RESOLUCIÓN DEL MODELO DE ESTADO

Como ya se ha expresado, resolver la ecuación diferencial de estado que se expresa a continuación, significa encontrar la función x(t); llamada vector de estado, que representa e interpreta en forma matemática el comportamiento temporal del sistema modelizado.

$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$;

Debe tenerse en cuenta, antes de resolverla, que se trata de una ecuación diferencial vectorial (matricial), por lo que su solución sólo puede hallarse de dos modos: apelando a un método operacional como la Transformada de Laplace o resolviendo una ED escalar que pueda asimilarse a la ED vectorial y luego comparando los resultados, adoptar el primero pero con argumento matricial.

Solución vectorial

Para poner de manifiesto que se trata de una ED vectorial se puede utilizar la siguiente notación simplificada:

$$[\dot{x}] = [A]\,[x] + [B]\,[u] \qquad (1)$$

Donde [A] es una matriz cuadrada de orden (nxn); siendo (n) el orden del sistema o también el número de variables de estado.

[x] es el vector de estado, también se representa como {x}; una matriz o vector columna de (n) elementos. También la matriz [B] será una matriz columna de tantos elementos válidos como entradas tenga el sistema. [u] será una magnitud escalar en los sistema de única entrada y un vector si existen múltiples entradas.

Optando por el método operacional, hay que tomar la transformada de Laplace, miembro a miembro, en esta ecuación diferencial vectorial y, al hacerlo, resulta:

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = \mathcal{L}\{[A]\,[x(t)]\} + \mathcal{L}\{[B]\,[u(t)]\} \qquad (2)$$

Antes de continuar, para aquellos alumnos que no han trabajado con la Transformada de Laplace, hacemos una muy breve reseña de esta operación y sus principales características.

Transformada de Laplace

Breve reseña:

La transformación de Laplace es una operación que parte desde una función en el dominio del tiempo, y la conduce a ser una función en el dominio de la variable compleja.

Esta herramienta, ideada por el matemático francés Pierre Simon Laplace, toma de esta manera una “f(t)” y la convierte en su correspondiente “F(s)”, donde la variable “s” es compleja, por lo que tiene parte real y parte imaginaria:

$$s = \sigma + j\,\omega$$

A la función resultante, “F(s)”, se la conoce como Transformada de Laplace y a todos los efectos se comporta como el resultado de un operador aplicado a la función original “f(t)”; de modo que:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Por lo que se da lugar a un método operacional, de gran utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales. En este sentido, constituye un instrumento muy valioso, porque convierte a una ecuación diferencial en un polinomio algebraico.

También es de gran aplicación en el análisis de los sistemas de control donde deben establecerse relaciones entre la entrada y la salida de sistemas y subsistemas, para condiciones de estado estable.

Al cambiar el dominio de la función, la transformada de Laplace garantiza esta condición porque independiza de la variable tiempo a las funciones transformadas.

La relación entre ambas funciones “f(t)” y “F(s)”, está determinada por la siguiente integral que define a la operación de transformación:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (1)$$

Donde las funciones f(t) son de tiempo real, o sea que existen sólo para

$t \geq 0$

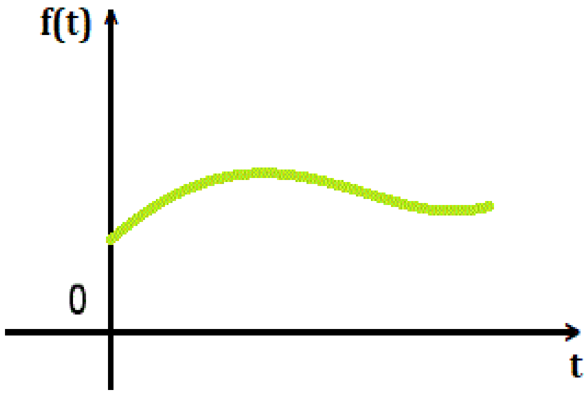
y

$f(t) = 0$

para

$t < 0$

Ejemplo:



La relación entre ambas funciones establece una correspondencia biunívoca, de manera que a una función del tiempo "f(t)" le corresponde una y sólo una función de variable compleja "F(s)".

