7 - Procesos estocásticos

27 July 2020 03:03

Funciones Aleatorias

Una **variable aleatoria** se define como una función ($X_{(\omega)}$) que representa gráficamente el *resultado de un experimento* a los números reales, donde ω es un *elemento del espacio muestral* Ω

Si la variable aleatoria es *a su vez* función de otra magnitud (como el tiempo) entonces, se llama **PROCESO ESTOCASTICO**.
Un proceso estocástico es una *función de dos variables* t y ω, una determinista y la otra aleatoria.

$X_{(t,\omega)}$ donde $t \in T$ y $\omega \in \Omega$

Donde:
T es un *conjunto de parámetros índice* (continuos/discretos)
Ω es el *espacio muestral*

Hay 4 posibilidades para $X_{(\,.\,,\,.\,)}$:

- Para cualquier t, ω | $X_{(t,\,\omega)}$ es una función aleatoria
- Para t variando y ω fija, $\omega = \omega_i$ | $X_{(t,\,\omega_i)}$ es una función del tiempo o realización
- Para ω variando y t fija, $t = t_i$ | $X_{(t_i,\,\omega)}$ es una función variable aleatoria
- Para t y ω fijas, $\omega = \omega_i$ y $t = t_i$ | $X_{(t_i,\,\omega_i)}$ es un número

Hay magnitudes aleatorias que *varían* sus valores *en el proceso* del experimento, estas representan una función aleatoria. Por lo que, se llama función aleatoria a aquella cuyo valor, para cada valor del argumento (o argumentos) es una variables aleatoria.

Las funciones concretas que pueden ser registradas durante *una sola observación* de la función aleatoria se llaman realizaciones de la misma. Por lo que si se repite la prueba, se obtienen *distintas* realizaciones de la función aleatoria

Nomenclatura

Generalmente se indican con una *letra latina mayúscula* (normalmente las ultimas)
En *letras minúsculas* se designa el argumento de la función aleatoria.

Es posible representar *realizaciones*, pero **no** lo es con la *función aleatoria*.

Los valores de la función aleatoria de un argumento discreto tienen una *secuencia de magnitudes aleatorias* llamadas secuencia aleatoria.

Función aleatoria: *conjunto* de magnitudes aleatorias $X_{(t)}$ que *representan* los valores de la misma para *diferentes* valores de **t**:

$$X_t = X_{(t)} \qquad\qquad \alpha < t < \beta$$

Quiere decir, que la función aleatoria es *equivalente* a un conjunto infinito de variables aleatorias.
El valor de una función aleatoria escalar, para cualquier valor fijado de argumento **t**, es una magnitud aleatoria corriente.
Cualquier magnitud aleatoria se *describe* por su ley de distribución. La característica completa del valor de la función aleatoria, para cualquier valor fijado de **t**, es la densidad de probabilidad de este valor, designada como $f1_{(x;\,t)}$
x *designa* el valor posible de la función aleatoria $X_{(t)}$ para un valor fijo de **t**.
t sirve de *parámetro*, del cual *depende* la densidad de probabilidad $f1_{(x;\,t)}$

Sin embargo, para la característica completa de la función aleatoria se debe tomar derivadas e integrales, para poder examinar ordenadas de una función aleatoria conjuntamente.
Por lo que, se *fijan* dos valores del argumento **t**: **t1** y **t2**, a los que les *corresponden* los valores $X_{(t1)}$ y $X_{(t2)}$ de la funcion aleatoria. Estos *pueden caracterizarse por la densidad conjunta de probabilidad* $f2_{(x1,\,x2;t1,t2)}$ que se llama densidad bidimensional de probabilidad de la funcion aleatoria $X_{(t)}$

Partiendo de los conceptos de densidad bivariada, la densidad univariada queda *definida* por la densidad bivariada como:

$$f1(x1\,,t1) = \int_{-\infty}^{\infty} f2(x1\,,x2\,,t1\,,t2)\;dx2$$

La densidad bidimensional de probabilidad de una función aleatoria representa una *característica **mas** completa* de la misma, ya que a través de esta se puede *determinar* la unidimensional.
Sigue sin ser completa, se puede seguir hasta **n** dimensiones, donde cada densidad de distribución *posterior* es una característica *mas completa* de la función aleatoria que todas las densidades *anteriores*.

