ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Si $a_n(x)$, $a_{n-1}(x) \ldots a_1(x)$ y $a_0(x)$ son funciones con dominio común, una ecuación de la forma:

$a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0 y = R(x)$ es una ecuación diferencial lineal de orden n.

Si R(x) = 0 recibe el nombre de Ecuación diferencial homogénea o incompleta.

Si $R(x) \neq 0$ es no homogénea.

$a_n(x)$, $a_{n-1}(x) \ldots a_1(x)$ y $a_0(x)$ pueden ser funciones o constantes.

I-ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

- **Ecuación diferencial de segundo orden**

Tiene la forma:

$$\mathbf{y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x)y = R(x)}$$

Esta es la definición de una ecuación lineal de segundo orden, si es homogénea, la escribimos como:

$$\mathbf{y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x)y = 0}$$

Para entender las características de la solución general comenzaremos por definir independencia lineal, y luego veremos un teorema que nos permitirá relacionar esta definición con la solución de la ecuación.

Independencia lineal:

Decimos que las funciones $y_1(x)$; $y_2(x)$;... $y_n(x)$ son linealmente independientes si la única solución de la ecuación $c_1y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) = 0$ es la trivial es decir $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. En caso contrario este conjunto de funciones es linealmente dependiente.

Como vamos a trabajar con ecuaciones de segundo orden donde n = 2, consideraremos solo las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Se puede probar que dos funciones son linealmente dependientes si y solamente si una de ellas es múltiplo constante de la otra.

Ejemplo 1: Si $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 4x$, hacemos la combinación lineal

$c_1\, x + c_2\, 4x = 0$, vemos que podemos despejar c_1 en función de c_2

$c_1 = -4c_2$ de modo que si c_2 toma por ejemplo el valor 1, c_1 queda determinada y es $c_1 = -4$.

No cumple con la condición $c_1 = c_2 = 0$

Una forma mas sencilla de determinar la dependencia o independencia lineal es hacer el cociente de las dos funciones $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq cte$. En el ejemplo $\frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$ por lo tanto son linealmente dependientes.

Ejemplo2:

Si $y_1(x) = \text{sen } x$ e $y_2(x) = \cos x$. El cociente $\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \text{tg}(x)$ es una función por lo tanto son linealmente independientes (debemos notar que si invertimos el orden del cociente su resultado seguirá siendo una constante o una función.)

Teorema I: Existencia y unicidad

Si las funciones P(x), Q(x) y R(x) son continuas en el intervalo abierto que contiene al punto a. Entonces, dados dos números b_0 y b_1, la ecuación

$$y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x)y = R(x)$$

tiene una solución única (es decir una y solo una) en el intervalo I que satisface las condiciones iniciales

$$y(a) = b_0 \qquad y'(a) = b_1$$

Partimos de suponer la solución general como: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, para conocer y(x) vamos a obtener c_1 y c_2 teniendo en cuenta las condiciones iniciales, para ello planteamos el sistema:

$$\begin{cases} c_1\, y_1(a) + c_2\, y_2(a) = b_0 \\ c_1\, y'_1(a) + c_2\, y'_2(a) = b_1 \end{cases}$$

El sistema tiene solución única sí el determinante del sistema formado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y'_1(a) & y'_2(a) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{Dado que } c_1 = \Delta_1/\Delta \quad \text{y} \quad c_2 = \Delta_2/\Delta$$

Para que esto ocurra las filas y columnas no deben ser múltiplos escalares entre sí, lo que equivale a decir que deberán ser linealmente independientes.

Podemos generalizar lo visto diciendo: Dos funciones f(x) y g(x) serán linealmente independientes, si el determinante formado por:

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall x \in I$$

Este determinante recibe el nombre de Wronskiano, y se simboliza con la letra W.

Este es uno de los teoremas más importantes a tener en cuenta cuando trabajamos con modelos matemáticos.

Supóngase que estamos estudiando un sistema físico cuyo comportamiento queda perfectamente determinado por ciertas condiciones iniciales, pero nuestro modelo matemático propuesto involucra una ecuación diferencial que no tiene solución única. Esto hace surgir de inmediato la pregunta de si el modelo matemático hallado representa adecuadamente al modelo físico.

