CURSO DE NIVELACIÓN INGRESO

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIDAD II: DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Contenido Conceptual:

Polinomio formal, definición, orden y clasificación. Divisibilidad de polinomios: casos de factoreo. Mínimo común múltiplo, máximo común divisor. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. Ecuaciones fraccionarias.
Problemas de aplicación.

Utilidad del Concepto:

Operar con expresiones fraccionarias para la resolución de problemas y su posterior aplicación al cálculo de límite de una función de una variable.

Objetivos Propuestos:

- Distinguir los distintos polinomios según el grado
- Reconocer y aplicar los distintos casos de factoreo
- Utilizar la regla de Ruffini y Teorema de Gauss para facilitar la factorización de polinomios.
- Aplicar la factorización de polinomios a resolución de ecuaciones racionales.
- Resolver problemas de aplicación.

I-INTRODUCCIÓN:

¿Qué son y para qué sirven los polinomios?
Proponemos el siguiente problema para introducir el tema:

> El crecimiento de dos poblaciones A y B, responde a las siguientes expresiones:
>
> $$P_A(t) = \frac{5}{2}t + 30 \quad \text{y} \quad P_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t - 8$$
>
> Donde t es el tiempo expresado en semanas.
> Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana ¿Tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

Para poder resolver situaciones como la planteada, nuestro estudio se centrará en la factorización de polinomios

<u>Polinomio Formal:</u> Definición

Se llama polinomio formal en una indeterminada x sobre el conjunto de números reales, a toda expresión de la forma:

$$\mathbf{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n}$$

donde los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n son números reales y **n** es un número natural.
El coeficiente a_n recibe el nombre de coeficiente principal.
La letra x que figura en el polinomio formal <u>no es un elemento variable, es una indeterminada</u>.

Ejemplos: $P(x) = 3 + 4x - 3x^3$
$M(x)= 3x + x^2 - 4x^4$

El grado de un polinomio formal es el mayor exponente de la indeterminada x.

En los ejemplos anteriores podemos decir que el grado del polinomio P es 3 y el grado de M es 4.

- Si en un polinomio ordenamos los exponentes en forma creciente o decreciente se obtiene un polinomio ordenado.

Ejemplos: $P(x) = 2 - 5x - 3x^2$ ordenado en forma creciente
$P(x) = -3x^2 - 5x + 2$ ordenado en forma decreciente

- Según el n° de términos que tenga el polinomio tiene una denominación particular:

Monomio	1 término	$P(x) = 3x$
Binomio	2 términos	$M(x) = 4 – 6x$
Trinomio	3 términos	$N(x) = 4 - 8x + 3x^2$
Cuatrinomio	4 términos	$R(x) = 2 - x^2 + 5x - 3x^3$

Para más de cuatro términos no hay nombre particular, sólo se lo denomina polinomio.

<u>Factorización de expresiones algebraicas enteras</u>

Recordemos que es posible expresar los números enteros como producto de otros números enteros que son divisores del mismo, por ejemplo:

- -10= 2. (-5) o también -10 = (-2). 5
- 60 = 2.2. 3.5 = 2^2. 3. 5 Lo hemos expresado como producto de los factores 2, 3 y 5, ya que 60 es divisible por ellos. Decimos que tanto 10 como 60 son números compuestos.
- No sucede lo mismo con 61, ya que no es divisible por otros números que no sean él mismo y la unidad. A estos números se los llama *números primos.*

También los polinomios pueden ser expresados como el producto de dos o más factores algebraicos. A este proceso se lo llama **factorización.**

Cuando a un polinomio de grado no nulo, no es posible expresarlo como producto de polinomios de grado menor, se dice que es un ***polinomio primo.***

II- <u>DIVISIBILIDAD</u>

Entre las operaciones que podemos realizar con polinomios, nos interesa en forma particular la división cuando el resto del cociente de dos polinomios es nulo. En este caso el dividendo se puede expresar como el producto entre el cociente y el divisor.

$$\boxed{\text{Si}\quad P(x): Q(x) = C(x) \quad \text{con } R(x) = 0 \quad \text{entonces} \quad P(x) = Q(x).\,C(x)}$$

Ahora P(x) queda expresado como producto de polinomios. Cuando cada uno de los factores es un polinomio primo, decimos que el polinomio está factorizado.