La característica de probabilidad completa de una magnitud aleatoria resulta ser *muy compleja*. En la práctica se *simplifica* siendo necesario conocer los momentos de primer y segundo orden

En el caso de la función aleatoria *normalmente distribuida*, toda la secuencia infinita de densidades de probabilidad se determina *por completo* si se conoce la densidad bidimensional de probabilidad.

Esperanza matemática de una función aleatoria

Se *fija* el valor de **t** y se *examina* el valor de la función aleatoria como una variable aleatoria común. El valor de esta esperanza *depende* del valor elegido de **t**. Si se toman todos los valores posibles de **t**, se obtiene una función $m_{x(t)}$ a la cual se la llama Esperanza matematica de la

<u>funcion aleatoria</u> $X_{(t)}$

$m_{x_{(t)}} = M[X_{(t)}]$

Esperanza matemática de la función aleatoria *expresada* por su <u>densidad unidimensional de probabilidad</u>:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f1(x,t)\, dx$$

Para cada valor dado de **t**, la ordenada de la curva $m_{x(t)}$ representa el <u>valor medio</u> de la función aleatoria $X_{(t)}$ para ese valor de **t**. Ya que la esperanza matematica representa el valor medio de una magnitud aleatoria.
La esperanza matemática de la función aleatoria es entonces una <u>curva media</u> alrededor de la cual se *disponen las realizaciones posibles* de la función aleatoria

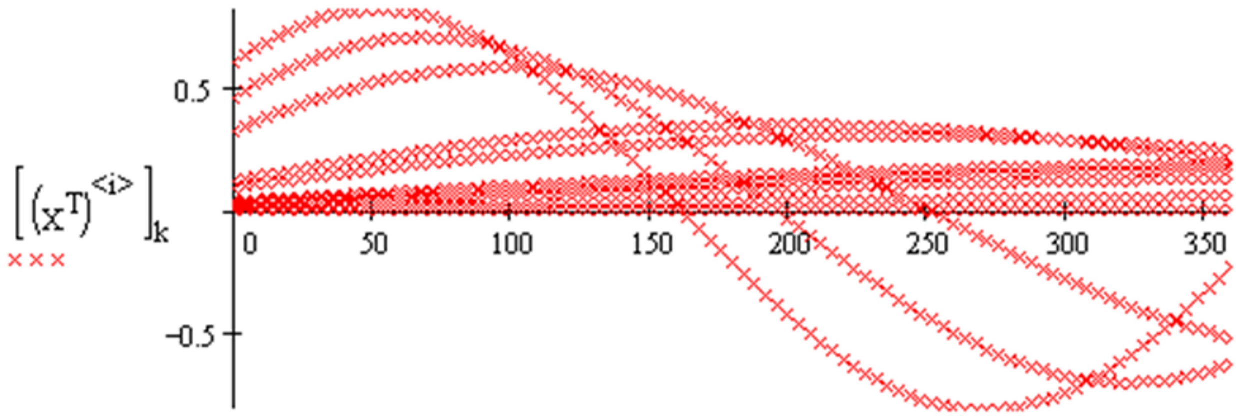
<u>Ej:</u>

Función aleatoria:

$$X_{i,k} := U_i \cdot \sin\left(t_k \cdot \frac{\pi}{180} \cdot U_i + U_i\right)$$