Este teorema es válido tanto para la ecuación homogénea como para la no homogénea. Ahora vamos a ver un teorema relativo a la solución general para las ecuaciones homogéneas.

Teorema II: Solución general

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$$y''(x) + P(x)\,y'(x) + Q(x)\,y = 0$$

Con P(x) y Q(x) continuas en un intervalo I. Si y(x) es una solución cualquiera de la ecuación, entonces existen números c_1 y c_2 tales que:

$$\boxed{\mathbf{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x)}} \qquad \forall x \in I$$

El teorema afirma que cuando hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, hemos obtenido todas las soluciones.

Ejemplo:

Dada la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$

a)Verificar que las funciones $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$ son linealmente independientes y solución de la ecuación diferencial.

b) Dadas las soluciones de la ecuación $y_3(x) = \text{senh } 2x$ e $y_4(x) = \cosh 2x$, hallar las constantes c_1 y c_2 tales que: $\text{Senh } 2x = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$\text{Cosh } 2x = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

a) Reemplazamos e^{2x} en la ecuación diferencial:

$y''(x) - 4y = 0$

$4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ verifica, por lo tanto es solución.

Para $y_2(x) = e^{-2x}$ tenemos.

$y'_2 = -2\, e^{-2x}$

$y''_2 = -2\,(-2)\, e^{-2x} = 4\, e^{-2x}$ reemplazamos en la ecuación

$4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ verifica.

Debemos determinar la independencia lineal, para ello hacemos el cociente $\dfrac{\mathbf{e^{2x}}}{\mathbf{e^{-2x}}} = \mathbf{e^{4x}} \neq \mathbf{cte}$

Las funciones e^{2x} y e^{-2x} son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial. Según el teorema cualquier otra solución deberá ser combinación lineal de ellas, es decir deben existir c_1 y c_2., esto lo vamos a demostrar en el punto b

b) $y_3(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$

$\operatorname{senh} 2x = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-2x}$

Para encontrar el valor de las constantes, ponemos condiciones iniciales $y_3(0) = 0$

$y'_3(0) = 2$

Sustituimos estos valores en la ecuación:

$0 = c_1 + c_2$ por lo tanto deberá ser $c_1 = -c_2$

Para la segunda condición debemos derivar y luego hacer el reemplazo

$y'_3(x) = 2c_1\, e^{2x} + 2\, c_2\, e^{-2x}$

$y'_3(0) = 2c_1 - 2\, c_2 = 2$ formamos un sistema teniendo en cuenta las dos condiciones

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2\,c_2 = 2 \end{cases}$$

Resolvemos y obtenemos $c_1 = 1/2$ y $c_2 = -1/2$

$$y_3(x) = \operatorname{senh} 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

Si hacemos lo mismo para $y_4(x)$ con las condiciones: $y_4(0) = 1$

$y'_4(0) = 0$

obtendríamos:

$y_4(x) = \cosh 2x = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ que son las definiciones de las funciones hiperbólicas.

Teorema III: Principio de superposición

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden $y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x)\, y = 0$

entonces la combinación lineal $y = y_1(x) + y_2(x)$ también es solución.

Este teorema también es válido para la ecuación diferencial de orden n.

Demostración:

Reemplazamos $y_1(x) + y_2(x)$ en la ecuación diferencial

$$[y_1(x) + y_2(x)]'' + P(x)\, [y_1(x) + y_2(x)]' + Q(x)\, [y_1(x) + y_2(x)] = 0$$

$$[y_1(x)]''+[y_2(x)]'' + P(x)\, [y_1(x)]' +P(x)\, [y_2(x)]'+ Q(x)\, y_1(x) + Q(x)y_2(x) = 0$$

Agrupamos:

$$\{[y_1(x)]'' + P(x)\, [y_1(x)]' + Q(x)\, y_1(x)\} +\{[y_2(x)]'' +P(x)\, [y_2(x)]' + Q(x)y_2(x)\} = 0$$

$$\{[y_1(x)]'' + P(x)\, [y_1(x)]' + Q(x)\, y_1(x)\}= 0$$

$$\{[y_2(x)]'' +P(x)\, [y_2(x)]' + Q(x)y_2(x)\} = 0$$

Las expresiones encerradas en las llaves son nulas por ser solución de la ecuación diferencial homogénea, por lo tanto su suma también lo es, y queda demostrado el principio.

