CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

La convergencia de la Serie de Fourier involucra tres aspectos distintos y fundamentales:

1) Que existan y puedan hallarse los coeficientes genéricos a_n y b_n lo cual resulta obvio porque de lo contrario no sólo no habrá convergencia sino que no habrá serie.

2) Que exista la serie, lo cual requiere además de la existencia de los coeficientes, que pueda expresarse la función por una sumatoria infinita de términos.

3) Que la función desarrollada en serie de Fourier pueda, además, aproximarse por un número finito de términos. Esto significa que puedan despreciarse el resto de los términos, a partir de un valor del índice "n" determinado y sin embargo la función así expresada se aproxime lo suficiente a la original.

Todos estos aspectos que definen si una serie es o no convergente, han sido estudiados y reunidos en las *Condiciones de Dirichlet**, que sirven para establecer analíticamente la convergencia de Fourier.

* Matemático alemán llamado Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

En realidad, Dirichlet estableció dos condiciones distintas, que se conocen como fuertes y débiles, respectivamente.

✓ Condición débil:

Esta primera condición se denomina así porque es necesaria pero no suficiente. Debe cumplirse necesariamente para que la serie sea convergente, pero no garantiza que lo sea.

En realidad, la condición débil versa acerca de la existencia de los coeficientes, fijando las condiciones matemáticas que deben cumplirse para que aquellos existan. Dado que los coeficientes genéricos de Fourier vienen definidos a través de una integral, el hecho de que existan implica que la integral sea finita.

Por lo tanto, la condición débil procura que la integral que define a los coeficientes genéricos sea finita.

Siendo:

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

Debería ser:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt < \infty$$

Pero, en realidad, en el integrando la función *coseno* está acotada entre -1 y 1, por lo tanto su incidencia en el hecho de que toda la integral sea finita es muy relativa, sólo deberá serlo la integral del valor absoluto de f(t), por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt < \infty$$

es lo que debería cumplirse para garantizar la existencia de los coeficientes, dado que el valor de la función *coseno* en el integrando (o la del *seno* en el caso del coeficiente b_n) no modificarían el resultado de esta condición, dado que sólo podrían afectar a f(t) por un número menor o igual a la unidad, o cambiarla de signo.

Sin embargo, más usual y sencilla de evaluar que esta integral es otra similar, donde se reemplaza el valor absoluto de f(t) por su cuadrado, que cumple el mismo objetivo de prescindir del signo, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\, f(t)]^2 \, dt < \infty$$

Esta es en definitiva la condición débil de Dirichlet, que asegura sólo la existencia de los coeficientes a_n y b_n .

El problema es que existen algunas funciones, como por ejemplo las funciones impulsivas, para las cuales esta condición se cumpliría sin problema, dado que la integral de un impulso es un valor finito, porque el área bajo la curva de un impulso es finita, pero su valor instantáneo es infinito.

Las funciones desarrolladas en serie de Fourier a partir de términos que resultan ser funciones impulsivas, no son convergentes. Vale decir que cumplen con la condición débil y sin embargo no dan lugar a una serie convergente. Por eso esta condición es necesaria pero no suficiente.

- ✓ **<u>Condición fuerte:</u>**

Esta condición establece algunas restricciones adicionales, que entonces la convierten en necesaria y suficiente.

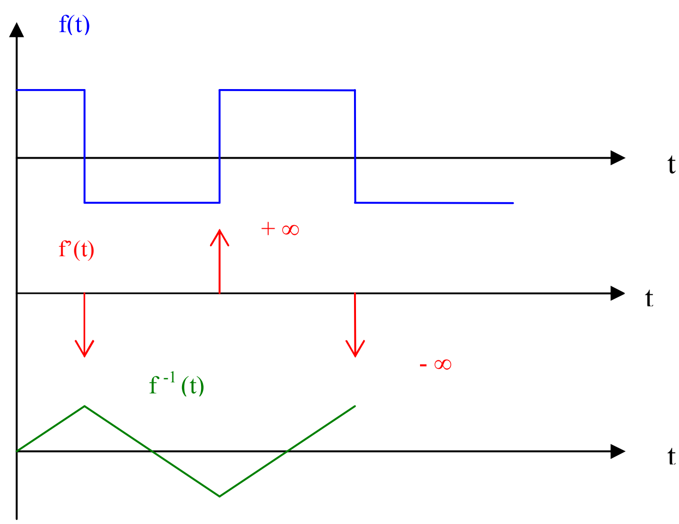
La condición fuerte establece:

"Para que una serie de Fourier sea uniformemente convergente, la función desarrollada f(t) debe permanecer finita y tener un número finito de máximos y mínimos".

