Capítulo 11

EL CUERPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

11.1 INTRODUCCION

Presentamos en esta unidad la teoría y la ejercitación básicas relativas al estudio de los números complejos. La generación del conjunto $\mathbf{C}$ y de las operaciones en él es la habitual: una relación de equivalencia en $\mathbf{R}^2$ que presenta la ventaja de caracterizar clases unitarias y la consiguiente identificación con $\mathbf{C}$. Se definen las operaciones de adición y de multiplicación, se destaca el isomorfismo de una parte de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{R}$, y además de la forma binómica se introducen las formas trigonométrica y exponencial. Queda resuelto el problema de la radicación y de la logaritmación, no siempre posibles en $\mathbf{R}$. Se introduce, además, el concepto de raíces primitivas de la unidad.

11.2. EL NUMERO COMPLEJO

11.2.1. Ecuaciones sin soluciones en R

El ejemplo más conspicuo de una ecuación sin raíces reales es

$$x^2 + 1 = 0$$

ya que, cualquiera que sea $x \in \mathbf{R}$, se verifica $x^2 \geqslant 0$, y en consecuencia

$$x^2 + 1 > 0$$

De un modo más general, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales no tiene soluciones en $\mathbf{R}$ si el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo.

Se hace necesaria la ampliación de $\mathbf{R}$ a un conjunto en el cual puedan resolverse situaciones del tipo anterior, de manera que $\mathbf{R}$ sea isomorfo a una parte de él. Tal conjunto es el de los números complejos.

11.2.2. Relación de equivalencia en $\mathbf{R}^2$ y números complejos

En el conjunto $\mathbf{R}^2$, de todos los pares ordenados de números reales, definimos la relación $\sim$ mediante

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Esta relación es la identidad, y obviamente es de equivalencia; se traduce en el siguiente enunciado: "dos pares ordenados de números reales son equivalentes si y sólo si son idénticos".

Cada clase de equivalencia es unitaria, y se la identifica con el par ordenado correspondiente, es decir

$$K_{(a,b)} = \{(a, b)\}$$

La identificación que proponemos, en virtud del unitarismo de las clases nos permite escribir

$$K_{(a,b)} = (a, b)$$

Definición

Número complejo es todo par ordenado de números reales.
El conjunto de los números complejos es $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$.

Es decir

$$\mathbf{C} = \{(a, b) \;/\; a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R}\}$$

La notación usual para los números complejos es $z = (a, b)$.

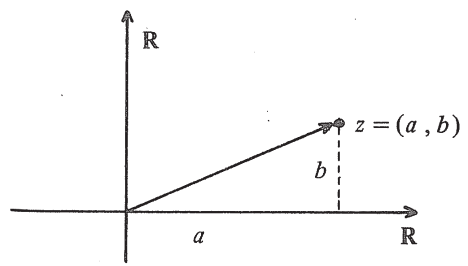
Definición

Parte real de un número complejo es su primera componente. Parte imaginaria, su segunda componente.

Conviene advertir que las partes real e imaginaria de un complejo son números reales. Las notaciones son

$$Re(z) = a \wedge Im(z) = b$$

Introduciendo un sistema cartesiano, los números complejos se corresponden con los puntos del plano. La abscisa de cada punto es la parte real, y la ordenada es la parte imaginaria. Por otro lado, a cada complejo le está asociado un vector con origen en el origen del sistema, y cuyo extremo es el punto determinado por el par ordenado correspondiente.



Los complejos de parte imaginaria nula, es decir, los pares ordenados del tipo $(a , 0)$, son puntos del eje de abscisas. Los complejos de parte real nula caracterizan el eje de ordenadas.

Definición

Un complejo es real si y sólo si su parte imaginaria es cero.
Un complejo es imaginario si y sólo si su parte real es cero.

Ejemplo 11-1.

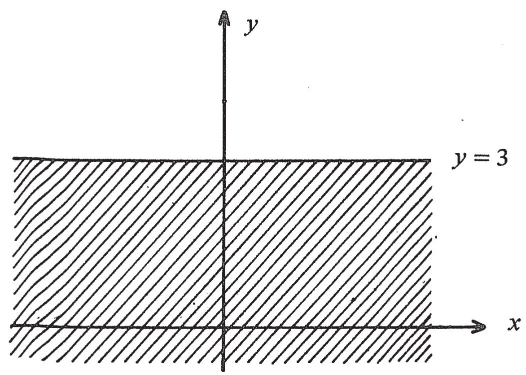
Determinamos analítica y gráficamente los complejos $z = (x , y)$ que verifican

i) $Re\,(z) = 2$

Resultan todos los pares ordenados para los cuales $x = 2$, es decir, $z = (2 , y)$. La ecuación $x = 2$ corresponde a la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa 2.

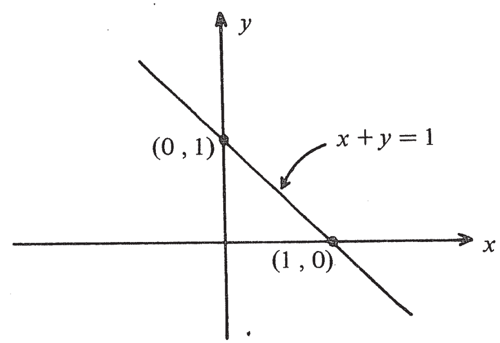
ii) $Im\,(z) \leqslant 3$

La condición anterior se traduce en $y \leqslant 3$, y corresponde al semiplano que contiene al origen, cuyo borde es la recta de ecuación $y = 3$.



iii) $Re\,(z) + Im\,(z) = 1$

Se trata de los complejos $z = (x , y)$, tales que $x + y = 1$. Queda definida así la recta del plano que pasa por los puntos $(1 , 0)$ y $(0 , 1)$.



11.2.3. Operaciones en C

En $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ se definen la adición y multiplicación mediante

1. $(a , b) + (c , d) = (a + c \;,\; b + d)$
2. $(a , b) \,.\, (c , d) = (a c - b d \;,\; a d + b c)$

Estas leyes de composición interna en C verifican las siguientes propiedades:

I) $(\mathbf{C} , +)$ es un grupo abeliano. La justificación está dada en los ejemplos 5-2 y 5-5. Complejo nulo es el par $(0 , 0)$, y el inverso aditivo de todo complejo $z = (a , b)$ es $- z = (- a , - b)$

II) $(\mathbf{C} - \{0\} , .)$ es un grupo abeliano. El símbolo 0 denota el complejo nulo $(0 , 0)$.

Verificamos los axiomas

G_1 : El producto es ley de composición interna en **C**, por la definición 2.

$$z \in \mathbf{C} \;\wedge\; z' \in \mathbf{C} \Rightarrow z \,.\, z' \in \mathbf{C}$$

G_2 : Asociatividad.

$$(z \,.\, z') \,.\, z'' = [(a , b) \,.\, (a' , b')] \,.\, (a'' , b'') = (aa' - bb' ,\; ab' + ba')\,(a'' , b'') =$$

$$= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - ba'b'' , aa'b'' - bb'b'' + ab'a'' + ba'a'') \qquad (1)$$

$$z \,.\, (z' \,.\, z'') = (a , b)\,[(a' , b') \,.\, (a'' , b'')] = (a , b)\,(a'a'' - b'b'' , a'b'' + b'a'') =$$

$$= (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - bb'a'' , aa'b'' + ab'a'' + ba'a'' - bb'b'') \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$(zz')\,z'' = z\,(z'\,z'')$$

G_3 : Elemento neutro es el complejo $(1 , 0)$. En efecto, si $z = (x , y)$ es neutro para el producto, debe satisfacer

$$(a , b) \,.\, (x , y) = (x , y) \,.\, (a , b) = (a , b) \qquad \forall\, (a , b) \in \mathbf{C}$$

.. definición de multiplicación

$$(ax - by\ ,\ ay + bx) = (a\ ,\ b)$$

Por igualdad de complejos

$$\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = \Delta x$$

$$\Delta\ y = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Si $(a\ ,\ b) \neq (0\ ,\ 0)$ entonces

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1 \ \wedge\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0$$

Resulta $(x\ ,\ y) = (1\ ,\ 0)$ que satisface G_3 para todo $(a\ ,\ b) \in \mathbb{C}$, pues en el caso $(a\ ,\ b) = (0\ ,\ 0)$ se tiene

$$(0\ ,0)\ .\ (1\ ,0) = (0\ .\ 1 - 0\ .\ 0\ ,0\ .\ 0 + 0\ .\ 1) = (0\ ,0)$$

G_4 : Todo complejo no nulo admite inverso multiplicativo.
Sea $z = (a\ ,\ b) \neq (0\ ,\ 0)$. Si existe $z^{-1} = (x\ ,\ y)$, debe satisfacer

$$z\ .\ z^{-1} = z^{-1}\ .\ z = (1\ ,0)$$

Es decir

$$(a\ ,\ b)\ .\ (x\ ,\ y) = (x\ ,\ y)\ .\ (a\ ,\ b) = (1\ ,\ 0)$$

Efectuando el producto

$$(ax - by\ ,\ ay + bx) = (1\ ,\ 0)$$

Por igualdad de números complejos resulta el sistema

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$$

Luego

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

O sea

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\ ,\ -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

G_5 : Conmutatividad.

$$\begin{aligned} z\ .\ z' &= (a\ ,\ b)\ .\ (a'\ ,\ b') = (aa' - bb'\ ,\ ab' + ba') = \\ &= (a'a - b'b\ ,\ b'a + a'b) = (a'\ ,\ b')\ (a\ ,\ b) = z'z \end{aligned}$$

de acuerdo con la definición de multiplicación en **C** y la conmutatividad del producto en **R**.

