ALGEBRA LINEAL

ESPACIOS VECTORIALES

DRA. ANA MARÍA NUÑEZ

VUELO ESPACIAL Y SISTEMAS DE CONTROL

Con doce pisos de altura y peso de 75 toneladas, el *Columbia* se elevó majestuosamente desde la plataforma de lanzamiento en una fresca mañana de abril de 1981. El primer transbordador de Estados Unidos, producto de diez años de investigación, fue un triunfo de la ingeniería de sistemas de control que abarca muchas ramas como la aeronáutica, química, eléctrica, hidráulica, informática, computación, industrial, mecánica, etc.

Los sistemas de control del transbordador espacial resultan absolutamente críticos para el vuelo. Como el transbordador tiene un fuselaje inestable, requiere de constante vigilancia por computadora durante el vuelo atmosférico. Los sistemas de control de vuelo envían una corriente de comandos a las superficies de control y a los impulsores de propulsión a chorro.

Matemáticamente, las señales de entrada y salida de un sistema de control son funciones. Es importante, para las aplicaciones, que estas señales puedan sumarse, y multiplicarse por escalares. Estas dos operaciones con funciones tienen propiedades algebraicas completamente análogas a las operaciones de suma de vectores en R*n* y multiplicación de un vector por un escalar.

Los fundamentos matemáticos de la ingeniería de sistemas de control descansan sobre los espacios vectoriales y las funciones.

Del libro Algebra Lineal y sus Aplicaciones de David C. Lay

ESPACIOS VECTORIALES

PARTAMOS DE CONSIDERAR UN CONJUNTO NO VACÍO Y UN CUERPO k, QUE PUEDE SER EL DE LOS NÚMEROS REALES O EL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

(Números reales o números complejos con las operaciones usuales de suma y multiplicación.)

Y DOS OPERACIONES UNA INTERNA Y UNA EXTERNA

EN SIMBOLOS!!

$V \neq \varnothing$ → $(K, +, .)$ cuerpo → $(R, + , .)$ / $(C, + , .)$

Dos operaciones

Suma (Interna)

$$+ : VxV \to V$$
$$(u,v) \to u + v$$

Multiplicación por un escalar (Externa)

$$\bullet : KxV \to V$$
$$(t,v) \to t \bullet u$$

- Asociativa:
  $(u + v)+w = u + (v + w)$
- Existe elemento neutro único (vector nulo):
  $$\vec{0} + u = u + \vec{0} = u$$
- Todo elemento posee opuesto:
  $$u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$$
- Conmutativa:
  $u + v = v + u$

- Siendo t de K:
  $t\,.\,(u + v) = t \bullet u + t \bullet v$
- Siendo t y h de K:
  $(t + h) \bullet u = t \bullet u + h \bullet u$
- Siendo t y h de K:
  $(t\,.\,h) \bullet u = t \bullet (h \bullet u)$
- Para el neutro multiplicativo de K:
  $1 \bullet u = u$

$V(K)$ es un ESPACIO VECTORIAL

ESPACIOS VECTORIALES

EJEMPLOS

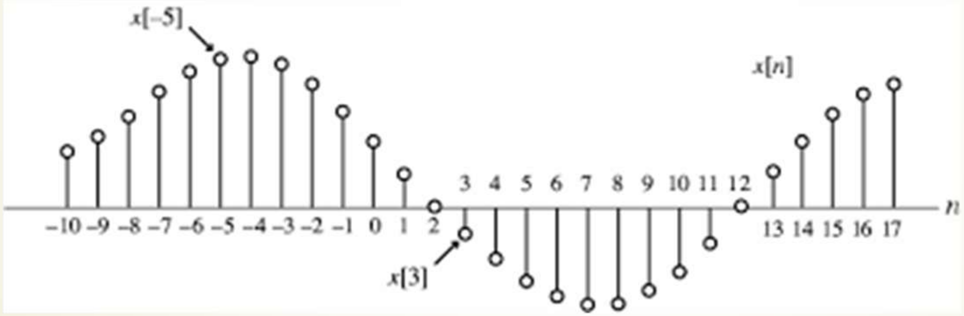
$R^n(R)$	Espacio vectorial real de n elementos Reales: pares, ternas, etc.	Son n – uplas de reales
$\mathcal{C}_{[a,\ b]}(R)$	Espacio vectorial real de las funciones continuas en un intervalo [a, b]	Son funciones
$M_{mxn}(R)$	Espacio vectorial real de las matrices de m filas y n columnas	Son matrices
$C^n(C)$	Espacio vectorial complejo de n elementos: Complejos: pares, ternas, etc.	Son n – uplas de complejos

VECTORES

ESPACIOS VECTORIALES

Un ejemplo muy interesante:

En ingeniería, siempre que una señal se mide (o muestrea) en tiempos discretos se trabaja a partir de sucesiones infinitas de números reales.
Una señal puede ser eléctrica, mecánica, óptica, etc. Por convención, se llamará a S espacio de **señales** (en tiempo discreto).