I1-<u>Ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes:</u>

No existen métodos generales que permitan hallar en forma finita la solución general de una ecuación diferencial con coeficientes variables, en la unidad de funciones especiales veremos una ecuación de este tipo llamada Ecuación diferencial de Bessel, por este motivo estudiaremos primero la solución general de la ecuación cuando los coeficientes son constantes.

Dada la ecuación diferencial $y''(x) + p\, y'(x) + q\, y = 0$ donde $P(x) = p = cte$ y $Q(x) = q = cte$

Queremos hallar su solución general, sabemos que por tratarse de una ecuación de segundo orden estará formada por la suma de dos funciones linealmente independientes. Para encontrar estas funciones vamos a tener en cuenta la solución de la ecuación lineal homogénea de primer orden que sabemos es la función exponencial, y la proponemos como solución de la ecuación de segundo orden. Proponemos como solución $y = k\, e^{mx}$, donde m es un número real cualquiera. Si en verdad es la solución debería verificar la ecuación diferencial homogénea.

Reemplazamos k e^{mx}:

$km^2 e^{mx} + k\,m\,e^{mx} + q\,k e^{mx} = 0$

Sacamos k e^{mx} factor común k $e^{mx}(m^2 + p\,m + q) = 0$

Para que se verifique la igualdad, deberá ser $m^2 + p\,m + q = 0$ dado que k $e^{mx} \neq 0$ por ser la solución propuesta.

$\mathbf{m^2 + p\,m + q = 0}$ ecuación de segundo grado llamada ecuación característica, m queda determinado por ser es raíz de la ecuación.

Se pueden presentar los siguientes casos:

a) <u>Raíces reales distintas</u>: $m = m_1$ y $m = m_2$

Reemplazamos cada una de las raíces en la solución propuesta

$y_1 = c_1 e^{m_1 x}$

$y_2 = c_2 e^{m_2 x}$ la solución general será la suma de estas dos funciones, vemos que si las raíces son distintas

$\dfrac{c_1 e^{m_1}}{c_2 e^{m_2}} = ce^{(m_1 - m_2)x} \neq cte$ y_1 e y_2 son linealmente independientes.

$$\mathbf{y} = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad \textbf{Solución general para raíces distintas}$$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación diferencial y'' –3y' + 2y = 0

1) La ecuación característica correspondiente a esta ecuación es $m^2 - 3m + 2 = 0$ cuyas raíces son $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$
2) Las soluciones son $y_1 = c_1 e^{2x}$ e $y_2 = c_2 e^{x}$
3) Hacemos el cociente $\dfrac{\mathbf{e^{2x}}}{\mathbf{e^{x}}} = \mathbf{e^{x}} \neq \mathbf{cte}$ verificamos su independencia lineal
4) La solución general es de la forma: $\mathbf{y = c_1 e^{2x} + c_2\, e^{x}}$

b) <u>Raíces reales iguales:</u> $m_1 = m_2$

Para comprender mejor este punto, veremos primero un ejemplo.

<u>Ejemplo</u>: Hallar la solución general de la ecuación diferencial y'' – 6y' + 9y = 0

1) Ecuación característica asociada a la ecuación es: $m^2 - 6m + 9 = 0$ cuyas raíces son $m_1 = 3$ y $m_2 = 3$ tenemos raíces repetidas o coincidentes.
2) Las soluciones son $y_1 = c_1 e^{3x}$ e $y_2 = c_2\, e^{3x}$

3) Hacemos el cociente $\frac{\mathbf{e^{3x}}}{\mathbf{e^{3x}}} = \mathbf{cte}$ nos da una constante por lo tanto hay dependencia lineal