III) El producto es distributivo respecto de la suma. En efecto

$$\begin{aligned} (z + z')\ z'' &= [(a\ ,\ b) + (a'\ ,\ b')]\ (a''\ ,\ b'') = (a + a'\ ,\ b + b')\ (a''\ ,\ b'') = \\ &= (aa'' + a'a'' - bb'' - b'b''\ ,\ ab'' + a'b'' + ba'' + b'b'') = \\ &= (aa'' - bb''\ ,\ ab'' + ba'') + (a'a'' - b'b''\ ,\ a'b'' + b'b'') = \\ &= (a\ ,\ b)\ .\ (a''\ ,\ b'') + (a'\ ,\ b')\ (a''\ ,\ b'') = zz'' + z'z'' \end{aligned}$$

Por adición en **C**, multiplicación en **C** y conmutatividad de la suma en **R**.

En consecuencia, la terna $(\mathbb{C}\ ,\ +\ ,\ .)$ es un cuerpo. La diferencia esencial que presenta con relación al cuerpo de los números reales consiste en que es no ordenado. En efecto, si fuera ordenado, como $i \neq 0$, caben dos posibilidades:

$$i > 0 \quad \text{ó} \quad i < 0$$

En el primer caso, por la compatibilidad de la relación respecto del producto, se tiene $i^2 > 0$, es decir, $-1 > 0$, lo que es absurdo.

En el segundo caso es $0 < i$, y en consecuencia, $-i < 0$, y por la compatibilidad con el producto resulta $-i^2 < 0$, o sea, $1 < 0$, lo que también es absurdo.

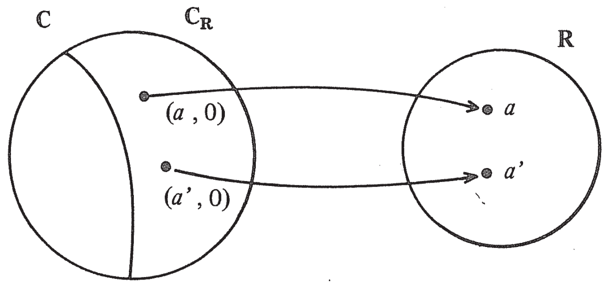
Ejemplo 11-2.

Sean $z_1 = (-2\ ,3)$, $z_2 = (1\ ,2)$ y $z_3 = (-3\ ,-1)$. Efectuar $(z_1 - z_2)\ .\ z_3$

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)\ z_3 &= [(-2\ ,3) - (1\ ,2)]\ (-3\ ,-1) = \\ &= (-3\ ,1)\ (-3\ ,-1) = (9 + 1\ ,3 - 3) = (10\ ,0) \end{aligned}$$

11.3. ISOMORFISMO DE LOS COMPLEJOS REALES EN LOS REALES

Sea $\mathbf{C_R} = \left\{(a\ ,\ b)\ \epsilon\ \mathbf{C}\ /\ b = 0\right\}$ el conjunto de los complejos de parte imaginaria nula. La función $f: \mathbf{C_R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(a\ ,\ 0) = a$, asigna a cada complejo real su primera componente.



La aplicación f es obviamente biyectiva, y además un morfismo de $\mathbf{C_R}$ en $\mathbf{R}$ respecto de la adición y multiplicación. En efecto, sean $z = (a\ ,0)$ y $z' = (a'\ ,0)$; entonces

$$f(z + z') = f[(a\ ,\ 0) + (a'\ ,\ 0)] = f(a + a'\ 0) =$$
$$= a + a' = f(a\ ,\ 0) + f(a'\ ,\ 0) = f(z) + f(z')$$

Por otra parte

$$f(z\ z') = f[(a\ ,\ 0)\ (a'\ ,\ 0)] = f(aa'\ ,\ 0) = aa' =$$
$$= f(a\ ,\ 0) f(a'\ ,\ 0) = f(z) f(z')$$

En consecuencia, f es un isomorfismo de $\mathbf{C_R}$ en $\mathbf{R}$ respecto de la adición y multiplicación; o sea, $\mathbf{C_R}$ y $\mathbf{R}$ son conjuntos indistinguibles desde el punto de vista algebraico.

El isomorfismo permite identificar cada complejo real con el real correspondiente, es decir, $(a\ ,\ 0) = a$.

11.4. FORMA BINOMICA DE UN COMPLEJO

11.4.1. Unidad imaginaria

El número complejo imaginario de segunda componente igual a 1, se llama unidad imaginaria y se denota por

$$i = (0\ ,\ 1)$$

La multiplicación de un complejo real por la unidad imaginaria permuta las componentes de aquél, es decir, lo trasforma en un complejo imaginario. En efecto

$$(b\ ,0)\ .\ i = (b\ ,\ 0)\ .\ (0\ ,\ 1) = (b\ .\ 0 - 0\ .\ 1\ ,b\ .\ 1 + 0\ .\ 0) = (0\ ,\ b)$$

y por el isomorfismo de los complejos reales con los reales, se tiene

$$bi = (0\ ,\ b)$$

Las potencias sucesivas de la unidad imaginaria son

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = (0\ ,\ 1)\ .\ (0\ ,\ 1) = (-\ 1\ ,\ 0) = -\ 1$$
$$i^3 = i^2\ .\ i = (-\ 1)\ .\ i = -\ i$$

Análogamente

$$i^4 = 1 \qquad i^5 = i \qquad i^6 = -\ 1 \qquad i^7 = -\ i$$

Si el exponente es de la forma $4\ k$ con $k\ \epsilon\ \mathbf{Z}$, se tiene $i^{4\,k} = (i^4)^k = 1^k = 1$

En general, si el exponente de i es $a\ \epsilon\ \mathbf{N}$, al efectuar la división por 4 se tiene $a = 4\ q + r$, donde $0 \leqslant r < 4$. En consecuencia

$$i^a = i^{4q+r} = i^{4q}\ .\ i^r = 1\ .\ i^r = i^r$$

y este cálculo se reduce a uno de los cuatro considerados en primer término.

11.4.2. Forma binómica de los complejos

Sea $z = (a\ ,\ b)$ un número complejo.
Por definición de suma

$$z = (a\ ,\ 0) + (0\ ,\ b)$$

Por el isomorfismo de los complejos reales con los reales, y por 11.4.1, resulta la forma binómica

$$z = a + bi$$

La conveniencia de la forma binómica se pone de manifiesto al efectuar operaciones con números complejos, evitando el cálculo con pares ordenados, que es más laborioso.

Ejemplo 11-3.

Sean $z_1 = (-\ 2\ ,\ 3)$, $z_2 = (1\ ,\ 2)$ y $z_3 = (-\ 3\ ,\ 1)$. Calcular $(z_1 - z_2)\ z_3^2$

Con la representación binómica se tiene

$$(z_1 - z_2)\,z_3^2 = [(-2+3i)-(1+2i)]\,(-3+i)^2 =$$
$$= (-3+i)(9+i^2-6i) = (-3+i)(9-1-6i) =$$
$$= (-3+i)(8-6i) = -24+18i+8i-6i^2 =$$
$$= -24+26i+6 = -18+26i$$

11.5. LA CONJUGACION EN C

11.5.1. Complejos conjugados

Sea $z = a + bi$.