La primera parte de la condición restringe claramente la posibilidad de desarrollar funciones impulsivas, dado que estas tienen valores instantáneos que no son finitos. Esta sería una restricción en *amplitud* que fija Dirichlet.

La segunda parte de la condición fuerte establece una restricción en frecuencia, dado que los términos de frecuencia infinita, como podrían ser los armónicos superiores de la función desarrollada, contendrían una cantidad muy grande de energía y su suma en fase podría dar lugar a términos que terminen comportándose como un tren de impulsos.

Por lo tanto, si esta condición se cumple, la serie será inequívocamente convergente. En general, para que esto suceda en la práctica, la función a desarrollar en serie deberá presentar formas de onda suaves, dado que las formas más abruptas, con flancos, requieren de gran cantidad de armónicos para aproximarlas.



El ejemplo es una función f(t) que corresponde a una onda rectangular, desarrollada en serie de Fourier del siguiente modo:

$f(t) = 4/\pi\ [\cos t - (\cos 3t)/3 + (\cos 5t)/5 - (\cos 7t)/7 + ...]$

Si esta función se deriva, su derivada resultará:

$f'(t) = 4/\pi\ [- \text{sen}\ t + \text{sen}\ 3t - \text{sen}\ 5\ t + \text{sen}\ 7\ t - ....]$

pero, si se realiza la derivación en forma gráfica, se observa que la función f(t) permanece constante en el intervalo que llega hasta el primer flanco descendente, que coincide exactamente con $t = \pi/2$, por lo tanto su derivada es nula en ese intervalo entre $t = 0$ y $t = \pi/2$. Estos valores no se han indicado en el gráfico sobre el eje t, para no complicar y sobrecargar el dibujo.

En ese punto $t = \pi/2$, el flanco descendente resulta una especie de indeterminación en el valor de la función, por lo tanto su derivada es un impulso hacia - ∞

A partir de ese valor y hasta $t = 3/2\ \pi$ la función f(t) vuelve a permanecer constante, esta vez con un valor negativo, por lo tanto su derivada es nula en todo ese intervalo. Pero al llegar a $t = 3\pi/2$ se presenta un flanco ascendente en f(t), por lo tanto la derivada en este instante es igual a un impulso hacia $+\infty$

Si en cambio, se hubiera integrado la función original f(t), lo que se indica como f^{-1} (t), entonces, realizando la integración término a término resulta:

$$f^{-1}(t) = 4/\pi\ [\text{sen } t - (\text{sen } 3t)/9 + (\text{sen } 5t)/25 - (\text{sen } 7t)/49 + ...]$$

donde cada término queda dividido por un número que es igual al cuadrado del valor del índice "n", como resultado del proceso de integración, por lo tanto esta última serie resultará fuertemente convergente, como se ve, dado que cada nuevo término aporta información menos significativa que el anterior.

Si se realiza la integración en forma gráfica, se observa que la forma de onda correspondiente será triangular, dado que la función original f(t) permanece constante entre $t = 0$ y $t = \pi/2$, por lo tanto su integral será una recta con pendiente creciente constante.

Entre $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$ la función f(t) vuelve a ser constante, pero negativa, por lo tanto su integral resultará una recta de pendiente constante decreciente, y así sucesivamente.

Como conclusión, la función f^{-1} (t) corresponde a un desarrollo en serie muy convergente, la original f(t) es también convergente, pero su derivada f' (t) no converge, lo cual surge de la aplicación de la condición fuerte de Dirichlet, porque está conformada por impulsos de amplitud instantánea infinita.

Ing. Hugo Biritos