

## Capitolo 1

# Ordine e caos nei sistemi dinamici.

§1. Introduzione. Poincaré e la rivoluzione degli anni '60: Fermi, Pasta e Ulam (FPU), Lorenz, Hénon. *In principio* era Poincaré. Si può dire senz'altro che la teoria dei sistemi dinamici nel senso moderno del termine, che è il tema principale discusso in queste lezioni, in effetti era stata fondata e sviluppata nei suoi elementi centrali già da Poincaré alla fine dell'ottocento (Poincaré morì nel 1912, anno in cui enunciò il suo famoso *ultimo teorema* di cui parleremo più sotto).<sup>1</sup> In particolare egli comprese il meccanismo che è alla base stessa del prodursi di moti caotici, e che costituisce l'argomento centrale che cercheremo di illustrare in questo capitolo: si tratta dell'esistenza dei cosiddetti **punti omoclíni** relativi alla **varietà stabile** e alla **varietà instabile** di un **punto fisso iperbolico** di una trasformazione (ingl. *mapping*) di uno spazio in sé, che egli descrisse<sup>2</sup> con le seguenti parole:

*“Si cerchi di rappresentare la figura formata da queste due curve ... Si sarà colpiti dalla complessità di questa figura, che non cerco neppure di tracciare. Niente è più adatto a darci un'idea della complessità del problema dei tre corpi, e in generale di tutti i problemi di dinamica in cui non si hanno integrali uniformi e le serie di Bohlin sono divergenti”.*

Le curve cui fa riferimento Poincaré sono la varietà stabile e la varietà instabile sopra menzionate, che saranno ampiamente discusse in questo capitolo, e che potremo ottenere concretamente mediante l'uso del calcolatore. In un modello particolare ma alquanto significativo su cui ci concentreremo in questo capitolo (il cosiddetto **standard map**), tali curve sono riportate nella Fig. 1.1. Per quanto riguarda invece il cenno alle serie di Bohlin, Poincaré sta facendo riferimento al

---

<sup>1</sup>H. Poincaré, ..., Rendiconti del circolo matematico di Palermo (1912).

<sup>2</sup>H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, Tomi I, II, III, Gauthier-Villars (Parigi, 1882, 1893, 1899), ristampato da A. Blanchard (Parigi, 1987). Si veda il Vol. III (1890), cap. 33, pag 389.

fatto che egli sta discutendo un sistema che è una perturbazione di un **sistema integrabile**. I sistemi integrabili della meccanica, che pure verranno discussi più avanti, sono quelli in cui esistono tante costanti del moto quanti sono i gradi di libertà, e che quindi sono il prototipo di sistemi che presentano **moti ordinati** (il senso di questa frase potrà essere compreso ancora nell'esempio dello *standard map*). Poincaré mette dunque in luce il fatto che i sistemi integrabili, in cui si hanno solo moti ordinati, sono eccezionali, e che in generale invece, quando li si perturba, si ha una **coesistenza di moti ordinati e moti caotici**, dove il meccanismo per la caoticità è proprio l'esistenza dei punti omoclini.

**La curiosa storia del punto omoclinico.** Questa faccenda del punto omoclinico svolse un ruolo fondamentale nella vita di Poincaré. Si tratta del fatto che Poincaré era risultato vincitore di un prestigioso premio bandito per il 60-esimo compleanno del Re di Svezia Oscar II, per un lavoro matematico riguardante le soluzioni del problema planetario (moto di  $N$  corpi con interazione mutua gravitazionale)<sup>3</sup>, e la sua memoria era appena stata stampata quando, pare su indicazione di Weierstrass, egli si rese conto di avere commesso un errore, avendo ritenuta vera in generale una proprietà che invece vale solo in casi eccezionali. Per questo motivo egli fece ritirare e mandare al macero, a sue spese, tutti i volumi pubblicati, il che gli costò più del premio ricevuto. La comprensione di come quell'errore dovesse essere corretto costituì poi uno dei suoi principali temi di ricerca lungo tutta la sua vita. I primi risultati vennero illustrati nella sua famosa memoria sulla dinamica dei tre corpi<sup>4</sup> e vennero poi integrati nella sua monumentale opera in tre volumi *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, che parzialmente discutiamo in queste note.