Además, si "F(s)" existe y es única, es posible reconducir a "f(t)" mediante una operación inversa que se denomina Antitransformada de Laplace y se puede designar también por un operador, del siguiente modo:

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$

Donde la definición de la antitransformada es:

$$f(t) = \frac{1}{j\,2\pi} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \qquad ②$$

siendo "a" un valor de la parte real de "s" para el cual, todas las singularidades de la FVC F(s) quedan a "su izquierda".

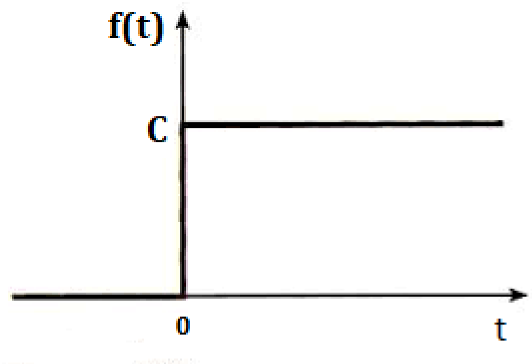
Transformada de funciones simples:

Algunas transformadas de las funciones más simples se pueden calcular en forma sencilla, a partir de la definición, para ampliar la comprensión del mecanismo de aplicación.

1) Transformada de una constante:

Dada la función del tiempo constituida por una constante arbitraria

$f(t) = C$



Si se aplica la definición, resulta:

$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} C\ e^{-st}\, dt =$

$= C \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt =$

$= C\ (\frac{1}{-s})\ [e^{-st}]_0^{\infty} =$

$= (-\frac{C}{s})\ [e^{-\infty} - e^{0}] =$

$= \frac{C}{s}$

Si el valor de la constante fuera unitario, C=1, como en el caso del escalón, $u_{-1}(t)$, resultaría:

$\mathcal{L}[u_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$

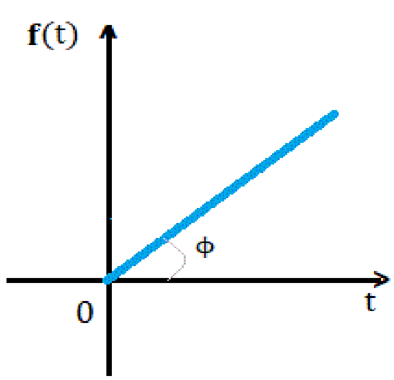
2) Función rampa:

Donde

f(t) = Kt

siendo:

K = tg ϕ



Si K=1, se obtendrá la rampa unitaria, que es una recta a 45°

aplicando la fórmula:

$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty Kt\ e^{-st}\,dt$

Donde la integral se debe resolver por partes:

$$K\int_0^\infty t\ e^{-st}\,dt = \left| \begin{matrix} dv = e^{-st}dt \\ v = -\frac{1}{s}\,e^{-st} \\ u = t \\ du = dt \end{matrix} \right| =$$

siendo entonces:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

luego:

$K\int_0^\infty t\ e^{-st}\,dt =$

$= K\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - K\int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st}\,dt =$ ③

En el primer término en la expresión ③; cuando se reemplaza por t=0, todo el término se anula, pero cuando se reemplaza por t=∞, se produce una indeterminación de la forma $(\frac{\infty}{\infty})$; por lo que se puede aplicar la Regla de L'Hôpital y resulta:

$K\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty =$

$= K\lim_{t\to\infty}\frac{f_1(t)}{f_2(t)} =$

$= K\lim_{t\to\infty}\frac{f_1'(t)}{f_2'(t)}$

siendo:

$f_1(t) = t$

y

$f_2(t) = e^{st}$

luego:

$K[\ldots] = -\frac{1}{s}K\lim_{t\to\infty}\frac{(t)'}{(e^{st})'} =$

$= -\frac{1}{s}K\lim_{t\to\infty}\frac{1}{se^{st}} = 0$

Como el otro extremo también daba cero, todo el producto (uv) es nulo, entonces queda en ③:

$K \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st}\, dt =$

luego:

$\frac{1}{s} K \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt =$

$= \frac{1}{s} K \left[-\frac{1}{s}\right] \left[e^{-st}\right]_0^{\infty} =$

$= \mathbf{\frac{K}{s^2}}$

que es la Transformada de Laplace de la función rampa. Si la rampa es unitaria, K=1, y su transformada se convierte en

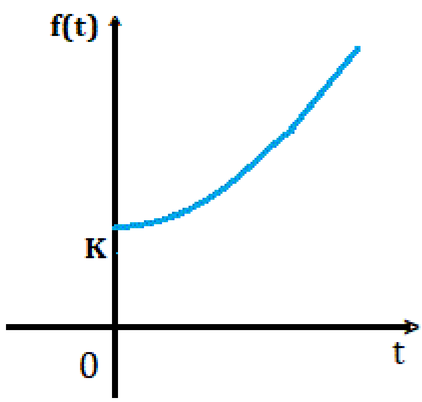
$\boldsymbol{\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}}$

3) <u>Función exponencial</u>:

Dada

$f(t) = K\, e^{at}$

que es una función exponencial creciente:



Aplicando la definición:

$\mathcal{L}[K\, e^{at}] = \int_0^{\infty} K\, e^{at}\, e^{-st}\, dt$

Operando:

$\mathcal{L}[K\, e^{at}] = K \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt =$

$= K \left\{-\frac{1}{(s-a)} \left[e^{-(s-a)t}\right]_0^{\infty}\right\} =$

$= \mathbf{\frac{K}{(s-a)}}$

que es la transformada de Laplace de una función exponencial. Si la función hubiera sido exponencial decreciente, por ejemplo:

$f(t) = e^{-bt}$

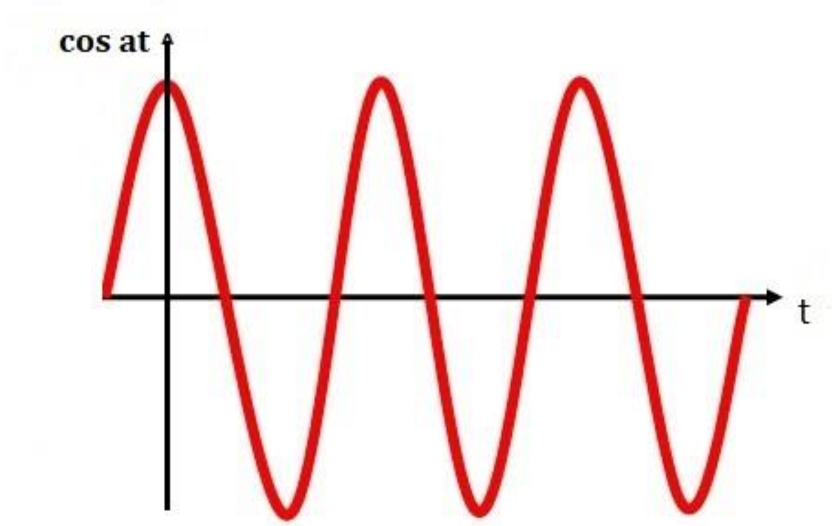
la transformada de Laplace sería tal que cambia el signo en el denominador:

$\mathcal{L}[K\, e^{-bt}] = \frac{K}{(s+b)}$

4) <u>Función coseno</u>:

Para las funciones trigonométricas, comenzando por el coseno, se parte de la función:

$f(t) = \cos at$



aplicando la definición:

$\mathcal{L}[\cos at] = \int_0^\infty \cos at\, e^{-st}\, dt$ ④

Pero por Fórmulas de Euler:

$\cos at = \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2}$

reemplazando en ④:

$\mathcal{L}[\cos at] = \int_0^\infty \{\frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2}\}\ e^{-st}\, dt =$

