2: PROBABILIDAD

Vamos a comenzar a transitar el maravilloso mundo de las probabilidades.

Todos hemos tenido contacto con estudios probabilísticos, ¿podría pensar en

algunos de ellos?... Seguramente ha pensado en algunos juegos de azar, en el pronóstico del tiempo con la clásica frase: 'con probabilidades de lluvia...' y tantos hechos más en los que aparece el concepto de probabilidad.

Tanto usamos la probabilidad que es imprescindible dar una correcta definición. La definición a la que vamos a arribar no se dio de un día para el otro, pasó mucho tiempo desde la primera definición formal de probabilidad hasta la que tiene plena vigencia en nuestros días.

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La probabilidad es un mecanismo por medio del cual pueden estudiarse sucesos aleatorios, es decir, debidos al azar, cuando éstos se comparan con los fenómenos determinísticos, no debidos al azar. Por ejemplo, nadie espera predecir con certidumbre el resultado de un experimento tan simple como el lanzamiento de una moneda, sin embargo, podría calcularse el tiempo que transcurrirá para que un objeto, que se deja caer desde cierta altura, llegue al suelo. El primero es un suceso aleatorio, mientras que el segundo es determinístico.

Por lo dicho anteriormente, comenzaremos dando algunos conceptos indispensables para definir la probabilidad y poder calcularla.

Al realizar un experimento estadístico, además de sus características (sistema o fenómeno estudiado y observador) quedan determinados, en primer lugar, un conjunto de **resultados posibles** o **sucesos elementales** y por otra parte, la capacidad de observación determina un conjunto de **sucesos**.

Experimento o **experiencia**: ε

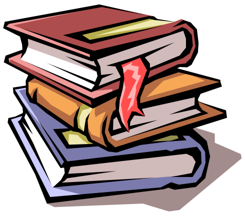
Espacio muestral o **conjunto de resultados posibles**: Ω o S. Ambas notaciones son las más usadas.

Nota: Preferimos utilizar la letra griega Ω para simbolizar el suceso seguro o espacio muestral.

Un **suceso** A, asociado a las condiciones del experimento ε, es una cuestión (o enunciado referente a los resultados de la experiencia), de manera que en cada realización de ésta se pueda determinar si se ha cumplido o no el suceso.

Nota: Para definir sucesos utilizaremos letras mayúsculas imprenta, evitando la letra P que la usaremos para definir probabilidad y la S que para varios autores hace referencia a un suceso especial, el suceso seguro o espacio muestral.

Se llama **suceso elemental**, asociado a las condiciones del experimento ε, a cada uno de los sucesos que forman el espacio muestral. En general, se los indica con la letra ω cuando el espacio muestral se indique con Ω, y con s cuando el espacio muestral se indica con S.



Actividad bibliográfica

1. Lea en la página 52 del libro *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería* de Montgomery & Runger, la definición de **evento** y confróntela con la definición de **suceso**.

Para pensar

1. ¿Cómo se utiliza el término *evento* en la vida cotidiana? ¿Coincide con la definición estadística?

2. Piense en un experimento estadístico, analice el espacio muestral y sugiera un evento estadístico.

Ejemplos:

Para acompañarlo en su tarea, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

ε_1 : "lanzamiento de un dado legal"

Ω_1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

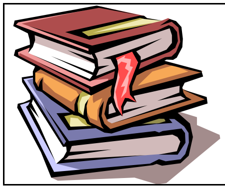
A_1 : "obtener un 6"

A_1 = {6}

Ejemplo 2:

ε_2 : "lanzar dos monedas insesgadas"
$\Omega_2 = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$
A_2 : "obtener sólo una cara"
$A_2 = \{(c, s), (s, c)\}$
Ejemplo 3:

ε_3 : "observar la duración (en horas) de una lámpara"
$\Omega_3 = \{t \,/\, t \geq 0 \text{ horas}\}$
A_3 : "que tenga una duración inferior a 500 horas"
$A_3 = \{ t \,/\, t < 500 \text{ h}\}$



Actividad bibliográfica

1. Lea en la página 32 del libro *Probabilidad y Estadística* de Canavos, la definición de **espacio muestral** y cuándo éste será **discreto** o **continuo**.
2. Indique en cada uno de los ejemplos anteriores si los espacios muestrales son discretos o continuos.

Históricamente las definiciones de probabilidad fueron dándose así:

- **Definición clásica** (a priori)
- **Definición frecuencial** (a posteriori)
- **Definición axiomática**

DEFINICIÓN CLÁSICA

DEFINICIÓN CLÁSICA o **REGLA DE LAPLACE (a priori)**

Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes, y si n_A de estos resultados tienen un atributo A, la probabilidad de A, es la proporción de n_A con respecto a n.

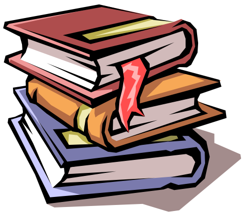
Simbólicamente: $\mathbf{P(A)} = \dfrac{n_A}{n}$

De otra manera, podemos decir que, dado un espacio muestral con sucesos elementales equiprobables y mutuamente excluyentes, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre la cantidad de casos favorables (cardinal de A) y la cantidad de casos posibles (cardinal de Ω):

Simbólicamente: $\mathbf{P(A)} = \dfrac{\# A}{\# \Omega}$

- Que esta definición sea *a priori*, significa que no es necesario realizar el experimento para calcularla, es anterior a la experiencia.

- Una limitación de esta definición es que los sucesos intervinientes deben ser equiprobables, o sea, tener todos la misma probabilidad de ocurrir, además de ser mutuamente excluyentes, es decir, que no pueden ocurrir al mismo tiempo, como los lados de una moneda o las caras de un dado.



Actividad bibliográfica

1. Lea en la página 56 del libro *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería* de Montgomery & Runger, la definición de eventos **mutuamente excluyentes**.

Ejemplos:

- ε : "lanzar un dado legal"
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  $\#\Omega = 6$
  A : "obtener un número múltiplo de 3"
  $A = \{3, 6\}$
  $\#A = 2$
  $$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{2}{6} = 0,\widehat{3} \rightarrow 33,33\%$$
  Existe un 33,33% de posibilidades de que al lanzar un dado se obtenga un número múltiplo de 3.

- ε : "lanzar dos dados legales"
  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (3, 4), ..., (6, 6)\}$
  $\#\Omega = 36$
  A : "obtener una suma menor que cinco"
  $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$
  $\#A = 6$
  $$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{6}{36} = 0,1\widehat{6} \rightarrow 16,67\%$$
  Existe un 16,67% de posibilidades de que al lanzar un dado la suma sea menor que 5 o, de cada cien lanzamientos, es probable que entre 16 y 17 veces la suma sea menor que 5.