4) Solución general sería forma: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} = (c_1 + c_2)\, e^{3x} = c\, e^{3x}$

Sabemos que la solución de la ecuación es la combinación de dos funciones linealmente independientes, y en este caso tenemos solo una solución. Para que el cociente nos dé distinto de constante una de las funciones tendría que estar multiplicada por una función de x que llamaremos g(x) de modo que $\frac{\mathbf{c_1\, g(x)\, e^{mx}}}{\mathbf{c_2\, e^{3x}}} \neq \mathbf{cte}$

<u>Cálculo de la solución general para raíces repetidas:</u>

Para que las raíces sean repetidas el discriminante de la ecuación cuadrática deberá ser cero.

$m_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$ donde $\Delta = p^2 - 4q = 0$

nos queda: $m_1 = m_2 = -p/2$

Proponemos como solución $y = g(x)\, e^{m_1 x}$ y la reemplazamos en la ecuación diferencial.

$g''(x)\, e^{m_1 x} + 2m_1\, g'(x)\, e^{m_1 x} + g(x) m_1^2\, e^{m_1 x} + p\, g'(x)\, e^{m_1 x} + p\, m_1\, g(x)\, e^{m_1 x} + q\, g(x)\, e^{m_1 x} = 0$

Sacamos $e^{m_1 x}$ factor común y agrupamos:

$e^{m_1 x}\,[\, g''(x) + g(x)(m_1^2 + p\, m_1 + q) + g'(x)(2m_1 + p)] = 0$ como $e^{m_1 x} \neq 0$ se debe anular el corchete, donde $m_1^2 + p\, m_1 + q = 0$ por ser m_1 raíz de la ecuación

$2m_1 + p = 0$ porque se demostró que $m_1 = -p/2$

la ecuación se reduce a: $g''(x) = 0$ ecuación que la resolvemos por integración directa. Su solución es de la forma $g(x) = c_1 x + c_2$, reemplazamos g(x) en la solución propuesta y obtenemos:

$\mathbf{y = c_1 x\, e^{mx} + c_2\, e^{mx}}$ **solución general para raíces repetidas.**

Si aplicamos lo visto a nuestro ejemplo, debemos multiplicar por x alguna de las dos funciones, la solución general nos queda: $\boxed{y = c_1\, x\, e^{3x} + c_2\, e^{3x}}$

c) <u>Raíces complejas conjugadas</u>: $m_1 = a + j\,b$ y $m_2 = a - j\,b$

Si las raíces son complejas conjugadas, corresponde al caso de raíces distintas. La solución general tiene la forma $y = k_1 e^{(a + j\,b)\,x} + k_2\, e^{(a - j\,b)\,x}$

Como la solución es la suma de funciones reales linealmente independientes, vamos a trabajar sobre la exponencial que es compleja.

$e^{(a+jb)x} = e^{ax}\, e^{jbx}$ por fórmulas de Euler

$e^{ax}\, e^{jbx} = e^{ax}(\cos bx + j \operatorname{sen} bx)$

$e^{(a-jb)x} = e^{ax}\, e^{-jbx}$ por fórmulas de Euler

$e^{ax} e^{-jbx} = e^{ax}(\cos bx - j \operatorname{sen} bx)$

En la ecuación diferencial nos queda: $y = k_1 e^{ax}(\cos bx + j \operatorname{sen} bx) + k_2 e^{ax}(\cos bx - j \operatorname{sen} bx)$

Aplicamos propiedad distributiva y sacamos factor común e^{ax}, $\cos bx$ y $\operatorname{sen} bx$

$y = e^{ax}[\cos bx\ (k_1 + k_2) + j \operatorname{sen} bx\ (k_1 - k_2)]$

Las constantes k_1 y k_2 son arbitrarias, para obtener la solución real las vamos a considerar complejas conjugadas, llamamos R: parte real I: parte imaginaria

$k_1 = R + jI$ y $k_2 = R - jI$

$k_1 + k_2 = 2R$

$k_1 - k_2 = -j2I$ si reemplazamos estas constantes por $c_1 = 2R$ y $c_2 = -2jI$ podemos escribir la solución como:

$$\mathbf{y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2\, e^{ax} \operatorname{sen} bx}$$ **solución general para raíces complejas conjugadas**