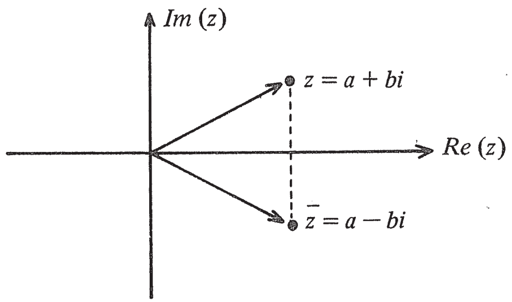
Definición

Conjugado de $z = a + bi$ es el número complejo $\overline{z} = a - bi$.
El símbolo $\overline{z}$ se lee "conjugado de z" o "z conjugado".
Si $z = -1 + 3i$, entonces $\overline{z} = -1 - 3i$.
El conjugado de $z = \left(\frac{3}{2}\ ,\ -1\right)$ es $\overline{z} = \left(\frac{3}{2}\ ,1\right)$.

Dado $z = a + bi$ se tiene $\overline{z} = a - bi$ y $\overline{\overline{z}} = a + bi = z$, es decir, que el conjugado del conjugado de un número complejo es igual a éste. Los complejos z y $\overline{z}$ se llaman conjugados.

Definición

Dos complejos son conjugados si y sólo si tienen la misma parte real, y sus partes imaginarias son números opuestos.
Dos complejos conjugados caracterizan puntos simétricos respecto del eje real.



11.5.2. Propiedad. La suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de la parte real. El producto de dos complejos conjugados es un número real no negativo.
En efecto, sea $z = a + bi$. Entonces

$$z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\,Re\,(z)$$

Por otra parte

$$z\,.\,\overline{z} = (a+bi)\,.\,(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

Como a y b son números reales, resulta

$$z\,.\,\overline{z} \in \mathbf{R} \ \wedge\ z\,.\,\overline{z} \geqslant 0$$

11.5.3. Propiedad. Un número complejo es real si y sólo si es igual a su conjugado.

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

i) $z \in \mathbf{R} \Rightarrow z = a + 0i \Rightarrow z = a \ \wedge\ \overline{z} = a \Rightarrow z = \overline{z}$

ii) $z = \overline{z} \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow bi = -bi \Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0$

Entonces $z = a,$ o lo que es lo mismo, $z \in \mathbf{R}$

11.5.4. Automorfismo en C

La función $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definida por $f(z) = \overline{z}$ es un automorfismo en $\mathbf{C}$. En efecto

i) f es inyectiva. Sean z y z' en $\mathbf{C}$, tales que $f(z) = f(z')$

$$f(z) = f(z') \Rightarrow \overline{z} = \overline{z'} \Rightarrow a - bi = a' - b'i$$

y por igualdad de complejos resulta $a = a' \ \wedge\ b = b',$ o sea $z = z'$.

ii) f es sobreyectiva. Para todo $w = a + bi \in \mathbf{C}$, existe $z = a - bi,$ tal que

$$f(z) = f(a - bi) = a + bi = w$$

iii) f es un morfismo respecto de la adición, pues

$$f(z + z') = \overline{z + z'} =$$
$$= \overline{(a+bi) + (a'+b'i)} = \overline{(a+a') + (b+b')\,i} =$$
$$= (a+a') - (b+b')\,i = (a-bi) + (a'-b'i) =$$
$$= \overline{z} + \overline{z'} = f(z) + f(z')$$

Por definición de f y suma en $\mathbf{C}$.

iv) f es un morfismo respecto de la multiplicación, ya que

$$f(zz') = \overline{zz'} = \overline{(a+bi)(a'+b'i)} =$$
$$= \overline{(aa'-bb') + (ab'+ba')\,i} = (aa'-bb') - (ab'+ba')\,i =$$
$$= (a-bi)(a'-b'i) = \overline{z}\,\overline{z'} = f(z)\,f(z')$$

Las propiedades iii) y iv) se traducen en el siguiente enunciado: "el conjugado de la suma es igual a la suma de los conjugados, y el conjugado del producto es igual al producto de los conjugados".

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$
$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$$

Ejemplo 11-4.

Determinar los complejos $z = x + yi$ que satisfacen

i) $z = -\bar{z}$

En la forma binómica se tiene

$$x + yi = -(x - yi) \Rightarrow x + yi = -x + yi \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0$$

Los complejos que verifican la condición dada son de la forma $z = yi$, es decir, imaginarios puros, y corresponden al eje de ordenadas.

ii) $z \,.\, \bar{z} = 1$

Esta condición se traduce en

$$(x + yi) \,.\, (x - yi) = 1$$

Luego, $x^2 + y^2 = 1$, y corresponde a la circunferencia de radio 1 con centro en el origen.

11.6. MODULO DE UN COMPLEJO

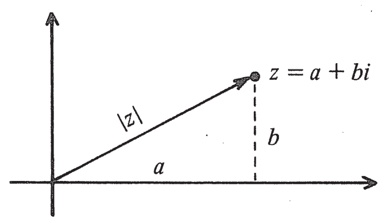
11.6.1. Sea $z = a + bi$.

Definición

Módulo de un complejo es la raíz cuadrada no negativa de la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria.

La notación es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El módulo de un complejo es la distancia del punto correspondiente, al origen.



Si $z = -3 + 4i$, entonces $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

11.6.2. Propiedades del módulo

I) El módulo de todo complejo es mayor o igual que su parte real

Sea $z = a + bi$. Entonces

$$|a|^2 = a^2 \Rightarrow |a|^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow |a|^2 \leqslant |z|^2 \Rightarrow |a| \leqslant |z|$$

Como $a \in \mathbf{R} \Rightarrow a \leqslant |a|$, de esta relación y de $|a| \leqslant |z|$ resulta $|z| \geqslant a$, es decir, $Re\,(z) \leqslant |z|$.

Análogamente $Im\,(z) \leqslant |z|$

II) El producto de cualquier complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo.

Tesis) $z \,.\, \bar{z} = |z|^2$

Demostración)

Efectuando el producto y aplicando la definición de módulo, resulta

$$z \,.\, \bar{z} = (a + bi) \,.\, (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

III) El módulo del producto de dos complejos es igual al producto de los módulos.

Tesis) $|z\,z'| = |z|\;|z'|$

Demostración)

A partir del cuadrado del primer miembro aplicamos II, conjugado del producto, conmutatividad y asociatividad del producto en **C** y la propiedad II

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\bar{z}\,\overline{z'} = z\bar{z}z'\overline{z'} =$$
$$= |z|^2\;|z'|^2$$

Resulta

$$|zz'|^2 = (|z|\;|z'|)^2$$

Y como las bases son no negativas, se tiene

$$|zz'| = |z|\;|z'|$$

IV) El módulo de la suma de dos complejos es menor o igual que la suma de los módulos.

Tesis) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Demostración)

Por cuadrado del módulo, conjugado de la suma, distributividad del producto respecto de la suma en **C** y por la propiedad **II** se tiene

$$|z + z'|^2 = (z + z')\,\overline{(z + z')} = (z + z')\,(\bar{z} + \overline{z'}) =$$
$$= z\bar{z} + z\overline{z'} + z'\bar{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + z\overline{z'} + \bar{z}z' + |z'|^2$$

$$\overline{\bar{z}z'} = \bar{\bar{z}}\;\overline{z'} = z\,\overline{z'}$$

Como los términos centrales son complejos conjugados, su suma es el duplo de la parte real, es decir

$$z\overline{z'} + \bar{z}z' = 2\,Re\,(z\overline{z'})$$

Sustituyendo en la igualdad inicial tenemos

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,Re\,(z\overline{z'}) + |z'|^2 \qquad (1)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la parte real es menor o igual que el módulo

$$2\,Re\,(z\overline{z'}) \leqslant 2\,|z\overline{z'}|$$

Por módulo del producto

$$2\,Re\,(z\overline{z'}) \leqslant 2\,|z|\,|\overline{z'}|$$

y como $|\overline{z'}| = |z'|$, es

$$2\,Re\,(z\overline{z'}) \leqslant 2\,|z|\,|z'| \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2)

$$|z+z'|^2 + 2\,Re\,(z\overline{z'}) \leqslant |z|^2 + 2\,Re\,(z\overline{z'}) + |z'|^2 + 2\,|z|\,|z'|$$

Después de cancelar y factorear el segundo miembro

$$|z+z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$$

y como las bases son no negativas, resulta

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$

V) El módulo de una potencia de exponente natural es igual a la potencia del módulo

$$|z^n| = |\underbrace{z\,.\,z\,.\,.\,.\,z}_{n}| = \underbrace{|z|\,|z|\,.\,.\,.\,|z|}_{n} = |z|^n$$

Ejemplo 11-5.