¿SEÑOR?
PERMISO,SOY DEL ENTE RECAUDADOR DE IMPUESTOS.VENGO A CONSTATAR SI ES USTED UNA PERSONA DE FORTUNA
PERO,TRANQUILA,NO LE EXIGIRÉ TÍTULOS DE PROPIEDAD,CUENTAS BANCARIAS NI NADA DE ESO PARA EVALUAR SU FORTUNA. ¡NADA DE OBSOLETA BUROCRACIA!
HOY,CONFORME AL MODERNO ESTILO CON QUE SE ADMINISTRA NUESTRO PAÍS,HEMOS ESTABLECIDO NUEVAS REGLAS DE JUEGO:HE AQUÍ ESTE CUBILETE, JUEGO YO PRIMERO.
¡PÚUH!..¡APENAS TRES! ¡LÁSTIMA! JUEGA USTED.
¡¡FAAAH!!..¡¡DOBLE SEIS,SEÑORA!! ¡¡ESO SE LLAMA TENER FORTUNA!!
¡¡HIIIGH, GANÉ!!
YA MISMO DEJO CONSTANCIA EN SU CÉDULA FISCAL:"GOZA DE NOTABLE FORTUNA"
¡OIGA, PERO YO!...
PERO USTED NADA,SEÑORA.COMENZARÁ A PAGAR SUS IMPUESTOS COMO CUALQUIER PERSONA DE FORTUNA,FINALMENTE DEJARÁ DE SER UNA MARGINADA SOCIAL.¡¡BASTA DE PRIVILEGIOS!! ¡¡IMPUESTOS DIGNOS PARA TODOS!!
¡¡QUÉ SUERTE,HIJITO,SABER QUE HAY FUNCIONARIOS QUE SE PREOCUPAN POR VENIR A JERARQUIZARNOS LA POBREZA!!
QUINO

DEFINICIÓN FRECUENCIAL

DEFINICIÓN FRECUENCIAL (a posteriori)

La probabilidad aparece como resultado de muchos ensayos o pruebas, sin poder calcularla con anterioridad, ya sea por desconocerse la manera de actuar de las causas que originan el fenómeno, ya sea por ser éstas demasiado numerosas o complicadas.
Si se realiza *n* veces un experimento y se observa *k* veces el suceso que nos interesa (por ejemplo, suceso A)

Simbólicamente: $P(A) = \frac{k}{n} = p_{\text{frecuencia l}}$

Si se repite un gran número de veces ($n \to \infty$) y se calcula la probabilidad frecuencial tiende a coincidir con la probabilidad teórica, calculada a priori.

Ejemplos:

- En los últimos 100.000 nacimientos de una población, 51.600 son varones, entonces la probabilidad frecuencial o frecuencia relativa de que nazca un varón es igual a 51.600/100.000 = 0,516, obtenemos así, la probabilidad a partir de una experiencia (a posteriori).
- Si analizamos a posteriori las probabilidades de los números obtenidos al lanzar un dado legal, podremos observar que, a medida que aumentamos la cantidad de veces que hacemos el experimento, la probabilidad frecuencial se aproxima a la probabilidad teórica o clásica.
- Veamos qué probabilidades obtenemos para un determinado evento, al lanzar un dado legal cien veces (n = 100). Para comparar realizaremos el experimento dos veces, analizando la frecuencia con que aparece cada uno de los resultados posibles:

x	ε_1	ε_2
1	20	18
2	18	17
3	15	10
4	21	20
5	16	17
6	10	18

Si analizamos el evento A: "que salga el número 3"
En el experimento 1: P(A) = 15/100 = 0,15
En el experimento 2: P(A) = 10/100 = 0,10
La probabilidad teórica sería 1/6, o sea, aproximadamente de 0,17.

- ¿Y si lanzamos el dado quinientas veces?

x	ε_1	ε_2
1	81	80

Si analizamos el evento A: "que salga el número 3"

2	81	87
3	85	83
4	82	85
5	86	84
6	85	81

En el experimento 1: $P(A) = 85/500 = 0{,}17$
En el experimento 2: $P(A) = 83/500 = 0{,}166$
La probabilidad teórica sería 1/6, o sea, aproximadamente de 0,17.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Esta definición fue dada por Kolmogorov en 1933 y nos permite desarrollar la teoría de las probabilidades como cualquiera otra teoría.

Antes de llegar a la definición de probabilidad debemos analizar otros conceptos:

Para ser manejable, el conjunto de los sucesos debe verificar una serie de propiedades, por ejemplo, si A y B son sucesos, la cuestión o enunciado resultante de la conjunción lógica de A y B debe ser también observable, esto también debe ocurrir con la disyunción lógica y la negación. A su vez, estas operaciones deben presentar ciertas propiedades para su manejo. Concretamente, es necesario que la colección de los sucesos definidos sobre una experiencia tengan una estructura algebraica que nos permita trabajar con los sucesos.

Al conjunto de sucesos que presenta esta estructura se lo denomina **álgebra de sucesos** y lo indicamos con la letra $\mathcal{A}$.

El conjunto de todos los subconjuntos de un espacio muestral Ω, llamado "partes de Ω" que se anota como $P(\Omega)$, es un álgebra de sucesos, siendo $\mathcal{A}$ un subconjunto de $P(\Omega)$.

En $\mathcal{A}$, se deben verificar los siguientes axiomas:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}$

De los axiomas de definición del álgebra se deduce inmediatamente que:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{A}$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Dado un Ω y un $\mathcal{A}$ definido en él, una función

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{P:} & \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ & \mathbf{A} & \mapsto & \mathbf{P(A)} \end{array}$$

(siendo R el conjunto de los números reales)

es una **probabilidad** sobre $\mathcal{A}$ si cumple los siguientes axiomas:

1) $P(A) \geq 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$
2) $P(\Omega) = 1$
3) $A \in \mathcal{A} \;\wedge\; B \in \mathcal{A} \;\wedge\; A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

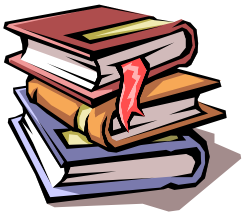
De esta definición surgen las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$
b) $\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ llamada ***propiedad del suceso opuesto***
Nota: Indicaremos al suceso opuesto de A, indistintamente, con $\overline{A}$ o **A'** o C_A.
c) $\mathbf{A \in \mathcal{A} \;\wedge\; B \in \mathcal{A} \;\wedge\; A \subset B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B)}$
d) $\mathbf{A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; 0 \leq P(A) \leq 1}$
e) $\mathbf{A \in \mathcal{A} \;\wedge\; B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

En resumen, la teoría axiomática de la probabilidad proporciona un vocabulario, una sintaxis, axiomas y demostraciones que son parte de la lógica.

ESPACIO DE PROBABILIDAD

Dado un experimento ε, la terna constituida por un conjunto de resultados posibles Ω, un álgebra $\mathcal{A}$ de sucesos sobre Ω y una probabilidad P definida sobre el álgebra $\mathcal{A}$: $\mathbf{(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)}$ es un **espacio de probabilidad**.



Actividad bibliográfica

1. Muchos autores hablan de probabilidad subjetiva, ¿a qué se refieren? Busque la respuesta en la bibliografía propuesta.
2. ¿Coinciden los autores sobre el concepto de probabilidad subjetiva o personal?
3. Para recapitular le sugerimos que lea desde la página 27 a la página 35, inclusive, del libro *La Estadística en Cómic* de Gonick & Smith.

Para pensar

1. Cada definición de probabilidad ha sido ilustrada con una viñeta humorística donde se aplica la definición en cuestión. Piense por qué cada viñeta representa esa definición y no otra.

EVENTOS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES

Dos sucesos son **compatibles** o **no mutuamente excluyentes** cuando pueden aparecer simultáneamente en el experimento; caso contrario, se los llama **incompatibles** o **mutuamente excluyentes**, es decir, no pueden presentarse juntos, si A y B son incompatibles, $A \cap B = \varnothing$.

Sucesos complementarios

Dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω, se dicen **complementarios** si cumplen las siguientes condiciones:

a) A y B son mutuamente excluyentes o incompatibles, es decir, $A \cap B = \varnothing$

b) A y B forman el espacio muestral, es decir, $A \cup B = \Omega$

c) $P(A) + P(B) = 1$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Para que exista un condicionamiento entre dos sucesos, éstos deben ser **compatibles** o **no mutuamente excluyentes**, es decir, pueden aparecer simultáneamente en el experimento.