Resumiendo:

Solución general	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$	**raíces distintas**
	$y = c_1 x\, e^{mx} + c_2\, e^{mx}$	**raíces repetidas.**
	$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2\, e^{ax} \operatorname{sen} bx$	**raíces complejas conjugadas**

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación diferencial y'' – 4'y +5y = 0

1)Ecuación característica asociada a la ecuación es: $m^2 - 4m + 5 = 0$ cuyas raíces son:
$m_1 = 2 + j$ y $m_2 = 2 - j$ tenemos raíces complejas conjugadas.

2) Las soluciones son $y_1 = c_1 e^{(2+j)x}$ e $y_2 = c_2\, e^{(2-j)x}$

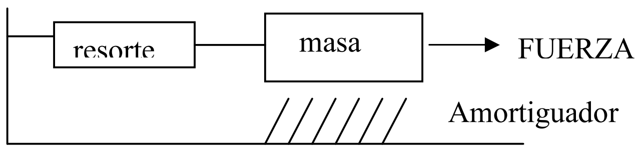
3) Solución general según lo visto sería: $y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2\, e^{2x} \operatorname{sen} x$ las funciones cos x y sen x son linealmente independientes.

En los ejemplos vistos para encontrar una solución particular debemos considerar dos condiciones iniciales, ya que el número de estas depende del orden de la ecuación diferencial.(si tenemos dos constantes arbitrarias con dos condiciones formamos el sistema).

Veremos una aplicación de la ecuación diferencial de segundo orden planteando el modelo matemático que corresponde a un sistema mecánico.

Ejemplo:

Hallar la ecuación diferencial y su solución general para el sistema masa- resorte –amortiguador que aparece en la figura.



Supóngase que una masa m está sujeta tanto a un resorte que ejerce una fuerza sobre ella F_R, como a un amortiguador que ejerce una fuerza F_S. La fuerza de restitución del resorte será proporcional al desplazamiento x (positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda) de la masa. $v = \frac{dx}{dt}$

Suponemos también que la fuerza del amortiguador es proporcional a la velocidad v = dx /dt de la masa. Vamos a considerar que en t = 0 (instante inicial) la masa está en reposo.

Tenemos en cuenta: $F_R = -kx$ siendo k la constante del resorte

$F_S = -cv$ donde c es una constante de amortiguamiento

(el signo – significa que el sentido de estas fuerzas es contrario al sentido del movimiento)

Para plantear la ecuación de equilibrio del sistema tenemos en cuenta la segunda ley de Newton.

La fuerza total que actúa sobre la masa es $F = F_R + F_S$

$m.a = -kx - cv$ si reemplazamos $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ y $v = \frac{dx}{dt}$ obtenemos la ecuación de segundo orden

$\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + k\,x = 0$ Ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

Esta ecuación de segundo orden gobierna las oscilaciones libres de la masa Si la masa está bajo la influencia de una fuerza externa, dicha fuerza aparecería en el segundo miembro y la ecuación sería no homogénea.

Solución:

La ecuación característica es $m^2 + cm + k = 0$

Las raíces son: $m_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{(c^2 - 4k)}}{2}$

Si $c^2 > 4k$ las raíces son reales distintas y negativas, la solución es de la forma:

$y = c_1 e^{-m_1 t} + c_2 e^{-m_2 t}$ la variable dependiente en este problema es x y la variable independiente es t. Como es una exponencial decreciente $y \to 0$ cuando $t \to \infty$, esto es lógico porque existe una fuerza de rozamiento.

Si c = 0 la ecuación se reduce a $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0$ cuya ecuación característica es $m^2 + k = 0$

Las raíces de esta ecuación son imaginarias $m_1 = j\sqrt{k}$ y $m_2 = -j\sqrt{k}$

La solución general es de la forma: $y = c_1 \cos \sqrt{k}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{k}\, t$

En este caso decimos que el sistema oscila libremente.