Representación gráfica de una señal en tiempo discreto.
OCW.uv.es

Sea S el espacio de todas las sucesiones infinitas de números reales, normalmente escritas en fila. S es un espacio vectorial sobre los reales.

$$X_i = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

ESPACIOS VECTORIALES

- **LOS ELEMENTOS DE UN ESPACIO VECTORIAL SE DENOMINAN VECTORES**

ES POSIBLE DEMOSTRAR QUE EL VECTOR NULO ES ÚNICO

Y

QUE EL VECTOR OPUESTO DE UNO CUALQUIERA TAMBIÉN ES ÚNICO

A TRABAJAR

DEMOSTRAREMOS POR EL ABSURDO!!

ESPACIO VECTORIAL

V (K) $\quad$ **u** $\in$ ***V*** → vector

Se verifica:

$\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ → $\boldsymbol{0} \bullet \boldsymbol{u} = \vec{0}$

Siendo 0 el neutro aditivo de K

$\forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{K}$ → $\boldsymbol{t} \bullet \vec{0} = \vec{0}$

(t es un real o es un complejo x + yi)

$\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ → $\boldsymbol{-1} \bullet \boldsymbol{u} = \boldsymbol{-u}$

ATENCIÓN!!

En el cuerpo de los números complejos:

0 = 0 + 0i o bien (0, 0)

-1 = -1 + 0i o bien (-1, 0)

Esta notación simplificada se permite por la relación que existe entre los números reales y una parte del conjunto de los números complejos, los que poseen parte imaginaria nula.

ESPACIOS VECTORIALES

Trabajamos en clase. Del Trabajo práctico:

Problema 1. Pruebe que el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a dos es un espacio vectorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

¿Cuál es el vector nulo en este caso?

Problema 2. Pruebe que el conjunto de pares ordenados de números complejos es un espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ $(\mathbb{C})$

¿Cuál es el vector nulo en este caso?

Para tener muy en cuenta:

En ingeniería y en otras áreas disciplinares frecuentemente se trabaja con partes de los espacios vectoriales.

En el ejemplo que vimos de los Polinomios de grado menor o igual a dos sobre los reales, trabajamos con una parte del espacio vectorial de las funciones continuas en IR.

Por este motivo la Matemática ofrece una alternativa muy conveniente:

LOS SUBESPACIOS!!!

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

SUBESPACIOS

Subconjunto S de V

S $\neq \emptyset$

S (K) **espacio vectorial respecto a las mismas operaciones definidas en V**

S es un subespacio de V

V (K)

$$S = V$$

$$S = \left\{ \vec{0} \right\}$$

Subespacios triviales de V

El vector nulo de V siempre pertenece a sus subespacios

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

SUBESPACIOS

Propiedad - Parte estable

S es una parte estable de V $\Leftrightarrow \begin{cases} S \subset V \qquad S \neq \varnothing \\ u \in S \wedge v \in S \Rightarrow u + v \in S \\ t \in K \wedge u \in S \Rightarrow t \,.\, u \in S \end{cases}$

S(K) **es un subespacio de** ***V(K)***

El vector nulo de V siempre pertenece a sus subespacios !!!!!

Trabajamos un ejemplo

Indique si el siguiente subconjunto del espacio de los vectores geométricos del plano IR^2 (IR) es subespacio vectorial. Justifique su respuesta:

$$S = \{u/u = (x, y) \in IR^2 \wedge 2x + y = 0\}$$

Compare con:

$$S = \{u/u = (x, y) \in IR^2 \wedge 2x + y = 1\}$$

Concluya

Represente gráficamente

ESPACIOS VECTORIALES

Trabajamos en clase. Del Trabajo práctico:

Problema 3. Considere el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a tres P_3 (IR). Analice si el siguiente conjunto es subespacio del mismo. Justifique su respuesta.

