UM
UNIVERSIDAD DE MENDOZA

ANÁLISIS NUMÉRICO

Ing. José Luis Artal
Dra. Ana Nuñez
Lic. Sergio Fuentes

ECUACIONES NO LINEALES

El objetivo de este capítulo es estudiar algunos métodos numéricos para hallar raíces reales de una ecuación no-lineal en una variable. En la siguiente definición formalizamos el concepto de raíz de una ecuación.

Definición 2.1 Sea $f:D \rightarrow R$ $D \subseteq R$, una función dada. Un número $\alpha \in D$ se dice una raíz (en D) de la ecuación $f(x) = 0$, o un cero (en D) de la función f si $f(x) = 0$.

Como veremos, los métodos numéricos que estudiaremos para encontrar una raíz α de una ecuación $f(x) = 0$, generarán una sucesión $\{x\}_n$, $n = 0,1,2$ (Métodos iterativos) tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$. Cualquiera de tales métodos numéricos permitirá calcular los términos de la sucesión $\{x_n\}_n$ así que no se espera, en general, calcular $\lim_{n \to \infty} x_n$.

Por lo tanto, deberemos disponer de algún criterio para escoger un término de la sucesión como aproximación de la raíz buscada α .

CRITERIOS DE APROXIMACION

Supongamos que la función f es continua en alguna vecindad de α que contiene a la sucesión $\{x_n\}_n$, n = 0,1,2 , y que la sucesión $\{x_n\}_n$ es tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) = 0$ y así, dado cualquier número positivo ε, existe $N \in \mathbf{N} = \{0,1,2,...\}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $|f(x_n)| < \varepsilon$.

Teniendo en cuenta lo anterior, dado un número $\varepsilon > 0$ adecuadamente pequeño, al cual llamaremos Tolerancia y que notaremos Tol, podríamos escoger como aproximación de la raíz α al término x_N de la sucesión mencionada, donde N es el menor entero no-negativo que satisface: $\mathbf{|f(x_n)| < \varepsilon}$

CRITERIOS DE APROXIMACION

También podríamos tomar como aproximación de la raíz α al término x_N de la sucesión mencionada, donde N es el menor entero no-negativo tal que: $|\mathbf{x_n - x_{n-1}}| < \boldsymbol{\varepsilon}$

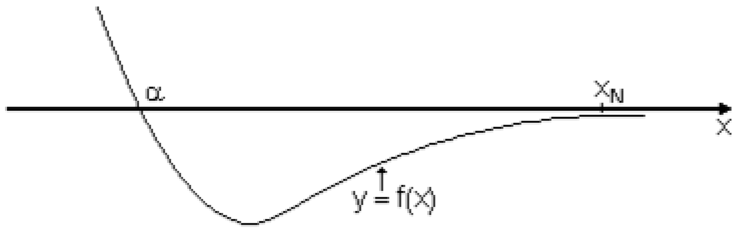
También podríamos tomar como aproximación de la raíz α al término x_N de la sucesión

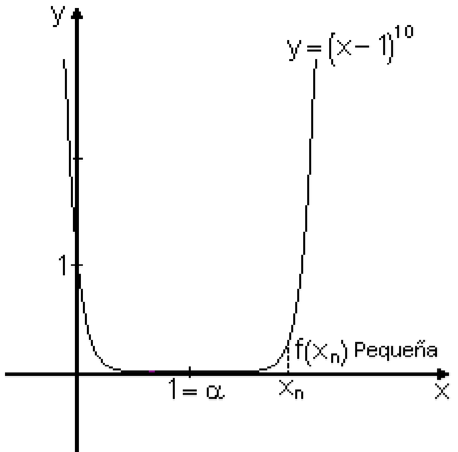
mencionada, donde N es el menor entero no-negativo tal que: $\dfrac{|\mathbf{x_n - x_{n-1}}|}{|\mathbf{x_n}|} < \boldsymbol{\varepsilon}$ **si** $\mathbf{x_n \neq 0}$

CRITERIOS DE APROXIMACION

Pues bien, para una tolerancia ε>0 previamente escogida, cualquiera de los tres criterios mencionados, se adoptará como criterio para obtener una aproximación de una raíz α.

Ahora, en cuanto a los criterios de aproximación anteriores, es fácil ver que el hecho de que $|f(x_n)| < \varepsilon$ o $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ no necesariamente indica que x esté muy cerca de α, como puede apreciarse en la siguiente figura de la izquierda. También una ecuación como indica la gráfica de la derecha puede necesitar una gran cantidad de cálculos para obtener un aproximación determinada.