$= \frac{1}{2} \int_0^\infty\ \{e^{-(s-ja)t} + e^{-(s+ja)t}\}\, dt =$

$= \frac{1}{2}\{-\frac{1}{(s-aj)}\, [e^{-(s-ja)t}]_0^\infty + -\frac{1}{(s+aj)}\, [e^{-(s+ja)t}]_0^\infty\} =$

$= \frac{1}{2}\, [\frac{1}{(s-aj)} + \frac{1}{(s+aj)}] =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+j+s-j}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2+a^2}\right] =$

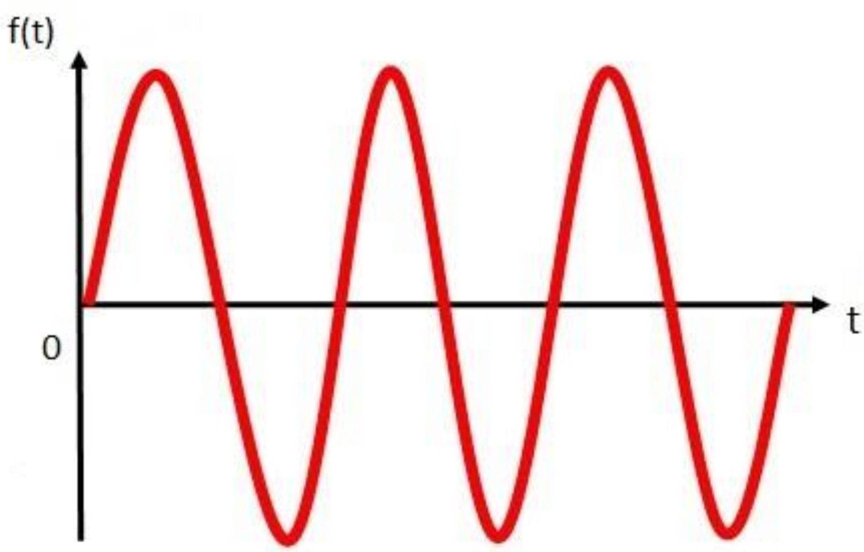
$= \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s^2+a^2}}$

Que es la Transformada de Laplace de (cos at)

5) Función seno:

Dada

f(t) = sen bt



Aplicando la definición:

$\mathcal{L}$[sen bt] = $\int_0^\infty$ sen bt e^{-st} dt

Como ya conocemos la transformada del coseno, esta integral se puede resolver por partes:

$\mathcal{L}$[sen bt] = $\int_0^\infty$ sen bt e^{-st} dt =

$$= \left| \begin{matrix} dv = \text{sen bt dt} \\ v = -\frac{1}{b}\cos bt \\ u = e^{-st} \\ du = -s\, e^{-st}dt \end{matrix} \right| =$$

$= -\left[e^{-st}\frac{1}{b}\cos bt\right]_0^\infty - s\,\frac{1}{b}\int_0^\infty \cos bt\, e^{-st}\, dt =$

$= -\left(-\frac{1}{b}\right) - s\,\frac{1}{b}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right] =$

$= \frac{1}{b} - \frac{1}{b}\,\frac{s^2}{s^2+b^2} =$

$= \frac{s^2+b^2-s^2}{b(s^2+b^2)} =$

$= \mathbf{\frac{b}{s^2+b^2}}$

que es la transformada de Laplace de [sen bt]

Sólo baste agregar para completar esta pequeña reseña que la Transformada de Laplace de una función derivada se resuelve del siguiente modo:

$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

Donde f(0) es la primitiva de f(t) para t = 0

Esto cual tiene una demostración que se omitirá en homenaje a la brevedad. Con esta aclaración podemos dar por concluida la reseña práctica de Transformada de Laplace.

