Universidad de Mendoza
Facultad de Ingeniería

Algebra Lineal

TRABAJO PRACTICO

DIAGONALIZACIÓN

Objetivos:

- *Ampliar el estudio de las matrices a simétricas congruentes y utilizar la diagonalización bajo congruencia para el cambio de variables.*
- *Ampliar el estudio de diagonalización ortogonal utilizando las nociones de valores y vectores propios.*
- *Aplicar los conceptos antes mencionados en la resolución de problemas.*

PARTE A: PARA TRABAJAR EN CLASE

1. Diagonalice a partir de operaciones elementales fila-columna la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

---

2. Sea A una matriz simétrica, determine diagonalizando bajo congruencia una matriz no singular P tal que P^T.A. P sea diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

---

3. Determine la forma cuadrática correspondiente a la siguiente matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

---

4. Halle la matriz simétrica y la matriz diagonal que corresponden a la forma cuadrática dada, escriba la ecuación de la forma cuadrática diagonalizada.

$$F(x, y, z) = 8x^2 + 7y^2 - 3z^2 - 6xy + 4xz - 2yz$$

5. Realice un cambio de variables que transforme la forma cuadrática $F(x, y) = x^2 + 10xy + y^2$ en una forma cuadrática sin término de producto cruzado.

6.- Determine el polinomio característico y, si existen, los valores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Pruebe con el ejemplo la propiedad que dice: si una matriz de orden n tiene n valores propios no necesariamente distintos, el producto de los valores propios es igual al determinante de la matriz

---

7.- Determine los subespacios propios y la multiplicidad geométrica (dimensión del subespacio propio) de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Analice si la matriz dada es inversible, en caso afirmativo pruebe que los valores propios de la matriz inversa son de la forma $\frac{1}{\lambda}$ siendo λ un valor propio de la matriz dada.

---

8. Halle bases para los subespacios propios de A y A^T siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y elabora conclusiones respecto a si coinciden o no.

---

9. Halle los valores, vectores y espacios propios para las siguientes matrices, determine si son diagonalizables, en caso afirmativo, halle la matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

---

10. Analice si la siguiente matriz es diagonalizable ortogonalmente. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

PARTE B: PARA TRABAJAR SOLOS Y DISCUTIR EN CONSULTA

1. Diagonalice a partir de operaciones elementales fila-columna la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 9 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

---

2. Sea A una matriz simétrica, determine diagonalizando bajo congruencia una matriz no singular P tal que P^T.A. P sea diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

---

3. Determine la forma cuadrática correspondiente a la siguiente matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

---

4. Halle la matriz simétrica y la matriz diagonal que corresponden a la forma cuadrática dada, escriba la ecuación de la forma cuadrática diagonalizada.

$$F(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 - z^2 - 4xy + 2xz - yz$$

5- Determine el polinomio característico y, si existen, los valores propios de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6.- Determine los subespacios propios y la multiplicidad geométrica de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

7.- Determine si la siguiente matriz es diagonalizables, en el caso afirmativo halle $P^{-1}.A.P$ y compruebe la propiedad que dice que si una matriz es diagonalizable, su determinante es igual al producto de sus valores propios.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

8.- Halle el valor del parámetro que permita que la siguiente matriz sea diagonalizable

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.- Encuentre una matriz P que diagonalice ortogonalmente a A y determine $P^T A P$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
