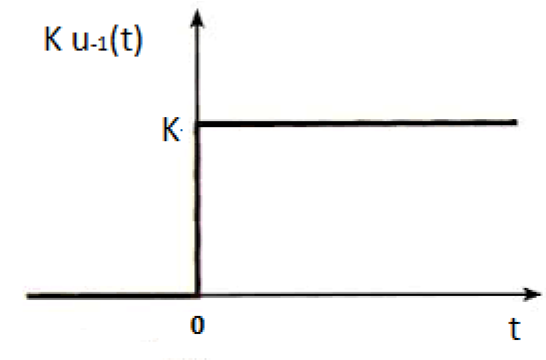
TRANSFORMADA DE LAPLACE

Resolución de funciones simples:

1) Función constante:



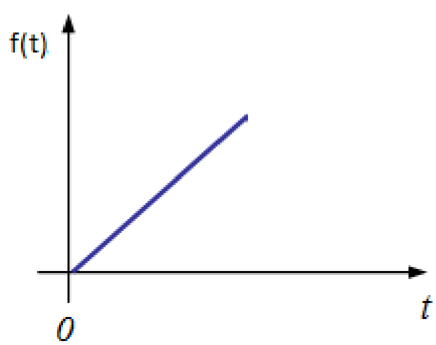
En este caso se multiplica la función constante por un escalón unitario, para asegurarse de que comienza en t=0; porque de lo contrario el valor de la función constante es el mismo desde ($t= -\infty$) hasta ($t= \infty$).

$\mathcal{L}[\mathrm{Ku}_{-1}(\mathrm{t})] = \int_0^\infty K.u_{-1}(t)e^{-st}\,dt$

Donde $u_{-1}(t) = 1$ para $0 < t < \infty$; luego

$\mathcal{L}[\mathrm{Ku}_{-1}(\mathrm{t})] = \mathrm{K}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \mathrm{K}\,(1/\text{-s})\,[e^{-st}]_0^\infty = -\frac{K}{s}(e^{-\infty} - e^{-0}) = \boxed{\mathbf{K/s}}$

2) Función rampa:



La función rampa recuerda a la función identidad (y=x) que es una recta a 45°, pero con la salvedad en este caso, por tratarse de una función del tiempo, que por lo tanto comienza a partir de (t=0).

si f(t) = t; su Transformada de Laplace, aplicando la definición, será

$\mathcal{L}[\mathrm{f(t)}] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty t e^{-st}\,dt$

que es una integral que se debe resolver por partes, de manera que:

$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} u dv = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du$

donde:

$u = t$

$du = dt$

$e^{-st}\, dt = dv$

$v = -1/s\, e^{-st}$

reemplazando:

$\mathcal{L}[f(t)] = -[(\frac{t}{s})e^{-st}]_0^{\infty} - (-1/s) \int_0^{\infty} e^{-st} dt$

donde, el corchete

$[\frac{t}{s}.e^{-st}]_0^{\infty}$ para $t=\infty$ presenta una indeterminación del tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ porque $e^{-st} = 1/e^{st}$

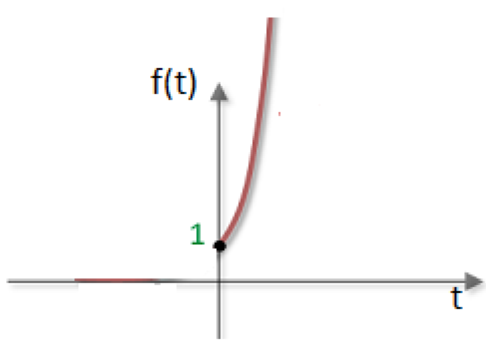
pero esa indeterminación, si se resuelve por Regla de L'Hôpital, da cero, luego resulta:

$[\frac{t}{s}e^{-st}]_0^{\infty} = 0$

entonces:

$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}(-\frac{1}{s})[e^{-st}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s^2}(e^{-\infty} - e^{0}) = \boxed{1/s^2}$

3) <u>Función exponencial</u>:



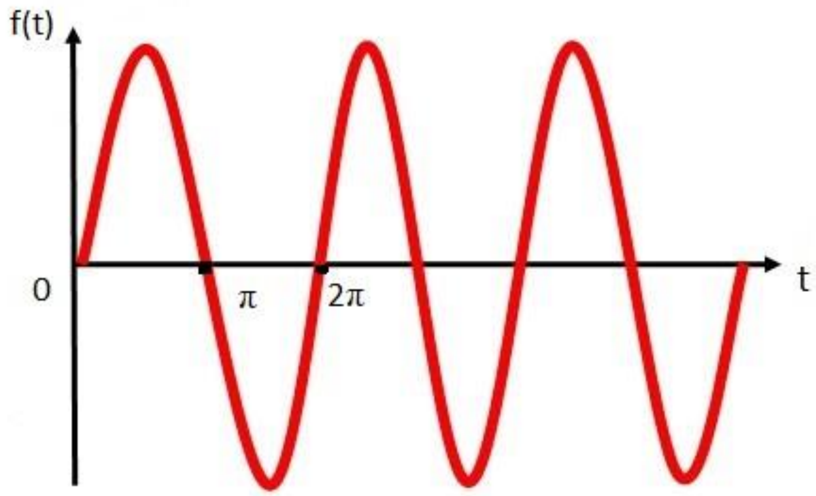
Si $f(t) = e^{at}$; entonces

$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt$

y, agrupando los exponenciales

$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{(s-a)}(e^{-\infty} - e^{0}) = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{s-a})}}$

4) Función seno:



Si f(t) = sen bt

será

$\mathcal{L}[\text{sen bt}] = \int_0^{\infty} \text{sen bt}\, e^{-st} dt$

como las derivadas de ambas funciones, senoidal y exponencial, son recursivas, se complica resolverlo por partes. En su lugar es mejor hacer el reemplazo usando fórmulas de Euler:

$\text{sen bt} = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}$

si se reemplaza y se resuelve la integral se obtendrá $F(s) = \boxed{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{s}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$

Sugerencia: Observar y aplicar para este caso la misma mecánica de resolución de la transformada de la función exponencial vista en el punto anterior. De un modo análogo se puede calcular la transformada de la función [cos t].