ANALISIS NUMERICO

TRABAJO PRÁCTICO:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Objetivos:

- *Reconocer si un sistema de ecuaciones lineales es estable, a partir del análisis del condicionamiento de la matriz asociada al mismo.*
- *Tomar conciencia de los errores que se cometen al resolver un sistema de ecuaciones lineales en función al método seleccionado.*
- *Resolver sistemas de ecuaciones lineales por métodos iterativos y métodos computacionales.*

Primera parte:

Problema 1.- Considere los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, se quiere analizar su posible estabilidad:

$$\begin{cases} 0.7290x + 0.8100y + 0.9000z = 0.6867 \\ 1.000x + 1.000y + 1.000z = 0.8338 \\ 1.3310x + 1.2100y + 1.1000z = 1.0000 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x + 1y - 1z = 6.5 \\ 6.875x + 2.25y + 4z = 1.6875 \\ -2.5x - 3y + 2z = 1.75 \end{cases}$$

En cada caso:

a) Resuelva por algún método directo tal cual se presenta. (Calculadora)

b) Resuelva aproximando el sistema dado a dos cifras decimal

c) Compare las soluciones obtenidas al resolver el sistema como estaba y al haber aproximado a dos cifras decimales. ¿Qué puede decir al respecto?

d) Determine el número de condición y compruebe que los resultados obtenidos en los puntos anteriores con coherentes con él.

Problema 2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, se pretende analizar su estabilidad.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

Escríbalo en forma matricial, podrá notar que se trata de una matriz tridiagonal muy comunes en problemas de ingeniería. Demuestre que está bien condicionada. Concluya.

Problema 3.- Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x - y + z = -1 \\ -x + 4y - z = 0 \\ x + 2y - 5z = 4 \end{cases}$$

a) Resuelva por el método de Jacobi hasta el paso 6.

b) Determine si el sistema está bien condicionado.

Problema 4.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 8x - 2y + z = 1 \\ x + 3y + z = 9 \\ x - y + 5z = 11 \end{cases}$$

a) Resuelva por el método de Jacobi realizando seis iteraciones y trabajando con cuatro cifras decimales como mínimo.
b) Analice el condicionamiento del sistema.

Problema 5.- Considere los sistemas de ecuaciones lineales dados en los problemas 3 y 4.

Resuélvalos por el método de Gauss Seidel.

Problema 6 - Un problema de análisis estructural de Ingeniería requiere resolver, para el cálculo de momentos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3\ x_1 + 1\ x_2 + 2{,}4\ x_3 = 0 \\ 1\ x_1 + 5\ x_2 + 0{,}3\ x_3 = 0 \\ -41\ x_1 + 52\ x_2 - 209{,}1\ x_3 = -500 \end{cases}$$

a) Analice su condicionamiento.

b) Resuelva por Jacobi y por Gauss Seidel hasta el paso 6 sistematizando en una tabla los valores obtenidos inclusive el grado de precisión o error en cada paso.

c) Concluya respecto al grado de precisión obtenido con ambos métodos.

Problema 7.- Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 9 \\ 9x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

a) Analice si cumple con el criterio de convergencia.

b) Resuelva por Jacobi, tres pasos y concluya.

c) ¿Qué modificaciones haría para que se cumpla el criterio?

d) Realice esas modificaciones y resuelva por Gauss Seidel hasta el paso 6 indicando el grado de precisión obtenido.

Problema 8.- Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

Realice en el sistema dado las operaciones necesarias para que la matriz asociada sea dominante en su diagonal principal, resuelva nuevamente por Gauss Seidel pero hasta obtener un grado de precisión $\alpha < 0.001$

$$\begin{cases} 0.1\, x_1 + 7.0\, x_2 - 0.3\, x_3 = -19.30 \\ 3.0\, x_1 - 0.1\, x_2 - 0.2\, x_3 = 7.85 \\ 0.3\, x_1 - 0.2\, x_2 - 10.0\, x_3 = 71.40 \end{cases}$$

Segunda Parte: Trabajo de laboratorio

Para resolver siguientes problemas, vamos a usar planilla Excel, aunque también necesitaremos un poco de trabajo manual.

Problema 1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma matricial: A. X = B, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 5{,}11 & -4 & 3{,}33 & -1{,}11 \\ -2{,}01 & 1{,}41 & 0{,}5 & 2{,}95 \\ 1 & 0{,}333 & 1{,}5 & -0{,}333 \\ 4{,}321 & -1{,}95 & 0 & 2{,}8 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3{,}77 \\ 5{,}4 \\ 3 \\ 0{,}13 \end{pmatrix}$$

a) Resuélvalo con Excel
b) Aproxime los valores a una cifra decimal y resuelva nuevamente con Excel
c) Determine el condicionamiento del problema y analice si las soluciones obtenidas son coherentes con él.

Problema 2.- Considere la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 0 & b & b \\ 0 & a & b & b \\ b & b & a & 0 \\ b & b & 0 & a \end{pmatrix}$ con a y b no nulos, asociada a un sistema de ecuaciones lineales A.X = B con B = $(1, -1, 0, 1)^t$

a) Para qué valores de a y de b este sistema converge para los métodos iterativos de Jacobi y Gauss Seidel

b) Resuelva por Gauss Seidel para a = -5 y b = $\sqrt{3}$ trabajando con cinco cifras decimales hasta diez iteraciones.

c) Analice el condicionamiento del sistema

d) Resuelva con Excel aproximándolo a tres cifras decimales y verifique su respuesta anterior comparando con los resultados obtenidos en (b)

Problema 3 - Dado el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial: A . X = B , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 16 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 12 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 36 \\ 56 \\ 52 \\ 80 \end{pmatrix}$$

a) Analice la convergencia para los métodos iterativos y resuelve hasta el paso seis por el método de Jacobi y por el de Gauss - Seidel, examine en cuál de los dos casos se logró que el error $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_{\infty} < 10^{-3}$

b) Compare los resultados obtenidos anteriormente con los considerados exactos a partir de la obtención de la solución por MathCad (resolución computacional).

Problema 4.- Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -1 \\ x + \ y + 3z = 6 \\ \qquad 4y + z = 9 \end{cases}$$

a) Encuentre la solución del sistema por algún método directo.

b) Determine el condicionamiento del sistema. ¿Qué le indica este valor?

c) ¿Es posible resolver el sistema por algún método iterativo? ¿Por qué?

d) Si su respuesta anterior fue negativa realice el tratamiento necesario en el sistema para que pueda ser resuelto. Si su respuesta fue positiva resuelva por algún método iterativo.

e) Resuelva por el método de Jacobi y por Gauss-Seidel con seis iteraciones. Calcule el error en cada iteración.

f) Según los resultados encontrados anteriormente y estimando un error menor a un centésimo, qué método arroja mejor convergencia. ¿Por qué?
