ANÁLISIS NUMÉRICO

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Dra. Ana María Nuñez - ana.nunez@um.edu.ar

Segunda clase virtual

Trabajo de laboratorio

En esta clase vamos a resolver los ejercicios de la segunda parte en Excel, lo ideal hubiera sido usar MathCad pero bueno, la no presencialidad es así!! Espero que pronto podamos ir al laboratorio de informática y resolver juntos.

Si alguno no dispone de Excel puede bajar libre Open office allí también hay planilla de cálculo similar a Excel.

Algunos tips …

- ✓ Es posible que además de utilizar Excel debamos recurrir al papel, porque por ejemplo, en Excel no podrán despejar las variables, eso lo deberán realizar a mano!!

- ✓ Es una planilla de cálculo por eso las celdas se “programan” de forma lógica, considerando valores que deben quedar fijos.

- ✓ **Esta parte del práctico debe subirse al sitio indicado en formato Excel o su equivalente en Open office, en un solo archivo, con varias hojas, cada hoja para un ejercicio. Es parte de la primera evaluación.**

Trabajo de laboratorio

Problema 1

$$A = \begin{pmatrix} 5{,}11 & -4 & 3{,}33 & -1{,}11 \\ -2{,}01 & 1{,}41 & 0{,}5 & 2{,}95 \\ 1 & 0{,}333 & 1{,}5 & -0{,}333 \\ 4{,}321 & -1{,}95 & 0 & 2{,}8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3{,}77 \\ 5{,}4 \\ 3 \\ 0{,}13 \end{pmatrix}$$

Ahora en una planilla Excel hay que insertar la matriz asociada y a continuación la matriz que contiene los términos independientes. Esto solamente es colocar los valores ordenados uno por casilla.

5,11	-4	3,33	-1,11	3,77
-2,01	1,41	0,5	2,95	5,4
1	0,333	1,5	-0,333	3
4,321	-1,95	0	2,8	0,13

Trabajo de laboratorio

Problema 1

Para resolver el sistema recurrimos a Gauss Jordan:

$$A \,.\, X = B \longrightarrow X = A^{-1} . B$$

Ya hemos cargado la matriz anterior, ahora con Excel (MINVERSA) hay que calcular la inversa de A. Para luego resolver el sistema realizando la multiplicación matricial A^{-1} . B (MMULT)

-0,146365	-0,213204	0,395998	0,213698
-0,301501	-0,147703	0,718566	0,121550
0,168039	0,225132	0,218575	-0,144582
0,015899	0,226154	-0,110681	0,112013

La inversa de A

-0,48732091
0,23724443
2,48615218
0,96369296

La inversa de A por B

Trabajo de laboratorio

Problema 1

x1	-0,48732091
x2	0,23724443
x3	2,48615218
x4	0,96369296

(a) Solución del sistema dado

Hay que hacer lo mismo aproximando a una cifra decimales, pueden copiar todo y pegarlo más abajo para luego ir al formato de número con una cifra decimal.

x1	-0,5
x2	0,2
x3	2,5
x4	1,0

(b) Solución del sistema aproximando a una cifra decimal

Trabajo de laboratorio

Problema 1

Ahora hay que determinar el condicionamiento y concluir, para ello debemos calcular el número de condición.

Calcular para la matriz A y para su inversa el máximo (MAX) de las sumas en valores absolutos (ABS) de los elementos de las filas respectivas. Posteriormente el producto de esos dos valores.

Normi (A) 13,55 Normi (A-1) 1,289320

N° de cond. **17,4702801**

Concluimos, está bien condicionado. Los resultados que obtuvimos se asemejan, es decir pequeñas modificaciones en los datos de entrada se corresponden con pequeñas modificaciones en los datos de salida.

Trabajo de laboratorio

Puede optarse por lo siguiente, calcular primero la suma en valor absoluto de los elementos de cada fila de ambas matrices A y su inversa, para luego pedirle que me muestre el máximo.

5,11	-4	3,33	-1,11		13,55			
-2,01	1,41	0,5	2,95		6,87		Normi (A)	13,55
1	0,333	1,5	-0,333		3,166			
4,321	-1,95	0	2,8		9,071			
-0,146365	-0,213204	0,395998	0,213698		0,969265			
-0,301501	-0,147703	0,718566	0,121550		1,289320			
0,168039	0,225132	0,218575	-0,144582		0,756329		Normi (A-1)	1,289320
0,015899	0,226154	-0,110681	0,112013		0,464747			

Trabajo de laboratorio

Problema 2

En este caso primero debemos trabajar un poco a mano para poder responder el punto (a)

Recuerdo cuál es el criterio de convergencia:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (\forall i = 1,2,\dots,n)$$
$$(j = 1,2,\dots,n)$$

Deben ustedes determinar para qué valores de a y de b se cumple este criterio.
Es muy simple, no dará un número sino una dependencia.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & b \\ 0 & a & b & b \\ b & b & a & 0 \\ b & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Trabajo de laboratorio

Problema 2

En la parte (b) hay que sustituir los valores de a y de b por los que dan.

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & -5 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & -5 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora estamos en condiciones de trabajar en Excel, primero podemos calcular el número de condición y responder y luego resolver por Gauss Seidel. Para ello hay que trabajar primero a mano, despejando las variables.

