ALGEBRA LINEAL

DIAGONALIZACIÓN

DRA. ANA MARÍA NUÑEZ

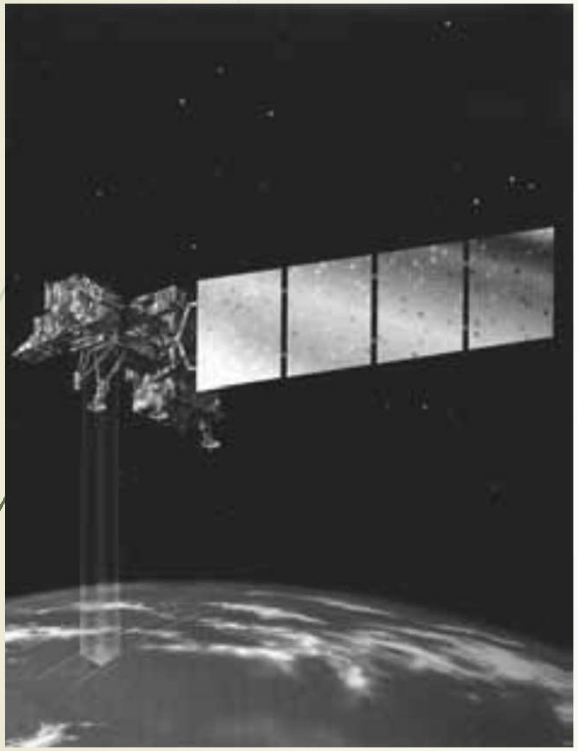
EN ESTA UNIDAD VAMOS A ABORDAR DOS FORMAS DE DIAGONALIZACIÓN,

UNA QUE INVOLUCRA MATRICES SIMÉTRICAS CONGRUENTES

Y OTRA QUE TRABAJA A TRAVÉS DE VALORES Y VECTORES PROPIOS.

EJEMPLIFIQUEMOS APLICACIONES

PROCESAMIENTO DE IMÁGENES MULTICANAL



Del libro Algebra Lineal y sus Aplicaciones de David C. Lay

Dando la vuelta al mundo en poco más de 80 *minutos*, dos satélites Landsat cruzan el cielo, graban imágenes del terreno y de las líneas costeras en franjas de 185 kilómetros de ancho.

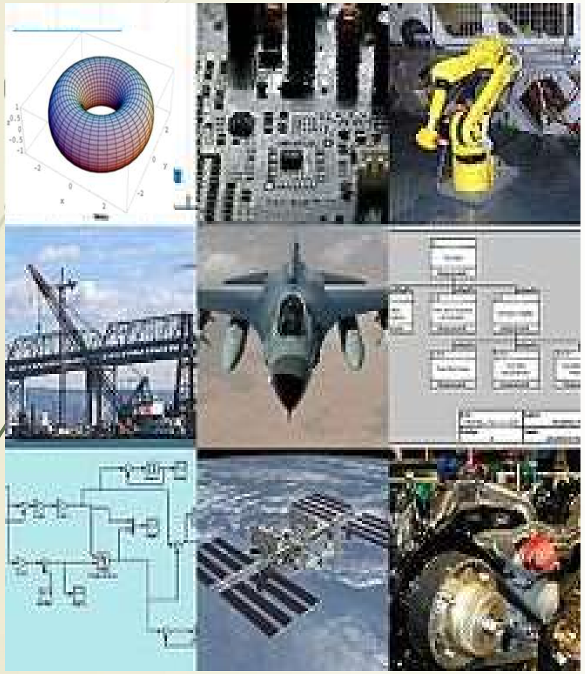
En periodos de 16 días, estos satélites pasan sobre casi toda la superficie terrestre, de modo que cualquier lugar se puede monitorear cada 8 días.

Las imágenes Landsat son útiles para muchos propósitos:

- ✓ Para estudiar el ritmo y la dirección del crecimiento urbano, el desarrollo industrial, etc.
- ✓ Analizar la humedad del suelo, clasificar la vegetación de áreas remotas, y localizar depósitos y corrientes de agua tierra adentro.
- ✓ Detectar y estimar los daños debidos a desastres naturales, etc.

La diagonalización de matrices simétricas asociadas a formas cuadráticas son importantes para el procesamiento de imágenes.

SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS Y CONTINUOS



Los sistemas dinámicos tratan la evolución de sistemas que dependen de variables que se modifican con el tiempo.

Intentan describir procesos variables, de predecir su evolución futura y conocer las limitaciones de esas predicciones.

Estos sistemas están relacionados con las dinámicas poblacionales, por ejemplo estudios sobre la extinción o la proliferación de algunas especies.

