectiva si el N (f) está formado sólo por el vector nulo. f es inyectiva $\Leftrightarrow N(f) = \{ \bar{0} \}$

Demostración:

- Implicación a derecha: Si f es inyectiva $\Rightarrow N(f) = \{ \bar{0} \}$

Si f es inyectiva no hay dos elementos que tengan la misma imagen, por lo tanto el vector nulo tiene una sola imagen que es el nulo del codominio (por propiedad de funciones lineales) y el núcleo está formado por los elementos que tienen como imagen al nulo de W, luego, $N(f) = \{ \bar{0} \}$

- Implicación a izquierda: Si $N(f) = \{ \bar{0} \} \Rightarrow$ f es inyectiva

El núcleo de f está formado sólo por el nulo de V.

FUNCIONES LINEALES

Sean u y v dos vectores del dominio de f tales que f (u) = f (v) , por ser f lineal resulta que: f (u) – f (v) = $\overline{0}$, entonces f (u – v) = $\overline{0}$, por lo tanto el vector u – v pertenece al núcleo de f, es decir que u – v = $\overline{0}$, ya que dijimos que el núcleo sólo tiene como elemento al $\overline{0}$, de aquí que si u – v = $\overline{0}$, entonces u = v , que por definición de inyectividad: si f (u) = f (v) $\Rightarrow$ u = v , lo que nos permite demostrar que si el N (f) = { $\overline{0}$ } entonces la función es inyectiva.

Teorema 2:
Una función lineal f : V $\rightarrow$ W, ambos espacios vectoriales sobre el cuerpo K, es suryectiva si la dimensión del conjunto imagen coincide con la dimensión del codominio.

f es suryectiva $\Leftrightarrow$ dim (Im (f)) = dim W

Demostración:

- Implicación a derecha: Si f es suryectiva $\Rightarrow$ dim (Im (f)) = dim W

Si f es suryectiva se verifica que Im (f) = W, por lo tanto tienen la misma dimensión ya que se trata del mismo conjunto.

- Implicación a izquierda: Si dim (Im(f)) = dim W $\Rightarrow$ f es suryectiva

dim (Im(f)) = n , entonces dim W = n, el conjunto Im (f) es un subespacio de W, el único subespacio de W que tiene su misma dimensión es el mismo W, por lo tanto resulta que Im (f) = W, que es la condición para que f sea suryectiva.

- <u>La suma de funciones lineales es siempre una función lineal</u>

Demostración:
V y W son dos K espacios vectoriales. Sean f : V $\rightarrow$ W y g: V $\rightarrow$ W dos funciones lineales, la función suma:
f + g : V $\rightarrow$ W tal que (f + g) (u) = f (u) + g (u) , es también lineal, ya que verifica:

- (f + g) (u + v) = f (u + v) + g (u + v) =	(por def. de la función suma)
= f (u) + f (v) + g (u) + g (v) =	(por linealidad de f y de g)
= (f (u) + g (u)) + (f (v) + g (v)) =	‘’
= (f + g) (u) + (f + g) (v)	(por def. de la función suma)

- (f + g) (t.u) = f (t.u) + g (t.u) =	(por def. de la función suma)
= t. f (u) + t . g (u) =	(por linealidad de f y de g)
= t . (f (u) + g (u)) = t . (f + g) (u)	(por def. de la función suma)

- <u>La composición de funciones lineales es una función lineal</u>

Demostración:
V , V’ y V’’ son K espacios vectoriales. Sean f : V $\rightarrow$ V’ y g: V’ $\rightarrow$ V’’ dos funciones lineales, la función compuesta:
f o g : V $\rightarrow$ V’’ tal que f o g (u) = g (f (u)) es también lineal ya que verifica:

- f o g (u + v) = g (f (u + v)) =	(por def. de función comp..)
= g (f (u) + f (v)) = g (f (u)) + g (f (v)) =	(por linealidad de f y g)
= f o g (u) + f o g (v)	(por def. de función comp.)

- f o g (k . u) = g (f (k . u)) =	(por def. de función comp..)
= g (k . f (u)) = k . g (f (u))	(por linealidad de f y g)
= k . f o g (u)	(por def. de función comp.)

FUNCIONES LINEALES

Teorema 3:
Sea f una función lineal de V (K) en W (K) y B = { u_1, u_2, ... , u_n} una base del dominio de f. La imagen de una base de V por una función lineal es una familia generatriz del subespacio imagen de la función.