CRITERIOS DE APROXIMACION

Se sigue de lo anterior que cualquiera de los criterios **i)**, **ii)**, **iii)** puede no darnos una idea clara de la distancia real $|\alpha - x_n|$.

Por otra parte, para garantizar que una sucesión, generada por un determinado método numérico, converge a la raíz buscada, la función f en cuestión deberá satisfacer ciertas condiciones; resulta que muchas veces aplicaremos el método sin chequear tales condiciones lo que nos conducirá, posiblemente, a una sucesión divergente, caso en el cual, un entero N para el cual se cumpla i), ii) o iii), puede no existir. Puede ocurrir también que, aún tratándose de una sucesión que converge a la raíz buscada, el entero N al que nos hemos referido sea muy grande, por ser "muy lenta" la convergencia de la sucesión. Por lo anterior, al aplicar cualquiera de los criterios, se hace necesario establecer **siempre** una cota para N, es decir, imponer un **máximo** al **número de iteraciones**.

También, con frecuencia, tendremos que combinar dos o más de los criterios mencionados, o considerar algún otro criterio, al momento de obtener una aproximación de una raíz .

SEPARACION DE RAICES

Por lo general para aplicar un método numérico necesitamos de una aproximación inicial de la raíz buscada o bien de un intervalo que contenga dicha raíz. Para separar en intervalos las raíces de una ecuación no lineal hay diferente procedimientos. Mencionamos:

A) Tener presente una serie de resultados del análisis matemático, que facilitan el conocimiento de la ubicación de las raíces. Estos son:

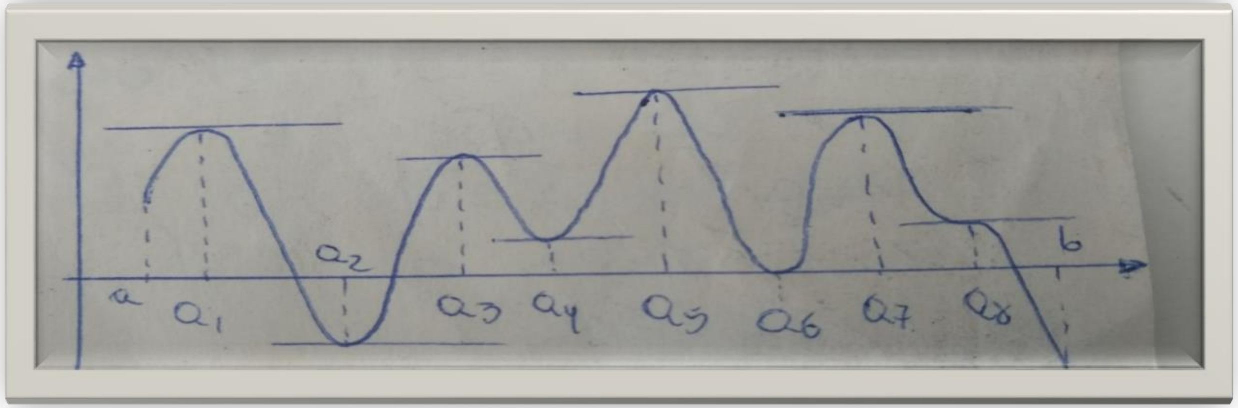
1) Si f(x) tiene distintos signos en dos puntos de abscisas a y b, se anula por lo menos una vez en el intervalo (a , b) y en general un número impar de veces.

2) Si f(x) tiene igual signo en dos puntos de abscisas a y b, o bien no se anula en el intervalo (a , b) o bien se anula un número par de veces par de veces

SEPARACION DE RAICES

3) Si f(x) es constantemente creciente o decreciente en un intervalo (a , b), es decir si la derivada tiene un signo determinado y el sgn f(a) ≠ sgn f(b) existirá en dicho intervalo una única raíz, mientras que si sgn f(a) = sgn f(b) no hay raíz en dicho intervalo.

4) En este punto veremos como es posible calcular intervalos parciales de un intervalo total, en cada uno de los cuales la derivada tiene un signo determinado . Para ello consideremos una función continua en un intervalo (a,b) con f´(x) continua como lo indica la siguiente figura:



SEPARACION DE RAICES

Consideremos, una función continua en un intervalo (a,b) con f´(x) continua, f´(x) se anula en los puntos a_1, a_2, …, a_8 en ellos la tangente a f(x)es paralela al eje x (máximos, mínimos, puntos de inflexión).