Al dividir dos complejos, siendo el segundo distinto de cero, puede evitarse la determinación del inverso multiplicativo del divisor multiplicando por el conjugado de este, y se obtiene

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}$$

En particular

$$\frac{-1+2i}{2+3i} = \frac{(-1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{-2+3i+4i-6i^2}{2^2+3^2} =$$

$$= \frac{-2+7i+6}{13} = \frac{4+7i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}\,i$$

Ejemplo 11-6.

Determinar los complejos z que satisfacen

i) $iz = 1 + i$

$$z = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i-i^2}{1} =$$

$$= -i + 1 = 1 - i$$

ii) $|z - 1 + 2i| = 2$

Si $z = x + yi$, entonces

$$|x + yi - 1 + 2i| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x-1) + (y+2)\,i| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

Es la ecuación de la circunferencia de radio 2, con centro $(1\,,-2)$.

iii)

$$|z - Re\,(z)| = [Im\,(z)]^2$$

$$z = x + yi \Rightarrow |x + yi - x| = y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |yi| = y^2 \Rightarrow (\sqrt{y^2})^2 = y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = y^2 \Rightarrow y^2 = y \text{ con } y \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow y\,(y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0 \;\vee\; y = 1 \Rightarrow z = x \;\vee\; z = x + i$$

Se obtienen los complejos correspondientes a los puntos de las rectas de ecuaciones $y = 0 \vee y = 1$.

iv) $z = -\overline{z} + 2$

$$z = x + yi \Rightarrow z + \overline{z} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow z = 1$$

Es la recta de ecuación $x = 1$

v) $(a + bi)\,z = (a^2 + b^2)\,i$ con $(a\,,b) \neq (0\,,0)$

Se tiene

$$z = \frac{(a^2+b^2)\,i}{a+bi} = \frac{(a^2+b^2)\,i\,(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2)\,i\,(a-bi)}{a^2+b^2} = i\,(a-bi) = ai - bi^2 =$$

$$= b + ai$$

11.7. RAIZ CUADRADA EN C

Sea $z = a + bi$. Por definición, la raíz cuadrada de z es un complejo $x + yi$ que satisface

$$(x+yi)^2 = a + bi \qquad (1)$$

Aplicando módulos

$$|(x+yi)^2| = |a + bi|$$

Por 11.6.2. v) y por definición de módulo

$$|x+yi|^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

Por cuadrado del módulo

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

Es decir

$$x^2+y^2 = |z| \qquad (2)$$

Desarrollando (1)

$$x^2-y^2+2xyi = a+bi$$

Por igualdad de complejos

$$x^2-y^2 = a \qquad (3)$$

$$2xy = b \qquad (4)$$

Sumando y restando (2) y (3)

$$\begin{cases} x^2+y^2 = |z| \\ x^2-y^2 = a \end{cases}$$

$$2x^2 = |z|+a$$

$$2y^2 = |z|-a$$

Resulta

$$x = \pm\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

Ambos radicandos son no negativos pues $|z| \geqslant a$, y se obtienen cuatro pares de valores reales, de los cuales se seleccionan dos de acuerdo con la condición (4): si $b>0$, entonces x e y se eligen con el mismo signo, y si $b<0$, se eligen con distinto signo.

Ejemplo 11-7.

Calcular las raíces cuadradas de los siguientes complejos

i) $z = -4-3i$

$a = -4$, $b = -3$, $|z| = 5$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5-4}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{5+4}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Como $b<0$, x e y se eligen con signos distintos, y las soluciones son

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Es decir

$$\sqrt{-4-3i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$$

ii) $z = -2i$

$a = 0$, $b = -2$, $|z| = 2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2+0}{2}} = \pm 1 = y$$

Como $b = -2 < 0$, las soluciones son

$$(1, -1) \quad \text{y} \quad (-1, 1)$$

Luego

$$\sqrt{-2i} = \pm(1-i)$$

iii) $z = -9$

$a = -9$, $b = 0$, $|z| = 9$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9-9}{2}} = 0$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{9+9}{2}} = \pm 3$$

En este caso, los cuatro pares de valores se reducen a dos

$$(0, 3) \quad \text{y} \quad (0, -3)$$

y se tiene

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-9+0i} = \pm(0+3i) = \pm 3i$$

Análogamente

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}i$$

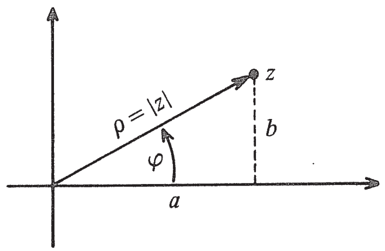
$$\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$$

11.8. FORMA POLAR O TRIGONOMETRICA

Sea $z = a + bi$ un complejo no nulo. Las coordenadas polares del punto de coordenadas cartesianas a y b son: el radio vector ρ y el argumento φ, o cualquiera de los congruentes a φ, módulo 2π.

Las fórmulas de pasaje de las coordenadas polares a cartesianas son

$$a = \rho \cos \varphi$$
$$b = \rho \operatorname{sen} \varphi$$



donde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ y $\varphi = \arg z$

Se tiene

$$z = a + bi = \rho \cos \varphi + \rho\, i \operatorname{sen} \varphi$$

es decir

$$z = \rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Esta es la llamada forma polar o trigonométrica del complejo z.

Es claro que ρ y φ definen unívocamente a z. Pero z caracteriza unívocamente a p, y no a $\varphi = \arg z$.

Definición

Argumento principal del complejo no nulo z es el número real φ que satisface

i) $a = |z| \cos \varphi \;\wedge\; b = |z| \operatorname{sen} \varphi$

ii) $0 \leqslant \varphi < 2\pi$

Para denotar el argumento principal escribiremos $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Dados dos complejos en forma polar $z = \rho\,(\cos \rho + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $z' = \rho'\,(\cos \varphi, + i \operatorname{sen} \varphi')$ diremos que son iguales si y sólo si tienen el mismo módulo y sus argumentos son congruentes módulo 2π. En símbolos

$$z = z' \Leftrightarrow \rho = \rho' \;\wedge\; \varphi' = \varphi + 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}$$

Ejemplo 11-8.

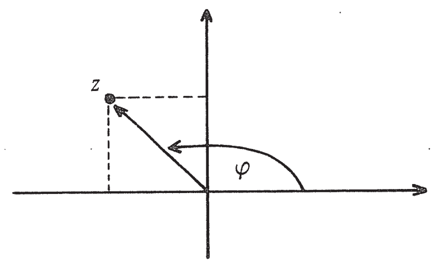
Determinar la forma polar de los siguientes complejos

i) $z = -2 + 2i$

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para el argumento principal consideramos

$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



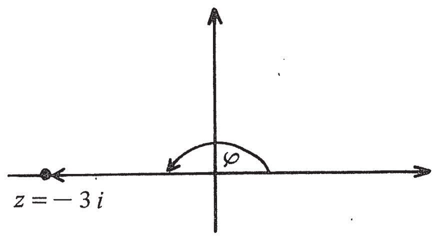
Resulta φ del segundo cuadrante e igual a 135°.

Luego $z = 2\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$

ii) $z = -3i$

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$$
$$\varphi = \pi$$

Luego $z = 3\,(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$



11.9 OPERACIONES EN FORMA POLAR

11.9.1. Multiplicación

El producto de dos complejos en forma polar tiene por módulo el producto de los módulos, y por argumento la suma de los argumentos.

Sean $z = \rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $z' = \rho'\,(\cos \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi')$

Entonces

$$zz' = \rho\rho' (\cos\varphi + i \text{ sen } \varphi)(\cos\varphi' + i \text{ sen } \varphi') =$$
$$= \rho\rho' [(\cos\varphi\cos\varphi' - \text{sen }\varphi \text{ sen }\varphi') + i (\text{sen }\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi \text{ sen }\varphi')]$$
$$= \rho\rho' [\cos(\varphi+\varphi') + i \text{ sen }(\varphi+\varphi')]$$

11.9.2. Cociente

El cociente de dos complejos en forma polar, siendo el segundo distinto de cero, tiene por módulo el cociente de los módulos, y por argumento la diferencia de los argumentos.

$$\frac{z}{z'} = w \Rightarrow z = z'w \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(\cos\varphi + i \text{ sen }\varphi) = \rho'(\cos\varphi' + i \text{ sen }\varphi')\, \mathrm{R}(\cos\phi + i \text{ sen }\phi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(\cos\varphi + i \text{ sen }\varphi) = \mathrm{R}\rho' [\cos(\phi+\varphi') + i \text{ sen }(\phi+\varphi')]$$

