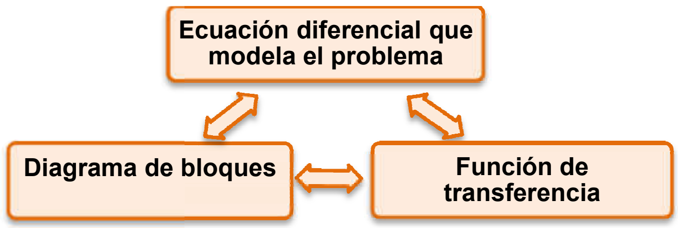
MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADO

El modelo en el espacio de estado se obtiene en función de los datos que se proporcionen de cada sistema:

a) La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema.
b) Un circuito eléctrico, un sistema mecánico o su sistema eléctrico equivalente.
c) La función de transferencia correspondiente al sistema.
d) El diagrama de bloques correspondiente al sistema.



a) ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE MODELA UN SISTEMA

EJEMPLO 1:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = u(t)$$

Se hace $x_1 = y$ de esta manera $x_1 = y \qquad x_2 = \frac{dy}{dt} \rightarrow x_1' = x_2$

Para la derivada de la segunda variable de estado, se despeja de la ecuación diferencial

$\frac{d^2y}{dt^2} = u(t) + 4\frac{dy}{dt} + 5y$ **Se expresa en función de términos de variable de estado teniendo en cuenta que cada ecuación contiene solo una derivada** $x_2' = u(t) + 4\,x_2 + 5\,x_1$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, llamadas ecuaciones de estado, pueden expresarse de manera conveniente en forma matricial.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$

Donde:

x = Vector de estado, formado por una matriz columna de (n x 1)
A = Matriz del sistema (n x n)

B = Matriz de control (n x 1)

C = Matriz de salida (1 x n)

u = Vector de entrada (1 x 1)

y = Matriz de salida
D = Matriz de alimentación directa o proalimentación

El modelo queda: $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = u(t) + 4\,x_2 + 5\,x_1 \end{cases}$ **ECUACIONES DE ESTADO**

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}}_{\left[\dot{x}\right]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{[x]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[B]} u(t)$$

$$\left[\dot{x}\right] = [A]\;[x] + [B]u$$

La función que se debe despejar es y (t), esta función representa la matriz de salida del sistema

$$[y(t)] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ **Donde y (t) = [C] [X (t)] donde [C] es la matriz de salida e y (t) =$x_{1(t)}$**

Para resolver la ecuación diferencial se utiliza el método de transformada de Laplace

$$\begin{bmatrix} X_{1(s)} \\ X_{2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -5 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & -1 \\ -5 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

b) 1. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Elección de las variables de estado:

En la ecuación de estado, se relacionan la variable y su derivada.

Si se tienen dos elementos almacenadores de energía, inductancia y capacidad, las variables de estado se eligen siempre de la siguiente manera:

inductancia :

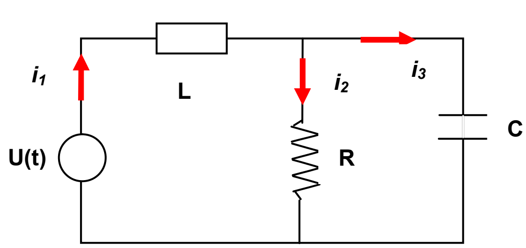
$$i_L = \frac{1}{L}\int v_L\,dt; \quad V_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Se elige $x_1 = i_L$ **porque está relacionada con la derivada** $\Rightarrow V_L = L\,\dot{x}_1$

capacidad :

$$i_c = c\frac{dV_c}{dt}\;;\; V_C = C\frac{di_C}{dt} \quad \text{Se elige } x_2 = V_c \Rightarrow i_c = C\,\dot{x}_2$$

EJEMPLO 2:



Ecuaciones de equilibrio:

U(t) = V_L + V_R $\Longrightarrow$ $U(t) = L\,\dot{x}_1 + x_2$

$\underbrace{\textbf{V}_R = \textbf{V}_c \quad \textbf{donde } i_L = i_R + i_C}$ $\Rightarrow x_2 = \left(x_1 - C\,\dot{x}_2\right)R$