Ejemplos:

Analizaremos un ejemplo para estudiar la probabilidad condicionada:

En un espacio muestral formado por n personas, están dados los sucesos:

A : "tiene cabello rubio"	$\# A = a$
B : "tiene ojos azules"	$\# B = b$
$C = A \cap B$: "tiene cabello rubio y ojos azules"	$\# C = c$

$$P(A) = \frac{a}{n} \qquad P(B) = \frac{b}{n} \qquad P(C) = P(A \cap B) = \frac{c}{n}$$

Si tenemos cierta información, por ejemplo, sabemos que la persona elegida tiene ojos azules, puede ocurrir que la probabilidad de que sea rubia se vea alterada, es decir, no será la misma, porque el espacio muestral se reduce sólo a aquellos que cumplen con el condicionamiento (tener ojos azules) de forma que la probabilidad del suceso A condicionada por B viene dada según la definición clásica, por:

$$P(A/B) = \frac{c}{b}$$

P(A/B) se lee: *probabilidad del suceso A condicionada por B o probabilidad de que ocurra A habiendo ocurrido B o probabilidad de A si B*. También se puede denotar como $P_B(A)$.

Si dividimos por n en numerador y denominador:

$$P(A/B) = \frac{c/n}{b/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Luego:

$$\mathbf{P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)}$$

INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA
SUCESOS ESTOCÁSTICAMENTE INDEPENDIENTES

Si dos sucesos A y B son **estocásticamente independientes** se verifican las tres relaciones siguientes:

- **P(A/B) = P(A)**, es decir, que ocurra B no afecta a A.
- **P(B/A) = P(B)**, es decir, que ocurra A no afecta a B.
- $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B)}$

En caso contrario:

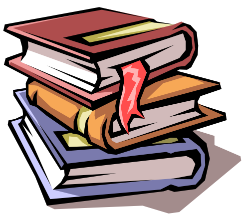
- $P(A/B) \neq P(A)$ A es estocásticamente dependiente de B
- $P(B/A) \neq P(B)$ B es estocásticamente dependiente de A

Si A es dependiente de B y:

- $P(A/B) > P(A)$ indica que la presencia de B favorece la presencia de A
- $P(A/B) < P(A)$ indica que la presencia de B desfavorece la presencia de A

Para resumir la información obtenida hasta el momento, le sugerimos leer con atención el siguiente esquema que le ayudará a resolver los ejercicios de probabilidades:

$A \cup B$ →	¿son **compatibles** A y B?	sí	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **Ley de la adición**
		no	Caso particular para $A \cap B = \varnothing$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$A \cap B$ →	¿son **dependientes** A y B?	sí	$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$ **Ley del producto**
		no	Caso particular $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



Actividad bibliográfica

1. Para recapitular le sugerimos que lea desde la página 36 a la página 45, inclusive, del libro *La Estadística en Cómic* de Gonick & Smith.

Ejercicio integrador

La probabilidad de que un hombre de cierta edad viva diez años más es 1/4, y la probabilidad de que su esposa viva diez años más es de 1/3. Encuentre la probabilidad (suponiendo la independencia de los eventos) de que:

- *El experimento consiste en seleccionar parejas de cierta edad.*
- *Los eventos involucrados en el problema son:*
  - *H: "Que esté vivo el hombre dentro de diez años"*
  - *M: "Que esté viva la mujer dentro de diez años"*
- *La probabilidades asignadas a los eventos son:*
  - $P(H) = 1/4$
  - $P(M) = 1/3$
- *El espacio muestral estaría formado por pares ordenados de la siguiente manera:* $\Omega = \{(H, M), (H', M), (H, M'), (H', M')\}$

a) ambos estén vivos dentro de diez años.

$\mathbf{P((H \cap M))} = P(H) \,.\, P(M) = 1/4 \;.\; 1/3 = \mathbf{0{,}08333...} \rightarrow \mathbf{8{,}33\%}$

La probabilidad de que ambos estén vivos dentro de diez años es de 0,833...

b) por lo menos uno esté vivo dentro de diez años.

$\mathbf{P((H \cup M))} = P(H) + P(M) - P((H \cap M)) =$

$= 1/4 + 1/3 - 1/12 = \mathbf{0{,}5} \rightarrow \mathbf{50\%}$

También se puede resolver, analizando las situaciones posibles:

$\mathbf{P((H \cap M') \cup (H' \cap M) \cup (H \cap M))} =$

$= P(H \cap M') + P(H' \cap M) + P(H \cap M) =$

$= P(H) \,.\, P(M') + P(H') \,.\, P(M) + P(H) \,.\, P(M) =$

$= 1/4 \;.\; 2/3 + 3/4 \;.\; 1/3 + 1/4 \;.\; 1/3 = \mathbf{0{,}5} \rightarrow \mathbf{50\%}$

La probabilidad de que por lo menos uno esté vivo dentro de diez años es de 0,5.

c) ninguno esté vivo en diez años.

$\mathbf{P(H' \cap M')} = P(H') \,.\, P(M') = 3/4 \;.\; 2/3 = \mathbf{0{,}5} \rightarrow \mathbf{50\%}$

La probabilidad de que ninguno esté vivo dentro de diez años es de 0,5.

d) sólo la esposa esté viva en diez años.

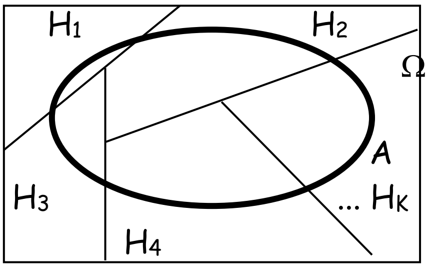
$\mathbf{P(H' \cap M)} = P(H') \,.\, P(M) = 3/4 \;.\; 1/3 = \mathbf{0{,}25} \rightarrow \mathbf{25\%}$

La probabilidad de que sólo la esposa esté viva dentro de diez años es de 0,25.

<u>Advertencia</u>: La probabilidad de que sólo la esposa esté viva dentro de diez años no es la probabilidad de que la esposa esté viva, es decir, P(M), porque esta probabilidad deja abiertas todas las posibilidades del esposo, o sea, puede estar vivo o no, y para que se cumpla lo pedido el esposo no debe estar vivo.

TEOREMA DE LA PROBABILIDADES TOTALES

Este teorema se utiliza para calcular la probabilidad de un suceso a partir de una colección de sucesos mutuamente excluyentes cuya unión es el suceso seguro.



Sea $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k$ en donde cada H_i es un suceso y $H_i \cap H_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Dado un suceso A, tal que $A \cap H_j \neq \varnothing$, se verifica:

$$P(A) = P(A/H_1).P(H_1) + P(A/H_2).P(H_2) + \ldots + P(A/H_k).P(H_k)$$

Ejemplo:

En una fábrica hay tres máquinas que producen tornillos:
La máquina 1 produce el 40% de los tornillos con un 1% de defectuosos.
La máquina 2 produce el 35% de los tornillos con un 2% de defectuosos.
La máquina 3 produce el 25% de los tornillos con un 1,5% de defectuosos.
Calcular la probabilidad de obtener un tornillo defectuoso:

Los eventos involucrados son:
M_1: "El tornillo fue hecho por la máquina 1"
M_2: "El tornillo fue hecho por la máquina 2"
M_3: "El tornillo fue hecho por la máquina 3"
D: "Que el tornillo sea defectuoso"
Las probabilidades dadas en el problema son:
$P(M_1) = 0,40$
$P(M_2) = 0,35$
$P(M_3) = 0,25$
$P(D/M_1) = 0,010$
$P(D/M_2) = 0,020$
$P(D/M_3) = 0,015$

$\mathbf{P(D)} = P(D/M_1).P(M_1) + P(D/M_2).P(M_2) + P(D/M_3).P(M_3) =$
$= 0,01 \,.\, 0,4 + 0,02 \,.\, 0,35 + 0,015 \,.\, 0,25 = \mathbf{0,01475} \rightarrow \mathbf{1,5\%}$
Interpretación: ....
....