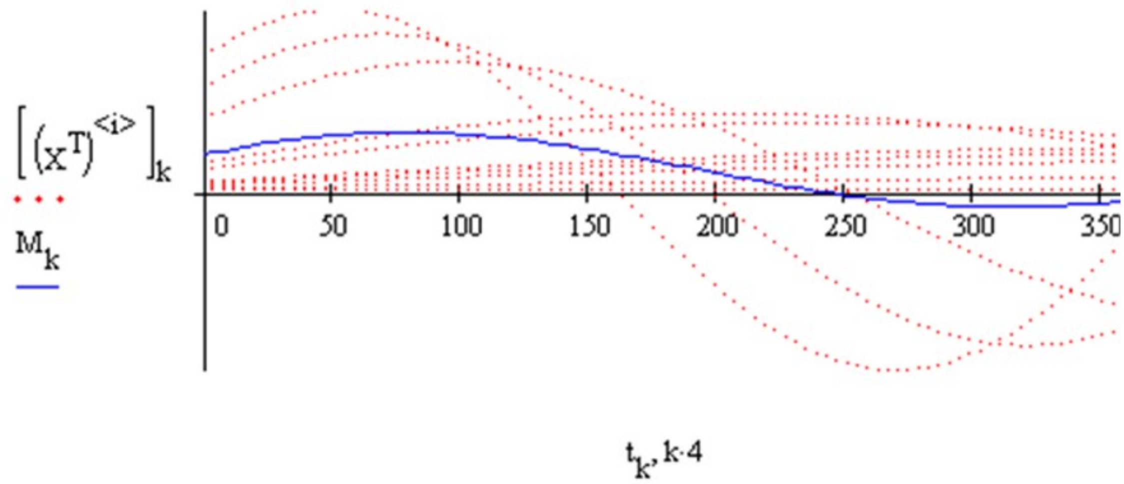
- **i** marca las <u>realizaciones</u>
- **k** marca los <u>valores</u> dentro de la realización

Se genera una *matriz* donde las filas son las realizaciones de cada función aleatoria.



Se calculan las *medias de las realizaciones* en cada uno de los puntos, se encuentra la <u>media de la función aleatoria</u>

$$M_k := \mathrm{mean}\left(X^{\langle k \rangle}\right)$$



Dispersión de una función aleatoria

Al tomar solo la esperanza, se están *despreciando* todas las desviaciones aleatorias posibles. Entonces un *factor importante* también es el de las desviaciones aleatorias *respecto* de estos valores medios.

Para caracterizar la *fluctuación* de las realizaciones de una función en torno a su esperanza matemática, se puede aprovechar la dispersión (varianza) de dicha función.
Por definición, va *expresada por* la densidad unidimensional de probabilidad de función aleatoria:

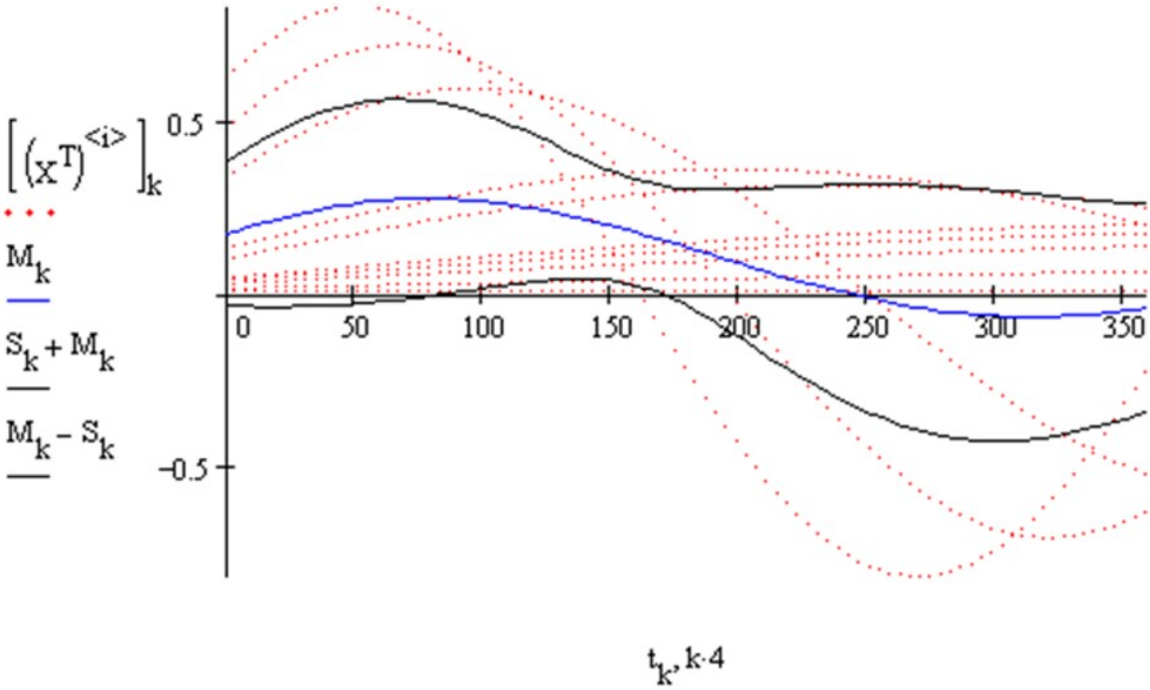
$$\mathbf{D_X(t) = M \{ [X(t) - m_X(t)]^2 \}\} = M \{ [X^0(t)]^2 \}\}}$$

$$D_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_X(t)\right)^2 \cdot f1(x,t)\, dx$$

Tanto la esperanza matemática como la dispersión (varianza), son características numéricas para cada valor dado del argumento **t**.

Determinan la **banda** que se llena por las *realizaciones posibles* de la función aleatoria.

$S_k := \mathrm{stdev}\left(X^{\langle k \rangle}\right)$ el vector S contiene las desviaciones standard en cada punto considerado de la función aleatoria



Función de correlación de una función aleatoria

La esperanza matemática y la varianza **no** *determinan* la conducta de las realizaciones posibles de la función aleatoria *dentro* de la banda.
Dos funciones aleatorias pueden tener misma esperanza matemática y varianza pero comportamiento *completamente diferente*.

Se necesita conocer el *grado de variabilidad* de sus realizaciones, la rapidez de cambio de las mismas al variar el argumento **t**.

Para ilustrar gráficamente esto, se llevan a un plano cartesiano los valores. Al eje x1 los valores de la ordenada aleatoria $X_{(t1)}$ y al eje x2 los valores de la ordenada aleatoria $X_{(t2)}$. Se toman una *gran cantidad* de realizaciones y se marcan los puntos $\left[X_{(t1)}, X_{(t2)}\right]$

La segunda grafica presenta una *dependencia mas fuerte*.

Para *caracterizar el grado de dependencia* de los valores de una función aleatoria correspondientes a dos valores diferentes del argumento, se puede usar el momento de correlación de estos valores de la función aleatoria.

Función aleatoria centrada: *Diferencia* entre la función aleatoria y su esperanza matemática

$$X^0{}_{(t)} = X_{(t)} - m_{x(t)}$$

El momento de correlación de los valores $X_{(t)}$ y $X_{(t')}$ de la función aleatoria $X_{(t)}$, correspondientes a los valores arbitrarios del argumento **t** y **t'** es:

$$k_{x(t,\,t')} = E\left[X^0{}_{(t)} X^0{}_{(t')}\right]$$

dando a **t** y **t'** *todos* los valores posibles en la zona de variación del argumento de la función aleatoria $X_{(t)}$, se obtiene la *función de dos variables* **t** y **t'** que se denomina función correlativa (o autocorrelativa) de la función aleatoria $X_{(t)}$
La función correlativa de la función aleatoria es el *momento de correlación* de sus valores para dos valores del argumento **t**, **t'**.
Cuando *coinciden* los valores de los argumentos $t = t'$, el segundo miembro representa la *esperanza matemática del cuadrado de la función aleatoria centrada*, es decir, la dispersión de la función aleatoria

$$k_{x(t,\,t')} = k_{x(t,\,t)} = E\left[(X^0{}_{(t)})^2\right] = D_{x(t)}$$

La función correlativa de una función aleatoria también *determina* la dispersión.

