CURSO DE NIVELACIÓN INGRESO

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIDAD I: NÚMEROS REALES. OPERACIONES

Contenido Conceptual:

Conjuntos numéricos: clasificación, nomenclatura y notación. Intervalos en la recta real. Módulo de un número real: propiedades, distancia entre dos números, ecuaciones e inecuaciones con módulo. Definición de entorno. Entorno reducido. Logaritmación: definición y propiedades. Exponenciación. Problemas de aplicación.

Utilidad del Concepto:

Permite aplicar y reforzar los conceptos matemáticos adquiridos con anterioridad. Provee la herramienta necesaria para la formulación y resolución de problemas en materias específicas de la carrera.

Objetivos Propuestos:

- Representar conjuntos numéricos e intervalos en la recta.
- Traducir del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.
- Formular y resolver ejercicios con números reales, distancia entre puntos e intervalos.
- Resolver operaciones con números reales: Logaritmación y Exponenciación.

1- INTRODUCCIÓN:

Los conjuntos numéricos IN, Z, Q y IR.

El conjunto **IN** de los números naturales es aquel que contiene los números que nos sirven para contar o bien para ordenar elementos, haciendo abuso de notación podemos decir que:
IN = { 0, 1, 2, 3, ... }, en ocasiones el cero es excluido del conjunto IN, pero eso es sólo una convención que se debe establecer de antemano, **nosotros consideraremos al cero como número natural**.
El conjunto **Z** de los números enteros contiene a los números naturales (los que suelen denominarse enteros positivos) y a sus opuestos (los que se denominan enteros negativos), si hacemos abuso de notación se puede decir que: Z = { ... , -2, -1, 0 , 1, 2, 3, ... } . Para todo número entero existe su opuesto único (para 1 el opuesto es –1 , para –1 el opuesto es 1) inclusive para el cero, que es opuesto de si mismo. Otra característica de este conjunto es que siempre es posible determinar el antecesor y el sucesor de cualquier entero, además entre dos consecutivos no existe ningún otro entero.
Si incorporamos al conjunto de los enteros los números fraccionarios (decimales o no) se determina el conjunto **Q** de los números racionales, ya no es posible enumerar los elementos de Q, ni haciendo abuso de notación, entre dos números racionales existen infinitos racionales, lo que nos indica que no se puede conocer el antecesor ni el sucesor de ningunos de ellos. Se dice entonces que Q es un conjunto denso.
Si a este conjunto Q de los números racionales unimos el conjunto de los **números irracionales** (por ejemplo las raíces no exactas como $\sqrt{2}$, o los números π, e, entre otros) queda determinado el conjunto de los números reales IR. Este conjunto **IR** de los números reales también es denso y además completo, lo que permite, definiendo una escala, establecer una biyección entre él y una recta denominada entonces recta

numérica. En ella es posible representar a los infinitos números reales por medio de sus infinitos puntos.
Hay dos conceptos importantes con los que vamos a trabajar, que son pertenencia e inclusión. La *pertenencia* es la relación que puede establecerse entre elemento y conjunto y que se designa simbólicamente con $\in$, su negación se designa $\notin$ indicando la no pertenencia.

Dados los conjuntos
$A = \{ x / x \in IN \wedge x < 3 \}$ y $B = \{ x / x \in Z \wedge -1 \leq x < 4 \}$

Podemos decir: $3 \notin A$ y $3 \in B$

Podemos establecer una relación entre dos conjuntos, determinando si uno de ellos es parte o subconjunto de otro. Si todos los elementos de un conjunto son también elementos del otro conjunto, decimos que está incluido y se designa en símbolos por $\subset$ y su negación $\not\subset$ que indica la no inclusión. En el ejemplo vemos que $A \subset B$

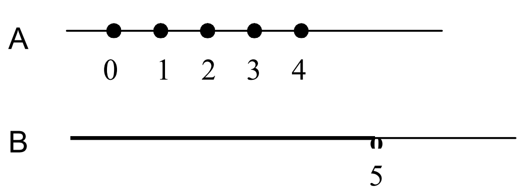
2- <u>Representación de conjuntos numéricos</u> - <u>Intervalos de números reales</u>

Si consideramos **partes o subconjuntos** de los conjuntos numéricos que hemos nombrado tendríamos por ejemplo:

$A = \{ x / x \in IN \wedge x < 5 \}$ el que puede darse por extensión como :

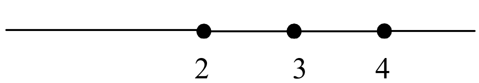
$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$