Probabilidad

TEOREMA DE BAYES

Permite calcular la probabilidad de que se haya dado alguna de las condiciones iniciales, causas o factores que pueden influir en la probabilidad de un suceso A.

Sea $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k$ en donde H_i es un suceso y $H_i \cap H_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Si se sabe que se ha presentado un suceso A, tal que $A \cap H_j \neq \varnothing$, la probabilidad de que proceda del suceso H_i es:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$$

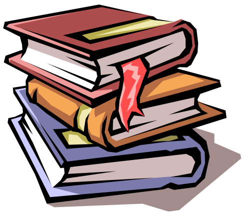
Ejemplo:

En el ejemplo anterior, calcular la probabilidad de que al obtener un tornillo defectuoso provenga de la máquina 2:

$$P(M_2/D) = \frac{P(D/M2) \cdot P(M2)}{P(D)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}35}{0{,}01475} = \mathbf{0{,}4746} \rightarrow \mathbf{47{,}46\%}$$

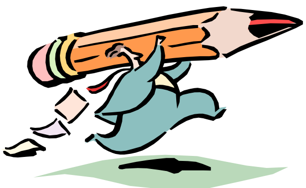
Interpretación: ....

....



Actividad bibliográfica

1. Para recapitular le sugerimos que lea desde la página 46 a la página 51, inclusive, del libro *La Estadística en Cómic* de Gonick & Smith.



A trabajar solos...

Aunque no tanto porque al final encontrará los ejercicios resueltos.

1. Revisión de conceptos teóricos:

a) Defina el concepto de espacio muestral.

b) Clasifique a los espacios muestrales en función del número de elementos que contienen.
c) Defina el concepto de evento.
d) Indique cuándo se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes.
e) Defina el concepto clásico de probabilidad.
f) Defina la interpretación de la probabilidad como frecuencia relativa.
g) Enuncie la regla general de la adición.
h) Enuncie el teorema de la probabilidad del complemento de un evento.

2. Encuentre los errores en cada una de las siguientes afirmaciones:
a) Las probabilidades de que un vendedor de automóviles venda 0, 1, 2 ó 3 automóviles en cualquier día de febrero son de 0,19, 0,38, 0,29 y 0,15 respectivamente.
b) La probabilidad de que llueva mañana es de 0,40 y la probabilidad de que no llueva mañana es de 0,52.
c) Las probabilidades de que un impresor cometa 0, 1, 2, 3, 4 o más errores son, respectivamente, de 0,19, 0,34, -0,25, 0,43 y 0,29.
d) En una sola extracción de un mazo de naipes, la probabilidad de elegir un corazón es de 1/4, la probabilidad de elegir una carta negra es de 1/2 y la probabilidad de elegir un corazón y una carta negra es de 1/8.

3. Se analizan los discos de policarbonato plástico para determinar su resistencia a las rayaduras y a los golpes. A continuación se resumen los resultados obtenidos al analizar cien muestras:

		Resistencia a los golpes	
		alta	***baja***
Resistencia a las rayaduras	***alta***	80	9
	baja	6	5

Sean los eventos:

G: "el disco tiene una alta resistencia a los golpes"
R: "el disco tiene una alta resistencia a las rayaduras".

Dibuje diagramas de Venn, interprete conjuntistamente y determine el número de discos que:
a) presentan alta resistencia a los golpes y a las rayaduras.
b) no presenten alta resistencia a los golpes.
c) presenten alta resistencia en por lo menos uno de los aspectos.
d) presenten alta resistencia a los golpes y no presenten alta resistencia a las rayaduras.
e) no presenten alta resistencia en golpes ni en rayaduras.

4. Basándose en el ejercicio 3, calcule las siguientes probabilidades:
a) $P(G)$
b) $P(R)$
c) $P(G \cap R)$

d) $P(G \cup R)$
e) $P(G')$
f) $P(G' \cup R)$

5. La siguiente tabla presenta un resumen del análisis realizado a las flechas de un compresor para determinar el grado con que éstas satisfacen ciertos requerimientos:

		La curvatura cumple con los requerimientos	
		sí	**no**
El acabado superficial cumple con los requerimientos	**sí**	345	5
	no	12	8

a) Si se toma una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requisitos de acabado o con los de curvatura?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requisitos de acabado o que no cumpla con los de curvatura?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requisitos de acabado y curvatura?

6. Las flechas del ejercicio 5 se clasifican, además, en términos de la máquina herramienta utilizada en su fabricación, de la siguiente manera:

MÁQUINA HERRAMIENTA 1

		la curvatura cumple con los requerimientos	
		sí	**no**
el acabado superficial cumple con los requerimientos	**sí**	200	1
	no	4	2

MÁQUINA HERRAMIENTA 2

		la curvatura cumple con los requerimientos	
		sí	**no**
el acabado superficial cumple con los requerimientos	**sí**	145	4
	no	8	6

a) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial o con los de curvatura, o provenga de la máquina herramienta 1?
b) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial o con los de curvatura, o provenga de la máquina herramienta 2?
c) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial y curvatura, o provenga de la máquina herramienta 2?

d) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial o que provenga de la máquina herramienta 1?

7. Revisión de conceptos teóricos:

a) Defina el concepto de probabilidad condicional.

b) Enuncie la regla general de la multiplicación.

c) Indique cuándo se dice que dos eventos son estocásticamente independientes.

d) Enuncie el teorema de las probabilidades totales.

e) Enuncie el teorema de Bayes.

8. Se extraen cuatro cartas sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada una de las cuatro extracciones salga un as?

a) Reponiendo las cartas.

b) Sin reponer las cartas.

9. Si $P(A/B) = 1$, ¿puede concluirse que $A = B$? Dibuje un diagrama de Venn para explicar su respuesta.

10. Suponga que A y B son eventos mutuamente excluyentes. Construya diagramas de Venn que representen los eventos A, B y C, tales que $P(A/C)=1$ y $P(B/C)=0$.

11. La irregularidad del corte de productos de papel aumenta a medida que las hojas de la cuchilla se desgastan. Sólo el 1% de los productos cortados con cuchillas nuevas tienen cortes irregulares, el 3% de los cortados con cuchillas de filo promedio exhiben irregularidades y el 5% de los cortados con cuchillas desgastadas presentan irregularidades. Si el 25% de las cuchillas utilizadas en el proceso de corte son nuevas, el 60% tiene un filo promedio y el 15% de las cuchillas están desgastadas, ¿cuál es la proporción de productos que tendrán cortes irregulares?

12. En un proceso de manufactura, el 10% de las partes contienen fallas visibles en la superficie, mientras que el 25% con fallas en la superficie son funcionalmente defectuosas. Sin embargo, sólo el 5% de las partes sin fallas en la superficie son partes funcionalmente defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una parte que sea funcionalmente defectuosa?