Se escriben en términos de variables de estado

$$\text{Ecuaciones de estado:}$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_2}{L} + \frac{U(t)}{L}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{CR}$$

$$\text{Modelo en el espacio de estado:}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t)$$

$$\text{Matriz de salida:}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 = V_c$$

b) 2. MODELO MECÁNICO

EJEMPLO 3:

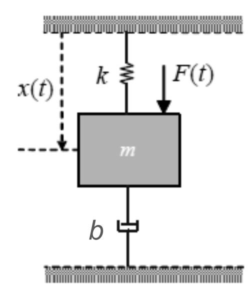
Obtener el modelo de estado que define el desplazamiento x (t) de una masa M con constante elástica k y con coeficiente viscoso b, si en t= 0 se aplica al sistema una fuerza de desplazamiento F.

Ecuaciones de equilibrio del sistema:

$$\sum F = m * a \rightarrow \quad F(t) - b\frac{dx(t)}{dt} - k\,x(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt}$$

$$\text{Agrupamos para dejar solo la entrada en el segundo miembro:}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt} + b\frac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = F(t) \quad \text{donde } F(t) \equiv U(t)$$



$$\text{Llamamos:}$$

$$x_1 = x(t) \qquad x_2 = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}_1 \;;\quad \dot{x}_2 = \frac{F(t)}{m} - \frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

$$\text{Ecuaciones de estado:}$$

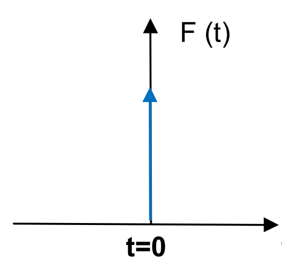
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m}$$

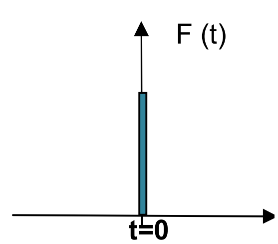
$$\text{Modelo en el espacio de estado:}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

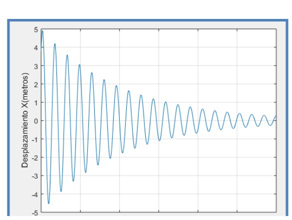


La función F (t) la consideramos un impulso para resolver la ecuación de estado, dado que la transformada de Laplace del impulso es 1.



Físicamente F (t) es un pulso de muy corta duración.

La función x(t) que es el desplazamiento de la masa en un instante t, es de la forma:

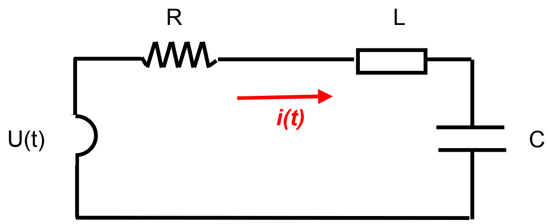


MODELO ELÉCTRICO EQUIVALENTE

Circuito serie: Se asocia cada fuerza con una caída de tensión

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}*b+x(t)*k=F(t)$$

En el circuito de la figura la ecuación de equilibrio es $u(t)=V_R+V_L+V_C$



Se ordena para comparar con el modelo mecánico

$$L*\frac{d\,i(t)}{dt}+i(t)*R+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt=u(t)$$

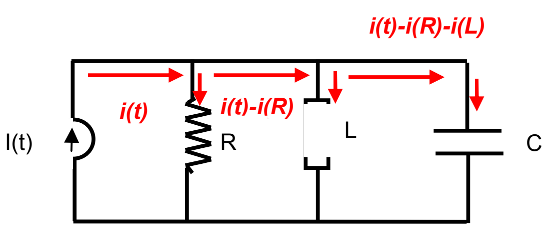
Si se expresa la ecuación del modelo mecánico en términos de velocidad en lugar de desplazamiento, resulta:

$$m\frac{dv(t)}{dt}+v(t)*b+k\int v(t)\,dt=F(t)$$

L y C son los elementos almacenadores de energía, se deberán corresponder con el resorte y la masa. Comparando:

$$\boxed{L=m \qquad R=b \qquad y \qquad C=1/k}$$

Circuito paralelo: Se asocia cada fuerza con una corriente de malla



$$I(t)=i_R+i_L+i_C$$

$$\frac{V_R}{R}+\frac{1}{L}\int V_L dt+c\frac{dV_C}{dt}=I(t)$$

Se ordena la ecuación para comparar términos:

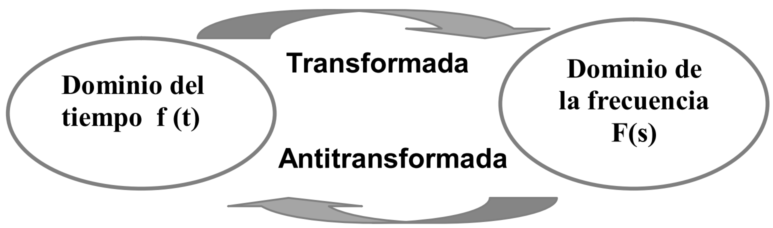
$$m\frac{dv(t)}{dt}+v(t)*d+k\int v(t)\,dt=F(t)$$

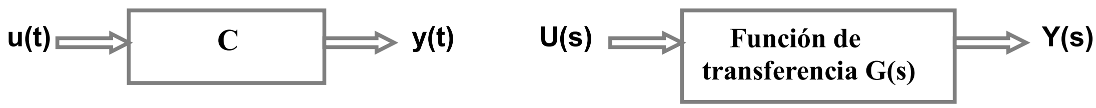
$$C\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_R}{R}+\frac{1}{L}\int V_L dt=I(t)$$

$$\boxed{C=m \qquad R=1/b \qquad y \quad L=1/k}$$

c) FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Se define como la relación de la trasformada de Laplace de la salida (función respuesta), a la transformada de Laplace de la entrada (función excitadora), bajo la suposición de condiciones iniciales cero. Es una expresión que relaciona la salida y la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo, en términos de los parámetros del sistema y constituye una propiedad del mismo, independiente de la función excitadora.





y (t) = C u(t) Y(s) = G(s) U(s)

- La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, sin embargo no brinda ninguna información respecto a la estructura física del sistema.
- Sistemas físicamente distintos pueden tener la misma función de transferencia. Los sistemas equivalentes, siempre tienen la misma función de transferencia
- El conocimiento de la función de transferencia permite el estudio de la respuesta del sistema a diversas formas de entrada, con lo cual se puede lograr una mejor comprensión de la naturaleza del sistema.
- La función de transferencia se puede obtener experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la respuesta del sistema. Esto se conoce como identificación de sistemas, para lo cual existen una multitud de métodos.

EJEMPLO 4:

Hallar la función de transferencia

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = u(t)$$

Se transforma miembro a miembro:

a) Para resolver una ecuación diferencial $\rightarrow \mathcal{L}\,[\,f''(t)] = s^2\,F(s) - s\,f\,(0) - f'(0)$

$$\left. s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 4\left[s\,Y(s) - y(0)\right] - 5Y(s) = U(s) \right\}$$ **Se necesitan las condiciones de contorno y (0) e y’ (0)**

b) Para encontrar la función de transferencia no se tienen en cuenta las condiciones iniciales

$$s^2Y(s) - 4\,s\,Y(s) - 5Y(s) = U(s) \;\Rightarrow\; H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$Y(s)\left(s^2 - 4\,s - 5\right) = U(s) \;\text{ despejo }\; \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{U(s)}{U(s)\left(s^2 - 4\,s - 5\right)} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 - 4\,s - 5}$$

EJEMPLO 5:

A partir de la función de transferencia, encontrar la ecuación diferencial que modela el problema

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} \;\Rightarrow\; \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 6}$$

Debemos hallar la ecuación diferencial:

$$s^2Y(s) + 4s\,Y(s) + 6Y(s) = U(s)$$

Antitransformamos miembro a miembro:

$$y''(t) + 4y'(t) + 6y(t) = u(t)$$

Conocida la función de transferencia se puede encontrar la ecuación diferencial que modela un sistema y a partir de la ecuación diferencial, obtener las ecuaciones de estado.

La utilidad de la función de transferencia aplicada a modelos en el espacio de estado, es su utilización en sistemas donde la ecuación diferencial que lo modela no tiene solución analítica sencilla. También se utilizará en otros capítulos donde su cálculo tiene ventajas con respecto a la obtención de la ecuación diferencial.