Vale la pena di provare ad anticipare in due parole di cosa si tratta. Tutto ciò sarà comunque sviluppato ampiamente nelle prossime pagine. Il lettore potrebbe essere familiare con il problema del pendolo, e in particolare con il fatto che in tale modello esiste, oltre al punto di equilibrio stabile (il punto più basso del pendolo), anche un punto di equilibrio instabile (il punto più alto). Se si riguarda al problema nello spazio delle fasi (le cui coordinate sono angolo e velocità angolare), si trova che in corrispondenza del punto di equilibrio instabile esiste la cosiddetta **separatrice** (Fig. 1.7), che è associata a una ben determinata energia. Essa separa appunto i moti di oscillazione attorno al punto di equilibrio stabile (detti **moti di librazione**)<sup>5</sup>, aventi energia inferiore a quella della separatrice, dai moti a energia superiore, che sono **moti di rotazione** (il punto continua a girare, anziché oscillare avanti e indietro). Ebbene, Poincaré studiava un caso analogo a quello del pendolo, soggetto però a una lieve perturbazione, e credette dapprima di potere dimostrare che il sistema perturbato avesse un comportamento qualitativamente simile a quello imperturbato, cioè che ogni orbita del sistema perturbato, valutata lungo tutti i tempi, fosse vicina a un'orbita imperturbata,

<sup>3</sup>Si veda J. Barrow-Green, *Poincaré and the three-body problem*, American Mathematical Society (1997).

<sup>4</sup>H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps*, Acta mathematica (1890).

<sup>5</sup>Dal latino *libra*, bilancia.

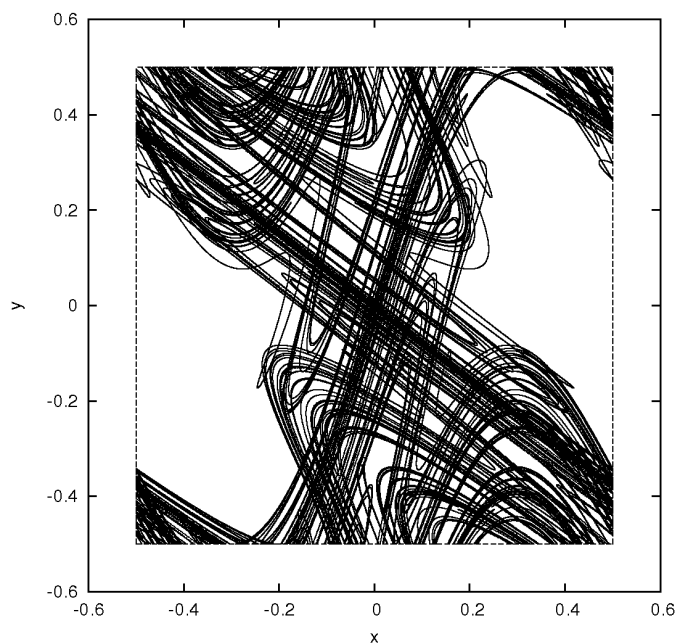


Figura 1.1: Le varietà stabile e quella instabile per la standard map, con  $\epsilon = 0.4$ .

o meglio, che ogni orbita del sistema perturbato fosse qualitativamente simile a un'orbita del sistema imperturbato. In particolare, egli credette che esistesse ancora la separatrice. Invece dovette rendersi conto che la separatrice “si spezza” (**splitting della separatrice**, si veda la Fig. 1.8, ma soprattutto la successione delle figure 1.16–1.21, relative al caso delcosiddetto *standard map*), e che allora “molte” orbite del sistema perturbato, comunque piccola fosse la perturbazione, avevano in generale un comportamento qualitativamente del tutto diverso da qualunque orbita del sistema imperturbato, essendo in qualche modo imprevedibili. Poincaré aveva scoperto che **una piccola perturbazione di un sistema ordinato (o integrabile) produce in generale orbite caotiche** (si veda la Fig. 1.8).