Para calcular la función correlativa de una función aleatoria *se debe conocer la densidad bidimensional de probabilidad*:

$$k_X(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_X(t)\right)\cdot\left(x' - m_X(t')\right)\cdot f2(x,x',t,t')\,dx\,dx'$$

Para esta formula y la que se usa para calcular la esperanza matemática se necesita conocer la densidad bidimensional (y por consiguiente la unidimensional) de probabilidad. Sin embargo *muchas veces* se pueden emplear métodos *mas simples*.
Una de esas formas es utilizar la función correlativa normada en vez de la función correlativa para *caracterizar el enlace* entre los valores de una magnitud aleatoria.
Esta función de correlación normada *representa* el coeficiente de correlación de los valores de la función aleatoria para dos valores del argumento.

La función correlativa normada de una función aleatoria normada de una función aleatoria $X_{(t)}$ se *determina* por la formula:

$$R_X(t,t') = \frac{k_X(t,t')}{\sqrt{D_X(t)\cdot D_X(t')}} = \frac{k_X(t,t')}{\sqrt{k_X(t,t)\cdot k_X(t',t')}}$$

Momento inicial de segundo orden:
Se *determina* como el momento inicial mixto de segundo orden de sus valores para los valores *arbitrariamente elegidos* **t** y **t'** de su argumento

$$\Gamma_X(t,t') = M(X(t)\cdot X(t')) = k_X(t,t') + m_X(t)\cdot m_X(t')$$

De acuerdo a la *definición* del momento de correlación de las magnitudes aleatorias complejas, la función correlativa de una función aleatoria compleja $X_{(t)}$ se *determina* por :

$$\mathbf{k_X(t, t') = M[X^0(t) . X^0(t')^*]}$$

Donde $\mathbf{X^0(t')^*}$ es el conjugado de $\mathbf{X^0(t')}$.

Propiedades de las esperanzas matemáticas

1. La esperanza matemática de cualquier magnitud **no** aleatoria es *igual* a la propia magnitud

   $M_{(c)} = c$

2. La esperanza matemática del *producto* de una magnitud **no** aleatoria por una aleatoria es igual al *producto* de la primera magnitud por la esperanza matemática de la segunda

   $M_{(cZ)} = cM_{(Z)}$

3. La esperanza matemática de la *suma* de dos magnitudes aleatorias es igual a la *suma* de sus esperanzas matemáticas

   $M_{(Z+Y)} = M_{(Z)} + M_{(Y)}$

4. La esperanza matemática de una función lineal de variables aleatorias de la forma:

$$U = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot Z_i + b\right]$$

es igual a la misma función de las esperanzas matemáticas de estas magnitudes:

$$m_u = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m_{z_i} + b \right]$$

<u>Propiedades de las dispersiones y de los momentos de correlación</u>

1. La <u>dispersión</u> de cualquier magnitud **no** aleatoria es igual a **cero** y el <u>momento de correlación</u> de dos magnitudes **no** aleatorias es igual a **cero**
2. El <u>momento de correlación</u> del *producto* de cualquier magnitud aleatoria con otra **no** aleatoria es siempre igual a **cero**
3. La <u>dispersión</u> del *producto* de una magnitud aleatoria por otra **no** aleatoria es igual al *producto* de la dispersión de la magnitud aleatoria por el *cuadrado* del modulo de la **no** aleatoria

   $D_{(cX)} = |c|^2 D_{(x)}$

4. El momento de correlación de las magnitudes aleatorias

   $U = aX$
   $V = bY$

   donde **a** y **b** son constantes *complejas* (para generalizar) *arbitrarias* y X e Y son magnitudes aleatorias, se determina por la formula