13. Los clientes se encargan de evaluar los diseños preliminares de varios productos. Se sabe que el 95% de los productos con un gran éxito en el mercado reciben buenas evaluaciones, el 60% de los productos con éxito moderado reciben buenas evaluaciones y el 10% de los productos de escaso éxito reciben buenas evaluaciones. Se sabe, además, que el 40% de los productos ha tenido un gran éxito, el 35% un éxito moderado y el 25% un escaso éxito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una buena evaluación?

   b) Si un nuevo diseño obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

   c) Si un producto no obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

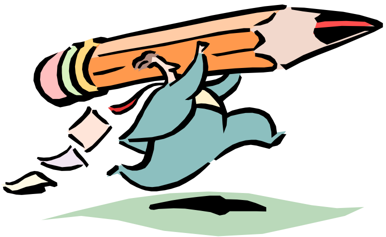
14. El programa para detectar fraudes en las tarjetas telefónicas utilizadas por los consumidores, registra todos los días el número de áreas metropolitanas donde se originan todas las llamadas. Se tiene que el 1% de los usuarios legítimos hacen al día llamadas que se originan en dos o más áreas metropolitanas. Sin embargo, el 30% de los usuarios fraudulentos hacen al día llamadas desde dos o más áreas metropolitanas. La proporción de usuarios fraudulentos es 0,01%. Si el mismo usuario hace en un día dos o más llamadas desde dos o más áreas metropolitanas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un usuario fraudulento?

¡A repasar...!

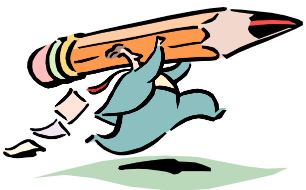
Para autoevaluarse, responda las preguntas que están a continuación. Puede hacerlo con el material de estudio, pero asegurándose que “entiende” cada palabra, a tal punto que usted podría explicarle a un amigo, que no conoce el tema, de manera simple, los conceptos estudiados:

- ☑ **¿Qué es un experimento estadístico?**
- ☑ **¿A qué llamamos espacio muestral? ¿De qué forma se lo simboliza?**
- ☑ **¿Cuándo un espacio muestral es discreto y cuándo es continuo?**
- ☑ **¿Qué es un suceso o evento?**
- ☑ **¿Cómo se definió la probabilidad, históricamente?**
- ☑ **¿Cuál es la definición clásica? ¿Qué significa que sea *a priori*?**
- ☑ **¿Qué limitación presenta la definición clásica?**
- ☑ **¿Cuál es la definición frecuencial? ¿Qué significa que sea *a posteriori*?**
- ☑ **¿Cuál es la definición axiomática?**
- ☑ **¿Qué axiomas caracterizan a la definición dada por Kolmogorov?**
- ☑ **¿Cuándo dos sucesos son complementarios?**

- ☑ **¿A qué llamamos espacio de probabilidad?**
- ☑ **¿Cuál es la definición de probabilidad condicionada?**
- ☑ **¿En qué casos decimos que dos eventos son independientes? ¿Y cuándo son dependientes?**
- ☑ **¿Qué dice el teorema de las probabilidades totales?**
- ☑ **¿Cuándo y para qué se utiliza el teorema de las probabilidades totales?**
- ☑ **¿Qué dice el teorema de Bayes?**
- ☑ **¿Cuándo y para qué se utiliza el teorema de Bayes?**



Por favor, no avance al siguiente tema si tiene dudas o no recuerda las nociones aquí volcadas. Pero si se siente listo para continuar, es hora de empezar a trabajar con las **autoevaluaciones** y las **aplicaciones prácticas**...



A trabajar solos...: Respuestas

1. Revisión de conceptos teóricos:

a) Defina el concepto de espacio muestral.

Espacio muestral: *es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Se indica con la letra Ω.*

b) Clasifique a los espacios muestrales en función del número de elementos que contienen.

*Según el número de elementos se clasifica a los espacios muestrales en **finitos** o **infinitos**. En general, si la cantidad de elementos es finita o infinita numerable el espacio muestral se llama **discreto**, en caso contrario, **continuo**.*

c) Defina el concepto de evento.

Evento: *es cualquier subconjunto de un espacio muestral, es decir, cualquier elemento de partes de Ω.*

d) Indique cuándo se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes.

*Dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando su intersección es vacía, o sea, no pueden ocurrir a la vez.*

e) Defina el concepto clásico de probabilidad.

*El **concepto clásico de probabilidad** es el primero que se da cronológicamente, surgiendo del estudio de los juegos de azar. Se aplica cuando todos los resultados son igualmente probables. Decimos entonces, que:*

Si hay n resultados igualmente posibles, todos los cuales ocurren y de ellos, b son considerados favorables o como un "éxito", entonces la probabilidad de un "éxito" está dada por b/n.

Laplace *(1749-1827) definió un concepto de probabilidad que fue criticado pero es lo que actualmente se llama **definición clásica de probabilidad**: la probabilidad de un suceso o evento es igual al cociente entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos posibles (equiprobables).*

f) Defina la interpretación de la probabilidad como frecuencia relativa.

*Un inconveniente que presenta la definición clásica es que no se puede aplicar cuando los eventos no son equiprobables, por eso se usa una **interpretación de la probabilidad como frecuencia relativa**:*

La probabilidad de un evento es la proporción de las veces que eventos de la misma clase ocurrirán al repetir muchas veces el experimento.

g) Enuncie la regla general de la adición.

Regla general de la adición: *Si A y B son eventos cualesquiera en Ω, entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

h) Enuncie el teorema de la probabilidad del complemento de un evento.

Probabilidad del complemento: *Si A es un evento cualquiera de Ω, entonces* $P(A') = 1 - P(A)$

2. Encuentre los errores en cada una de las siguientes afirmaciones:

Probabilidad

a) Las probabilidades de que un vendedor de automóviles venda 0, 1, 2 ó 3 automóviles en cualquier día de febrero son de 0,19, 0,38, 0,29 y 0,15 respectivamente.
0,19 + 0,38 + 0,29 + 0,15 = 1,01.

b) La probabilidad de que llueva mañana es de 0,40 y la probabilidad de que no llueva mañana es de 0,52.
Se debe dar que $P(A') = 1 - P(A)$ *y aquí* $0{,}52 \neq 1 - 0{,}40$

c) Las probabilidades de que un impresor cometa 0, 1, 2, 3, 4 o más errores son, respectivamente, de 0,19, 0,34, -0,25, 0,43 y 0,29.
No pueden existir probabilidades negativas (- 0,25)

d) En una sola extracción de un mazo de naipes, la probabilidad de elegir un corazón es de 1/4, la probabilidad de elegir una carta negra es de 1/2 y la probabilidad de elegir un corazón y una carta negra es de 1/8.
Como los corazones son cartas rojas, es "imposible" extraer un corazón y una carta negra a la vez porque son sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes, por lo tanto, la probabilidad de elegir un corazón y una carta negra es 0.

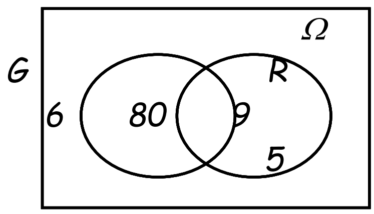
3. Se analizan los discos de policarbonato plástico para determinar su resistencia a las rayaduras y a los golpes. A continuación se resumen los resultados obtenidos al analizar cien muestras:

		Resistencia a los golpes	
		alta	***baja***
Resistencia a las rayaduras	***alta***	80	9
	baja	6	5

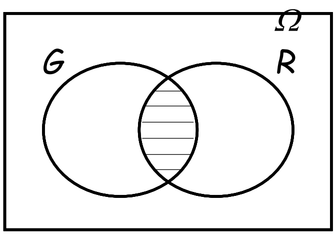
Sean los eventos:

G: "el disco tiene una alta resistencia a los golpes"
R: "el disco tiene una alta resistencia a las rayaduras".