Entre cada dos raíces de f´(x), la f(x) es creciente o decreciente, por lo tanto en el intervalo (a_1,a_2) hay una única raíz porque los signos son distintos, mientras que en el intervalo (a_3,a_4) no hay ninguna raíz porque tienen el mismo signo.

<u>Ejercicio</u>: separar las raíces de la ecuación $x^3 – 3x – 1 = 0$, $f´(x) = 3 (x^2 – 1)$, por lo que f´(x) se anula en x = 1 y x = -1, por ser f(-1) = 1 y f(1) = -3, hay una sola raíz en (-1,1). Además como f(0) = -1 esa raíz se encuentra entre (-1,0). Además si calculamos f(2) = 1 y f(-2) = -3, las tres raíces se encuentran en los siguientes intervalos:(-2,-1), (-1,0) y (1,2).

Comprobarlo gráficamente.

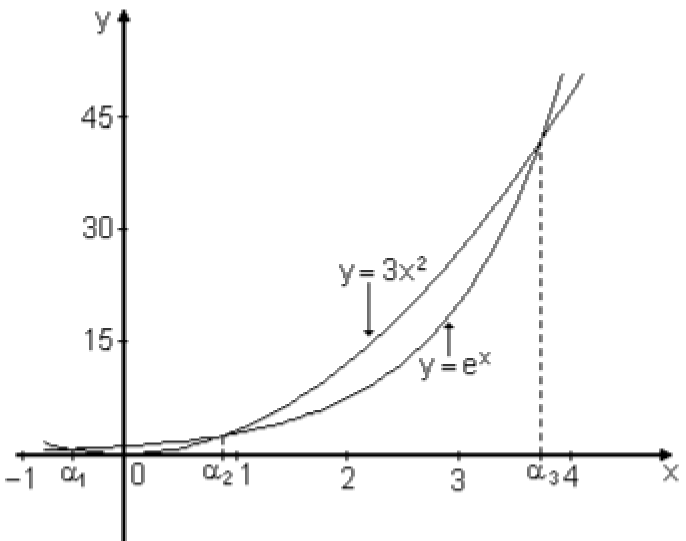
SEPARACION DE RAICES

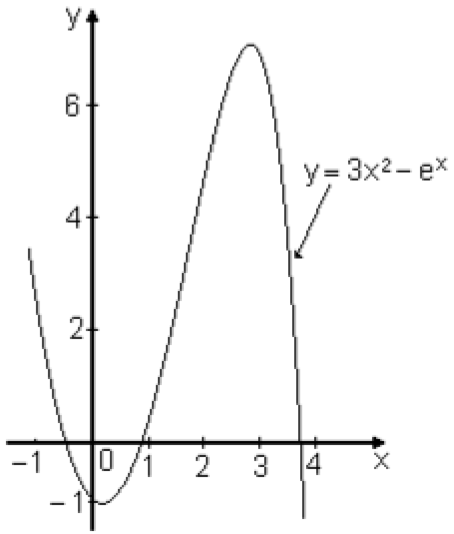
B) Método Semigráfico

Supongamos que estamos interesados en encontrar todas las raíces de la ecuación $3x^2 - e^x = 0$, en esta situación podríamos graficar la función $f(x) = 3x^2$ y la función $f(x) = e^x$ y donde se corten estarán las raíces de la ecuación $3x^2 - e^x = 0$ .como muestra el gráfico de la izquierda.

C) Método Gráfico

Cuando tenemos la posibilidad de graficar la función como lo muestra el gráfico de la derecha.





APROXIMACION INICIAL

La mayoría de los métodos que calculan las raíces de una ecuación no lineal responden a la siguiente forma: Xn+1 = g (Xn), para una función g adecuada y una aproximación conocida x_0 .

Los métodos iterativos necesitan al menos una aproximación inicial de la raíz. La mayor cercanía de x_0 mejora la posibilidad de convergencia del método.
El problema de como tener una buena aproximación inicial puede resolverse

1- Siguiendo un estudio analítico de la ecuación (tabla x,y)
2- Valiéndose del conocimiento que se tenga del problema científico
3- Procedimiento gráfico que muestre el comportamiento de la función.

Una regla práctica establece que, mientras más rápidamente converge un método a la raíz , se requiera una mejor estimación de x_0. Es una buena idea iniciar el proceso con un método simple y mejorada x_0 emplear un método de mayor velocidad de convergencia para aumentar la precisión.