Dado el conjunto definido por **$B = \{ x / x \in IR \wedge x < 5 \}$** , en este caso es imposible nombrar los infinitos elementos de B, ni abusando de notaciones ya que no es factible nombrar dos reales consecutivos. Entre dos cualesquiera de ellos hay infinitos números reales por más próximos que nos parezcan. De aquí surge el concepto de **intervalo real**: ***como una parte o subconjunto del conjunto IR***, si retomamos el ejemplo de B, puede darse como el conjunto que contiene a los infinitos reales menores a 5, **$B =]-\infty, 5[$** se denota como un intervalo <u>abierto</u> de números reales.
Si los representamos en la recta numérica:



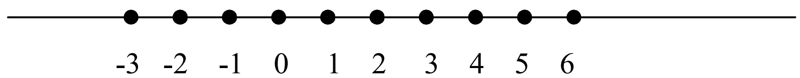
Dados los siguientes conjuntos, representarlos en la recta numérica:

$C = \{ x / x \in IN \wedge 2 \leq x < 5 \}$ o bien **$C = \{ 2, 3, 4 \}$** , es posible nombrar todos sus elementos.



$D = \{ x / x \in IR \ \wedge \ 2 \leq x < 5 \}$ es el intervalo real que contiene a los infinitos números reales desde 2, inclusive, hasta 5, sin él, lo que se anota así: **$B = [\ 2, 5\ [$** intervalo real <u>cerrado</u> en 2 y <u>abierto</u> en 5.

$M = \{ x / x \in Z \ \wedge \ -3 \leq x \leq 6 \}$ o bien **$M = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$**, se pueden nombrar todos los elementos de D.



$P = \{ x / x \in IR \ \wedge \ -3 \leq x \leq 6 \}$ intervalo que contiene a los infinito reales desde –3 hasta 6, inclusive ellos, o bien anotarlo **$P = [\ -3, 6\ ]$,** intervalo <u>cerrado</u> de –3 a 6
En la recta numérica se pueden representar:

Vemos como el hecho de nombrar a los intervalos como abiertos o cerrados está relacionado con que el elemento pertenezca o no al subconjunto, si decimos por ejemplo “$x < 5$”, 5 no pertenece al conjunto, en este caso lo denominamos intervalo abierto en 5, pero si decimos
$x \geq 2$, 2 si pertenece al conjunto, lo denominamos intervalo cerrado en 2.
La notación que utilizaremos para designar los intervalos reales en general es *corchete invertido* cuando el intervalo es abierto en alguno de sus extremos y *corchete* cuando el intervalo es cerrado en alguno de sus extremos.

En síntesis:

$[a,b] = \{x/x \in IR: a \leq x \leq b\}$ INTERVALO CERRADO

$]a,b[= \{x/x \in IR: a < x < b\}$ INTERVALO ABIERTO

$]a,b] = \{x/x \in IR: a < x \leq b\}$ INTERVALO SEMIABIERTO A IZQUIERDA

$[a,b[= \{x/x \in IR: a \leq x < b\}$ INTERVALO SEMIABIERTO A DERECHA

En el primer ejemplo se incorporó “ ∞ “ infinito, que nos permite extender la recta numérica, si decimos $-\infty$, infinitamente a la izquierda, nos referimos a los infinitos reales menores a uno dado, si decimos $+\infty$, infinitamente a la derecha, hacemos referencia a los infinitos reales mayores a uno dado.

$[a, +\infty\ [\ = \{ x/ x \in IR\ ,\ a \leq x \}$ donde a pertenece al conjunto

$]a, +\infty\ [\ = \{ x/ x \in IR\ ,\ a < x \}$ a no pertenece al conjunto

$]-\infty, a] = \{ x/ x \in IR,\ x \leq a \}$ a pertenece al conjunto

$]\ -\infty, a\ [\ =\{ x/ x \in IR,\ x < a \}$ a no pertenece al conjunto

3- Valor absoluto

a) Definición

También se pueden trabajar los intervalos con el concepto de **Valor Absoluto**, se sabe que el valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del 0 (cero) sobre la recta numérica. Desde un aspecto más formal:

Para todo número real *x*: $|x| = x$ si x es positivo , en símbolos $x \geq 0$

$|x| = -x$ si x es negativo , en símbolos $x < 0$

Para resolver desigualdades que comprenden valores absolutos se tienen las siguientes propiedades:

$* \; |x| = k \Leftrightarrow x = k \;$ ó $\; x = -k$

$*$ Para todo k positivo, para todo x : $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$