$S = \{ p \,/\, p \in P_3\,(IR) \wedge p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ , con } a - b = 0 \}$

Problema 4. Considere el espacio vectorial de las matrices 2x2 con elementos complejos e investigue si el siguiente conjunto es un subespacio de él. Justifique su respuesta.

$$S = \{ A \,/\, A \in M_{2x2} \wedge A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \text{ siendo } z_1 \text{ y } z_2 \text{ de C} \}$$

Problema 5. Muestre que el conjunto H de los vectores en IR^2 (IR) de la forma (3s, 2 + 5s) con s de IR, no es un subespacio vectorial, Justifique su respuesta encontrando un vector específico u en H, y un escalar c tal que c.u no esté en H

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Combinaciones lineales

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ **son esclares de *K***

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ **son vectores de *V***

$$\boxed{t_1 \bullet u_1 + t_2 \bullet u_2 + \ldots t_n \bullet u_n = u} \Rightarrow \boxed{u \in V}$$

Ejemplo: $\mathcal{C}_{[a,\, b]}(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{f(x) = 2 \cos(x) - \text{sen}(x)}$

Ejemplo: $\mathcal{C}^2(\mathbb{C}) \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= i.(1+i,\, i) + (2i,\, -1-2i) \\ &= (-1 + 3i,\, -2 - 2i) \end{aligned}}$$

ESPACIOS VECTORIALES

Trabajamos en clase. Del Trabajo práctico:

Problema 6. Investigue si la matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$ **del espacio vectorial M2x2 (IR) es combinación lineal de los vectores dados en los siguientes puntos.**

Justifique sus repuestas.

a) A1 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A2 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A3 = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) A1 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A2 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A3 = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

AHORA BIEN, NOS INTERESA ABORDAR ALGUNAS CUSESTIONES

Por ejemplo, cuando una combinación lineal es igual al vector nulo? Qué escalares están involucrados en este caso? Qué significa esto?

Es posible expresar un vector cualquiera como combinación lineal de algunos vectores seleccionados? Qué significa esto?

Las respuestas a estos interrogantes tienen algún efecto en el espacio vectorial?

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Combinaciones lineales

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ son esclares de *K*

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ son vectores de *V*

$$\boxed{t_1 \bullet u_1 + t_2 \bullet u_2 + \ldots t_n \bullet u_n = u}$$

Si $u = \vec{0}$

$$\underbrace{t_1 \bullet u_1 + t_2 \bullet u_2 + \ldots t_n \bullet u_n = \vec{0}}_{\text{S.E.L.H.}}$$

$\boxed{\text{Todo } t_i = 0}$ Linealmente independientes

Vectores

$\boxed{\text{Algún } t_i \neq 0}$ Linealmente dependientes

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Combinaciones lineales

Ejemplo

Analicemos si F1 o F2 son conjuntos de vectores linealmente Independientes en sus respectivos espacios vectoriales.

$M_{2x2}\ (R)$

$$F1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{C}^2(\mathcal{C})$

F2 = { (1+i, i), (2i, -1-2i) }

Vamos a demostrar en clase que en un conjunto de vectores dado, un vector es linealmente dependiente si se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores del conjunto.

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Combinaciones lineales

Consideremos un conjunto de vectores: $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$

<u>Si es posible expresar</u> a un elemento u cualquiera de *V* como combinación lineal de estos vectores

$$\underbrace{t_1 \bullet u_1 + t_2 \bullet u_2 + \ldots t_n \bullet u_n = u}_{\text{S.E.L.}}$$

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \Rightarrow$$

Vectores generadores de V

Conjunto generador de V

Familia generatriz de V

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Combinaciones lineales

Ejemplo

Analice si F1 o F2 son conjuntos de vectores generadores en sus respectivos espacios vectoriales.

$\mathcal{P}_2$**(IR)**

$$F1 = \{ f, g \} \text{ siendo: } f(x) = 1,\ g(x) = x^2$$

M_{2x2} ***(R)***

$$F2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Conjuntos generadores

Ejemplo: Resuelve

Una compañía de concreto almacena tres mezclas básicas que se presentan en la tabla a continuación. Las cantidades se miden en gramos y cada unidad de mezcla mide 60gramos. Pueden formularse mezclas especiales de combinaciones de las tres mezclas básicas, entonces las mezclas especiales posibles pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan las tres mezclas básicas:

Mezclas	A	B	C
Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15
Grava	10	5	15
Tobas	0	2	8

¿Se puede realizar una mezcla que consiste en 1000g de cemento, 200g de agua, 1000g de arena, 500g de grava y 300g de tobas?