**Intermezzo: analogia con il problema delle soluzioni delle equazioni algebriche.** Può essere interessante a questo proposito ricordare la analogia che Poincaré ebbe sempre in mente, fin dalla sua tesi di dottorato,<sup>6</sup> fra la complessità delle orbite dei sistemi dinamici, e la complessità delle soluzioni di una equazione algebrica. Infatti, mentre le soluzioni delle equazioni algebriche fino al quarto grado sono esprimibili *in maniera semplice*, cioè mediante radicali (è questa la prima scoperta scientifica dell'epoca moderna, dovuta alla grande scuola degli algebristi italiani di Scipione del Ferro, Tartaglia, Carda-

<sup>6</sup>H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Journal de Mathématiques, 8, 251 (1882), pag. 3. Ecco le parole di Poincaré. *È dunque necessario studiare le equazioni definite dalle equazioni differenziali in se stesse, e senza cercare di ricondurle a delle funzioni più semplici, così come si è fatto per le funzioni algebriche, che si era cercato di ricondurre a dei radicali e che si studiano ora direttamente ...*

no e Ludovico Ferrari, bella prima metà del 1500),<sup>7</sup> fu poi dimostrato (sostanzialmente da Evaristo Galois nel 1831) che per le equazioni algebriche di grado superiore al quarto le soluzioni, pur esistendo (è questo il *teorema fondamentale dell'algebra*), in un certo senso non sono esprimibili in generale *in maniera semplice*.

Così, per un'equazione differenziale ordinaria (come quelle che si presentano nei problemi meccanici) si ha in generale esistenza e unicità della soluzione del *problema di Cauchy* (che consiste nel determinare la soluzione dell'equazione differenziale avendo assegnato una condizione iniziale), ma allora ci si pone il problema di comprendere se le singole soluzioni si possano esprimere *in maniera semplice*, cioè se in qualche modo abbiano carattere ordinato. Nei casi familiari della meccanica, quelli cosiddetti integrabili, le soluzioni vengono espresse mediante integrali definiti e vengono considerate "semplici"; corrispondentemente, come vedremo, i moti hanno globalmente un aspetto "ordinato". Poincaré capisce invece che i sistemi integrabili sono eccezionali, e che in generale un sistema integrabile perturbato dà luogo a movimenti che sono "complicati", il che corrisponde al fatto che le serie perturbative per le costanti del moto in generale divergono. Questo fatto infine si manifesta nell'esistenza di punti omoclini, che a loro volta inducono moti caotici.

Dunque il fatto che i sistemi dinamici che presentano moti ordinati sono eccezionali, e che in generale si ha *coesistenza di moti ordinati e di moti caotici*, questi ultimi in qualche moto imprevedibili nonostante la natura completamente deterministica delle equazioni differenziali, tutto questo abbiamo detto che fu compreso da Poincaré alla fine dell'ottocento. Ma quello che egli comprese rimase in qualche modo confinato in un ghetto di pochi grandi matematici, e non fu sostanzialmente capito dalla comunità scientifica, (compresa quella dei matematici: per convincersene, basta dare un'occhiata al capitolo sulle equazioni differenziali di qualunque testo universitario di analisi matematica scritto prima del 1990). La diffusa comprensione delle idee di Poincaré si produsse in effetti come **una rivoluzione, che avvenne a partire dagli anni 1963-1964**, quando la comunità scientifica vi fu in qualche modo obbligata, forzata. A questa rivoluzione un contributo fondamentale fu fornito dal fatto che si stava giusto allora diffondendo **l'uso dei calcolatori**. In tal modo alcuni studiosi, spinti da precise motivazioni fisiche, cominciarono ad integrare numericamente le equazioni di moto per sistemi alquanto semplici, e osservando visualmente i movimenti calcolati numericamente (li vedremo subito sotto), si trovarono forzatamente davanti a delle figure che apparivano stranissime. Fu così che a qualcuno, particolarmente colto, venne allora in mente che si trattava proprio delle figure che Poincaré aveva settanta anni prima descritto a parole. Da allora la grande *scienza ordinaria* si impossessò di questo fatto, che in qualche decennio divenne di conoscenza