Ejemplo:

Si a $P(x) = x^2 + 4x - 5$ lo dividimos por $Q(x) = x - 1$. Lo hacemos usando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 4 & -5 \\
1 & & 1 & 5 \\
\hline
 & 1 & 5 & \boxed{0}
\end{array} \longrightarrow \textbf{Resto}$$

Decimos que P(x) es divisible por Q(x)

El polinomio cociente es: C(x) = x+ 5

El polinomio <u>factorizado</u> es: P(x) = (x + 5). (x -1)

Si consideramos en el ejemplo como divisor al polinomio (x + 5) obtendremos como resto el polinomio (x-1).

Cuando la división es exacta cada factor es un divisor de P(x)

$$\mathbf{P(x) = \overbrace{(x + 5).\ (x - 1)}^{\text{Divisores}}}$$

Raíces

Si en P(x) reemplazamos x por 5 o por -1 el resultado es cero

P (5) = 0 y P (-1) = 0 . Los valores para los cuales P(x) =0 reciben el nombre de raíces del polinomio.

“Conocer las raíces de un polinomio o los divisores nos permiten expresarlo en forma factorizada”

Veremos también durante el curso que el conocimiento de las raíces nos permitirá:

- ✓ Simplificar expresiones algebraicas.(aplicación en límite).
- ✓ Resolver ecuaciones cuyo grado es mayor o igual que 2.
- ✓ Graficar una función, porque dichos valores son los valores de “x “para los cuales la gráfica de la función dada interseca el eje de las abscisas.

Veremos ahora algunas reglas que permitan descomponer un polinomio en factores primos.

1- Aplicando casos de factoreo.

2- A partir de sus ceros o raíces

1- <u>Casos de factoreo</u>

En los ejemplos que se darán a continuación, se aplicará cada caso de factoreo, esto no implica que el polinomio obtenido esté factorizado, en la mayoría de los casos expresar un polinomio como producto de factores primos, requiere la aplicación de más de un caso de factoreo.

Primer caso: *Factor común*

Este caso se aplica cuando en todos los términos de un polinomio figura uno o varios factores repetidos.

El resultado es el producto entre esos factores y el polinomio que resulta de dividir cada término por ese factor.

Para encontrar los factores repetidos se aplica la siguiente regla:

1) De los coeficientes se busca el máximo común divisor.
2) De las letras se busca la que esté repetida en todos los términos con el menor exponente que figura en el polinomio.

<u>Ejemplo 1:</u>

$T(x) = 2/9\ x^4 - 4/3x^3 + 8/3\ x^2 = 2/3\ x^2\,(1/3\ x^2 - 2\ x + 4)$

Segundo caso: *Factor común en grupos de igual número de términos*

Para factorear un polinomio que tiene factores comunes en grupos de igual número de términos, se factorean dichos grupos y luego se factorean nuevamente con respecto a un nuevo factor común que aparece entre paréntesis.

1) Primero se arman los grupos y se encierran entre paréntesis
2) En cada grupo se saca factor común
3) Se vuelve a sacar factor común el paréntesis

Ejemplo 2:

$P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$

Agrupamos $x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x^4 - 3x^3) + (x - 3)$

Sacamos factor común $x^4 - 3x^3 + x - 3 = x^3 (x - 3) + 1 (x - 3)$

Ahora (x-3) es el factor común en el segundo término

$x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3) . (x^3 + 1)$

Obteniendo así el resultado final: $\mathbf{x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3). (x^3 + 1)}$

Tercer caso: ***Trinomio cuadrado perfecto***

Sabemos que al resolver el cuadrado de un binomio se obtiene un trinomio llamado trinomio cuadrado perfecto: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

De acuerdo con la definición de cuadrado de un binomio resulta que en el trinomio cuadrado perfecto, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el término restante es el doble producto de las bases de los cuadrados.