Por igualdad de complejos

$$\mathrm{R}\rho' = \rho \;\wedge\; \phi + \varphi' = \varphi + 2k\pi$$

Luego

$$\mathrm{R} = \frac{\rho}{\rho'} \;\wedge\; \phi = \varphi - \varphi' \quad \text{si} \quad k = 0$$
$$\Rightarrow \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} [\cos(\varphi-\varphi') + i \text{ sen }(\varphi-\varphi')]$$

11.9.3. Potenciación de exponente natural

La potencia n-sima de un complejo en forma polar tiene por módulo la potencia n-sima de su módulo, y por argumento el producto de su argumento por n.

$$z = \rho(\cos\varphi + i \text{ sen }\varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \text{ sen } n\varphi)$$

Lo demostramos por inducción completa

1°) $n = 1 \Rightarrow z^1 = z = \rho(\cos\varphi + i \text{ sen }\varphi) =$
$= \rho^1 (\cos 1 \,.\, \varphi + i \text{ sen } 1 \,.\, \varphi)$

2°) $z^h = \rho^h (\cos h\varphi + i \text{ sen } h\varphi) \Rightarrow z^{h+1} = \rho^{h+1} [\cos(h+1)\varphi + i \text{ sen }(h+1)\varphi]$

En efecto, por definición de potencia, hipótesis inductiva y 11.9.1., se tiene

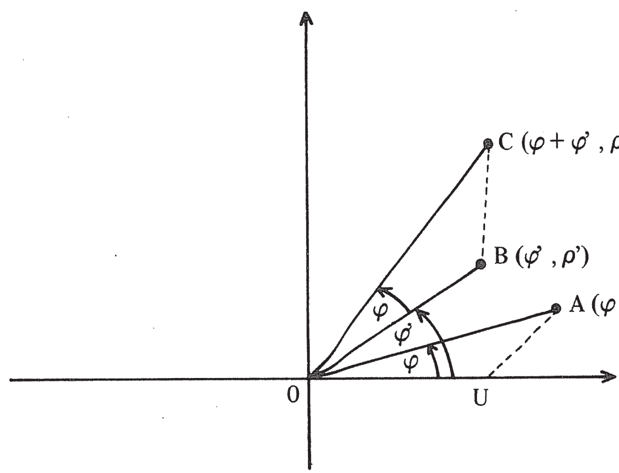
$$z^{h+1} = z^h z = \rho^h (\cos h\varphi + i \text{ sen } h\varphi)\, \rho(\cos\varphi + i \text{ sen }\varphi) =$$
$$= \rho^{h+1} [\cos(h+1)\varphi + i \text{ sen }(h+1)\varphi]$$

La fórmula $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \text{ sen } n\varphi)$ se llama de De Moivre.

11.9.4. Determinación geométrica del producto y del cociente

Sean $z = \rho(\cos\varphi + i \text{ sen }\varphi)$ y $z' = \rho'(\cos\varphi' + i \text{ sen }\varphi')$.

i) *Producto.* En un sistema cartesiano consideramos U (1 , 0) y los puntos A y B representantes de los complejos z y z', es decir, de coordenadas polares (φ, ρ) y (φ', ρ'), respectivamente.



Considerando a OB como homólogo de OU, construimos $\overset{\triangle}{\mathrm{OBC}} \sim \overset{\triangle}{\mathrm{OUA}}$. Resulta C de coordenadas polares $(\varphi + \varphi', \mathrm{R})$, y por la proporcionalidad de lados homólogos

$$\frac{d(0, \mathrm{C})}{d(0, \mathrm{A})} = \frac{d(0, \mathrm{B})}{d(0, \mathrm{U})}$$

es decir

$$\frac{\mathrm{R}}{\rho} = \frac{\rho'}{1} \Rightarrow \mathrm{R} = \rho\rho'$$

En consecuencia, el vector $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ representa el producto de los complejos z y z'.

ii) *Cociente.* Razonando sobre la misma figura, suponemos dados los puntos C y B asociados al dividendo y divisor respectivamente. Construimos sobre OU, como homólogo de OB, el triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{OUA}}$ semejante a $\overset{\triangle}{\mathrm{OBC}}$, y obtenemos el vector $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, es decir, el cociente.

Ejemplo 11-9.

Siendo $z = -1 + i\sqrt{3}$ y $z' = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\, i$, realizar en forma polar las siguientes operaciones

$$z \,.\, z' \quad , \quad \frac{z}{z'} \quad , \quad z^6$$

Expresamos z y z' en forma polar

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 120^{\circ}$ pues z caracteriza un punto del segundo cuadrante.

Luego

$$z = 2\,(\cos 120^{\circ} + i \operatorname{sen} 120^{\circ})$$

Por otra parte

$$\rho' = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$\operatorname{sen} \varphi' = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^{\circ}$, ya que z' corresponde a un punto del primer cuadrante.

Entonces

$$z' = 3\,(\cos 60^{\circ} + i \operatorname{sen} 60^{\circ})$$

Aplicando las fórmulas deducidas tenemos

i) $zz' = 6\,(\cos 180^{\circ} + i \operatorname{sen} 180^{\circ}) = 6\,(-1 + 0\,i) = -6$

ii) $\frac{z}{z'} = \frac{2}{3}\,(\cos 60^{\circ} + i \operatorname{sen} 60^{\circ}) =$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\, i$$

iii) $z^6 = 2^6\,(\cos 6 \,.\, 120^{\circ} + i \operatorname{sen} 6 \,.\, 120^{\circ}) = 2^6\,(\cos 720^{\circ} + i \operatorname{sen} 720^{\circ}) =$

$$= 2^6\,(\cos 0^{\circ} + i \operatorname{sen} 0^{\circ}) = 2^6\,(1 + 0 \,.\, i) = 2^6 = 64$$

Ejemplo 11-10.

Mediante la fórmula de De Moivre, obtener $\operatorname{sen} 2\varphi$ y $\cos 2\varphi$.

Sea z un complejo de módulo 1 y argumento φ, es decir

$$z = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$$

Elevamos al cuadrado de dos maneras: por cuadrado de un binomio

$$z^2 = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi + 2\, i \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \qquad (1)$$

y por la fórmula de De Moivre

$$z^2 = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

11.10. RADICACION EN C

Por definición, el complejo w es raíz n-sima de z si y sólo si $z^n = w$.

Teorema. Todo complejo no nulo admite n raíces n-simas distintas dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad , \quad \rho = |z| \quad$ y $\quad \varphi = \arg z$

Demostración)

Sean $z = \rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $w = R\,(\cos \Phi + i \operatorname{sen} \Phi)$

Por definición de raíz, debe ser

$$w^n = z$$

Es decir

$$R^n\,(\cos n\,\Phi + i \operatorname{sen} n\,\Phi) = \rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Por igualdad de complejos

$$R^n = \rho \quad \text{y} \quad n\,\Phi = \varphi + 2k\pi$$

Luego

$$R = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{y} \quad \Phi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Se obtiene la fórmula

$$\sqrt[n]{\rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

Todas las raíces de z tienen el mismo módulo, y difieren en el argumento que es

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{con } k \in Z$$

De los infinitos valores enteros de k es suficiente considerar $0, 1, 2, \ldots, n-1$ para obtener las n raíces distintas.

RAICES	ARGUMENTOS
w_0	$\frac{\varphi}{n}$
w_1	$\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$
w_2	$\frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$
w_3	$\frac{\varphi}{n} + 3 \cdot \frac{2\pi}{n}$
...	....
w_{n-1}	$\frac{\varphi}{n} + (n-1)\,\frac{2\pi}{n}$

Si $k = n$ entonces la correspondiente raíz w_n tiene argumento

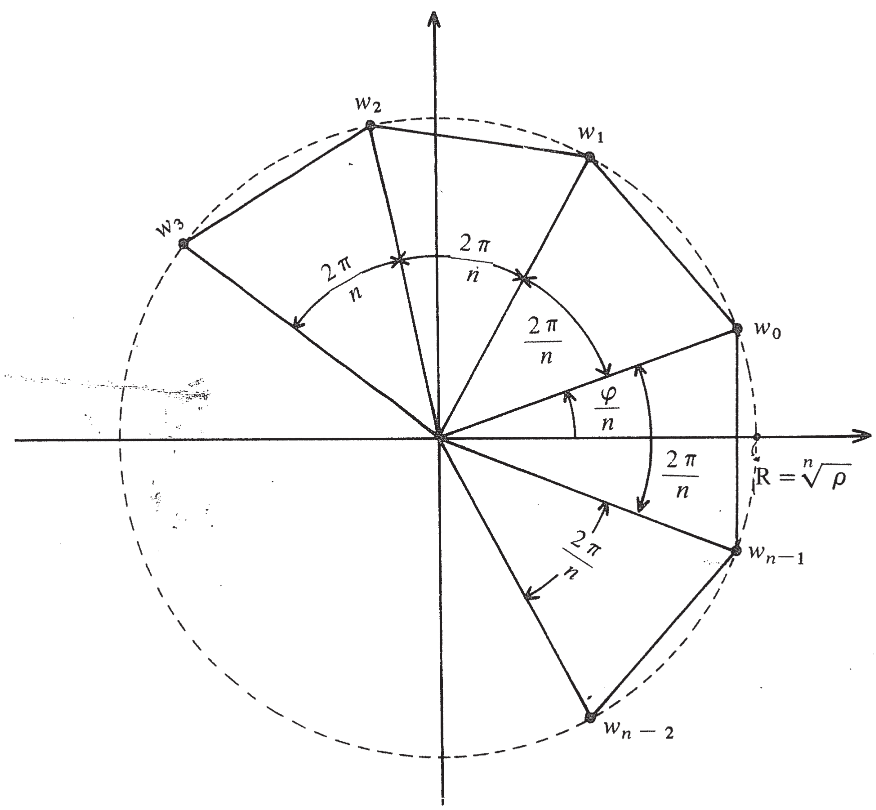
$$\frac{\varphi}{n} + n\,\frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

Que es congruente a $\frac{\varphi}{n}$ y se vuelve a obtener w_0.

