UNIVERSIDAD DE MENDOZA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ALGEBRA LINEAL

ESPACIOS METRICOS

NORMA, ESPACIO NORMADO

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K (K ≠ C), se define la función norma II II, de la siguiente manera:
Norma es una función definida de V en un cuerpo K
:

$$\mathbf{\| \, \| : V \rightarrow K}$$
$$\mathbf{u \rightarrow \| u \|}$$

Esta función asigna a cada vector un escalar del cuerpo K, y es tal que verifica las propiedades:

- $\|u\| \geq 0 \ \wedge \ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$
- $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- $\|ku\| = |k| \, \|u\|$

Cuando se ha definido una función norma en el espacio vectorial V (K), decimos que (V, II II) es un ESPACIO NORMADO.

Consecuencias de la definición:

$\| \vec{0} \| = 0$

$\| -u \| = \| u \|$

$\| u-v \| = \| v-u \|$

Ejemplos de normas

1- Sea V = IR (IR) , se define la función norma: $\| \, \| : IR \rightarrow IR$, llamada
$\|x\| = |x|$
valor absoluto.

2- En V = IR^n (IR) , se definen:

la función **norma uno**: $\| \, \|_1 : IR^n \rightarrow IR$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

la función **norma dos**: $\| \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

la función **norma p**: $\| \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$$

la función **norma infinito**: $\| \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|x_i| \;,\; i = 1,\dots, n\}$$

3- Sea V = $C_{[a,b]}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en un intervalo real [a,b], se definen:

la función **norma dos**: $\| \|_2 : C_{[a,b]} \to \mathbb{R}$

$$\| f \|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}$$

la función **norma infinito**: $\| \|_\infty : C_{[a,b]} \to \mathbb{R}$

$$\| f \|_\infty = \text{máx}\,\{|f(x)| \;,\; x \in [a,b]\}$$

Ejemplos de normas matriciales

1- La **norma matricial uno**: $\|A\|_1 = \underset{j}{\text{máx}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, es el máximo de la suma de de los coeficientes de las columnas en valor absoluto.

2- La **norma matricial infinito**: $\|A\|_\infty = \underset{i}{\text{máx}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, es el máximo de la suma de los coeficientes del renglón o filas en valor absoluto.

3- La **norma matricial dos**: $\|A\|_2 = \sqrt{\underset{1\le k\le n}{\text{máx}}(\lambda_k)}$, siendo λ_k los valores propios de la matriz $A.A^T$.

4-La **norma de Frobenius**: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2}$

ESPACIO MÉTRICO

Sea V (K) un espacio vectorial, se define una función distancia:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} : \mathbf{VXV} &\rightarrow \mathbf{K} \\ \mathbf{(u, v)} &\rightarrow \mathbf{d(u,v)} \end{aligned}$$

Que a cada par de puntos asigna un escalar y verifica las siguientes propiedades:

- $d(u,v) \geq 0 \quad \wedge \quad d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Cuando se ha definido una función distancia en el espacio vectorial V(K), decimos que (V, d) es un ESPACIO METRICO.

NORMA Y DISTANCIA

Todo espacio normado es un espacio métrico relativamente a la métrica natural definida por:

$$d(u, v) = \| u-v \| = \| v-u \|$$

La recíproca no es siempre verdadera, es decir: no todo espacio métrico es normado.

POR LO TANTO PODEMOS CONCLUIR DICIENDO QUE SIEMPRE ES POSIBLE DEFINIR UNA DISTANCIA INDUCIDA POR UNA FUNCIÓN NORMA.

PRODUCTO INTERIOR. ESPACIO PRE- HILBERTIANO

En un espacio vectorial real.

Sea V (IR) un espacio vectorial, se define UNa función producto escalar o producto interior:

$$< > : VXV \rightarrow IR$$
$$(u,v) \rightarrow < u,v >$$

Como la que asigna a cada par de vectores un número real y verifica las siguientes propiedades:

- $< u,v > = < v,u >$
- $< ku,v > = k< u,v >$
- $< u+w,v > = < u,v > + < w,v >$

  $< u, v+w > = < u,v > + < v,w >$

Cuando se ha definido una función producto escalar en un espacio vectorial real, decimos que (V, **$< >$**) es un ESPACIO PRE-HILBERTIANO.