Modelar un fenómeno físico, social, biológico o de cualquier naturaleza, que evoluciona con el tiempo, conduce en forma natural a un sistema dinámico, proporcionando información crítica en el diseño de ingeniería.

Los valores y vectores propios son utilizados en estas modelizaciones.

TRABAJAMOS CON LAS DOS FORMAS DE DIAGONALIZACIÓN:

- **DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA**
- **DIAGONALIZACIÓN POR VALORES Y VECTORES PROPIOS**

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

COMENCEMOS POR CONSIDERAR UNA MATRIZ SIMÉTRICA

CON ELEMENTOS REALES

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} = a_{ji}$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

MATRICES SIMÉTRICAS CONGRUENTES

Una matriz A simétrica $\Rightarrow$ Es congruente a otra B

$$\boxed{B = P^T . A . P}$$

A es simétrica entonces $A = A^T$

$$B^T = (P^T . A . P)^T = P^T . A . (P^T)^T = P^T . A . P = B$$

$$\Downarrow$$

B también es simétrica $B = B^T$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

MATRICES SIMÉTRICAS CONGRUENTES

Una matriz A simétrica ⇨ Es congruente a otra B

$$\boxed{B = P^T . A . P}$$

“Las matrices simétricas son congruentes a matrices diagonales”

¿CÓMO SE OBTIENE LA MATRIZ P?

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

PROCEDIMIENTO

A ES SIMÉTRICA ⇒ $\left(A \;\vdots\; I\right)$ **UNA MATRIZ - DOS BLOQUES**

$$\left.\begin{aligned} F_j' &\to k\,.\,F_i + F_j \\ C_j' &\to k\,.\,C_i + C_j \end{aligned}\right\}$$ **OPERACIONES ELEMENTALES INTERCALADAS**

$$\left(D \;\vdots\; Q\right)$$

D ES DIAGONAL Y CONGRUENTE CON A ⇒ **P = Q^T** **D = B**

D = Q . A . Q^T ⇒ **B = P^T . A . P**

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Procedimiento

Ejemplo:

Diagonalizar bajo congruencia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Trabajo práctico

1. Diagonalice a partir de operaciones elementales fila-columna la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Trabajo práctico

2. Sea A una matriz simétrica, determine diagonalizando bajo congruencia una matriz no singular P tal que $P^T.A.P$ sea diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

ANALICEMOS COMO PODEMOS ASOCIAR ESTE CONCEPTO A LAS FORMAS CUÁDRICAS

$$F\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum c_{ij}\,.\,x_i.\,x_j$$

Con i, j de 1, …, n

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

FORMAS CUADRÁTICAS

$$F\,(x_1, x_2, x_3) \;=\; \sum c_{ij}\,.\,x_i.\,x_j$$

Particularizando a 3 variables

Con i, j : 1, 2,3

$$F\,(x, y, z) = A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + 2D\,x\,y + 2E\,x\,z + 2F\,y\,z$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE FORMAS CUADRÁTICAS

Generalizando a n variables

$$F\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \;=\; \sum c_{ij}\,.\,x_i.\,x_j$$

$F(X) = \;\; X^T\,.\,A\,.\,X$ **Forma matricial**

$X = (x_1\,,\, x_2\,,\, \dots\,,\, x_n\,)^T$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE FORMAS CUADRÁTICAS

Particularizando a 3 variables

$$F(x, y, z) = A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + 2D\,x\,y + 2E\,x\,z + 2F\,y\,z$$

Forma matricial

$$F(X) = X^T . A . X$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Diagonalización de una Forma Cuadrática

Ejemplo:

$$F(x, y, z) = x^2 + 7y^2 + 8z^2 - 6xy + 4xz - 10yz$$

Hallar la forma cuadrática diagonalizada y su respectiva representación matricial.

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Trabajo práctico

3. Determine la forma cuadrática correspondiente a la siguiente matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Halle la matriz simétrica y la matriz diagonal que corresponden a la forma cuadrática dada, escriba la ecuación de la forma cuadrática diagonalizada.

$$F(x, y, z) = 8x^2 + 7y^2 - 3z^2 - 6xy + 4xz - 2yz$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Diagonalización de una Forma Cuadrática

$F(X) = X^T . A . X \Rightarrow X = P.Y$

Cambio de variables

$F(Y) = (P.Y)^T . A . (P.Y)$

$F(Y) = Y^T . (P^T . A . P) . Y$

Forma Cuadrática diagonalizada

$$\boxed{F(Y) = Y^T . B . Y}$$

X = P.Y

Sustitución lineal que diagonaliza a la Forma Cuadrática

A es simétrica y congruente a B que es diagonal

Trabajo práctico

5. Realice un cambio de variables que transforme la forma cuadrática:

$F(x, y) = x^2 + 10xy + y^2$ en una forma cuadrática sin término de producto cruzado.