Si tenemos un polinomio de tres términos, y reconocemos en él el formato anterior, entonces se puede factorear escribiéndolo nuevamente como potencia

Si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 + 4x + 4$

1) Debemos reconocer en él, el formato del trinomio cuadrado perfecto:

   $a^2 + 2ab + b^2$

2) Buscamos dos términos que sean cuadrados perfectos y le sacamos la raíz cuadrada

   $a^2 = x^2$ entonces $a = x$

   $b^2 = 4$ entonces $b = 2$

3) Verificamos ahora si el término restante es el doble producto de a por b:

   $2 a b = 2 x 2 = 4x$

Esto significa que el polinomio dado sí tiene la forma de trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se puede factorear: $\mathbf{x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2}$

Ejemplo 3:

$4 x^2 - 12x + 9$

$a^2 = 4 x^2$ entonces $a = \sqrt{4x^2} = 2 x$

$b^2 = 9$ entonces $b = \sqrt{9} = 3$

Verificamos ahora si el término restante es el doble producto de a por b:

$2 a b = 2 (2x) 3 = 12x$

Observamos que el término coincide, pero no el signo. Esto se debe a que el binomio que está elevado al cuadrado es una resta, por lo tanto al factorearlo debemos escribirlo como resta.

$\mathbf{4 x^2 - 12x + 9 = (2 x - 3)^2}$

Cuarto caso: ***Cuatrinomio cubo perfecto***

Recordemos que el cubo de un binomio da por resultado un cuatrinomio llamado cuatrinomio cubo perfecto: $(a+b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$

Este caso es similar al anterior, sólo que el polinomio dado debe ser un cuatrinomio y el resultado del factoreo debe ser el cubo de un binomio.

Dado el polinomio $Q(x) = x^3 + 6 x^2 + 12 x + 8$

1) Debemos reconocer en el polinomio dado el formato de un cuatrinomio cubo perfecto: $a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$
2) Buscamos dos términos que sean cubos perfectos y les sacamos la raíz cúbica

   $a^3 = x^3$ entonces $a = \sqrt[3]{x^3} = x$

   $b^3 = 8$ entonces $b = \sqrt[3]{8} = 2$

3) Verificamos ahora si los dos términos restantes responden a la forma:

   $3 a^2 b$ y $3 a b^2$

   $3 a^2 b = 3 (x)^2 2 = 6 x^2$

   $3 a b^2 = 3 x (2)^2 = 12x$

   Comprobamos que efectivamente sí tiene el formato indicado, por lo tanto:

   $\mathbf{x^3 + 6 x^2 + 12 x + 8 = (x + 2)^3}$

<u>Ejemplo 4:</u>

$P(x) = x^6 - 3 x^4 + 3 x^2 - 1$

Buscamos dos términos que sean cubos perfectos y les sacamos la raíz cúbica

$a^3 = x^6$ entonces $a = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

$b^3 = - 1$ entonces $b = \sqrt[3]{-1} = - 1$

Verificamos ahora si los dos términos restantes responden al formato $3 a^2 b$ y $3 a b^2$

$3 a^2 b = 3 (x^2)^2 (-1) = - 3 x^4$

$3 a b^2 = 3 x^2 (- 1)^2 = 3 x^2$

Comprobamos que efectivamente sí tiene el formato indicado, por lo tanto:

$\mathbf{x^6 - 3 x^4 + 3 x^2 - 1 = (x^2 - 1)^3}$

Quinto caso: ***Diferencia de cuadrados***

Recordemos que $(a + b).(a-b) = a^2 - b^2$

Por el carácter recíproco de esta propiedad, si tenemos un binomio que tenga la forma $a^2 - b^2$ podemos factorizarlo escribiendo: $(a + b) .(a- b)$

Ejemplo 5: $P(x) = x^2 - 9$

Como $a^2 = x^2$ entonces $a = x$
$b^2 = 9$ entonces $b = 3$

este polinomio tiene la forma de diferencia de cuadrados por lo tanto su forma factorizada es: $\mathbf{x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)}$

Ejemplo 6:

$M(x) = 4x^2 - 25 =$ $\mathbf{(2x + 5).(2x - 5)}$

Sexto caso: ***Suma o diferencia de potencias de igual grado***

Para aplicar este caso de factoreo, se tendrá en cuenta el teorema del resto.