Trabajo de laboratorio

Problema 2

Despejando resulta:

$$x_1 = -\frac{1}{5}\left(1 - 0x_2 - \sqrt{3}\,x_3 - \sqrt{3}\,x_4\right)$$
$$x_2 = -\frac{1}{5}\left(-1 - 0x_1 - \sqrt{3}\,x_3 - \sqrt{3}\,x_4\right)$$
$$x_3 = -\frac{1}{5}\left(0 - \sqrt{3}\,x_1 - \sqrt{3}\,x_2 - 0\,x_4\right)$$
$$x_4 = -\frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{3}\,x_1 - \sqrt{3}\,x_2 - 0\,x_3\right)$$

Elegimos un vector inicial: $X^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

Ahora en Excel debo generar una tabla que registre el vector inicial y los que vamos encontrando a posteriori.

Trabajo de laboratorio

Problema 2

Iniciamos el trabajo colocando los valores que se mantendrán fijos, no varían a medida que avanza el método:

1/aii		-0,2	-0,2	-0,2	-0,2
bi		1	-1	0	1

Hay que tener muy presente en el momento de "programar" cada celda que estos valores deben marcarse como fijos.

$C$24 Se fija el valor que está en esa determinada celda.

Trabajo de laboratorio

Problema 2

Preparo un tabla encabezando las celdas para saber que estoy obteniendo y cargo el vector inicial que elegimos:

Paso	x1	x2	x3	x4	ε
0	0	0	0	0	

Debemos “programas cada una de las celdas del primer paso, fijando los valores que mencionamos en la diapositiva anterior.

Paso	x1	x2	x3	x4	ε
0	0	0	0	0	
1	-0,2	0,2	0	-0,2	0,2

Trabajo de laboratorio

Problema 2

Paso	x1	x2	x3	x4	ε
0	0	0	0	0	
1	-0,2	0,2	0	-0,2	0,2

=$C$24*($C$25-0*D30-RAIZ(3)*E30-RAIZ(3)*F30)

Paso	x1	x2	x3	x4	ε
0	0	0	0	0	
1	-0,2	0,2	0	-0,2	0,2

=$D$24*($D$25-0*C31-RAIZ(3)*E30-RAIZ(3)*F30)

Es Gauss Seidel así que aprovecho el valor obtenido en el mismo paso, del mismo modo se “programan” las restantes variables x3 y x4.

Trabajo de laboratorio

Problema 2

Paso	x1	x2	x3	x4	ε
0	0	0	0	0	
1	-0,2	0,2	0	-0,2	0,2

=MAX(ABS(C31-C30);ABS(D31-D30);ABS(E31-E30);ABS(F31-F30))

El último valor que representa el grado de precisión o error, se "programa" calculando la máxima distancia entre las variables del paso anterior con las obtenidas.

El ejercicio pide 10 iteraciones, si está bien "programado" con extender lo hecho en el paso 1 hasta el 10 es suficiente. Revisemos resultados:

Trabajo de laboratorio

Problema 2

Paso	x1	x2	x3	x4	ε		
0	0	0	0	0			
1	-0,2	0,2	0	-0,2	0,2		
2	-0,26928	0,13072	-0,04800	-0,24800	0,06928		
3	-0,30254	0,09746	-0,07104	-0,27104	0,03326		
4	-0,31850	0,08150	-0,08210	-0,28210	0,01596		
5	-0,32616	0,07384	-0,08741	-0,28741	0,00766		
6	-0,32984	0,07016	-0,08996	-0,28996	0,00368		
7	-0,33161	0,06839	-0,09118	-0,29118	0,00177		-0,333054
8	-0,33245	0,06755	-0,09177	-0,29177	0,00085		0,066946
9	-0,33286	0,06714	-0,09205	-0,29205	0,00041	$X^{(10)}$	-0,092183
10	-0,33305	0,06695	-0,09218	-0,29218	0,00020		-0,292183
				Grado de precisión		0,00020	

Trabajo de laboratorio

Problema 2

El ítem (c) pide calcular el condicionamiento, ya lo hicimos en el problema 1, hay que calcular la norma infinito de la matriz A, calcular con Excel la inversa de A y su norma infinito y luego realizar el producto de ambos valores.

Revisemos resultados.

Normi (A) 8,464101615

Normi(A-1) 0,65108474

Número de condición 5,510847396

Bien condicionado

Trabajo de laboratorio

Problema 2

En el punto (d) pide resuelva con Excel aproximándolo a tres cifras decimales y verifique su respuesta anterior comparando con los resultados obtenidos en (b)

Ya lo hicimos en el ejercicio 1, hay que aproximar la matriz A y su inversa a 3 cifras decimales y calcular luego: $A^{-1}.B$

	-0,333
	0,067
X =	-0,092
	-0,292

Verificamos lo bien condicionado del sistema

Trabajo de laboratorio

Ya tienen todas las pautas del trabajo de laboratorio, ahora les toca resolver los ejercicios que quedan, recuerden nada más que si resuelven por Jacobi toman todos los valores de las variables del paso anterior.
En esta instancia de clase virtual pueden hacer las consultas que quieran a través del chat.

Recuerden que deben subir el archivo Excel con todos los ejercicios de la parte de laboratorio, tienen tiempo hasta el viernes 3 de abril, luego se cerrará la opción de entrega.