<sup>7</sup>Si veda ad esempio A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Lavrentev, *Le matematiche*, Bollati Boringhieri (Torino, 1974), Capitolo 4, pag. 333 e seguenti. Il commento degli autori è il seguente: "Il successo di matematici italiani produsse un'enorme impressione. Era la prima volta che la scienza dei tempi nuovi superava le conquiste dell'antichità.... Ora finalmente si risolvevano questioni ove gli antichi non erano riusciti ... Dopo di allora non vi fu matematico di vaglia che non tentasse di proseguire i successi degli italiani..." .

comune. È questo in effetti un bellissimo esempio di fenomeno sociologico nella scienza, in cui si distingue tra la comprensione di certi fatti da parte di qualche studioso e la loro accettazione dalla “comunità scientifica”. Non sempre le due cose vanno in parallelo. Nel nostro caso, la linea di ricerca iniziata da Poincaré venne proseguita, nello stesso spirito, ad esempio da Birkhoff (il primo matematico americano), che ritornò sull'ultimo teorema di Poincaré<sup>8</sup>, scrisse un noto libro sui sistemi dinamici,<sup>9</sup> e dimostrò, dopo von Neumann, una versione del teorema ergodico.<sup>10</sup> Un prolungamento della scuola americana si ebbe con dei lavori di Smale attorno al 1964, in cui fu introdotto il celebre modello del *ferro di cavallo*.<sup>11</sup> Ma le idee di Poincaré erano state recepite particolarmente dalla scuola matematica russa. Si pensi alla nozione di *stabilità strutturale*, cui faremo cenno in seguito, ma soprattutto al grandissimo Kolmogorov, di cui è rimasto celebre il contributo alla conferenza internazionale dei matematici del 1954 ad Amsterdam, nel quale tracciò le linee generali della teoria dei sistemi dinamici, proprio nello spirito di Poincaré. Il più celebre contributo di Kolmogorov fu però il suo teorema (sempre del 1954) sull'esistenza dei tori invarianti, il cui significato verrà illustrato qui sotto nell'esempio dello standard map, e che colmava una lacuna lasciata aperta da Poincaré nei suoi *Méthodes Nouvelles*. In effetti anche il fenomeno dell'esistenza di tori invarianti messo in luce da Kolmogorov (che a prima vista può apparire altrettanto incredibile come l'esistenza del punto omoclino di Poincaré) non venne immediatamente compreso, neppure dai matematici, alcuni dei quali addirittura dubitarono fortemente che il teorema di Kolmogorov fosse corretto.<sup>12</sup> Solo sette anni dopo (anni 1961 – 1962) esso fu infine accettato, dopo la dimostrazione datane dal matematico tedesco Moser e dall'allievo di Kolmogorov, Arnol'd.<sup>13</sup> A questo punto la comunità matematica era pronta. E quando anche i fisici (o gli astronomi, che è quasi la stessa cosa), mediante l'uso del cal-

<sup>8</sup>George D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*. Trans. Amer. Math. Soc. **14**, 14–22 (1913); *Démonstration du dernier théorème de géométrie de Poincaré* Bull. Soc. Math. France **42**, 1–12 (1914); *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, Acta Math. **47**, 297–311 (1926).

<sup>9</sup>G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, With an addendum by Jurgen Moser, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. IX American Mathematical Society (Providence, R.I., 1966).

