MÉTODO DE LYAPUNOV

Este método se aplica para el análisis y resolución de los así llamados *Sistemas Cuasilineales,* que son una variante particular de los SNL.

Se trata de un grupo de SNL cuya linealización o aproximación lineal resulta muy sencilla y factible.

Recordando el caso de las ED de un sistema autónomo:

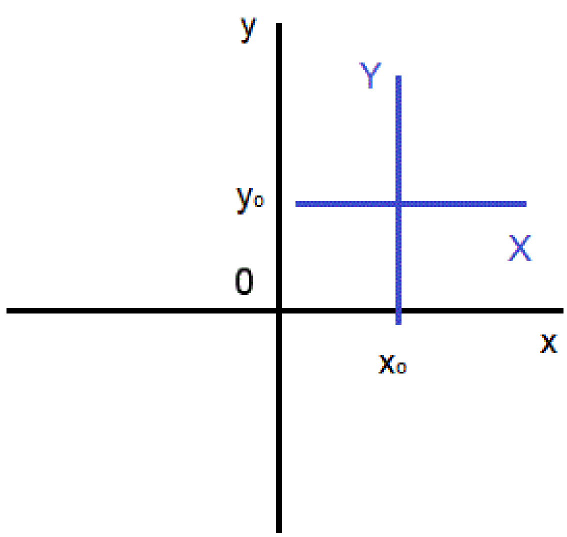
$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$$

donde, como es sabido, las variables son x=x(t) é y=y(t); vale decir que la variable independiente es el tiempo [t].

Si este sistema tiene un punto crítico ubicado en (x_o,y_o), se podría realizar una traslación de ejes, de manera que el punto crítico pase a ser el origen del sistema trasladado, designando nuevas coordenadas [X,Y] partiendo de las anteriores [x,y] pero desplazadas en la magnitud de las coordenadas del punto crítico $[x_o,y_o]$; a saber :

$X = x - x_o$

$Y = y - y_o$



De manera que el nuevo sistema autónomo, con un punto crítico en su origen (0,0); será ahora:

$$\begin{cases} X' = F(X + x_o; Y + y_o) \\ Y' = G(X + x_o; Y + y_o) \end{cases}$$

Además, las soluciones del sistema trasladado tienen en (0,0) el mismo comportamiento que las soluciones del sistema original tenían en (x_o,y_o).

Por lo tanto, se puede suponer, sin error, que el último sistema indicado tiene un punto crítico aislado en el origen.

Por supuesto, podrían existir además otros puntos críticos del sistema no lineal. Las soluciones de este sistema, cuando sea no muy diferente de un sistema lineal en su comportamiento, pueden deducirse conforme a la teoría desarrollada en sistemas autónomos.

Previamente, debería definirse qué se entiende por *no muy diferente* de un sistema lineal.

La forma típica de los sistemas cuasilineales viene dada por ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}' = \mathbf{cx} + \mathbf{dy} + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$$

Donde [a,b,c yd] son coeficientes constantes y aparecen dos términos no lineales, uno en cada ED, que son P(x,y) y Q(x,y)

Intuitivamente puede observarse que si P(x,y) y Q(x,y) pueden despreciarse para determinados valores de [x,y] entonces el sistema puede ser aproximado por un sistema lineal, tal como:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{ax} + \mathbf{by} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{cx} + \mathbf{dy} \end{cases}$$

Esto debería ocurrir cuando los valores de (x,y) tiendan al origen y, entonces, las soluciones de ambos sistemas exhibirán un comportamiento similar en (0,0).

Las condiciones que deberían darse para que esta forma de linealización sea posible fueron estudiadas por Lyapunov y se basan en que P y Q tienen que ser funcionales que tiendan a cero más rápidamente que una circunferencia cuando x→0 é y→0 simultáneamente. Vale decir que esta condición, en forma analítica, sería:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} P(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} Q(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

Analíticamente significa que P(x,y) y Q(x,y) tiendan a cero más rápidamente que (x,y), teniendo en cuenta que **r =** $\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$ es la ecuación de una circunferencia de radio [r] centrada en el origen.

Cuando esta condición se cumpla el sistema se considerará cuasilineal y los términos no lineales P y Q pueden despreciarse.

El rango de validez de esta simplificación es mayor en las proximidades del punto crítico del SNL y va perdiendo validez a medida que los valores de (x,y) se van alejando del punto crítico.

Para que ambos límites se anulen, la condición necesaria, pero no suficiente es que P (0,0) = 0 y Q (0,0) = 0.

Este es exactamente el mismo requisito que se exige para que el origen se constituya en un punto crítico.