En general $w_{j+n} = w_j$ y sólo existen n raíces distintas.

Nota

Las n raíces n-simas, distintas de un complejo no nulo, se identifican con los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia de radio $R = \sqrt[n]{\rho}$.



Ejemplo 11-11.

Calcular y representar

i) $\sqrt[4]{-4+4i\sqrt{3}}$

$$z = -4 + 4i\sqrt{3} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

pues z corresponde a un punto del segundo cuadrante.

El argumento de w_k es

$$\Phi_k = \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

y se tienen los cuatro argumentos

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{6} = 30^o$$

$$\Phi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = 30^o + 90^o = 120^o$$

$$\Phi_2 = \frac{\pi}{6} + \pi = 30^o + 180^o = 210^o$$

$$\Phi_3 = \frac{\pi}{6} + 3\,\frac{\pi}{2} = 30^o + 270^o = 300^o$$

Las cuatro raíces son

$$w_0 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 30^o + i \operatorname{sen} 30^o) = \sqrt[4]{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_1 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 120^o + i \operatorname{sen} 120^o) =$$

$$= \sqrt[4]{8}\,(-\cos 60^o + i \operatorname{sen} 60^o) = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 210^o + i \operatorname{sen} 210^o) =$$

$$= \sqrt[4]{8}\,(-\cos 30^o - i \operatorname{sen} 30^o) = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_3 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 300^o + i \operatorname{sen} 300^o) =$$

$$= \sqrt[4]{8}\,(\cos 60^o - i \operatorname{sen} 60^o) = \sqrt[4]{8}\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ii) $\sqrt[3]{1}$

$$z = 1 + 0\,i \Rightarrow \rho = 1 \ \wedge \ \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{3}$$

Entonces

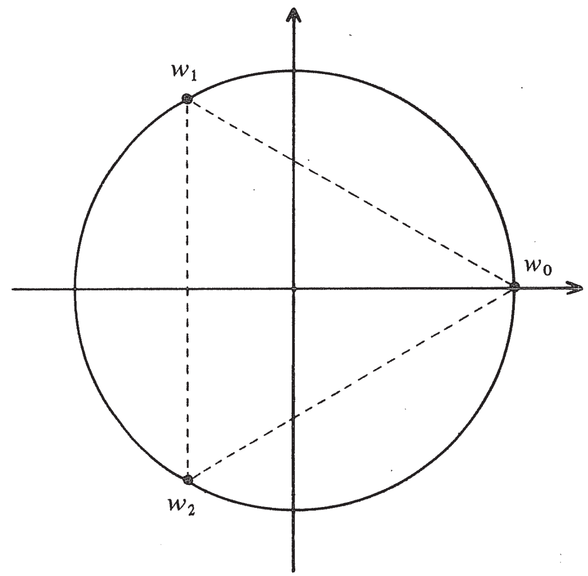
$$w_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \cos 120^o + i \operatorname{sen} 120^o =$$

$$= -\cos 60^o + i \operatorname{sen} 60^o = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \cos 240^o + i \operatorname{sen} 240^o =$$

$$= -\cos 60^o - i \operatorname{sen} 60^o = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$



11.11. FORMA EXPONENCIAL EN C

11.11.1. Exponencial compleja

En los cursos de Análisis se demuestra que la exponencial real e^x admite el desarrollo en serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

y satisface las propiedades básicas $e^0 = 1$ y $e^x\,e^y = e^{x+y}$.

A fin de preservar estas propiedades definimos la exponencial compleja mediante

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Se verifica

$$e^{ix} \,.\, e^{iy} = (\cos x + i \operatorname{sen} x)\,(\cos y + i \operatorname{sen} y) =$$

$$= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + i\,(\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y) =$$

$$= \cos(x + y) + i \operatorname{sen}(x + y) = e^{i(x+y)}$$

Sea $z = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$. Entonces $z = \rho\, e^{i\varphi}$ es la forma exponencial del complejo z.

11.11.2. Operaciones en forma exponencial

La traducción de las fórmulas relativas al producto, cociente y potenciación, obtenidas en la forma polar son las siguientes

i) $z \,.\, z' = \rho\, e^{i\varphi}\, \rho'\, e^{i\varphi'} = \rho\rho'\, e^{i(\varphi+\varphi')}$

ii) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho\, e^{i\varphi}}{\rho' . e^{i\varphi'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}\, e^{i(\varphi-\varphi')}$

iii) $z^n = (\rho\, e^{i\varphi})^n = \rho^n\, e^{in\varphi}$

Ejemplo 11-12.

Demostrar

i) $z = e^{i\varphi} \Rightarrow |z| = 1$

En efecto

$$z = e^{i\varphi} \Rightarrow z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi} = 1$$

ii) $e^z = 1 \Rightarrow z = 2\, n\, \pi\, i$ con $n \in \mathbf{Z}$

Sea $z = x + yi$

Entonces

$$e^z = e^{x+yi} = e^x\, e^{yi} = e^x\, (\cos y + i \operatorname{sen} y) =$$
$$= e^x \cos y + e^x\, i \operatorname{sen} y = 1 + 0\, i$$

Por igualdad de complejos es

$$e^x \cos y = 1 \;\wedge\; e^x \operatorname{sen} y = 0$$

Como $e^x \neq 0$ resulta $\operatorname{sen} y = 0$ y en consecuencia $y = k\,\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

Ahora bien

$$y = k\,\pi \Rightarrow \cos y = \cos k\,\pi = (-1)^k$$

Luego

$$e^x\, (-1)^k = 1 = (-1)^{2k}$$

Es decir, $e^x = (-1)^k$, y como $e^x > 0$, se tiene $k = 2\,n$.

Así, $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Resulta

$$z = x + yi = 0 + 2\,n\,\pi\, i = 2\,n\,\pi\, i$$

11.12. LOGARITMACION EN C

Sea $z \neq 0$. Por definición $\ln z = w$ si y sólo si $e^w = z$.

Para determinar los complejos w que satisfacen $w = \ln z$, proponemos la forma exponencial para el complejo z y la forma binómica para w, es decir

$$z = \rho\, e^{i\varphi} \quad \text{y} \quad w = u + iv$$

Hay que determinar u y v tales que

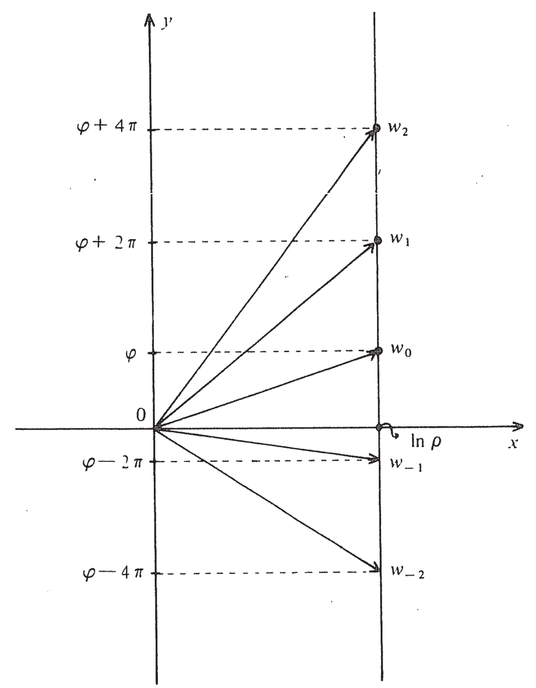
$$e^{u+iv} = \rho\, e^{i\varphi}$$
$$\Downarrow$$
$$e^u \,.\, e^{iv} = \rho\, e^{i\varphi}$$
$$\Downarrow$$
$$e^u = \rho \;\wedge\; v = \varphi + 2\,k\,\pi$$
$$\Downarrow$$
$$u = \ln\rho \;\wedge\; v = \varphi + 2\,k\,\pi$$

Resulta

$$\ln z = \ln\rho + i\,(\varphi + 2\,k\,\pi) \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}$$

fórmula que permite obtener los infinitos logaritmos de un complejo no nulo.