Demostración:
f: $V \to W$ es una función lineal y B = { u_1, u_2, ... , u_n } una base de V
$u \to f(u)$
Por ser B una base de V todo vector u de V se expresa de manera única en ella:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n$$

Buscamos la imagen de u, es decir el vector f (u) = w , que pertenece a la Im (f):

$$f(u) = f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n) = w$$ por ser f lineal es posible hacer:

$$f(u) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + ... + a_n f(u_n) = w$$

Por lo tanto ese vector w del subespacio Im (f) se expresa como combinación lineal de los vectores de la familia: { f (u_1) , f (u_2) , ... , f (u_n) } , lo que implica que dicha familia es generatriz de Im (f).

Teorema 4:
Sea f una función lineal de V (K) en W (K) biyectiva, (isomorfismo) y B = { u_1, u_2, ... , u_n } una base del dominio de f.
La imagen de una base de V por un isomorfismo es una base de W.

Demostración:
f: $V \to W$ es un isomorfismo y B = { u_1, u_2, ... , u_n } una base de V
$u \to f(u)$
Por ser B una base de V todo vector u de V se expresa de manera única en ella:

$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n$ en particular el vector nulo:
$\overline{0} = b_1 u_1 + b_2 u_2 + ... + b_n u_n$ pero por ser B base resulta:
$b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ todos los escalares nulos

$f(u) = f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + ... + a_n f(u_n)$ por el teorema anterior la familia { f (u_1) , f (u_2) , ... , f (u_n) } es generatriz de Im (f), pero en este caso f es isomorfismo, por lo tanto es suryectiva, Im (f) = W , esto implica que la familia mencionada es generatriz de todo W.

$f(\overline{0}) = f(b_1 u_1 + b_2 u_2 + ... + b_n u_n) = b_1 f(u_1) + b_2 f(u_2) + ... + b_n f(u_n) = \overline{0}'$, pero en la combinación lineal del vector nulo dijimos: $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$
Entonces en la combinación lineal: $b_1 f(u_1) + b_2 f(u_2) + ... + b_n f(u_n) = \overline{0}'$ por ser los escalares todos nulos indica que la familia { f (u_1) , f (u_2) , ... , f (u_n) } es libre en Im (f) = W

En conclusión { f (u_1) , f (u_2) , ... , f (u_n) } es libre y generatriz de W, por lo tanto es una base de él.

Teorema 5:
Sea f una función lineal de V (K) en W (K) y B = { u_1, u_2, ... , u_n } base de V, es decir que dim V = n . Se puede demostrar que:

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(N(f))$$

Este teorema se conoce como teorema de la dimensión.

FUNCIONES LINEALES

- Matriz asociada a una función lineal:

Se tiene una función lineal $f : V \to W$ ambos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K
$u \to f(u)$

$B = \{ u_1, u_2, ..., u_n\}$ es una base de V, $B' = \{ u'_1, u'_2, ..., u'_m\}$ es una base de W, si se conoce:

$f(u_1) = a_{11} u'_1 + a_{21} u'_2 + ... + a_{m1} u'_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $f(u_2) = a_{12} u'_1 + a_{22} u'_2 + ... + a_{m2} u'_m = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}$

. . . , $f(u_n) = a_{1n} u'_1 + a_{2n} u'_2 + ... + a_{mn} u'_m = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

Entonces la imagen de un vector u de V es un vector w de W : $f(u) = w$

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + ... + \alpha_n f(u_n) = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta m \end{pmatrix} = w$$

La matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ que contiene a las imágenes de los vectores básicos de B expresados en B' se llama matriz asociada a la función lineal f en dichas bases.

Ejemplo 1:
Si se trabaja con las bases canónicas en dominio y codominio.

$f : IR^3 \to IR^2$ tal que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$

Se halla la imagen de los vectores de la base canónica de IR^3:

$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ luego $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a esta función en las bases canónicas.

FUNCIONES LINEALES

A partir de ella es posible hallar la imagen de algún vector del dominio: u = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ por ejemplo,

entonces hacemos A . u = f (u): $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2:
Cuando en dominio y codominio se conocen bases distintas de las canónicas.

En IR^2 se tiene la base B = ((-1,1), (1,2)) y en IR^3 se tiene B' = ((1,1,1), (1,1,0), (-1,0,0))

$f : IR^2 \rightarrow IR^3$ dada por f $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$

Hallamos la imagen de los vectores de B y los expresamos en la base B':

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a f en las bases B y B'

Si queremos hallar a partir de ella la imagen de un vector cualquiera de IR^2, u = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ por ejemplo, basta con hacer: A . u = f (u) : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ esta es la imagen de u en las bases B y B' dada en IR^2 y IR^3 respectivamente.

De no disponer de esta matriz A asociada a la función en las bases B y B', habría que determinar a la función f en la base B, luego calcular con ella la imagen del vector u, y a esa imagen obtenida expresarla en la base B' del codominio.

La matriz asociada a una función lineal tiene m filas y n columnas, el número de filas lo determina la dimensión del codominio y el número de columnas la dimensión del dominio.