Retomando la explicación en el punto donde habíamos quedado

Y resolviendo las operaciones indicadas en ② se obtendrá:

s [X(s)] – [x(0)] = [A] [X(s)] + [B] [U(s)];

y redistribuyendo los términos resulta:

s [X(s)] – [A] [X(s)] = [x(0)] + [B] [U(s)]

y sacando factor común en el primer miembro:

{s [I] – [A]} [X(s)] = [x(0)] + [B] [U(s)] ③

donde, en el primer miembro, al sacar factor común [X(s)] hay que multiplicar la variable compleja (s) por una matriz identidad [I], ya que la naturaleza del término sigue siendo matricial donde la matriz:

{s [I] – [A]}

Es la MATRIZ CARACTERÍSTICA del sistema y, finalmente, si en ③ se premultiplica miembro a miembro por la inversa de la matriz [s I – A], resultará:

X(s) = [s I – A]$^{-1}$ [x(0)] + [sI – A]$^{-1}$ [B] [U]; ④

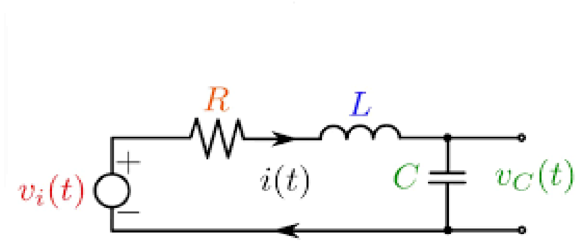
vale la pena recordar que la función x(0) es una función del tiempo y no de (s), ya que proviene de la transformada de la derivada, que genéricamente habíamos dicho que es:

$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s) - f(0)$.

La antitransformada de Laplace de esta función X(s) dada por la expresión ④ será la solución buscada de la ED Vectorial de estado:

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$

Ejemplo:
Formular el modelo de estado del siguiente circuito RLC Serie, constituido por elementos discretos R, L y C y una fuente o generador de tensión de entrada.



El primer paso es plantear las ecuaciones de malla, como ecuaciones de equilibrio convencionales del sistema, por lo tanto:

$$\begin{cases} iR + L\frac{di}{dt} + v = v_i \\ C\frac{dv_\varrho}{dt} = i \end{cases}$$

Y conviene presentar las ecuaciones, despejando las derivadas en el primer miembro, así:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}v_\varrho + \frac{1}{L}\ v_i \\ \frac{dv_\varrho}{dt} = \frac{1}{C}i \end{cases}$$

El comportamiento dinámico de este sistema queda totalmente determinado para todo $t \geq t_o$; si se conocen los valores iniciales de $i(t_o)$; $v_c(t_o)$ y la tensión de entrada $v_i(t)$ para $t \geq t_o$.

Por lo tanto el juego de variables de estado que se pueden elegir para este sistema es:

$x_1 = i(t)$

$x_2 = v_c(t)$

variables correspondientes a los elementos activos o almacenadores de energía, la corriente i(t) a la inductancia L y la tensión $v_c(t)$ al condensador o capacitor C.

Luego, puede reescribirse el último par de ecuaciones como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}\, x_1 - \frac{1}{L}\, x_2 + \frac{1}{L}\, v_i \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}\, x_1 \end{cases}$$

Y este juego de ecuaciones de estado se puede expresar también en forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i$$

Matemáticamente, éste es el modelo de estado correspondiente al sistema o circuito RLC presentado. Se van a adoptar, a los efectos de la resolución práctica, los siguientes valores, todos en unidades compatibles entre sí:

R=2

L=1

C= ½

Y además, por simplicidad, se supone que la tensión de entrada v_i es una función impulso, para que su transformada de Laplace sea unitaria. Este dato no se incluyó en la Reseña de Transformada porque su demostración es muy extensa, pero baste saber que la transformada de Laplace de una función impulso es igual a uno (1).

O sea:

$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

Luego

$v_i(t) = \delta(t)$.

También se supone que la corriente en t=0 es nula, algo lógico porque la inductancia abre el circuito, luego

$x_1(0) = 0$;

y que la tensión inicial en el capacitor es $v_c(0) = 2$ v; luego

$x_2(0) = 2$

Reemplazando por los respectivos valores queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

Donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto permite obtener la Matriz Característica [SI – A] para poder plantear las ecuaciones resultantes de la aplicación de la transformada de Laplace que se estudiaron antes, siendo:

$$\{s[I] - [A]\} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+2) & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix};$$

porque

$$s\,[I] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Cuyo determinante Δ[sI–A] es:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} (s+2) & 1 \\ -2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 2\,s + 2;$$

O sea:

$$\mathbf{\Delta(s) = s^2 + 2\,s + 2}$$

también llamado polinomio característico del sistema o circuito.