Función de transferencia a partir del modelo en el espacio de estado:

Se parte de la forma matricial de la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t)$$

Se transforma miembro a miembro

$s\,X(s) - x(0) \rightarrow$ **transformada de Laplace de la derivada primera, para función de transferencia** $x(0) = 0$

$$s\,X(s) = A\,X(s) + B\,U(s)$$
$$Y(s) = C\,X(s)$$

Se despeja X(s) para reemplazarla en la ecuación que da la salida, es importante tener en cuenta que se trata de matrices, por lo tanto hay que respetar su orden en el producto

$$sX(s) - A\,X(s) = B\,U(s)$$

Para sacar X(s) factor comun, se mutiplica "s" por la matriz identidad para que sea de orden nx n

$$[sI - A\,]\underbrace{[X(s)]}_{} = B\,\underbrace{[U(s)]}_{}$$

Matrices de orden nx1

Matriz de orden nxn

Para despejar en matrices debemos mutiplicar miembro a miembro por la inversa de [sI − A]

$$\underbrace{[sI - A]^{-1}[sI - A]}_{\text{Matriz unidad}} X(s) = [sI - A]^{-1} B\,U(s)$$

$X(s) = [sI - A]^{-1} B\,U(s)$ **Se reemplaza en Y(s)** $\Rightarrow$ **Y(s) = {[C] [SI] - [A])$^{-1}$ [B]+ D} U(s)**

Para un sistema con una sola entrada y una sola salida, Y(s) y U(s) son magnitudes escalares, luego se podría dividir miembro a miembro por U(s) en la última expresión y se obtiene:

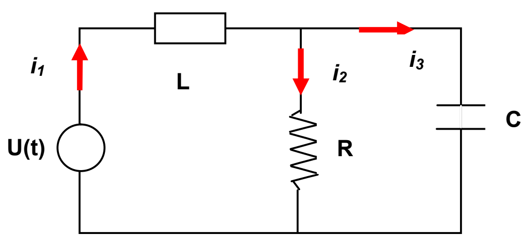
Y(s)/U(s) = H(s) siendo H(s) = [C] [SI-A]$^{-1}$ [B] + [D]

Si se considera nula la Matriz de Proalimentación o alimentación directa

$$\boxed{H(s) = [C]\,[SI-A]^{-1}\,[B]}$$

EJEMPLO 6:

Hallar la función de transferencia del siguiente circuito eléctrico a partir del modelo en el espacio de estado y obtener la ecuación diferencial que lo modela.



Modelo en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}U(t)$$

Matriz de salida:

$$y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = x_2 = V_c$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix} \quad \text{se debe calcular} \quad \begin{bmatrix}s & \frac{1}{L}\\ -\frac{1}{C} & s+\frac{1}{RC}\end{bmatrix}^{-1} \qquad [sI - A]^{-1} = \frac{[\text{cofactores}]^T}{\det[sI - A]}$$

$$\begin{bmatrix}s & \frac{1}{L}\\ -\frac{1}{C} & s+\frac{1}{RC}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}s+\frac{1}{RC} & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & s\end{bmatrix}^{T}\frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)} = \begin{bmatrix}s+\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & s\end{bmatrix}\frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & s\end{bmatrix}\frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)}\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)}\begin{bmatrix}\frac{1}{C} & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 LC + s\frac{L}{R} + 1} \quad \Longrightarrow \quad Y(s)s^2LC + Y(s)s\frac{L}{R} + Y(s) = U(s)$$

Transformando miembro a miembro, se obtiene:

$$y''(t)LC + y'(t)\frac{L}{R} + y(t) = u(t) \quad \text{si se normaliza} \quad y''(t) + y'(t)\frac{1}{CR} + y(t)\frac{1}{LC} = \frac{u(t)}{LC}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE CORRESPONDE AL CIRCUITO ELÉCTRICO

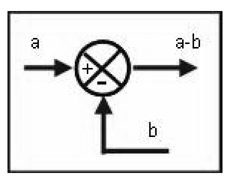
d) DIAGRAMA DE BLOQUES

Un sistema lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques que es una representación gráfica del modelo matemático de un sistema. El diagrama está formado por puntos suma, bloques y puntos de ramificación, en muchos casos estos diagramas permiten entender el comportamiento y conexión del sistema. En un diagrama de bloques se unen todas las variables del sistema, para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los elementos se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales. La señal solo puede pasar en la dirección de la flechas.