TEOREMA DEL RESTO:

Este teorema, permite hallar el resto de la división de un polinomio P(x) con otro de la forma $x \pm a$ con $a \in$ IR sin efectuar la división.

El resto de dividir el polinomio P(x) por x –a con a ∈ |R, es igual a P(a)

Si tenemos en cuenta lo visto en divisibilidad de polinomios, nos interesa en particular, que el resto sea nulo. Si para x = a el resto es nulo, dijimos que x=a es una raíz del polinomio.

a es raíz de P(x) ⇔ P(a) = 0

Vemos entonces, que cuando se encuentra una raíz, encontramos también un divisor del polinomio.
En el sexto caso, se tiene en cuenta el exponente, si es par o impar; y si se trata de una suma o diferencia de estas potencias.

$x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ si n es impar
$x^n + a^n$ no tiene divisores si n es par
$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ si n es impar
$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ y por $x + a$ si n es par

Esto significa que si dividimos por ejemplo $x^n + a^n$ por $x + a$ siendo n impar, el resto de la división es cero.

Por lo tanto el polinomio $x^n + a^n$ puede expresarse como el producto entre el divisor $x + a$ y el cociente de dicha división. Para realizar el cociente, se aplica la regla de Ruffini.

Ejemplo 7:

T_1 (x) = $8x^3$ - 27 = **(2x - 3).($4x^2$ + 6x + 9)**

T_2 (x) = $8x^3$ + 27 = **(2x + 3) .($4x^2$ - 6x + 9)**

T_3 (x) = $16x^4$ - 81 = **(2x - 3).($8x^3$ + $12x^2$ + 18x + 9)**

T_4 (x) = $16x^4$ + 81 **No se factoriza**

Hemos visto los seis casos de factoreo, en el sexto caso hemos tenido en cuenta los divisores y como consecuencia encontramos también las raíces.

2- **Factorización a partir de sus ceros o raíces**

¿Cuántas raíces tiene un polinomio?

Esta pregunta la contesta un teorema, cuya demostración necesita de conocimientos matemáticos más avanzados, que se llama:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado n tiene n raíces (números reales o complejos, iguales o distintas).

Si de un polinomio de grado *n,* conocemos sus *n* raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ podemos expresar el polinomio en forma factorizada, recordemos que a_n es el coeficiente principal

$$\boxed{P\ (x) = a_n\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)}$$

IMPORTANTE: Si consideremos solo las raíces reales, debemos tener en cuenta que las raíces complejas son dos, dado que son complejas conjugadas. Si el polinomio es de grado impar, por ejemplo 3, puede tener tres raíces reales o una, dado que las otra dos pueden ser complejas. Esto nos permite afirmar que un polinomio de grado impar "**tiene por lo menos una raíz real"**
Si el grado del polinomio es par, por ejemplo 4, puede tener: 4 raíces reales, dos raíces reales o ninguna (esto se debe a que las complejas vienen de a pares)

La otra pregunta que surge naturalmente es:

¿Cómo se pueden hallar las raíces reales de un polinomio?

Si el polinomio es de grado 2, se puede aplicar la fórmula resolvente para encontrar sus raíces. Si es de grado superior, una forma es proponer valores para x, reemplazarlos en P(x) hasta obtener un resultado nulo, este proceso puede ser muy largo.
Hay un teorema que acota los valores entre los que se debe probar para ver si se verifica el teorema del resto, cabe destacar que no siempre no da un resultado, dado que depende de la naturaleza de la raíz.