Dibuje diagramas de Venn, interprete conjuntistamente y determine el número de discos que:



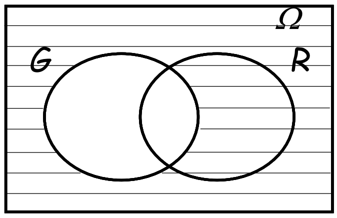
a) presentan alta resistencia a los golpes y a las rayaduras.



G ∩ R

 # (G ∩ R) = 80

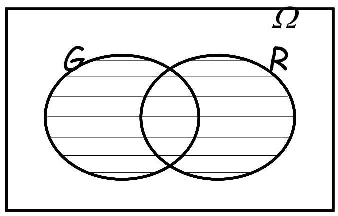
b) no presenten alta resistencia a los golpes.



G'

$\# G' = 14$

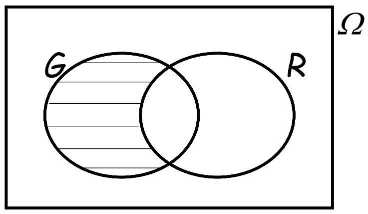
c) presenten alta resistencia en por lo menos uno de los aspectos.



$G \cup R$

$\# (G \cup R) = 95$

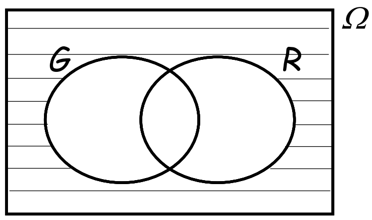
d) presenten alta resistencia a los golpes y no presenten alta resistencia a las rayaduras.



$G \cap R'$

$\# (G \cap R') = 6$

e) no presenten alta resistencia en golpes ni en rayaduras.



$G' \cap R' = (G \cup R)'$

$\# (G \cup R)' = 5$

4. Basándose en el ejercicio 3, calcule las siguientes probabilidades:

$\# \Omega = 100$

a) P(G)

$$P(G) = \frac{\# G}{\# \Omega} = \frac{86}{100} = 0{,}86 \rightarrow 86\%$$

La probabilidad de que un disco elegido al azar presente alta resistencia a los golpes es de 0,86.

b) P(R)

$$P(R) = \frac{\# R}{\# \Omega} = \frac{89}{100} = 0{,}89 \rightarrow 89\%$$

La probabilidad de que un disco elegido al azar presente alta resistencia a las rayaduras es de 0,89.

c) $P(G \cap R)$

$$P(G \cap R) = \frac{\# (G \cap R)}{\# \Omega} = \frac{80}{100} = 0{,}80 \rightarrow 80\%$$

La probabilidad de que un disco elegido al azar presente alta resistencia a los golpes y a las rayaduras es de 0,80.

d) $P(G \cup R)$

$$P(G \cup R) = \frac{\# (G \cup R)}{\# \Omega} = \frac{95}{100} = 0{,}95 \rightarrow 95\%$$

También se puede calcular:

$$P(G \cup R) = P(G) + P(R) - P(G \cap R) = \frac{86}{100} + \frac{89}{100} - \frac{80}{100} = \frac{95}{100} =$$

$$= 0{,}95 \rightarrow 95\%$$

La probabilidad de que un disco elegido al azar presente alta resistencia a los golpes o a las rayaduras es de 0,95.

e) $P(G')$

$$P(G') = \frac{\# G'}{\# \Omega} = \frac{14}{100} = 0{,}14 \rightarrow 14\%$$

La probabilidad de que un disco elegido al azar no presente alta resistencia a los golpes es de 0,14.

f) $P(G' \cup R)$

$$P(G' \cup R) = P(G') + P(R) - P(G' \cap R) = \frac{14}{100} + \frac{89}{100} - \frac{9}{100} = \frac{94}{100} =$$

$$= 0{,}94 \rightarrow 94\%$$

La probabilidad de que un disco elegido al azar no presente alta resistencia a los golpes o presente alta resistencia a las rayaduras es de 0,94.

5. La siguiente tabla presenta un resumen del análisis realizado a las flechas de un compresor para determinar el grado con que éstas satisfacen ciertos requerimientos:

		la curvatura cumple con los requerimientos		
		sí	***no***	
el acabado superficial cumple con los requerimientos	***sí***	345	5	*350*
	no	12	8	*20*
		357	*13*	***370***

- *Los eventos que intervienen en el problema son:*
  - o *C: "La curvatura cumple con los requerimientos"*
  - o *A: "El acabado superficial cumple con los requerimientos"*

- *Las probabilidades asignadas a los eventos son:*
  - *P(C) = 357/370*
  - *P(A) = 350/370*

a) Si se toma una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial?

$\boldsymbol{P(A)} = \#A / \#\Omega = 350/370 = \boldsymbol{0{,}9459} \rightarrow \boldsymbol{94{,}59\%}$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requisitos de acabado superficial es de 0,9459.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requisitos de acabado o con los de curvatura?

$$\boldsymbol{P(A \cup C)} = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{350}{370} + \frac{357}{370} - \frac{345}{370} = \frac{362}{370} = \boldsymbol{0{,}9784} \rightarrow \boldsymbol{97{,}84\%}$$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requisitos de acabado superficial o con los de curvatura es de 0,9784.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requisitos de acabado o que no cumpla con los de curvatura?

$$\boldsymbol{P(A \cup C')} = P(A) + P(C') - P(A \cap C') = \frac{350}{370} + \frac{13}{370} - \frac{5}{370} = \frac{358}{370} = \boldsymbol{0{,}9676} \rightarrow \boldsymbol{96{,}76\%}$$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requisitos de acabado superficial o no cumpla con los de curvatura es de 0,9676.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requisitos de acabado y curvatura?

$$\boldsymbol{P(A \cap C)} = \frac{\#(A \cap C)}{\#\Omega} = \frac{345}{370} = \boldsymbol{0{,}9324} \rightarrow \boldsymbol{93{,}24\%}$$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requisitos de acabado superficial y con los de curvatura es de 0,9324.