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

BASE

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ son vectores de *V*

$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$

Vectores Linealmente independientes

Vectores generadores de V

Base del espacio vectorial V

Existen infinitas bases en cada espacio vectorial

Todas las bases de un espacio vectorial tienen igual cantidad de elementos

Todo vector se expresa de manera única en cada base

El número de vectores de una base es la <u>DIMENSIÓN</u> del espacio vectorial

El espacio vectorial real de las funciones continuas tiene dimensión <u>infinita</u>

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Bases

Retomamos los ejemplos vistos:

Analicemos si los conjuntos siguientes son bases de sus respectivos espacios vectoriales.

$M_{2x2}(R)$ F1 = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{C}^2(\mathcal{C})$ F2 = { (1+i, i), (2i, -1-2i) }

$\mathcal{P}_2$(IR) *F1 = { f, g } siendo: f(x) = 1, g(x) = x^2*

$M_{2x2}(R)$ $F2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

Componentes de un vector

Las componentes de un vectores son los escalares que los identifican en una determinada Base

Ejemplo

M2x2 (IR)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \ \ la\, base \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son las componentes de A en esta Base?

Esas componentes de A son únicas en esa base B

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

SUBESPACIOS ➡ **DIMENSIÓN**

S es un subespacio de V

$$\left.\begin{array}{l}\dim(V) = n \\ \dim(S) = p\end{array}\right\} \quad 0 \leq p \leq n$$

Triviales

$S = V$ ➡ **dim (S) = dim (V)**

$S = \left\{ \vec{0} \right\}$ ➡ **dim (S) = 0**

Ejemplo

Halle una base y la dimensión para el subespacio del plano IR^2 (IR).

$$S = \{u/u = (x, y) \in IR^2 \wedge 2x + y = 0\}$$

Represente gráficamente.

ESPACIOS VECTORIALES

Trabajamos en clase. Del Trabajo práctico:

Problema 7. Considere el espacio vectorial de los Polinomios de grado menor o igual a tres sobre lo reales, y sea p (x) = a x^3 + b x^2 + c x + d, con a ≠ 0, demuestre que los vectores p (x), p'(x), p''(x), p'''(x) de las derivadas sucesivas, conforman una base de P_3 (IR) e indique la dimensión del espacio.

Problema 8. Determine una base y la dimensión del espacio vectorial complejo: $\mathbb{C}^2 (\mathbb{C})$ de pares ordenados de números complejos.

Problema 9. Determine una base y la dimensión del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres sobre los reales.

ESPACIOS VECTORIALES

Trabajamos en clase. Del Trabajo práctico:

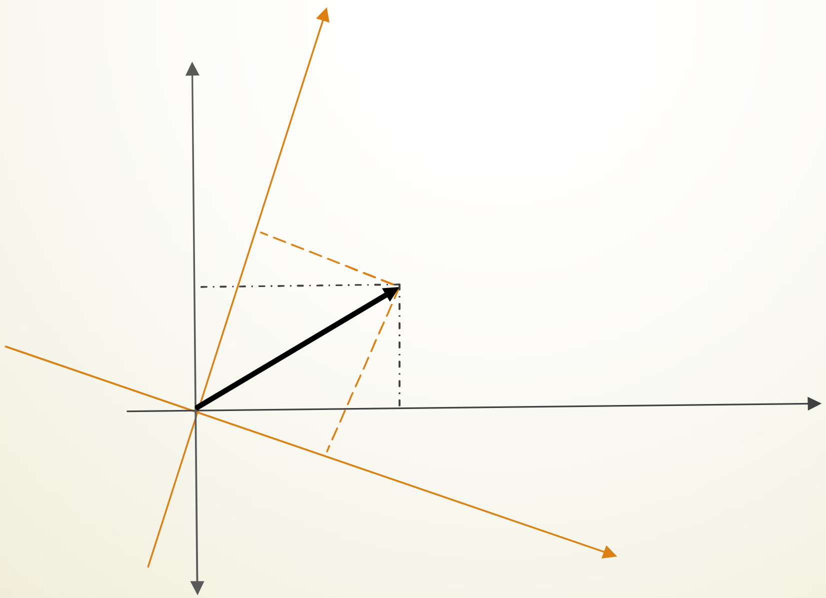
Problema 10. Halle una base y la dimensión de los subespacios dados:

a) $\mathbf{S} = \{\, \mathbf{A} / \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{2x2}\ \mathbf{(C)} \wedge\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ **siendo z_1 y z_2 de C}**

b) Subespacio vectorial de $IR^4(IR)$ que contiene a los vectores u para los cuales se verifica que: $\mathbf{x+ y = 0 \ \wedge z - t = 0}$

AHORA BIEN, DIJIMOS QUE EN CADA ESPACIO VECTORIAL (O SUBESPACIO) HAY INFINITAS BASES ….

Entonces que sucede si se conocen las componentes de un vector en una base y se quieren hallar las componentes en otra …



Vamos a hacer en el pizarrón un análisis gráfico de la situación

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

CAMBIO DE BASE

Particularizamos a vectores de dos componentes

Si se tienen dos bases en V

$B_1 = \{u_1, u_2\}$ $\qquad u = t_1\, u_1 + t_2\, u_2$ en B_1

$B_2 = \{v_1, v_2\}$ $\qquad u = k_1\, v_1 + k_2\, v_2$ en B_2

$$\boxed{t_1\, u_1 + t_2\, u_2 = k_1\, v_1 + k_2\, v_2}$$

Además se conocen:

$$\begin{cases} v_1 = x\, u_1 + y\, u_2 \text{ en } B_1 \\ v_2 = z\, u_1 + t\, u_2 \text{ en } B_1 \end{cases}$$

$$t_1\, u_1 + t_2\, u_2 = k_1\, v_1 + k_2\, v_2 = k_1\, (x\, u_1 + y\, u_2) + k_2\, (z\, u_1 + t\, u_2)$$

$$t_1\, u_1 + t_2\, u_2 = k_1\, x\, u_1 + k_1\, y\, u_2 + k_2\, z\, u_1 + k_2\, t\, u_2)$$

$$t_1\, u_1 + t_2\, u_2 = (k_1\, x + k_2\, z)\, u_1 + (k_2\, t + k_1\, y)\, u_2$$

S.E.L. $\begin{cases} t_1 = k_1\, x + k_2\, z \\ t_2 = k_1\, y + k_2\, t \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de pasaje De } B_1 \text{ a } B_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}_{\text{Componentes de u en } B_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}}_{\text{Componentes de u en } B_1}$

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

CAMBIO DE BASE

Ejemplo

Considere el espacio vectorial IR^2 (IR) y el vector u $=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ dado en la base canónica.

En él se tienen dos bases:

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad y \quad B1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ dados en B}$$

Halle las componentes de u en la base B1.

ESPACIO VECTORIAL

V (K)

CAMBIO DE BASE

Generalizamos u $\in$ V(K)

$B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es base de V

Todo vector se expresa de manera única en cada base

$u = t_1 u_1 + t_2 u_2 + \ldots + t_n u_n$ ➡ $u = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \ldots \\ t_n \end{pmatrix}$ ➡ **Componentes de u en B_1**

Si se tiene $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es otra base de V

$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$ ➡ $u = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots \\ k_n \end{pmatrix}$ ➡ **Componentes de u en B_2**

Un cambio de base implica expresar las componentes del vector en una base utilizando sus componentes en otra

$$X' = P \,.\, X$$

X´ contiene las componentes de u en B2, X las componentes de u en B1 y P es la matriz de pasaje de B1 a B2

ESPACIOS VECTORIALES

Trabajamos en clase. Del Trabajo práctico:

Problema 11. En el espacio vectorial $\boldsymbol{P}_3$ (IR) de los polinomios de grado menor o igual a tres, se tiene una base $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ tal que:
$p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 2x$, $p_3(x) = -2 + 4x^2$, $p_4(x) = -12x + 8x^3$.

Halle las componentes de p en la base B si se sabe que:
$p(x) = 7 - 12x - 8x^2 + 12x^3$ en la base canónica de $\boldsymbol{P}_3$

Problema 12. Halle las componentes de la matriz A en la base B si se sabe que en la base canónica de $M_{2x2}(R)$ se expresa:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$