Para encontrar la matriz inversa

$\{s[I] - [A]\}^{-1}$

se debe recordar que la matriz inversa de otra dada se obtiene dividiendo la adjunta de su transpuesta por el determinante.

Siendo la matriz transpuesta el resultado de cambiar filas por columnas, resulta:

$$\{s[I] - [A]\}^{T} = \begin{bmatrix} (s+2) & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Cuya adjunta será:

$$\mathrm{Adj}\ [\{s[I] - [A]\}^{T}] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & (s+2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Adj}\ [\{s[I] - [A]\}^{T}]/\Delta(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+2}{\Delta} \end{bmatrix} = \{s[I] - [A]\}^{-1};$$

que es la inversa buscada.

Finalmente, la ecuación

$X(s) = [s\ I - A]^{-1}\ [x(0)] + [sI - A]^{-1}\ [B]\ [U];$

se convierte en:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta} & -1/\Delta \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{L}[\delta(t)]$$

Y reemplazando por los valores iniciales, resulta

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta} & -1/\Delta \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1$$

Resolviendo las operaciones matriciales indicadas, resultará:

$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{\Delta} \\ \frac{2s+6}{\Delta} \end{bmatrix}$ y reemplazando el valor del polinomio característico, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2+2s+2} \\ \frac{2s+6}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}$$

Donde cada fila de la matriz resultante es una solución de la ecuación diferencial de estado, por lo tanto:

$X_1(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+2}$

$X_2(s) = \frac{2s+6}{s^2+2s+2}$

Tomando las respectivas antitransformadas de Laplace se obtendrán las dos variables de estado que corresponden a la corriente en el circuito serie y a la tensión en el capacitor.

De esta manera, eligiendo primero la tensión v_c; que es la variable $x_2(t)$; por facilidad, se podrá obtener a partir de la antitransformada de Laplace de la siguiente expresión:

$$X_2(s) = \frac{2s+6}{s^2+2s+2} = \frac{2[(s+1)+2]}{(s+1)^2+1};$$

factorizando convenientemente, de modo que la antitransformada se pueda calcular en forma inmediata, queda:

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2[(s+1)+2]}{(s+1)^2+1}\right] = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}\right] + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+1}\right]; \qquad (5)$$

Las operaciones de antitransformación no han sido desarrolladas en la Reseña que presentamos pero, para quien lo quiera consultar, podemos agregarlo en forma de Apéndice.

desagregando el operador antitransformada en los dos términos posibles en ⑤, cuyas soluciones se pueden encontrar por separado, resulta:

$2[e^{-t} \cos t] + 2[2\, e^{-t} \operatorname{sen} t] = (2\, e^{-t} \cos t + 4\, e^{-t} \operatorname{sen} t)$

Por lo tanto:

$\mathbf{v_c(t) = (2\, e^{-t} \cos t + 4\, e^{-t} \operatorname{sen} t)}$

la restante variable de estado se podría resolver también por la antitransformada, pero existe un modo más sencillo de hacerlo, a partir de su propia definición, siendo:

$i\,(t) = C\, dv_c/dt$,

por lo que, derivando la solución de $x_2(t)$; y siendo C=1/2, resulta:

$x_1(t) = ½\, \{d/dt[(2\, e^{-t} \cos t + 4\, e^{-t} \operatorname{sen} t)]\} = \mathbf{e^{-t} (\cos t - 3 \operatorname{sen} t) = i(t)}$

Así, utilizando el modelo de estado se puede calcular las soluciones de un circuito RLC de elementos concentrados.

Solución escalar de la ED Vectorial de Estado

Se dijo en páginas anteriores que esta ED Vectorial o Matricial de Estado puede resolverse por métodos operacionales como el de la Transformada de Laplace que acabamos de ver, o por un método escalar asimilable.