METODO DE LA BISECCION O ALGORITMO DE BOLZANO

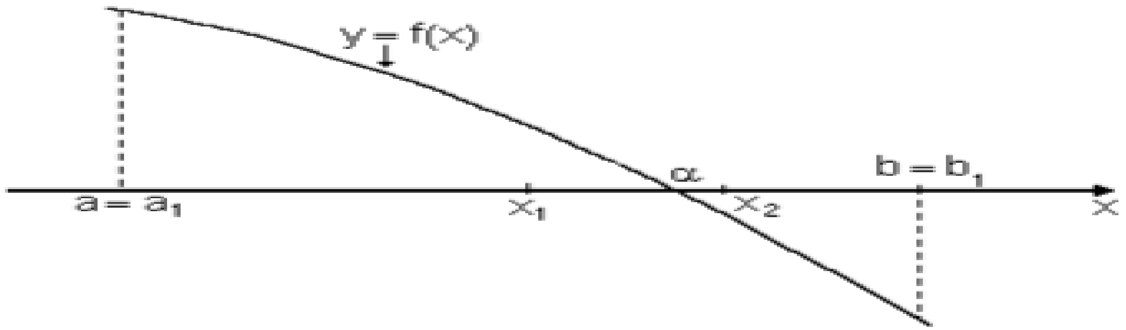
2.1 MÉTODOS CERRADOS

Los métodos numéricos que en cada paso dan un intervalo cerrado donde se encuentra la raíz buscada, son llamados métodos cerrados. Aquí estudiaremos dos de tales métodos: el método de Bisección y el método de Posición Falsa.

2.1.1 Método de Bisección : Supongamos que f es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$. Entonces, por teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe al menos un $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Asumiremos en lo que sigue que la raíz en este intervalo es única (aunque el método también se puede aplicar cuando hay más de una raíz en (a,b)).

El **método de Bisección** aplicado a la función f para aproximar la raíz $\alpha \in [a,b]$, consiste en dividir sucesivamente el intervalo $[a,b]$ por la mitad, hasta que la longitud del subintervalo que contiene a la raíz α sea menor que alguna tolerancia especificada ε.

Para empezar tomamos $a_1 = a$, $b_1 = b$ y x_1 es el punto medio de $[a_1, b_1]$, o sea $x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}$: primera aproximación de la raíz α.



METODO DE LA BISECCION O ALGORITMO DE BOLZANO

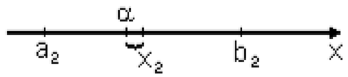
$$|\alpha - x_1| \leq \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Si $f(x_1) = 0$ o $\dfrac{b_1 - a_1}{2} < \varepsilon$, entonces $\alpha = x_1$ y el proceso termina.

Si $f(a_1)f(x_1) < 0$, entonces $\alpha \in (a_1, x_1)$ y tomamos $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$; en caso contrario tomamos $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$.

Ahora aplicamos nuevamente el proceso anterior al intervalo $[a_2, b_2]$, así:

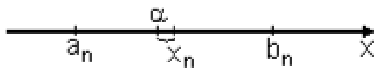
$$x_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{2}$$: segunda aproximación de la raíz α



$$|\alpha - x_2| \leq \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(b_1 - a_1)\right) = \frac{b_1 - a_1}{2^2} = \frac{b-a}{2^2}$$

En general, después de $(n-1)$-pasos, la raíz $\alpha \in (a_n, b_n)$ y tomamos

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}}$$: **n**-ésima aproximación de la raíz α



$$0 \leq |\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$, es decir, la sucesión $\{x_n\}_n$ converge a la raíz α; lo que significa que **el método de Bisección siempre converge**.

METODO DE LA BISECCION O ALGORITMO DE BOLZANO

Algunas de las desventajas del método de Bisección con respecto a otros métodos son:

No tiene en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n, sólo tiene en cuenta el signo de $f(x_n)$, lo que hace que una aproximación intermedia, mejor que la respuesta final, pase desapercibida.

Aunque el método de Bisección siempre converge, su convergencia es muy lenta, comparada con la convergencia de otros métodos que estudiaremos, por lo que se sugiere escoger el intervalo inicial $[a,b]$ tan pequeño como sea posible o usar el método de Bisección para obtener un buen punto de arranque para la aplicación de otro método.