Como la parte real del $\ln z$ es independiente de k, todos los logaritmos corresponden a puntos de la paralela al eje de ordenadas que pasa por $(\ln\rho, 0)$



Valor principal de $\ln z$ es el que se obtiene para $k = 0$, o sea

$$\text{V.p.} \ln z = \ln \rho + i\varphi$$

Ejemplo 11-13.

Hallar $\ln z$ en los siguientes casos

i) $z = -2$

$$z = -2 + 0\,i \Rightarrow \rho = 2 \ \wedge \ \varphi = \pi$$

Luego

$$\ln z = \ln(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) =$$
$$= \ln 2 + (1 + 2k)\pi i$$

ii) $z = -\dfrac{e}{\sqrt{2}} - \dfrac{e}{\sqrt{2}}\, i$

$$\rho = \sqrt{\frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}} = e \quad \wedge \quad \varphi = 225^\circ = 5\,\frac{\pi}{4}$$

Entonces

$$\ln z = \ln e + i\left(5\,\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) =$$
$$= 1 + i\left(5\,\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Los valores principales son, respectivamente, $\ln 2 + i\pi$ y $1 + 5\,\dfrac{\pi}{4}\, i$

11.13. EXPONENCIAL COMPLEJA GENERAL

Sean z_1 y z_2 tales que $z_1 \neq 0$. Estamos interesados en la determinación de la exponencial compleja

$$w = z_1^{z_2}$$

Aplicando logaritmos en base natural

$$\ln w = z_2 \ln z_1$$

Por definición de logaritmo

$$w = e^{z_2 \ln z_1}$$

Ejemplo 11-14.

Hallar el valor principal de la exponencial

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^i$$

Calculamos

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$$

Entonces

$$z = (-i)^i \Rightarrow \ln z = i \ln(-i) \qquad (1)$$

Al complejo $-i$ le corresponden

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \quad \wedge \quad \varphi = 3\,\frac{\pi}{2}$$

Entonces

$$\ln(-i) = \ln 1 + i\left(3\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) =$$
$$= i\left(3\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Sustituyendo en (1) tenemos

$$\ln z = -3\,\frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

Por definición de logaritmo resulta

$$z = e^{-3\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Siendo el valor principal

$$\text{V.p.}\, z = e^{-3\frac{\pi}{2}}$$

11.14. RAICES PRIMITIVAS DE LA UNIDAD

11.14.1. Concepto

En el ejemplo 11-11-ii) hemos determinado las raíces de orden 3 de la unidad, es decir, las tres raíces cúbicas de 1. Tales raíces son

$$w_0 = 1 \qquad w_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad w_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Las dos últimas no son raíces de la unidad de un orden menor que 3, pero la primera sí lo es, puesto que

$$\sqrt[1]{1} = 1 \quad \text{y} \quad \sqrt[2]{1} = \pm 1$$

Por este motivo se dice que w_1 y w_2 son raíces primitivas de orden 3 de la unidad; en cambio, $w_0 = 1$ no es raíz primitiva de orden 3 ni de orden 2, sino de orden 1.

Sea G_n el conjunto de las n raíces n-simas de la unidad. Un elemento genérico de G_n es

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Por definición de raíz n-sima, los complejos w_k satisfacen la condición $w_k^n = 1$, y son tales que $(G_n, .)$ es un grupo multiplicativo abeliano. Esta situación ha sido tratada en el ejemplo 8-12, en el caso particular en que $n = 3$.

Definición

El elemento $w_k \in G_n$ es una raíz primitiva de orden n de la unidad si y sólo si no es raíz de 1 de un orden menor que n.

El conjunto de las raíces cuartas de la unidad es $G_4 = \left\{1, i, -1, -i\right\}$. De acuerdo con la definición y con el conocimiento de G_1, G_2 y G_3, podemos decir que i y $-i$ son raíces primitivas de orden 4 de la unidad. Los resultados $1, i, -1$ y $-i$ se obtienen de la fórmula general al tomar k los valores 0, 1, 2 y 3, respectivamente. Observamos aquí que si k es coprimo con n, entonces la raíz w_k es primitiva. Tal es el caso de w_1 y w_3, para $n = 4$. La demostración de esta propiedad es el objeto de lo que sigue.

11.14.2. Propiedad. El complejo $w_k \in G_n$ es raíz m-sima de la unidad si y sólo si $n \mid km$.

Demostración)

Sea $w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \in G_n$. Entonces

$$w_k = \sqrt[m]{1} \Leftrightarrow w_k^m = 1 \Leftrightarrow \cos \frac{2km\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2km\pi}{n} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{2km\pi}{n} = 1 \ \wedge \ \operatorname{sen} \frac{2km\pi}{n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2km\pi}{n} = 2\pi q \ \wedge \ q \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{km}{n} = q \Leftrightarrow km = nq \Leftrightarrow n \mid km$$

11.14.3. Propiedad. Sea $0 \leqslant k < n$. Entonces $w_k \in G_n$ es una raíz primitiva de orden n de la unidad si y sólo si n y k son coprimos.

I) n y k son coprimos $\Rightarrow w_k$ es raíz n-sima primitiva de 1.

Sea w_k una raíz m-sima de la unidad. Entonces, por 11.14.2., se tiene que $n \mid km$ y como n y k son coprimos, resulta $n \mid m$, de acuerdo con lo demostrado en el ejemplo 9-8-ii). Ahora bien, siendo n y m números naturales y $n \mid m$, es $n \leqslant m$, y en consecuencia w_k no es raíz de la unidad de un orden menor que n, o lo que es lo mismo, w_k es raíz primitiva de orden n de 1.

II). w_k es raíz n-sima primitiva de 1 $\Rightarrow$ m.c.d. $(n, k) = 1$

Supongamos que n y k no son coprimos, y sea d su m.c.d. positivo. Por definición de m.c.d. se tiene

$$d \mid n \ \wedge \ d \mid k \Rightarrow n = dn' \ \wedge \ k = dk' \quad \text{donde} \quad \text{m.c.d.}\,(n', k') = 1$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de w_k resulta

$$w_k = \cos \frac{2dk'\pi}{dn'} + i \operatorname{sen} \frac{2dk'\pi}{dn'} =$$

$$= \cos \frac{2k'\pi}{n'} + i \operatorname{sen} \frac{2k'\pi}{n'}$$

Como n' y k' son coprimos se deduce que w_k es raíz de la unidad de orden $n' < n$, lo que contradice la hipótesis. Luego debe ser mcd $(n, k) = 1$

Ejemplo 11-15.

Determinar las raíces primitivas de orden 6 de la unidad.

Las seis raíces sextas de 1 están dadas por

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$$

con $k = 0, 1, \ldots, 5$

De acuerdo con 11.14.3. I) elegimos k de modo que m.c.d. $(n, 6) = 1$ y se obtiene $k = 1$ o $k = 5$. Las raíces primitivas pedidas son, entonces

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{6} =$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_5 = \cos \frac{10\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{10\pi}{6} =$$

$$= \cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ =$$

$$= \cos 60^\circ - i \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

TRABAJO PRACTICO XI

11-16. Dados los números complejos

$$z_1 = \sqrt{3} + i \quad z_2 = -\sqrt{3} + 3\,i \quad z_3 = 2 - 2\sqrt{3\,i}$$

efectuar

$$2\,z_1 - (z_2^2 - z_3) - \frac{z_2}{z_1}$$

11-17. Determinar los complejos z en cada uno de los siguientes casos

a) $(1+i) + z = -i$ c) $z = (-i)(1+i)$

b) $z = i\,(1+i)$ d) $iz = (1+i)(1-i)$

11-18. Obtener z en los siguientes casos

a) $z = (1 + \sqrt{3}\,i)(\sqrt{3} + i)$

b) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i)^2 - \sqrt{6}\,i$

c) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}\,i)$

d) $z = \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

11-19. Resolver las siguientes ecuaciones en z

a) $iz = 1$ c) $(2-i)\,z = i$

b) $(1+i)\,z = 1$ d) $\frac{1}{z} = i$

11-20. Expresar z en la forma binómica

a) $z = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i}{\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i}$ c) $z = 1 + \dfrac{i}{1 + \dfrac{i}{1 + \dfrac{i}{1+i}}}$

b) $z = \dfrac{(3-i)(2+i)}{i}$

11-21. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones en $\mathbf{C}$

a) $z^2 = 2i$ b) $z^2 = -3 - 4i$ c) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$

11-22. Obtener la forma polar de los siguientes números complejos

a) $z_1 = \sqrt{3} + i$ c) $z_3 = -1 - i$

b) $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ d) $z_4 = -3\,i$

11-23. Efectuar en forma polar las operaciones que se indican con relación a los complejos del ejercicio anterior

a) z_1^6 c) $\frac{z_3}{z_4}$

b) $z_2 z_3$ d) z_3^{10}

11-24. Calcular z^2 siendo

$$z = -|-1+i| + \sqrt{2}\,i$$

11-25. Probar que si $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales y $z \in \mathbf{C}$ es tal que $f(z) = 0$, entonces $f(\bar{z}) = 0$.