   $k_{uv} = a\bar{b}k_{XY}$

5. Si las magnitudes aleatorias U y V representan funciones lineales de las magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$U = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i + b \right] \qquad V = \left[\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot X_i + d \right]$$

   entonces la <u>dispersión</u> de la magnitud aleatoria U y el momento de correlación de las magnitudes aleatorias U y V se determinan por las formulas:

$$D_u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot \bar{a}_j \cdot k_{ij} \qquad k_{uv} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot \bar{c}_j \cdot k_{ij}$$

   donde k_{ij} es el <u>momento de correlacion</u> de las magnitudes aleatorias X_i, X_j

Cuando $i = j$, la magnitud k_{ij} representa la dispersión de la magnitud aleatoria X_i

6. En el caso particular, cuando se trata de magnitudes aleatorias **no** correlacionadas $X_1, X_2, \dots, X_n$ las magnitudes k_{ij} con *distintos indices* son iguales y las formulas anteriores se convierten en:

$$D_u = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i\right)^2 \cdot D_i \qquad k_{uv} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{c_j} \cdot D_i$$

Donde $D_i = k_{ij}$ es la dispersión de la magnitud aleatoria X_i $\qquad i = 1, 2, \dots, n$

Un caso particular del punto 5 es:

$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Luego:

$$D_u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}$$

7. Y si las magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ **no** están correlacionadas:

$$D_u = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

.
Las ultimas dos formulas son *aplicables a cualquier* magnitud aleatoria **no** correlacionada. En particular, validas para *magnitudes aleatorias independientes*

Funciones aleatorias estacionarias

Se llaman estacionarios a procesos que **no** dependen del *tiempo de observación*. Son *invariantes* con respecto a cualquier declaración del tiempo.
Una función aleatoria $X_{(t)}$ es estacionaria si *determinadas* características probabilísticas de la función aleatoria $X_{(t+\Delta)}$, cualquiera sea Δ, *coincide* idénticamente con las características correspondientes a $X_{(t)}$

La esperanza matemática y la dispersión son *constantes* y su función correlativa depende solo de la diferencia de los argumentos **t** y **t'**. Deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$m_X(t) = m_X(t+\Delta) \qquad k_X(t,t') = k_X(t+\Delta, t'+\Delta)$$

cualquiera sea Δ.
Poniendo en la primera $\Delta = -t$ se obtiene:

$m_{x(t)} = cte$

Si en la segunda $\Delta = -t'$ se obtiene:

$$k_X(t,t') = k_X(t-t', 0)$$

La <u>dispersión</u> de la función aleatoria $X_{(t)}$ es igual al valor de su fución correlativa cuando $t = t'$
Por eso, lo anterior:

$$D_X(t) = k_X(t,t) = k_X(0,0) = D_X(0) = cte$$

Designando la función de una variable $t - t'$ por $k_{x(t-t')}$, se puede escribir

$$k_X(t,t') = k_X(t-t') = k_X(\tau) \qquad \text{donde} \qquad \tau = t - t'$$

Si la función es estacionaria, dondequiera que se elija un intervalo τ de longitud dada en el eje de las variables independientes **t**, los valores de la función aleatoria tienen en los *extremos* de este intervalo un mismo <u>momento de correlacion</u> $k_{x(\tau)}$
Cuando se trata solo con la esperanza matemática y las funciones correlativas, basta con la *constancia* de la esperanza matemática y la *dependencia* de la función de correlación solo de la diferencia de los argumentos para *considerar* estacionaria a un función aleatoria.

Las funciones aleatorias cuyas esperanzas matemáticas son constantes y las funciones correlativas dependen solo de la diferencia de los argumentos son <u>estacionarias en el sentido amplio</u>.