<sup>10</sup>G.D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proceedings USA Academy **17**, 656–660. (1931). Si veda anche G.D. Birkhoff, *What is the ergodic theorem?*, Amer. Math. Monthly **49**, 222–226 (1942); *The ergodic theorems and their importance in statistical mechanics* (in Spagnolo) Revista Ci., Lima **44**, 251 (1942); e l'articolo *George David Birkhoff and John von Neumann: a question of priority and the ergodic theorems, 1931–1932*, Historia Math. **29** 138–156 (2002).

<sup>11</sup>S. Smale, *Differentiable dynamical systems. I: Diffeomorphisms; II: Flows; III: More on flows; IV: Other Lie groups* Bull. Am. Math. Soc. **73**, 747–792, 795–804, 804–808 Appendix to I: Anosov diffeomorphisms by John Mather, 792–795 (1967); *What is global analysis?* Am. Math. Mon. **76**, 4–9 (1969); *Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser. **17**, 97–116 (1963).

<sup>12</sup>Si tratta in particolare di J. Moser, come egli stesso ebbe modo di riconoscere, con candida franchezza, in ripetute conversazioni con uno dei presenti autori.

<sup>13</sup>Una dimostrazione accessibile del teorema KAM, sulla linea della dimostrazione originale di Kolmogorov (che era stata a lungo trascurata), fu data da G. Benettin. L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn, Nuovo Cimento ....

colatore si trovarono di fronte a delle figure che a gran forza gridavano di volere essere interpretate, tutta la comunità scientifica delle scienze matematizzate fu pronta, e la coesistenza di moti ordinati e moti caotici, guidata dall'esistenza dei tori invarianti KAM (Kolmogorov–Arnol'd–Moser) e dei punti omoclini di Poincaré, venne infine accettata come fatto comune, e divulgata poi anche nell'ambito della filosofia della scienza.

Diciamo ora due parole su come avvenne la rivoluzione, mediante l'impatto prodotto dalle figure fornite dalle soluzioni numeriche di semplicissimi modelli: ci riferiamo specialmente al lavoro di Lorenz del 1963 e a quello di Hénon e Heiles del 1964, ma anche al lavoro di Fermi, Pasta ed Ulam (FPU) del 1955 (sostanzialmente lo stesso anno del teorema di Kolmogorov).

**a. Fermi–Pasta–Ulam e Izrailev–Chirikov, 1955–1966.** Per quanto concerne il lavoro di FPU, esso riguarda i fondamenti dinamici della meccanica statistica classica (problema dell'equipartizione dell'energia), e vi ritorneremo in un apposito capitolo. Qui basti ricordare che FPU nel 1955 compirono una brutta integrazione numerica<sup>14</sup> per un sistema di 64 equazioni di Newton modellizzanti una discretizzazione della corda vibrante, oppure anche un cristallo monodimensionale, in cui 64 atomi interagiscono con gli atomi adiacenti<sup>15</sup> mediante molle nonlineari. Come ricorda Ulam nella prefazione alla ristampa dell'articolo nelle opere di Fermi<sup>16</sup> *“The results of the calculations ... were interesting and quite surprising to Fermi. He expressed to me the opinion that they really constituted a little discovery in providing intimations that the prevalent beliefs in the universality of mixing and thermalization in non-linear systems may not be always justified”*. In altri termini, la brutta integrazione numerica mise il mondo di fronte alla constatazione che la dinamica produceva qualcosa di strano rispetto a quello che tutti si erano immaginati. Nel caso di FPU, la stranezza consisteva nel fatto che, a giudicare dai risultati numerici, il sistema in studio si comportava in maniera ordinatissima, mentre tutti si aspettavano che dovesse comportarsi in maniera caotica (perché in meccanica statistica – si pensi alla teoria cinetica dei gas – si pensa sempre di avere a che fare con moti disordinati). Nel capitolo sul problema di FPU ricorderemo come Izrailev e Chirikov mostrarono in seguito (nel 1966) che in effetti anche nel modello FPU si hanno moti completamente disordinati se l'energia del sistema è abbastanza grande. Si mostrerà anche come un fondamentale contributo (interpretazione in termini di metastabilità) venne dato in un lavoro del 1982 dalla scuola romana di Parisi, e come la sua possibile rilevanza per i fondamenti della fisica sia stata messa in luce dalla scuola di Milano e Padova. Si mostrerà anche come, paradossalmente, la modalità del passaggio dal prevalere di moti ordinati al prevalere di moti caotici sia ancora tutt'altro che chiarita in maniera definitiva, ancor oggi, cinquanta anni dopo il lavoro originale