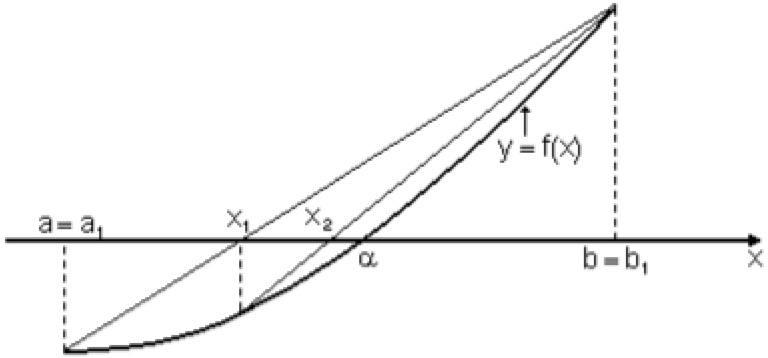
Una de las mayores ventajas que tiene el método de Bisección es que el error de truncamiento, $|\alpha - x_n|$, se acota fácilmente (recuerde que $|\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$).

METODO DE LAS CUERDAS O METODO DE REGULA FALSI O POSICION FALSA

Consideremos una función f continua

en un intervalo $[a,b]$ y tal que $f(a)f(b) < 0$. El método de Posición Falsa, para encontrar una aproximación de una raíz $\alpha \in (a,b)$ de $f(x) = 0$, es similar al método de Bisección en el sentido de que se generan subintervalos $[a_n, b_n]$ que encierran a la raíz α, pero esta vez x_n no es el punto medio de $[a_n, b_n]$, sino el punto de intersección de la recta que pasa por los

puntos $((a_n, f(a_n)), ((b_n, f(b_n))$ con el eje x como muestra la figura siguiente. Al remplazar la curva por una recta se obtiene una posición falsa de dicha raíz.



METODO DE LAS CUERDAS O METODO DE REGULA FALSI O POSICION FALSA

Empezamos tomando $a_1 = a$, $b_1 = b$ y encontramos la primera aproximación de la raíz, x_1, como la intersección con el eje x, de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(a_1, f(a_1))$, $(b_1, f(b_1))$:

$$x_1 = a_1 - \frac{(b_1 - a_1)f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

Si $f(x_1) = 0$, entonces $\alpha = x_1$ y el proceso termina.

Si $f(a_1)f(x_1) < 0$ entonces $\alpha \in (a_1, x_1)$ y tomamos $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$, de lo contrario tomamos $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$.

Aplicamos nuevamente el proceso anterior al intervalo $[a_2, b_2]$, es decir, hacemos

$$x_2 = a_2 - \frac{(b_2 - a_2)f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)}$$

Después de la $(n-1)$-ésima iteración, tenemos $\alpha \in (a_n, b_n)$ y tomamos

$$\boxed{x_n = a_n - \frac{(b_n - a_n)f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}}$$

Observe que en el denominador de la expresión anterior nunca se resta, pues $f(a_n)f(b_n) < 0$.

Este método tiene la desventaja, con respecto al método de Bisección, que la longitud del subintervalo que contiene a la raíz en general no tiende a cero, porque la mayoría de las gráficas de las funciones son cóncavas (hacia arriba o hacia abajo) en la vecindad de la raíz, lo que hace que uno de los extremos de los subintervalos se aproxime a la raíz, mientras el

METODO DE LAS CUERDAS O METODO DE REGULA FALSI O POSICION FALSA

el otro permanece fijo.

Por lo anterior, la longitud del subintervalo $[a_n, b_n]$ no puede tomarse como un criterio de aproximación a la raíz; se requiere una tolerancia en el valor de la función en la aproximación x_n, es decir, $|f(x_n)| < \varepsilon$ o $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ para alguna tolerancia $\varepsilon > 0$ previamente escogida. El procedimiento termina cuando se alcance esta tolerancia o un número máximo de iteraciones previamente establecido.

Métodos abiertos:

A diferencia de los métodos cerrados que requieren de in intervalo que encierre la raíz buscada, los métodos abiertos que se verán requieren de un solo valor o de dos valores iniciales que no necesariamente encierren dicha raíz, esto hace que algunas veces las sucesiones generadas por estos métodos sean divergentes, pero tiene la ventaja de que cuando convergen lo hacen más rápidamente que las sucesiones generadas por los métodos cerrados.

METODO DE PUNTO FIJO O DE PRIMER ORDEN

Dada una ecuación $f(x) = 0$ tenemos que transformarla, en otra equivalente del tipo $x = g(x)$. En este caso se tiene que α es raíz de $f(x) = 0 \leftrightarrow f(\alpha) = 0 \leftrightarrow \alpha = f(\alpha) \leftrightarrow \alpha$ es raíz de $x = g(x)$.