$*$ Para todo k positivo, para todo x : $|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \;$ ó $\; x \geq k$

Ejemplos:

A = { x / x $\in$ Z $\wedge$ | x | ≤ 3 } significa -3≤ x ≤ 3

Por extensión sería: **A = { -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 }**

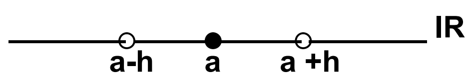
B = { x / x $\in$ IR $\wedge$ | x | ≤ 3 } como intervalo sería **B =[-3,3]**

Cuando trabajamos con números reales, un concepto muy importante es el de entorno de un punto, y necesitaremos la notación antes vista de valor absoluto.

b) Entorno

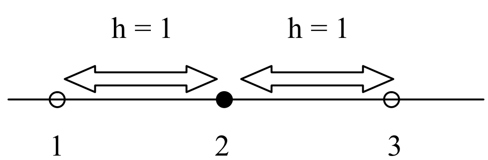
Si ***a*** es un punto cualquiera de la recta real y ***h*** un número positivo, entorno de de centro ***a*** y radio ***h*** es el intervalo abierto **] a-h, a +h[**

E(a, h) ={ x/ x$\in$IR , a-h < x < a +h } ó E(a, h)={ x / x $\in$ IR, | x-a | < h }

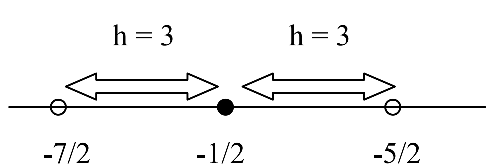


Ejemplo : **E(2,1)** se lee entorno con centro en 2 y radio 1, esto significa que el entorno es el conjunto de números reales cuya distancia al dos sea menor que 1.

E(2,1) =] 2-1, 2+1[=]1,3[



E(-1/2, 3) =]-1/2 -3, -1/2+3[=] -7/2, 5/2[

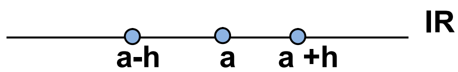


c) Entorno reducido

Si ***a*** es un punto cualquiera de la recta real y ***h>0***, entorno reducido de centro ***a*** y radio ***h***, es el conjunto de puntos del intervalo abierto

]a-h, a +h[del cual se excluye el punto ***a***.

$E^*(a, h) = \{ x / x \in IR;\ a-h < x < a + h\ ,\ x \neq a \}$ ó $E^*(a, h) = \{ x / x \in IR;\ 0 < |x-a| < h \}$



Ejemplo: **$E^*(2,1)$** =] 2-1, 2+1 [- { 2 }

$E^*(-1/2\ ,3)$ =] -1/2 -3, -1/2+3 [- {-1/2}=] -7/2, 5/2 [- { - 1/2}

Punto de acumulación : Si ***A*** es un conjunto de puntos de la recta real, un punto ***a*** es punto de acumulación de ***A*** si a todo entorno reducido de ***a*** pertenece por lo menos un punto de ***A.*** El punto ***a*** puede pertenecer o no al conjunto ***A***. Es decir:

" a" es punto de acumulación de A **$\Leftrightarrow \forall\ E'(a)\ ,\ E'(a) \cap A \neq \phi$**

Ejemplo: si el conjunto A es un intervalo abierto, todos sus puntos son de acumulación, incluyendo los extremos del intervalo

4- <u>Operaciones con números reales</u>

Logaritmación: <u>Definición</u>

Dados un número real positivo a, y un real positivo b distinto de 1, existe un único número real x que verifica que: $b^x = a$, dicho real x recibe el nombre de logaritmo de a en base b.

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Cuando la base b del logaritmo es 10, se denomina logaritmo decimal y se omite el subíndice en la notación: $\log a = x$

El logaritmo que tiene como base al número real **e** se denomina logaritmo natural o neperiano y de anota: $\ln a = x$

(el número **e** es un n° irracional cuyo valor es aproximadamente 2,71)

<u>Propiedades:</u>

Supongamos que $\log_b m$ y $\log_b n$ existen

a) $\log_b 1 = 0$ y $\log_b b = 1$, siendo b cualquier base

b) Logaritmo de un producto: $\log_b (m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$

c) Logaritmo de un cociente: $\log_b (m : n) = \log_b m - \log_b n$

d) Logaritmo de una potencia: $\log_b m^p = p \cdot \log_b m$

e) $\log_b a = \dfrac{1}{\ln b} \cdot \ln a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$