Suponiendo que la ED de Estado estuviera conformada por magnitudes escalares, resultaría:

$\mathbf{\dot{x} = a x + b u}$

Donde, obviamente, (a) y (b) son factores escalares.

Siendo en t=0;

$x(t_o) = x_o$

Que se trata de una ecuación diferencial lineal de Primer Orden cuya solución podría proponerse como:

$x = x_h + x_p$

vale decir, una solución de la ecuación homogénea más una solución particular de la completa, donde la solución de la homogénea se puede proponer como un desarrollo en serie de potencias:

$$x_h = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_N t^N \qquad ⑥$$

y esta solución debe satisfacer:

$\dot{x}_h = a\, x_h$

Nota:

No confundir el factor escalar (a) de la ED con los coeficientes (a_K) de la serie de potencias.

Por lo tanto, derivando en ⑥ resulta:

$$\dot{x}_h = a_1 + 2\, a_2\, t + 3\, a_3\, t^2 + 4\, a_4\, t^3 + \ldots + N\, a_N\, t^{N-1}$$

Y esto debe ser igual a:

$a\ x_h$

entonces

$\dot{x}_h = a\, (a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_N t^N)$

De aquí resulta:

$\dot{x}_h = a\, a_o + a\, a_1\, t + a\, a_2\, t^2 + a\, a_3\, t^3 + \ldots + a\, a_N\, t^N$

Para que esta solución satisfaga la ED, los coeficientes correspondientes deben ser iguales, o sea:

$a_1 = a\, a_o$

$2\, a_2 = a\, a_1 \Rightarrow a_2 = ½\, a\, a_1 = ½\, a^2\, a_o$

$3\ a_3 = a\ a_2 \Rightarrow a_3 = 1/3\ a\ a_2 = 1/6\ a^3\ a_o$

.....

Y sucesivamente hasta llegar al coeficiente de orden (N):

$a_N = \frac{1}{N!} a^N a_o$

siendo por condición inicial:

$a_o = x_o$

reemplazando en la solución:

$x_h = x_o + a\ x_o\ t + ½\ a^2\ x_o\ t^2 + 1/6\ a^3\ x_o\ t^3 + ... + \frac{1}{N!} a^N x_o\ t^N$

luego, sacando (x_o) factor común resulta:

$x_h = x_o\ [1 + a\ t + ½\ a^2\ t^2 + 1/6\ a^3\ t^3 + ... + \frac{1}{N!} a^N t^N]$

en esta última expresión el corchete es justamente el desarrollo en serie de potencias de un factor exponencial:

$[1 + a\ t + ½\ a^2\ t^2 + 1/6\ a^3\ t^3 + ... + \frac{1}{N!} a^N t^N] = e^{at}$

Finalmente, la solución de la homogénea es:

$\mathbf{x_h = e^{at}\ x_o}$

y, por convolución, la solución particular de la completa se puede calcular como:

$$\mathbf{x_p = e^{at} \int_0^t b\ e^{-a\tau}\ u(\tau)\ d\tau}$$

Tampoco se ha incluido el tema de Convolución en la Reseña, pero sí está en el Apéndice, para quien lo quiera consultar.

por lo tanto, la solución general de la ED inicial es:

$$\mathbf{x(t) = e^{at}\, x_o + e^{at} \int_0^t b\, e^{-a\tau}\, u(\tau)\, d\tau}$$

Se observa que el término que corresponde a la solución homogénea es independiente de la señal de entrada (u) y, en cambio, depende del estado inicial [$x(0) = x_o$], también se denomina *respuesta transitoria*; mientras que el término que corresponde a la solución particular es independiente del estado inicial y sólo depende de la entrada (u).