6. Las flechas del ejercicio 5 se clasifican, además, en términos de la máquina herramienta utilizada en su fabricación, de la siguiente manera:

MÁQUINA HERRAMIENTA 1

		la curvatura cumple con los requerimientos: **sí**	**no**	
el acabado superficial cumple con los requerimientos	**sí**	200	1	201
	no	4	2	6
		204	3	**207**

MÁQUINA HERRAMIENTA 2

la curvatura cumple con los requerimientos

		sí	no	
el acabado superficial cumple con los requerimientos	**sí**	145	4	149
	no	8	6	14
		153	10	**163**

- *Aparecen, ahora, nuevos eventos:*
  - *M_1: "La flecha fue fabricada por la máquina 1"*
  - *M_2: "La flecha fue fabricada por la máquina 2"*
- *Las probabilidades asignadas a los eventos M_1 y M_2 son:*
  - *$P(M_1) = 207/370$*
  - *$P(M_2) = 163/370$*
- *Además de los eventos ya definidos:*
  - *C: "La curvatura cumple con los requerimientos"*
  - *A: "El acabado superficial cumple con los requerimientos"*
- *Y las probabilidades asignadas a los eventos son:*
  - *$P(C) = 357/370$*
  - *$P(A) = 350/370$*

a) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial o con los de curvatura, o provenga de la máquina herramienta 1?

$$\mathbf{P((A \cup C) \cup M_1)} = P(A \cup C) + P(M_1) - P((A \cup C) \cap M_1) =$$

$$= \frac{362}{370} + \frac{207}{370} - \frac{205}{370} =$$

$$= \frac{364}{370} = \mathbf{0{,}9838} \rightarrow \mathbf{98{,}38\%}$$

También lo podemos resolver de la siguiente manera:

$$\mathbf{P(A \cup C \cup M_1)} = P(A)+P(C)+P(M_1)-P(A\cap C)-P(A\cap M_1)-P(C\cap M_1)+P(A\cap C\cap M_1)=$$

$$= \frac{350}{370} + \frac{357}{370} + \frac{207}{370} - \frac{345}{370} - \frac{201}{370} - \frac{204}{370} + \frac{200}{370} =$$

$$= \frac{364}{370} = \mathbf{0{,}9838} \rightarrow \mathbf{98{,}38\%}$$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requerimientos de acabado superficial o con los de curvatura, o provenga de la máquina herramienta 1 es de 0,9838.

b) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial o con los de curvatura, o provenga de la máquina herramienta 2?

$$\mathbf{P((A \cup C) \cup M_2)} = P(A \cup C) + P(M_2) - P((A \cup C) \cap M_2) =$$

$$= \frac{362}{370} + \frac{163}{370} - \frac{157}{370} =$$

$$= \frac{368}{370} = \mathbf{0{,}9946} \rightarrow \mathbf{99{,}46\%}$$

También lo podemos resolver de la siguiente manera:

$$P(A \cup C \cup M_2) = P(A)+P(C)+P(M_2)-P(A \cap C)-P(A \cap M_2)-P(C \cap M_2)+P(A \cap C \cap M_2)=$$
$$= \frac{350}{370}+\frac{357}{370}+\frac{163}{370}-\frac{345}{370}-\frac{149}{370}-\frac{153}{370}+\frac{145}{370} =$$
$$= \frac{368}{370} = \mathbf{0{,}9946} \rightarrow \mathbf{99{,}46\%}$$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requerimientos de acabado superficial o con los de curvatura, o provenga de la máquina herramienta 2 es de 0,9946.

c) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial y curvatura, o provenga de la máquina herramienta 2?

$$P((A \cap C) \cup M_2) = P(A \cap C) + P(M_2) - P((A \cap C) \cap M_2) =$$
$$= \frac{345}{370} + \frac{163}{370} - \frac{145}{370} =$$
$$= \frac{363}{370} = \mathbf{0{,}9811} \rightarrow \mathbf{98{,}11\%}$$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requerimientos de acabado superficial y con los de curvatura, o provenga de la máquina herramienta 2 es de 0,9811.

d) Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial o que provenga de la máquina herramienta 1?

$$P(A \cup M_1) = P(A) + P(M_1) - P(A \cap M_1) =$$
$$= \frac{350}{370} + \frac{207}{370} - \frac{201}{370} =$$
$$= \frac{356}{370} = \mathbf{0{,}9622} \rightarrow \mathbf{96{,}22\%}$$

La probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requerimientos de acabado superficial o provenga de la máquina herramienta 1 es de 0,9622.

7. Revisión de conceptos teóricos:

a) Defina el concepto de probabilidad condicional.

Probabilidad condicional $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *siendo* $P(B) \neq 0$

b) Enuncie la regla general de la multiplicación.

Regla de la multiplicación*: Si A y B son eventos de* Ω*, entonces*

$P(A \cap B) = P(A / B) \,.\, P(B)$ **si** $P(B) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B / A) \,.\, P(A)$ **si** $P(A) \neq 0$

c) Indique cuándo se dice que dos eventos son estocásticamente independientes.

Dos sucesos A y B son ***estocásticamente independientes*** *si*

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

Probabilidad

es decir, cuando $\begin{cases} P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{cases}$

d) Enuncie el teorema de las probabilidades totales.

*El **teorema de las probabilidades totales** se utiliza para calcular la probabilidad de un suceso a partir de una colección de sucesos mutuamente excluyentes cuya unión es el suceso seguro.*

Sea $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ *en donde cada* H_i *es un suceso y* $H_i \cap H_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$.

Dado un suceso A, tal que $A \cap H_j \neq \varnothing$, *se verifica:*

$$P(A) = P(A/H_1).P(H_1) + P(A/H_2).P(H_2) + \ldots + P(A/H_k).P(H_k)$$

e) Enuncie el teorema de Bayes.

*El **teorema de Bayes** permite calcular la probabilidad de que se haya dado alguna de las condiciones iniciales, causas o factores que pueden influir en la probabilidad de un suceso A.*

Sea $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ *en donde* H_i *es un suceso y* $H_i \cap H_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$. *Si se sabe que se ha presentado un suceso A, tal que* $A \cap H_j \neq \varnothing$, *la probabilidad de que proceda del suceso* H_i *es:*

$$P(H_i / A) = \frac{P(A/H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} \qquad \text{siendo } P(A) \neq 0$$

8. Se extraen cuatro cartas sucesivamente, de un mazo francés (de 52 cartas). ¿Cuál es la probabilidad de que en cada una de las cuatro extracciones salga un as?

- *Los eventos que intervienen en el problema son:*
  - A_i: *"Que salga un as en la extracción número i"*
- *Las probabilidades asignadas a los eventos dependerán de las condiciones en que se hagan las extracciones. Por ejemplo, si el mazo está completo, la probabilidad de extraer un as en primera instancia es de 4/52.*

a) Reponiendo las cartas.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \,.\, P(A_2) \,.\, P(A_3) \,.\, P(A_4) = \\ &= 4/52 \,.\, 4/52 \,.\, 4/52 \,.\, 4/52 = \\ &= \mathbf{0{,}0000350 12} \rightarrow \mathbf{0{,}0035\%} \end{aligned}$$

La probabilidad de que en cada una de las cuatro extracciones, de un mazo francés, salgan cuatro ases, al ir reponiendo las cartas (o sea, al trabajar con eventos independientes) es de 0,000035012.

b) Sin reponer las cartas.

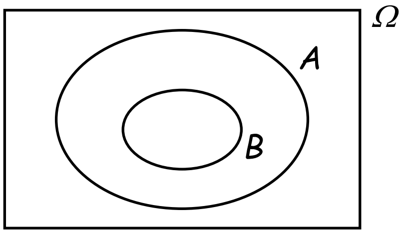
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2).P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= 4/52 \,.\, 3/51 \,.\, 2/50 \,.\, 1/49 = \\ &= \mathbf{0{,}000003693} \rightarrow \mathbf{0{,}000369\%} \end{aligned}$$

Probabilidad

La probabilidad de que en cada una de las cuatro extracciones, de un mazo francés, salgan cuatro ases, sin ir reponiendo las cartas (o sea, al trabajar con eventos dependientes) es de 0,000003693.

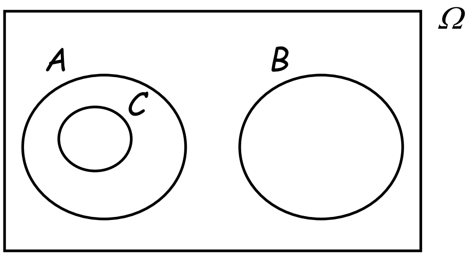
9. Si P(A/B) = 1, ¿puede concluirse que A = B? Dibuje un diagrama de Venn para explicar su respuesta.