DIAGONALIZACIÓN POR VALORES Y VECTORES PROPIOS

CONSIDEREMOS UNA FUNCIÓN LINEAL

DEFINIDA DE UN ESPACIO VECTORIAL EN SI MISMO

Y SU MATRIZ ASOCIADA

(ENDOMORFISMO)

VALORES Y VECTORES PROPIOS V (*IR*)

Endomorfismo en V ⇨ f: v→ v

f(u) → λ u $\left(\lambda \in R, u \in V \wedge u \neq \vec{0}\right)$

Matriz asociada ⇨ A.[u] = λ [u]

u es un vector propio de f y por ende de la matriz A

λ es el valor propio relativo al vector propio u

VALORES Y VECTORES PROPIOS   V (*IR*)

Si v es L. Dependiente a u $\Rightarrow$ v es un vector propio de f relativo al valor propio λ

$S_\lambda = \{v/v \in V \wedge f(v) = \lambda v\}$ $\Rightarrow$ S_λ espacio propio subespacio de V

En un endomorfismo definido en un espacio de dimensión n el máximo de valores propios o de vectores propios es n

VALORES Y VECTORES PROPIOS V (*IR*)

Procedimiento

$$A.[u] = \lambda\,[u] \Rightarrow A.[u] - \lambda\, I\,[u] = 0 \Rightarrow \underbrace{(A - \lambda\, I)\,[u] = 0}_{\text{SELH}}$$

$$\left(u \neq \vec{0}\right) \Rightarrow \det\,(A - \lambda\, I) = 0 \Rightarrow \textbf{Infinitas soluciones}$$

Ecuación característica – Polinomio característico

Los escalares "λ" que lo satisfacen son los valores propios

VALORES Y VECTORES PROPIOS V (*IR*)

Procedimiento

Obtenidos los "λ" que satisfacen el SELH

(raíces del polinomio característico)

$(A - \lambda I)\,[u] = 0$ ➡ **Resuelve para cada λ**

Se obtiene ➡ **Conjunto solución**

Espacio propio relativo a λ ➡ $\boxed{\mathbf{S}_\lambda}$

DIAGONALIZACIÓN

POR VALORES Y VECTORES PROPIOS

Ejemplo:

$F(x, y) = (2x + y, 3y)$ endomorfismo definido en IR^2

- Determine la matriz asociada en la base canónica.
- Hallar el polinomio característico y los valores propios.
- Halle los subespacios propios y un vector propio para cada uno

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Trabajo práctico

6.- Determine el polinomio característico y, si existen, los valores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Pruebe con el ejemplo la propiedad que dice: si una matriz de orden n tiene n valores propios no necesariamente distintos, el producto de los valores propios es igual al determinante de la matriz

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Trabajo práctico

7.- Determine los subespacios propios y la multiplicidad geométrica (dimensión del subespacio propio) de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Analice si la matriz dada es inversible, en caso afirmativo pruebe que los valores propios de la matriz inversa son de la forma $\frac{1}{\gamma}$ siendo γ un valor propio de la matriz dada.

Trabajo práctico

8. Halle bases para los subespacios propios de A y A^T siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y elabora conclusiones respecto a si coinciden o no.

VALORES Y VECTORES PROPIOS V (*IR*)

DIAGONALIZACIÓN

Endomorfismo en V

A es la matriz asociada

Si existe la matriz P

Inversible y tal que $P^{-1}.A.\ P = D$

A es DIAGONALIZABLE

Si A es simétrica

Si existe la matriz P

Tal que $P^{T}.A.\ P = D$

A es DIAGONALIZABLE ORTOGONALMENTE

VALORES Y VECTORES PROPIOS V (*IR*)

DIAGONALIZACIÓN ⇨ Procedimiento

Diagonalización	Diagonalización ortogonal
Hallar los vectores propios	Hallar los vectores propios
Armar la matriz P con ellos	Ortonormalizar
Analizar si es inversible	Armar la matriz P con ellos
$P^{-1}.A.\ P = D$	$P^{T}.A.\ P = D$

DIAGONALIZACIÓN

POR VALORES Y VECTORES PROPIOS

Retomamos el ejemplo:

F (x, y) = (2 x + y, 3y) endomorfismo definido en IR ^{2}

- Analice si es diagonalizable ortogonalmente. Justifique.
- Halle la matriz diagonal.

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Trabajo práctico

9. Halle los valores, vectores y espacios propios para las siguientes matrices, determine si son diagonalizables, en caso afirmativo, halle la matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN BAJO CONGRUENCIA

Trabajo práctico

10. Analice si la siguiente matriz es diagonalizable ortogonalmente. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$