Para lograrlo disponemos de dos procedimientos: despejar x, o sumar x a ambos miembros de $f(x) = 0$

Dada la aproximación x_i, la siguiente iteración se calcula con la fórmula $x_{i+1} = g(x_i)$. Supongamos que la raíz verdadera es x_r es decir $x_r = g(x_r)$. Restando las dos últimas ecuaciones tenemos $x_r - x_{i+1} = g(x_r) - g(x_i)$.

METODO DE PUNTO FIJO O DE PRIMER ORDEN

Por el teorema del valor medio para derivadas, sabemos que si g(x) es continua en [a,b] y diferenciable en (a,b) entonces existe un $\xi \in$ (a,b) tal que $g'(\xi) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

En nuestro caso, existe ξ en el intervalo determinado por x_i y x_r tal que que

$g'(\xi) = \frac{g(x_r)-g(x_i)}{x_r-x_i}$, de aquí tenemos que: $g(x_r) - g(x_i) = g'(\xi)(x_r - x_i)$ o bien

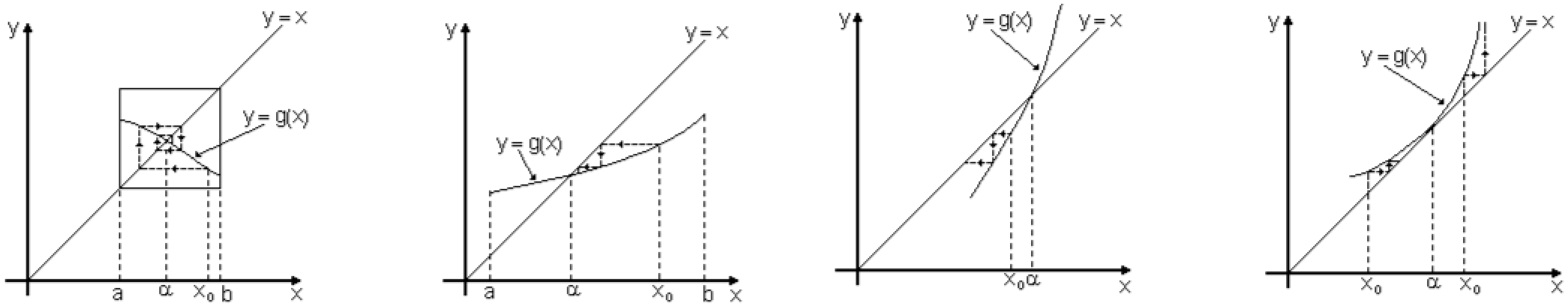
$x_r - x_{i+1} = g'(\xi)(x_r - x_i)$, tomando valor absoluto en ambos lados

$$|x_r - x_{i+1}| = |g'(\xi)|\,|(x_r - x_i)| \ .$$

Observe que el término $|x_r - x_{i+1}|$ es el error absoluto en la iteración i+1 mientras que $|(x_r - x_i)|$ corresponde al error absoluto en la iteración i. Por lo tanto , solamente si $|g'(\xi)| < 1$, entonces se disminuirá el error en la siguiente iteración (convergencia), de lo contrario irá en aumento.

METODO DE PUNTO FIJO O DE PRIMER ORDEN

Las siguientes gráficas muestran algunas formas de convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n.}$



En la primer gráfica hay convergencia la sucesión no es monótona sino alternada, en la segunda hay convergencia y la sucesión es monótona decreciente, en la tercera hay divergencia no satisface la condición de convergencia, dependiendo de l punto inicial si hay o no convergencia.

METODO DE PUNTO FIJO O DE PRIMER ORDEN

Veamos un ejemplo:

Resolver por el método iterativo de primer orden la ecuación e^x senx – 1 = 0 con x Ɛ (0,∏/2), despejamos

x = Arcsen(e^{-x}) luego, definimos g(x) = Arcsen(e^{-x}) y $|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2xi}}}$ con Se verifica que si x≥0,5 , entonces el $|g'(x)| < 1$, tomamos x_0=0,5. Aplicando x_{n+1} = Arcsen(e^{-x_n}) , calculamos:

X_1 = 0,6516896, X_2 = 0,5482147, … , X_{36} = 0,5885327, X_{37} = 0,5885327 , por lo tanto α = 0,5885327