Si $P(A / B) = P(A \cap B) / P(B) = 1$, entonces, $P(A \cap B) = P(B)$ de lo que se deduce que $B \subset A$, siendo un caso particular de éste la igualdad (A = B). Por lo tanto no se puede asegurar que A = B.



Si $B \subset A$, al haber ocurrido B (condicionante), "seguro" que ocurre A, luego, P(A/B)=1.

10. Suponga que A y B son eventos mutuamente excluyentes. Construya diagramas de Venn que representen los eventos A, B y C, tales que P(A/C)=1 y P(B/C)=0.



11. La irregularidad del corte de productos de papel aumenta a medida que las hojas de la cuchilla se desgastan. Sólo el 1% de los productos cortados con cuchillas nuevas tienen cortes irregulares, el 3% de los cortados con cuchillas de filo promedio exhiben irregularidades y el 5% de los cortados con cuchillas desgastadas presentan irregularidades. Si el 25% de las cuchillas utilizadas en el proceso de corte son nuevas, el 60% tiene un filo promedio y el 15% de las cuchillas están desgastadas, ¿cuál es la proporción de productos que tendrán cortes irregulares?

- *Los eventos que intervienen en el problema son:*
  - *CN: "El producto fue cortado por una cuchilla nueva"*
  - *CP: "El producto fue cortado por una cuchilla con filo promedio"*
  - *CD: "El producto fue cortado por una cuchilla desgastada"*
  - *I: "El producto presenta cortes irregulares"*
- *Las probabilidades asignadas a los eventos son:*
  - $P(CN) = 0{,}25$
  - $P(CP) = 0{,}60$
  - $P(CD) = 0{,}15$
  - $P(I / CN) = 0{,}01$

- $P(I / CP) = 0{,}03$
- $P(I / CD) = 0{,}05$

$$P(I) = P(I / CN).\ P(CN) + P(I / CP).P(CP) + P(I / CD)\ .\ P(CD) =$$
$$= 0{,}01 \ .\ 0{,}25 + 0{,}03 \ .\ 0{,}60 + 0{,}05 \ .\ 0{,}15 =$$
$$= \mathbf{0{,}028} \rightarrow \mathbf{2{,}80\%}$$

La proporción de cortes irregulares es de 2,80%.

12. En un proceso de manufactura, el 10% de las partes contienen fallas visibles en la superficie, mientras que el 25% con fallas en la superficie son funcionalmente defectuosas. Sin embargo, sólo el 5% de las partes sin fallas en la superficie son partes funcionalmente defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una parte que sea funcionalmente defectuosa?

- *Los eventos que intervienen en el problema son:*
  - *V: "La parte seleccionada contiene fallas visibles en la superficie"*
  - *F: "La parte seleccionada es funcionalmente defectuosa"*
- *Las probabilidades asignadas a los eventos son:*
  - $P(V) = 0{,}10$
  - $P(F / V)= 0{,}25$
  - $P(F / V') = 0{,}05$

$$P(F) = P(F / V)\ .\ P(V) + P(F / V')\ .\ P(V') =$$
$$= 0{,}25 \ .\ 0{,}10 + 0{,}05 \ .\ 0{,}90 = \mathbf{0{,}07} \rightarrow \mathbf{7\%}$$

La probabilidad de seleccionar una parte que sea funcionalmente defectuosa es de 0,07.

13. Los clientes se encargan de evaluar los diseños preliminares de varios productos. Se sabe que el 95% de los productos con un gran éxito en el mercado reciben buenas evaluaciones, el 60% de los productos con éxito moderado reciben buenas evaluaciones y el 10% de los productos de escaso éxito reciben buenas evaluaciones. Se sabe, además, que el 40% de los productos ha tenido un gran éxito, el 35% un éxito moderado y el 25% un escaso éxito.

- *Los eventos que intervienen en el problema son:*
  - *G: "El producto tuvo gran éxito en el mercado"*
  - *M: "El producto tuvo moderado éxito en el mercado"*
  - *E: "El producto tuvo escaso éxito en el mercado"*
  - *B: "El producto obtuvo buenas calificaciones en la etapa preliminar"*
- *Las probabilidades asignadas a los eventos son:*
  - $P(G) = 0{,}40$
  - $P(M) = 0{,}35$
  - $P(E) = 0{,}25$
  - $P(B/G)= 0{,}95$
  - $P(B/M) = 0{,}60$
  - $P(B/E) = 0{,}10$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una buena evaluación?

$$P(B) = P(B/G)\,.\,P(G) + P(B/M)\,.\,P(M) + P(B/E)\,.\,P(E) =$$
$$= 0{,}95\ .\ 0{,}40 + 0{,}60\ .\ 0{,}35 + 0{,}10\ .\ 0{,}25 =$$
$$= \mathbf{0{,}615} \rightarrow \mathbf{61{,}50\%}$$

La probabilidad de que un producto tenga buena evaluación es de 0,615.

b) Si un nuevo diseño obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

$$P(G\ /\ B) = \frac{P(B/G).P(G)}{P(B)} = \frac{0{,}95\ .0{,}40}{0{,}615} = \mathbf{0{,}6179} \rightarrow \mathbf{61{,}79\%}$$

Si el diseño obtiene una buena evaluación, la probabilidad de que se convierta en un gran éxito es de 0,6179.

c) Si un producto no obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

$$P(G\ /\ B') = \frac{P(B'\ /G).P(G)}{P(B'\ )} = \frac{0{,}05\ .0{,}40}{0{,}385} = \mathbf{0{,}0519} \rightarrow \mathbf{5{,}19\%}$$

Si el diseño obtiene una buena evaluación, la probabilidad de que no se convierta en un gran éxito es de 0,0519.

14. El programa para detectar fraudes en las tarjetas telefónicas utilizadas por los consumidores, registra todos los días el número de áreas metropolitanas donde se originan todas las llamadas. Se tiene que el 1% de los usuarios legítimos hacen al día llamadas que se originan en dos o más áreas metropolitanas. Sin embargo, el 30% de los usuarios fraudulentos hacen al día llamadas desde dos o más áreas metropolitanas. La proporción de usuarios fraudulentos es 0,01%. Si un mismo usuario en un día hace llamadas desde dos o más áreas metropolitanas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un usuario fraudulento?

- *Los eventos que intervienen en el problema son:*
  - *D: "El usuario hace, en un día, llamadas desde dos o más áreas metropolitanas"*
  - *L: "El usuario es legítimo"*
  - *F: "El usuario es fraudulento"*
- *Las probabilidades asignadas a los eventos son:*
  - $P(L) = 0{,}9999$
  - $P(F) = 0{,}0001$
  - $P(D/L)= 0{,}01$
  - $P(D/F\ ) = 0{,}30$

$$P(F/D) = \frac{P(D/F).P(F)}{P(D)} = \frac{0{,}30\ .0{,}0001}{0{,}010029} = \mathbf{0{,}002991} \rightarrow \mathbf{0{,}30\%}$$

$P(D) = P(D/F) \cdot P(F) + P(D/L) \cdot P(L) =$

$= 0{,}30 \cdot 0{,}0001 + 0{,}01 \cdot 0{,}9999 = \mathbf{0{,}010029}$

Si un usuario en un día hace llamadas desde dos o más áreas metropolitanas la probabilidad de que sea un usuario fraudulento es de 0,0030, o sea, representa un 0,30%.

Probabilidad