<u>En esta materia se utilizarán como herramienta para encontrar el modelo en el espacio de estado</u>, por este motivo debe tener la mayor cantidad posible de información proporcionada por cada bloque, en todos los casos se tratará de sistemas con realimentación para relacionar de esta manera las variables de estado del sistema.

PUNTO SUMA

Un círculo con una cruz es el símbolo que indica una operación de suma. El signo de más o de menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse

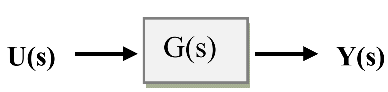


.

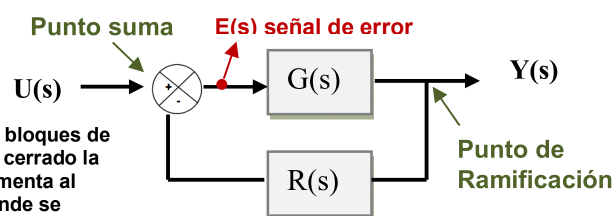
PUNTO DE RAMIFICACION

Un punto de ramificación es aquel a partir del cual la señal de un bloque va a otros bloques o puntos suma.

SISTEMA EN LAZO ABIERTO



SISTEMA EN LAZO CERRADO

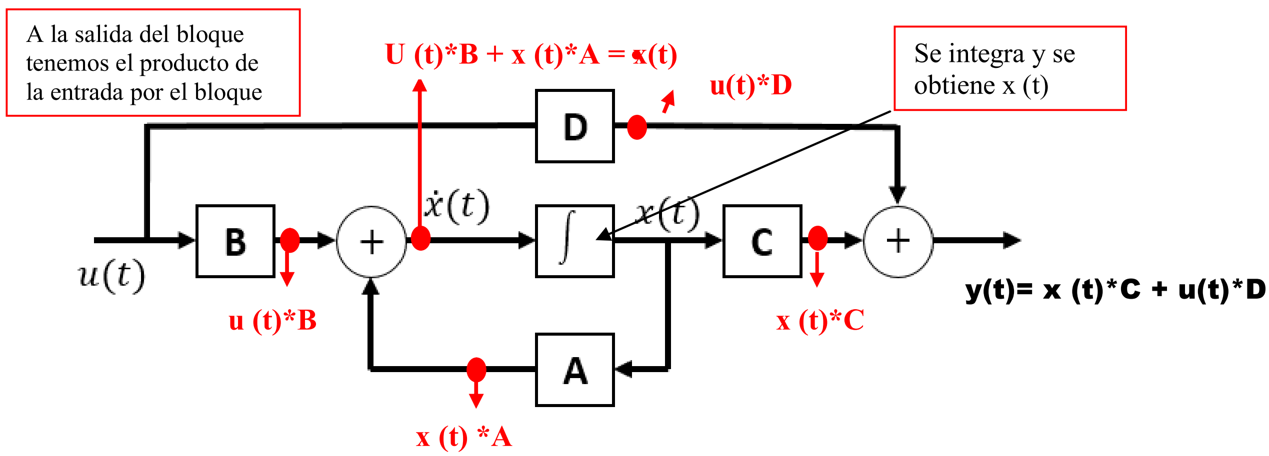


En un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado la salida Y(s) se realimenta al punto suma, en donde se compara con la entrada de referencia U(s).

La salida del bloque Y(s) se obtiene multiplicando la función de transferencia G(s) por la entrada al bloque E(s)
E(s) es llamada señal de error E(s) = U(s) – R(s) Y(s)

Representación en un diagrama de bloque del modelo de estado

Ecuación de estado
$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \right.$$

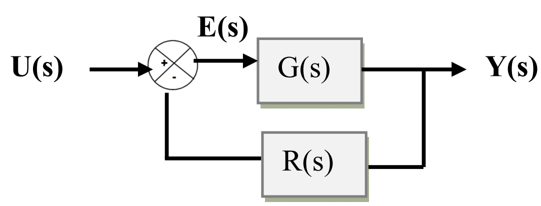


Importante: En el diagrama no se ha respetado el orden del producto matricial

¿COMO SE PUEDE CONSTRUIR EL DIAGRAMA DE BLOQUE DE UN SISTEMA DE LAZO CERRADO?