11-26. Dado $z = 1 + \operatorname{sen} a + i\cos a$, determinar $|z^2 - \bar{z}|$

11-27. Determinar los números reales a y b sabiendo que

$$(-1+i)\,a + (1+2i)\,b = 1$$

11-28. Resolver la ecuación en $\mathbf{C}$

$$(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i) = 5$$

11-29. Resolver la ecuación en $\mathbf{C}$

$$x^2 + (-2-2i)\,x = 3 - 6\,i$$

11-30. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbf{C}$

$$\begin{cases} (1+i)\,x - iy = 2 + i \\ (2+i)\,x + (2-i)\,y = 2\,i \end{cases}$$

11-31. Demostrar

a) El conjugado del opuesto de todo complejo es igual al opuesto de su conjugado.

b) El conjugado de la diferencia de dos complejos es igual a la diferencia de los conjugados.

c) El módulo de la diferencia de dos complejos es mayor o igual que la diferencia de los módulos.

d) El conjugado del cociente de dos complejos es igual al cociente de sus conjugados.

e) El módulo del cociente de dos complejos es igual al cociente de sus módulos.

11-32. Sean los complejos no nulos z y z'. Demostrar

$$|z|^{-1}\,|z - z'|\,|z'|^{-1} = |z^{-1} - z'^{-1}|$$

11-33. Demostrar

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|z'|^2$$

11-34. Demostrar por inducción completa

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

11-35. Utilizando la fórmula de De Moivre demostrar las siguientes fórmulas

i) sen $2x = 2$ sen $x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

ii) sen $3x = 3\cos^2 x$ sen $x - \text{sen}^3 x$

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\,\text{sen}^2 x$

11-36. Sabiendo que los complejos 1, w y w^2 satisfacen la relación $x^3 = 1$, verificar

i) $(1 + w^2)^4 = w$

ii) $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$

11-37. Determinar algebraicamente las raíces cuadradas de los siguientes complejos:

i) $z = -15 - 8i$

ii) $z = 5 - 12i$

iii) $z = 8 + 4\sqrt{5}\,i$

11-38. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$

i) $x^2 - (2 + i)x + 3 + i = 0$

ii) $x^2 + (-3 + 2i)x - i = 0$

11-39. Determinar y representar las raíces que se indican

i) $\sqrt[4]{1 - i}$ ii) $\sqrt[3]{-i}$ iii) $\sqrt[3]{8}$ iv) $\sqrt[3]{\sqrt{3} + i}$

11-40. Determinar los logaritmos naturales de los siguientes complejos

i) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}\,i$

ii) $z = -ei$

iii) $z = 4$

11-41. Determinar los valores principales de las exponenciales siguientes

i) $w = (\sqrt{2} - i)^{1-i}$

ii) $w = (3i)^{2i}$

iii) $w = (1 - i\sqrt{3})^{1/i}$

11-42. Obtener el valor principal de z en los siguientes casos

i) $(1 - i)^z = 1$

ii) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^z = i$

11-43. Resolver las siguientes ecuaciones

i) $x^{2i} - 2x^i + 2 = 0$

ii) $x^{2\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}} + 1 = 0$

11-44. Determinar los conjuntos de puntos del plano que satisfacen a las siguientes relaciones

i) $Re(z) = -2$

ii) $-2 \leqslant Im(z) < 3$

iii) $|z + 1| > 2$

iv) $-0{,}5 < Re(z) < 0{,}5 \;\wedge\; |z| = 2$

v) $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant 3\,\dfrac{\pi}{4} \;\wedge\; |z| < 2$

vi) $|z - 1 + i| = 2$

11-45. Determinar analíticamente y gráficamente los subconjuntos de $\mathbb{C}$ que verifican

i) $|z + 1| + |z - 1| = 3$

ii) $|z + c|\,|z - c| = c^2$

11-46. Calcular

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx$$

11-47. Verificar la identidad

$$\left|\frac{z + w}{2} - zw\right| + \left|\frac{z + w}{2} + zw\right| = |z| + |w|$$

11-48. Dado $z = -|-1 + 2i| + \sqrt{2}\,i$, hallar $\ln \bar{z}$.

11-49. Demostrar

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z - w = 2n\pi i \;\wedge\; n \in \mathbb{Z}$$

11-50. Se definen

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Demostrar

i) $\cos z = \cos x\, ch\, y - i\,\text{sen}\, x\, sh\, y$

ii) sen $z = \text{sen}\, x\, ch\, y + i\cos x\, sh\, y$

11-51. Determinar los conjuntos de puntos del plano que verifican

i) $z - \bar{z} = i$

ii) $|z|^2 = z + \bar{z}$

iii) $\bar{z} - z^{-1} = 0$

iv) $z^{-1} + z = 0$

v) $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

vi) $z = \bar{z}^2$

vii) $|z + i| = |z + 2i|$

11-52. Obtener los siguientes complejos

$$\text{a) } z = \sum_{k=0}^{100} i^k \qquad \text{b) } z = \prod_{k=1}^{100} i^k$$

11-53. Los complejos no nulos z_1 y z_2 son tales que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

Demostrar que $z_1 = \alpha z_2$ para algún $\alpha \in \mathbf{R}^+$

11-54. Calcular z^4 siendo

i) $z = (-\sqrt{3} + i)^{-1}$

ii) $z = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha - i \operatorname{sen}\alpha}$ con $a \in \mathbf{R} \wedge 0 \leqslant \alpha < 2\pi$

iii) $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

11-55. Demostrar

i) $Re\,(z\bar{w} + \bar{z}w) = z\bar{w} + \bar{z}w$

ii) $Im\,(z\bar{w} - \bar{z}w) = z\bar{w} - \bar{z}w$

11-56. Demostrar que si w es raíz cúbica primitiva de 1, entonces

$$(1-w)(1-w^2) = 3$$

11-57. Sea w una raíz n-sima primitiva de 1 y $n > 1$. Demostrar

$$\sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0$$

11-58. Sabiendo que $n = 3k$, demostrar que

$$\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$$

Capítulo 12

POLINOMIOS

12.1. INTRODUCCION

A partir de la definición de polinomio formal de un anillo con identidad, se llega al concepto de anillo de polinomios formales de un anillo con una indeterminada, y al caso particular de dominio de integridad de polinomios de un cuerpo. En esta estructura se estudian la divisibilidad, los ideales y la factorización. El capítulo se completa con el tratamiento de los polinomios reales y complejos.

12.2. ANILLO DE POLINOMIOS FORMALES DE UN ANILLO

12.2.1. Concepto

Sea $(A, +, .)$ un anillo con identidad.

Definición

Polinomio formal del anillo A es toda función $P : \mathbf{N}_0 \to A$ que verifica $P(n) = 0$, salvo para un número finito de elementos de $\mathbf{N}_0$.

El dominio de la función es $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, y la imagen de todo $i \in \mathbf{N}_0$ se escribe $P(i) = a_i$. La definición dada caracteriza a todo polinomio formal como una sucesión de elementos de A cuyos términos son nulos a partir de cierto índice. Es usual identificar a un polinomio formal en términos del conjunto ordenado de las imágenes, lo que conduce a la siguiente notación

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

El hecho de que $P(n) = a_n$ sea distinto de cero no significa que deba ser $P(i) = a_i$ distinto de cero para $i < n$.

En particular, la función nula, definida por $P(i) = 0$ cualquiera que sea $i \in \mathbf{N}_0$ se llama polinomio nulo, y lo indicaremos así:

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$$