Aquella función aleatoria que posea esperanza matemática *variable* pero función correlación que *solo depende* de los argumentos, es estacionaria **no** *esencial*, puesto que la función aleatoria centrada $X^0{}_{(t)} = X_{(t)} - m_{x(t)}$ es estacionaria *siempre* que la funcion correlativa de la funcion aleatoria *dependa* solo de la *diferencia* de argumentos

La función correlativa de cualquier función aleatoria es *simétrica*, **no** cambia de valor al permutar los valores de los argumentos.
La función correlativa de una función aleatoria estacionaria satisface la *condición*:

$$k_X(t-t') = k_X(t'-t) \qquad \text{o bien} \qquad k_X(\tau) = k_X(-\tau)$$

$$|k_X(\tau)| \le k_X(0) = D_X$$

De modo que, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, cualquiera sea τ, **no** puede ser en magnitud absoluta, *mayor* que su valor *correspondiente* en el origen de coordenadas

Ejemplos de funciones aleatorias

En un caso mas general, cuando:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot f_i(t)$$

Donde:

- $f_{1(t)}, f_{2(t)}, \ldots, f_{n(t)}$ son funciones **no** aleatorias, en el caso mas general *complejas*.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son magnitudes aleatorias cualesquiera con esperanzas matemáticas de una funcion arbitrarias *finitas*, y momentos de segundo orden

Esperanza matemática:

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \cdot f_i(t)$$

ya que los valores de la función aleatoria que se examinan son, para dos valores del argumento *arbitrariamente elegidos*, funciones lineales de las mismas magnitudes aleatorias, se puede aplicar la propiedad 6:

$$k_X(t, t') = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} \cdot f_i(t) \cdot f_j(t')$$

donde k_{ij} es el momento de correlacion de las magnitudes aleatorias
$\mathrm{X_i}, X_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \;\; y \;\; k_{ij} = D_{(X)j}$

Con la función aleatoria:

$$X(t) = U \cdot \sin(\Omega \cdot t) + V \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

Donde U, V y Ω son magnitudes aleatorias *independientes*, las magnitudes **U** y **V** tienen medias nulas y las *mismas dispersiones* **D**, y la magnitud aleatoria Ω tiene densidad de probabilidad

$f_{(\omega)}$
La esperanza matemática de la función aleatoria $X_{(t)}$ es **cero**
La función correlativa condicional de la función aleatoria $X_{(t)}$ para el valor dado de $X_{(t)}$ de la frecuencia Ω

$$\mathbf{k_X (t , t' / \omega) = M [X(t) . X(t) / \Omega = \omega] = D . \cos [\omega . (t - t')]}$$

Para *hallar* la función correlativa de la función aleatoria $X_{(t)}$ hay que *multiplicar* la función correlativa condicional hallada, con el elemento correspondiente de probabilidad $f_{(\omega)} d\omega$ e *integrar* con respescro a todos los valores posibles de ω de la magnitud aleatoria Ω. Teniendo en cuenta que su densidad de probabilidad $f_{(\omega)}$ es igual a 0 para $\omega < 0$, se obtiene:

$$k_X(t,t') = D \cdot \int_0^{\infty} f(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot (t - t'))\, d\omega$$

En el caso concreto cuando:

$$f(\omega) = \frac{2 \cdot \alpha}{\pi \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2\right)}$$

En este caso queda:

$$k_X(t,t') = \frac{2 \cdot \alpha \cdot D}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega \cdot (t - t'))}{\left(\alpha^2 + \omega^2\right)}\, d\omega$$

La integral queda:

$$k_X(t,t') = D \cdot e^{-\alpha \cdot |t - t'|}$$

Numéricamente, el planteo podría ser:

$$f(\omega) := \frac{2 \cdot \alpha}{\pi \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2\right)}$$

función densidad de la distribución de frecuencias.

La *integral* de esta función dará la Función Distribución:

$$F(\omega) := 2 \cdot \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}{\pi}$$