Se tiene en cuenta:

- G(s) es la función de transferencia del lazo directo.
- R(s) es la función de transferencia del lazo de realimentación.



Para calcular la función de transferencia del sistema H(s) se sigue el lazo:

E(s) =U(s) – R(s)*Y(s)

Y(s) = E(s)*G(s)

Se reemplaza E(s): Y(s) = [U(s) – R(s)*Y(s)] *G(s)

Y(s) = U(s)*G(s) – R(s)*Y(s) *G(s)

Y(s) + R(s) *Y(s) *G(s) = U(s)*G(s)

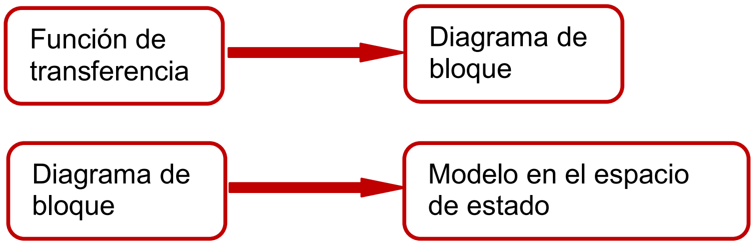
Y(s) [1+R(s) * G(s)] = U(s) *G(s) despejando Y(s) = U(s) *G(s)/[1+R(s)*G(s)

Se divide m.a.m por U(s)

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + R(s) * G(s)}}$$

Función de transferencia de lazo cerrado

Se verá un ejemplo de cada caso:



EJEMPLO 7:

Hacer el diagrama de bloques del sistema cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6}$$

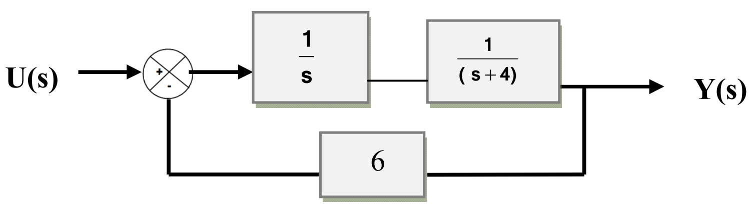
En variable de estado, los bloques que contengan a s, deben ser integradores significa que la s debe estar dividiendo.

Va a tener tantos bloques integradores como indique el orden de la ecuación diferencial

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\ R(s)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} = \frac{1}{(s^2 + 4s)\left(1 + \frac{6}{s^2 + 4s}\right)} = \frac{\frac{1}{s^2 + 4s}}{\left(1 + \left(\frac{1}{s^2 + 4s}\right)(6)\right)}$$

Se compara $G(s) = \frac{6}{s^2 + 4s}$ **y** $R(s) = 6$



EJEMPLO 8:

Diagrama de bloques para el sistema masa- resorte – amortiguador

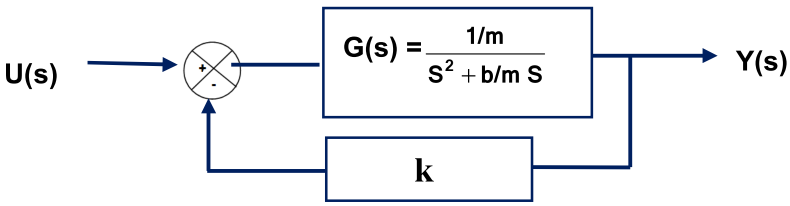
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} * b + x(t) * k = F(t) \quad \Rightarrow \quad m\,s^2X(s) + b\,s\,X(s) + k\,X(s) = F(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{m\,s^2 + b\,s + k} = \frac{1/m}{s^2 + b/m\,s + k/m}$$

Conviene llevarlo a la forma: $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + R(s) * G(s)}$

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + b\,s + k} = \frac{1}{(ms^2 + b\,s)\left(1 + \frac{k}{ms^2 + b\,s}\right)} = \frac{\frac{1}{(ms^2 + b\,s)}}{\left(1 + \frac{k}{ms^2 + b\,s}\right)} = \frac{\frac{1}{s(ms + b)}}{\left(1 + \frac{k}{ms^2 + b\,s}\right)}$$

$$H(s)=\frac{1}{ms^2+b\,s+k}=\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}=\frac{\frac{1}{m}}{\left(s^2+\frac{b}{m}s\right)\left(1+\frac{\frac{k}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s}\right)}=\frac{\frac{1}{m\left(s^2+\frac{b}{m}s\right)}}{\left(1+\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s}*k\right)}$$