<sup>14</sup>È questo forse il primo caso in cui venne fatto un uso scientifico dei calcolatori, almeno nell'ambito della soluzione delle equazioni di Newton per sistemi fisicamente significativi.

<sup>15</sup>detti anche *primi vicini* o *nearest neighbors*.

<sup>16</sup>Si tenga presente che Fermi morì prima che l'articolo venisse scritto.

FPU. Si veda a questo proposito il numero speciale della rivista *Chaos* (Marzo 2005), completamente dedicato al cinquantenario del problema FPU.<sup>17</sup>

**b. Fojas-Prodi e Lorenz, 1958-1963.** Il secondo fronte fu quello che condusse al lavoro di Lorenz del 1963, e riguarda il problema dei moti turbolenti nei fluidi. Anche a questo problema riserveremo un intero capitolo, e ci limitiamo qui a qualche brevissimo cenno. Si considera tipicamente un fluido confinato tra due piastre orizzontali, mantenute a due diverse temperature, con la piastra più bassa a temperatura maggiore. Si ha quindi una situazione in cui la gravità “spinge” verso il basso, mentre il calore tende a diffondere verso l’alto. Si compiono osservazioni sul modo in cui si comporta sperimentalmente il fluido per diversi valori della differenza di temperatura. Per valori piccoli di tale differenza il fluido non si muove affatto, e si ha solo conduzione di calore. Al di sopra di una certa soglia esso invece compie moti macroscopici convettivi, che coinvolgono dei “rotoli” di fluido. Questi moti sono visivamente di tipo ordinato, in cui si osservano i rotoli ruotare attorno al proprio asse con velocità angolare costante. Ma se si supera un’altra soglia, i moti di questi rotoli diventano palesemente caotici, perché essi ruotano ora in un verso ora in un’altro, con cambiamenti di verso di rotazione che si producono in maniera apparentemente imprevedibile, come viene mostrato da bellissime esperienze di laboratorio.

Dal punto di vista della modellizzazione matematica, si deve descrivere il fluido mediante una opportuna equazione alle derivate parziali, congiunta con una equazione che tiene conto dell’evoluzione della temperatura. Già nei primi anni '60 si procedeva a una modellizzazione in cui le equazioni alle derivate parziali erano sostituite da un numero finito di equazioni alle derivate ordinarie. Si tratta del familiare procedimento che consiste nel descrivere una funzione periodica mediante i suoi coefficienti di Fourier (discreti, ma in numero infinito), e successivamente nel “troncare” lo sviluppo ritenendo solo un numero finito di coefficienti. Le prime indagini numeriche (Saltzman) avevano mostrato che, se si compiva un troncamento con un certo numero di componenti, dell’ordine della decina, la natura dissipativa delle equazioni faceva sì che dopo un tempo abbastanza breve ne sopravvivessero un numero alquanto piccolo, perché le altre si annullavano. Questo fatto era stato compreso in un fondamentale lavoro di Fojas e Prodi, sui Rendiconti di Padova del 1958, in cui era stato dimostrato che la dinamica, originariamente definita in uno spazio di dimensione infinita, si riduceva poi asintoticamente su un sottoinsieme di dimensione finita.<sup>18</sup> A questo punto (1963) intervenne Lorenz (che pare fosse un allievo di Birkhoff), il quale considerò un modello di addirittura soltanto 3 (tre) equazioni, che tuttavia sembrava catturare tutta la fisica del problema. Tra l’altro, in tal modo i movimenti erano particolarmente ben visibili, perché venivano visualizzati come traiettorie di un

<sup>17</sup>Si veda anche un volume sul problema FPU edito da Springer e curato da G. Gallavotti).