TEOREMA DE GAUSS

Dado un polinomio de coeficientes enteros, si el número racional r es una raíz del polinomio, $r = \frac{p}{q}$ con p y q enteros y $q \neq 0$, siendo $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible, entonces p divide al coeficiente independiente a_0 y q divide al coeficiente principal a_n

<u>Nota:</u> Es importante interpretar que el teorema asegura que si r es una raíz racional del polinomio debe verificar las condiciones del teorema, pero no todo número racional que cumpla las condiciones es raíz del polinomio. **Este teorema solo permite hallar las raíces racionales**

<u>Ejemplo 8:</u>

$$k(x) = x^3 - 6x^2 + 11x \ \ - 6$$

En este caso no podemos aplicar un caso de factoreo, lo resolvemos aplicando el teorema de Gauss.

Raíces: pueden ser algunos de los divisores de -6. Probamos con x=1, k(1) = 0 por el teorema del resto, sabemos que x-1 es un divisor de k(x).

Dividimos aplicando regla de Rufini y nos queda: $k(x) = (x-1)(x^2-5x+6)$

En el segundo miembro, nos queda el factor (x^2-5x+6) para expresarlo como producto de factores primos, resolvemos la ecuación cuadrática $x^2-5x+6 = 0$

Cuyas soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Reemplazamos en k(x) y nos queda:

$$x^3 - 6x^2 + 11x \ \ - 6 = (x-1)\,(x-3)\,(x-2)$$

Teniendo en cuenta lo visto, podemos decir:

$$\underbrace{(x-1)\,(x-3)\,(x-2)}_{\text{Divisores}} \qquad \underbrace{x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3}_{\text{Raíces}}$$

Ahora el alumno está en condiciones de resolver el problema de la introducción:

El crecimiento de dos poblaciones A y B, responde a las siguientes expresiones:

$$P_A(t) = \frac{5}{2}t + 30 \quad \text{y} \quad P_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t - 8$$

Donde t es el tiempo expresado en semanas.

Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana

¿Tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

Primero debe analizar los datos y responder:

1) ¿Qué significa que coincidan en t = 4?
2) ¿Cómo se utiliza este dato?
3) ¿Qué se necesita calcular para responder la pregunta?

III - Expresiones racionales:

Llamamos expresiones racionales a las expresiones de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x) es no nulo.
Estas expresiones pueden ser simplificadas si existen factores comunes en el numerador y denominador. De esta manera se obtiene su forma irreducible.

Ejemplo 1:

$$\frac{8}{x^2-4}+\frac{x+4}{x+2}=\frac{8+(x-2)(x+4)}{(x-2).(x+2)}$$

$$\frac{8+x^2+2x-8}{(x-2).(x+2)}=\frac{x(x+2)}{(x-2).(x+2)}=\frac{x}{x-2}$$

Aplicación a la resolución de ecuaciones racionales

Ejemplo 2:

$$\frac{x-1}{5} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{x^2+1}{5x-5} \qquad \text{donde } x \neq 1$$

$$\frac{x-1-5(x-2)}{5(x-1)}=\frac{x^2+1}{5(x-1)}$$

$$x^2-2x-1-5x-10=\frac{(x^2+1)5(x-1)}{5(x-1)} \quad \rightarrow \quad x^2-7x-11=x^2+1 \;\Rightarrow\; -7x-10=0$$

Despejamos x=-10/7

Ejemplo 3:

$$\frac{8}{x^2-4}+\frac{x+4}{x+2}=6$$

$$\frac{8}{(x-2)(x+2)}+\frac{x+4}{x+2}=\frac{8+(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=6$$

$$8+x^2+2x-8=6x^2-24$$

$$5x^2-2x-24=0 \quad \text{raíces } x_1=2.4 \quad x_2=2$$

x_2 no la podemos considerar porque x = 2 anula el denominador. Solución x= 2,4