Condiciones de Lyapunov:

En definitiva, dado un sistema cuasilineal, las condiciones para que los términos no lineales P(x,y) y Q(x,y) puedan despreciarse y analizar válidamente el SNL como si fuera lineal fueron estudiadas por Lyapunov y Linsted para aplicarlas a sistemas mecánicos vibratorios no lineales. Estas condiciones son las siguientes:

1°) Es necesario que

P(0,0)=0

Q(0,0)=0

2°) Debe cumplirse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} P(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} Q(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

3°) Las derivadas parciales primeras de P y Q deben ser continuas, vale decir que:

$\frac{\partial P}{\partial x}; \frac{\partial P}{\partial y}; \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial y}$ tienen que ser funciones continuas

Cuando estas tres condiciones se cumplen, se pueden despreciar P(x,y) y Q(x,y) y analizar el sistema como si fuera lineal, eliminando P y Q:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Como ya se dijo, esta linealización tiene un rango de validez que es mayor en las proximidades del punto crítico o nuevo origen del sistema trasladado y va perdiendo validez a medida que los valores de las variables se alejan del punto crítico.

Esto se refleja en la forma de las trayectorias en el PDF que son similares a las de un sistema lineal en las cercanías del punto crítico y se van deformando a medida que sus valores se alejan.

Ejemplo: Resolver el siguiente SNL, indicando la clase de punto crítico que le corresponde y si éste es estable o no.

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y - 4xy \\ y' = x + 6y - 8x^2y \end{cases}$$

Primero se deben analizar ambos términos no lineales P(x,y)= - 4xy; Q(x,y)= - $8x^2y$; donde puede verificarse que

P(0,0)=-4(0)(0)= 0

Q(0,0)=-8$(0)^2$(0)=0;

también que sus derivadas parciales primeras son continuas:

$\frac{\partial P}{\partial x}$ = -4y

$\frac{\partial P}{\partial y}$ = -4x

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ = -16 xy

$\frac{\partial Q}{\partial y}$ = -8 x^2

Por último, los límites se anulan en el origen y se cumplen así todas las condiciones de Lyapunov:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [-4\,xy]/\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [-8\,x^2y]/\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

En estas dos últimas expresiones queda claro que ambos numeradores tienden a cero más rápido que el denominador y por eso el límite se anula.

Por lo tanto, se cumplen todas las condiciones para poder despreciar P(x,y) y Q(x,y); entonces se puede analizar el sistema lineal correspondiente y las conclusiones serán también válidas para el SNL, especialmente en las proximidades del punto crítico.

entonces, resolviendo el sistema linealizado resulta:

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + 6y \end{cases}$$

por lo tanto, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

resolviendo la EC del sistema linealizado:

det $[\lambda I - A]$ = 0

entonces:

$$\det\left\{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\right\} = 0$$

por lo tanto:

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda - 4) & 2 \\ -1 & (\lambda - 6) \end{bmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-6) + 2 = 0 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0}}$$

cuyas raíces son:

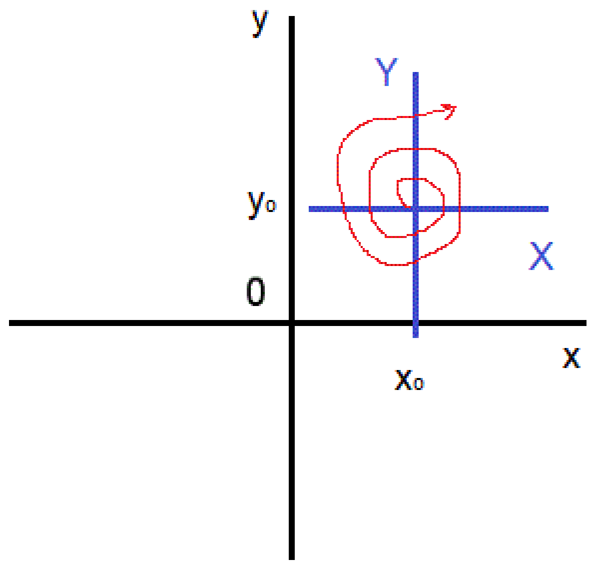
$\lambda_1 = 5 + j$

$\lambda_2 = 5 - j$

Por lo tanto, el punto crítico se trata de un foco en el PDF por ser sus raíces complejas conjugadas, además es un punto crítico inestable porque la parte real de ambas raíces (λ_1 y λ_2) es positiva. Y siendo el sistema original un SNL, las coordenadas del punto crítico se encuentran fuera del origen. Se han supuesto, en el siguiente gráfico del PDF, que están ubicadas en el primer cuadrante, pero es sólo una suposición como ejemplo, para verificarlo realmente habría que calcular las siguientes ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{cases} 0 = 4x - 2y - 4xy \\ 0 = x + 6y - 8x^2y \end{cases}$$

para determinar así los verdaderos valores de $[x_o, y_o]$



H.B. 2020