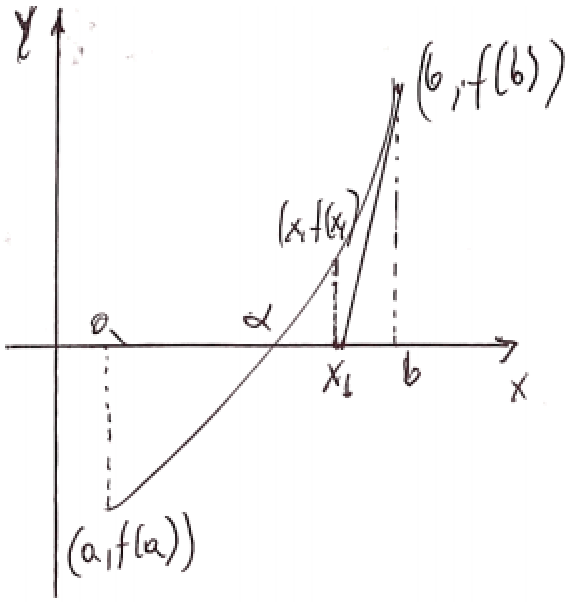
METODO DE NEWTON RAPSHON FOURIER O MÉTODO DE LAS TANGENTES

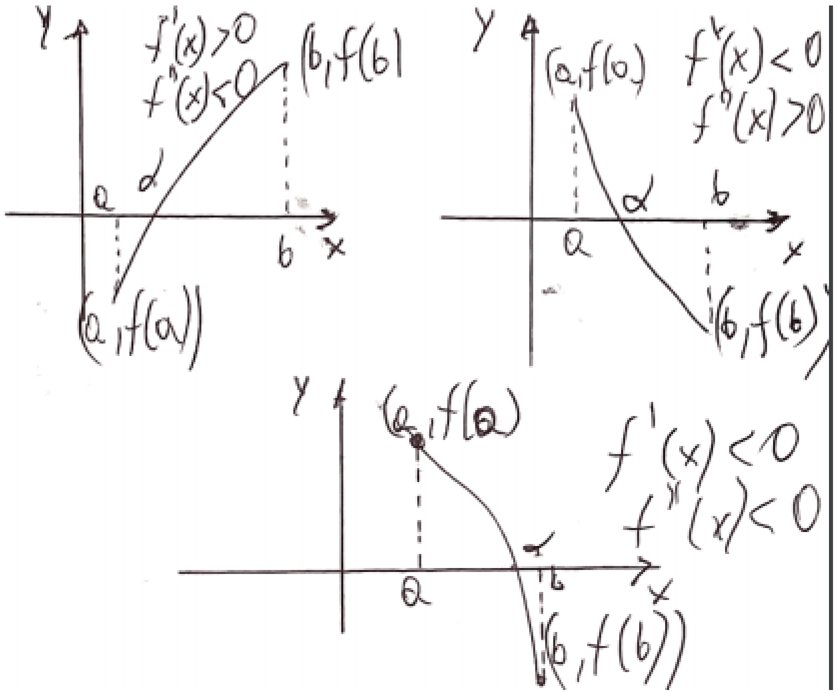
Para poder aplicar el método es necesario conocer un valor de la función en la cercanía de la raíz y que cumpla con la condición de convergencia es decir $|g'(x)| < 1$.

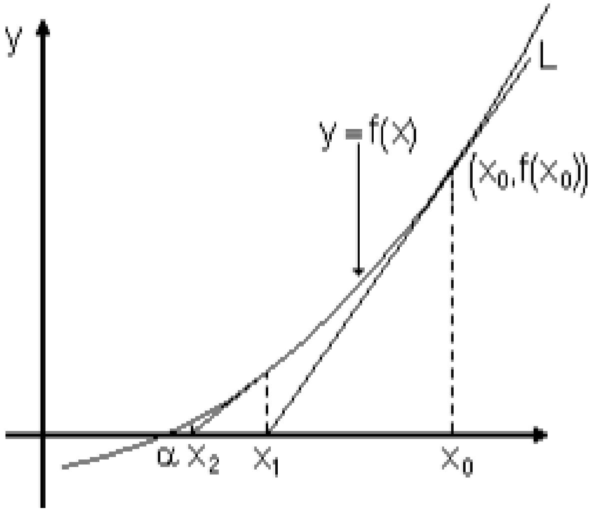
Para estudiar el método consideraremos un intervalo [a,b], en el que los valores de definición de la función sean opuestos en los extremos del intervalo y que los signos de la derivada primera y segunda se mantengan en dicho intervalo.