El factor s^2 indica que la función de entrada se ha derivado dos veces, para encontrar la primitiva se debe derivar dos veces. Para aplicar diagrama de bloques para variable de estado se debe tener en cuenta:

- Los bloques deben solo integradores o constantes.
- En cada bloque figura una sola operación sobre la función de entrada
- Se debe trabajar algebraicamente la función de transferencia para obtener G(s) y R(s)
- Las variables de estado se toman a la salida del bloque integrador
  (al bloque entra la función derivada y sale la función sin derivar)

$$G(s)=\frac{1/m}{S^2+b/m\ S}=\frac{1/m}{S(S+b/m)}=\left(\frac{1/m}{S}\right)\left(\frac{1}{S+\frac{b}{m}}\right)$$

Reemplazando: $$H(s)=\frac{\frac{1/m}{s}\cdot\frac{1}{(s+b/m)}}{\left(1+\frac{1/m}{s}\cdot\frac{1}{(s+b/m)}*k\right)}$$

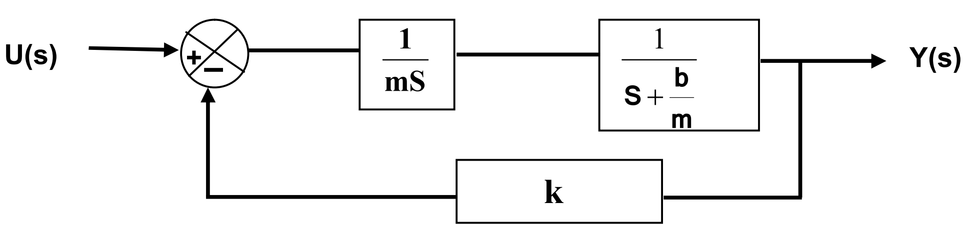
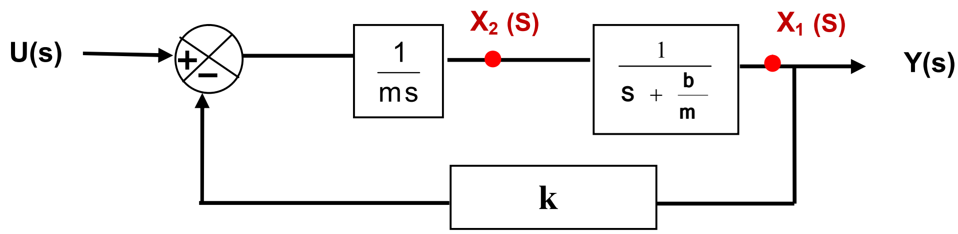


Diagrama de bloque sistema masa- resorte -amortiguador

EJEMPLO 9:

OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO A PARTIR DEL DIAGRAMA DE BLOQUES



En el diagrama de bloque anterior, se toman las variables de estado a la salida de los bloques integradores, no interesa el orden en el que se tomen.

$$\begin{cases} X_1(s) = X_2(s) * \dfrac{1}{S + \frac{b}{m}} \\ X_2(s) = [U(s) - k * X_1(s)] * \dfrac{1}{mS} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S * X_1(s) + b/m * X_1(s) = X_2(s) \\ S * X_2(s) = U(s)/m - k/m * X_1(s) \end{cases}$$

PARA OBTENER LAS ECUACIONES DE ESTADO SE ANTITRANSFORMA MIEMBRO A MIEMBRO

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{b}{m} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m} x_1(t) + \frac{u(t)}{m}$$

En forma matricial $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$

Salida : $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ **Modelo en el espacio de estado**

Se han visto distintas formas de obtener el modelo en el espacio de estado, la elección de una u otra dependerá de la información que se tenga del sistema. En algunos casos la ecuación diferencial contiene derivadas de la función de entrada, obtener el modelo desde la ecuación, implica eliminar variables, es más sencillo en esos casos, realizar un diagrama de bloque y a partir de él obtener el modelo en el espacio de estado.