Ejemplos de producto interior

1-Sea V (IR) = IR^n(IR) definimos el producto interior euclidiano o producto escalar usual: $< u,v > = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

2-En V (IR) = P_n (IR) espacio de los polinomios reales de grado menor o igual a n: $< u,v > = \int_0^1 u(x)v(x)dx$

3-En V (IR) = M_{nxn} (IR) espacio de las matrices reales cuadradas de orden n:

$$< A,B > = tr(B^T. A)$$

NORMA Y DISTANCIA INDUCIDAS POR EL PRODUCTO INTERIOR

Siempre es posible definir una función norma inducida por un producto escalar, como sigue: **$\| u \| = +\sqrt{\prec u,u \succ}$**

Por lo tanto siempre es posible definir una función distancia a partir del producto escalar: **$d(u,v) = \| u-v \| = +\sqrt{\prec u-v,u-v \succ}$**

ESPACIOS COMPLEJOS CON PRODUCTO INTERNO

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K = C de números complejos, se define la función producto interior sobre C:

$$\begin{aligned} < > : VXV &\rightarrow C \\ (u,v) &\rightarrow < u,v > \end{aligned}$$

Asigna a cada par de vectores un número complejo, y cumple las siguientes propiedades:

- < u, v+w > = < u,v > + < u,w >
- < u,v > = $\overline{\prec v,u \succ}$
- < k u,v > = $\overline{k}$ < u,v >, siendo $\overline{k}$ el conjugado de k.
- Si u ≠ $\vec{0}$ entonces < u,u > > 0

Definida esta función producto interior sobre V, decimos que (V, **< >**) es un ESPACIO UNITARIO

Ejemplos de producto interior sobre C

1- Sea V = $C^n(C)$, para u = $(x_1,\dots, x_n)$, v = $(x_1',\dots, x_n')$, se define el **producto interno canónico**:

$$< u,v > = x_1 \overline{x_1'} + \dots + x_n \overline{x_n'}$$

2- Sea C* [a,b] el espacio de las funciones definidas en el intervalo [a,b] con valores complejos, es decir cada función es de la forma: $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$, donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ pertenecen a C[a,b], se define el producto interior:

$$< f,g > = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

3-En el espacio $M_n(C)$ de matrices cuadradas complejas de orden n≥1, se define el producto interior canónico dado por:

$$< A,B > = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

BASES ORTOGONALES Y ORTONORMADAS

- **<u>Vectores ortogonales:</u>**

Sea V (K) un esp. Vectorial, en el que se ha definido un producto escalar, y resulta que para un par cualquiera de vectores u, v de V el producto escalar es nulo, entonces esos vectores son ortogonales.

$$(u \in V \ \wedge \ v \in V) \ \wedge \ < u, v > = 0 \ \Leftrightarrow u \perp v$$

Nota: El vector nulo es ortogonal a cualquier vector u de V.

Una familia de vectores de V : $F = \{ u_1 , u_2 , ... , u_n \}$ es un **conjunto ortogonal** si para todo par de vectores distintos de F se verifica que son ortogonales, es decir que todos los vectores de F son ortogonales entre sí.

$$F \text{ es conjunto ortogonal} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall (u_i , u_j) \in V^2) \,/\, i \neq j \ : \ < u_i , u_j > = 0$$

Una familia F de vectores de V que sea base de dicho espacio vectorial y también conjunto ortogonal, se denomina **base ortogonal**.

- **<u>Vectores normados:</u>**

Sea V (K) un espacio vectorial en el cual se ha definido una norma, si resulta que para algún vector u de V se verifica que su norma es la unidad, ese vector se denomina normado.

$$u \in V \ \wedge \ \| u \| = 1 \text{ , u es un vector normado}$$

Nota 1: Si un vector no es normado es posible normalizarlo, siempre y cuando no sea el vector nulo, de la siguiente manera:

$$\| u \| \neq 1 \text{ y no nula, entonces } u' = \frac{1}{\| u \|} . u \text{ es un vector normado.}$$

Si F es una familia de vectores de V: $F = \{ u_1 , u_2 , ... , u_n \}$ en la cual todos sus vectores son normados, F se denomina **conjunto normado**.

$$F \text{ es conjunto normado} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u_i \in F) : \| u_i \| = 1$$

Si la familia F es un conjunto normado y además es una base de V se denomina **base normada**.

Nota 2: Si una familia de vectores de V es base ortogonal y normada se denomina **base ortonormada**.