Como indican las siguientes gráficas. Para determinar el punto a partir del cual comenzar las aproximaciones, debemos aplicar la condición de Fourier que indica que $f(x) \cdot f''(x) > 0$. En la gráfica de la izquierda le corresponde a punto (b, f(b)). Las cuatro posibilidades están indicadas con las tres graficas más chicas.

METODO DE NEWTON RAPSHON FOURIER O MÉTODO DE LAS TANGENTES







METODO DE NEWTON RAPSHON FOURIER O MÉTODO DE LAS TANGENTES

El método consiste en obtener la ecuación de la recta tangente a la función en ente caso en el punto (b, f(b)). La ecuación de dicha recta la conocemos por que conocemos un punto de la recta y su pendiente. Es decir y- f(b) = f´(b) (x-b) si consideramos b como la aproximación inicial (x_0), y- f(x0) = f´(x_0) (x- x_0).

Podemos considerar a x1 como primera aproximación de la raíz y lo podemos calcular utilizando la ecuación de la recta - $f(x_0) = f'(x_0)\,(x_1- x_0)$.

Despejamos $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, podemos iterar el método y obtener a partir del punto

(x_0,$f(x_1)$) una nueva aproximación de la raíz alfa, $x_2= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ y así sucesivamente hasta obtener la aproximación requerida, generando una sucesión {x}n, n = 0,1,2 cuyo límite (aunque desconocido) $\lim_{n\to\infty}$ xn = α, es la raíz.

METODO DE NEWTON RAPSHON FOURIER O MÉTODO DE LAS TANGENTES

En general si conocemos un punto solamente en la vecindad de la raíz, debemos estudia la convergencia es decir $|g´(x)| < 1$,

$g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f´(x)}$, $g´(x) = 1 - \dfrac{(f´(x))^{2-} f(x) , f´´(x)}{(f´(x))^2}$, luego $g´(x) = \dfrac{f(x) , f´´(x)}{(f´(x))^2}$

$|g´(x)| = \dfrac{|f(x) , f´´(x)|}{(f´(x))^2} < 1.$

Veamos el mismo ejercicio resuelto por el método del punto fijo.

Resolver por el método de Newton la ecuación e^x senx – 1 = 0 con x Ɛ (0,∏/2), con x_0=0,5.

$f(x) = e^x$ sen x – 1 , $f´(x) = e^x$ (sen x +cos x) , $f´´(x) = 2\, e^x$ cos x, calculamos $\dfrac{|f(0,5) , f´´(0,5)|}{(f´0,5))^2} < 1$, vemos

que satisface y comenzamos a calcular la serie $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f´(x_0)} = 0,5 - \dfrac{f(0,5)}{f´(0,5)} = 0,5936656$, x_2 = 5885485,

x_3 = 0,5885327, x_4 = 0,5885327. Logrando una aproximación el séptimo decimal solo en tres pasos.

METODO DE LAS SECANTES

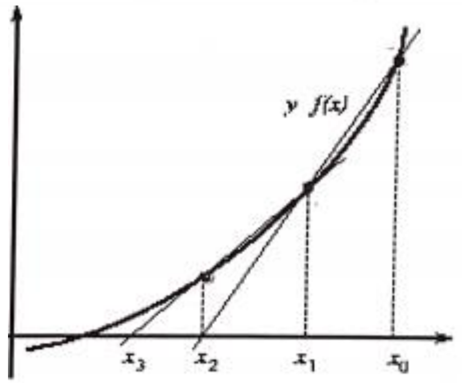
El principal inconveniente del método de Newton estriba en que requiere conocer el valor de la primera derivada de la función en el punto. Sin embargo, la forma funcional de $f(x)$ dificulta en ocasiones el cálculo de la derivada. En estos casos es más útil emplear el método de la secante.

El método de la secante parte de dos puntos (y no sólo uno como el método de Newton) y estima la tangente (es decir, la pendiente de la recta) por una aproximación de acuerdo con la expresión:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (29) del método de Newton, obtenemos la expresión del método de la secante que nos proporciona el siguiente punto de iteración:

$$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0)$$



Representación geométrica del método de la secante.

En la siguiente iteración, emplearemos los puntos x_1 y x_2 para estimar un nuevo punto más próximo a la raíz de acuerdo con la ecuación (35). En la figura (8) se representa geométricamente este método.

En general, el método de la secante presenta las mismas ventajas y limitaciones que el método de Newton-Raphson explicado anteriormente.

MUCHAS GRACIAS

Jose.artal@um.edu.ar