Como este caso escalar debe asimilarse al caso real, que es vectorial, debería haberse considerado:

$\dot{x} = Ax + Bu$

Pero para la homogénea debe ser

$u = 0$

entonces queda:

$\dot{x} = Ax$ (7)

Y la solución escalar era:

$x_h = a_o + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 + \dots + a_N\, t^N$

como la solución debe satisfacer la ED (7); si se deriva se obtiene:

$\dot{x}_h = a_1 + 2a_2\, t + 3a_3\, t^2 + \dots + N\, a_N\, t^{N-1}$

Que debe ser igual a:

$A\, (a_o + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 + \dots + a_N\, t^N)$

pero ahora los coeficientes deben ser vectoriales porque [A] es una matriz, y deberán cumplir las siguientes relaciones:

$a_1 = A\, a_o$

$2\, a_2 = A\, a_1$

$3\, a_3 = A\, a_2$

De donde, reemplazando:

$a_1 = A\, a_o$

$a_2 = ½\, A\, a_1 = ½\, A^2\, a_o$

…

$a_N = \frac{1}{N!} A^N a_o$

siendo

$a_o = x_o$

que ahora son vectores.

Reemplazando de modo análogo al que se hizo antes:

$$\mathbf{x_h = (I + A\, t + A^2/2\, t^2 + A^3/6\, t^3 + \ldots + 1/N!\, A^N t^N)\, x_o}$$

donde [I] es la matriz identidad para que el primer término tenga consistencia con los restantes términos de la serie de potencias, que tiene términos matriciales.

De acuerdo con lo visto antes, en el caso escalar, la serie se puede asimilar a un exponencial, pero ahora con argumento matricial, o sea:

$$e^{[A]t} = I + A\, t + A^2/2\, t^2 + A^3/6\, t^3 + \ldots + 1/N!\, A^N t^N$$

Luego, la solución homogénea queda:

$$\mathbf{x_h = e^{[A]t}\, x_o}$$

donde el exponencial, por tener argumento matricial, es también una matriz que se denomina Matriz de Transición o matriz fundamental.

$$e^{[A]t} = \varphi(t)$$

Por lo tanto, puede indicarse:

$\mathbf{x_h(t) = \varphi(t)\, x_o}$

de manera que la matriz de transición está actuando como un operador frente al vector de estado inicial $\{x_o\}$ y permite obtener la solución homogénea en cualquier instante (t). Esta matriz de transición presenta algunas interesantes propiedades, que se detallan a continuación.

Matriz de Transición

Propiedades:

1) Derivada:

Si se deriva la matriz de transición,

$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{de^{At}}{dt} = [A]\, e^{[A]t} = A\, \varphi(t)$

Vale decir que:

$\mathbf{\frac{d[\varphi(t)]}{dt} = [A]\, [\varphi(t)]}$

2) Suma en el argumento:

$\varphi(t_1 + t_2) = e^{[A](t_1+t_2)} = e^{[A]t_1}\, e^{[A]t_2} = \varphi(t_1)\, \varphi(t_2)$

entonces:

$\mathbf{\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1)\, \varphi(t_2)}$

3) Multiplicación por la inversa:

$\varphi(t)\, \varphi^{-1}(t) = e^{[A]t}\, e^{[-A]t} = e^0 = I$

4) Matriz nula:

$\varphi(0) = I$

por el mismo razonamiento del punto anterior

5) Matriz de argumento negativo:

$\varphi(-t) = \varphi^{-1}(t)$

luego:

$\varphi(t) = [\varphi(-t)]^{-1}$

porque

$\{e^{-[A]t}\}^{-1} = e^{[A]t}$

6) Potenciación de la matriz:

$\varphi^{n}(t) = \varphi(nt)$

porque

$\varphi^{n}(t) = [\varphi(t)]^{n} = \{e^{[A]t}\}^{n} = e^{[An]t} = \varphi(nt)$

7) Producto de la diferencia de instantes:

$\varphi(t_3 - t_2)\, \varphi(t_2 - t_1) = \varphi(t_3 - t_1)$

porque

$e^{[A](t_3 - t_2)}\, e^{[A](t_2 - t_1)} = e^{[A]t_3}\, e^{[A](-t_2)}\, e^{[A]t_2}\, e^{[A](-t_1)}$

Se pueden simplificar los dos exponenciales del centro y queda:

$\mathbf{e^{[A](t_3 - t_1)} = \varphi(t_3 - t_1)}$

H.B. 2021