<sup>18</sup>È anche interessante ricordare come Prodi, che allora si trovava a Trieste, avesse tentato di avere informazioni ulteriori con integrazioni numeriche, condotte insieme ad un suo amico professore di liceo a Trieste, cui si era rivolto per un aiuto nel calcolo numerico, senza però riuscire ad avere risultati significativi come quelli che vennero in seguito ottenuti da Lorenz.

punto nell'ordinario spazio tridimensionale. Avvenne così che le figure di Lorenz mostrarono quelle traiettorie che tutto il mondo scientifico accolse come una rivelazione: si tratta dello **strano attrattore** di Lorenz. La natura matematica di questo strano attrattore venne poi ampiamente discussa. Particolarmente utile a tal fine fu l'osservazione, fatta da Hénon, che la struttura dello strano attrattore era pienamente descritta da una semplicissima trasformazione di un dominio bidimensionale in sé: si tratta del celebre **Hénon map**. A proposito delle figure di Lorenz non si può non restare ammirati dal fatto che esse si riferivano a una descrizione matematica di un sistema continuo (fluido e temperatura) semplificata al punto di coinvolgere solo tre equazioni ordinarie, mentre d'altra parte le stesse figure, identiche in maniera stupefacente, vengono osservate in esperienze fisiche compiute su un fluido reale, in laboratorio (da Marzio Giglio), nelle quali il moto del fluido viene visualizzato mediante la rifrazione di un raggio laser che attraversa il fluido.<sup>19</sup>

**c. Contopoulos ed Hénon, 1958–1964.** Il terzo fronte aveva a che fare con la meccanica celeste. In tale ambito, particolare attenzione era stata data allo studio dei moti delle stelle in una galassia, tipicamente in una galassia ellittica. In particolare, il problema più semplice che si considerava era quello del moto di una stella in un piano (il piano galattico) sotto l'azione del potenziale "medio" creato da tutte le altre, potenziale che veniva preliminarmente determinato in qualche modo che qui non ci interessa. In tal modo ci si riduceva al banalissimo problema meccanico del moto di un punto nel piano, soggetto ad un assegnato potenziale a simmetria cilindrica. I primi lavori numerici su questo problema vennero compiuti fin dal 1958 da G. Contopoulos, allora giovanissimo astronomo ateniese che si era recato per compiere tali studi a Stoccolma.<sup>20</sup> Contopoulos trovò che i calcoli numerici rivelavano soltanto moti assolutamente di tipo ordinato (come Fermi Pasta ed Ulam) mentre egli si attendeva, in base alle considerazioni statistiche cui abbiamo fatto cenno in connessione con il problema FPU,<sup>21</sup> di trovare moti caotici. Poco dopo, nel 1964, Hénon (insieme con Heiles, dottorando a Princeton) riprese a compiere integrazioni numeriche su modelli assolutamente dello stesso tipo di Contopoulos. Considerando valori diversi del parametro significativo (l'energia del sistema), essi trovarono che le traiettorie (visualizzate con il metodo della superficie di sezione di Poincaré che sarà illustrato più avanti in questo capitolo) passavano, al crescere dell'energia, dall'essere completamente ordinate (come aveva trovato Contopoulos) ad essere completamente caotiche, mentre per energie intermedie si aveva una coesistenza di moti ordinati e moti caotici. Si noti bene che poteva essere spontaneo ritenere che la differenza di comportamento fosse causata da un errore di calcolo, fosse cioè un artefatto e

<sup>19</sup>Queste esperienze permettono anche di misurare il numero di Feigenbaum, di cui si dirà più avanti.

<sup>20</sup>Questi lavori sono descritti nel libro: G. Contopoulos, *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, Springer (Berlino, 2002).

<sup>21</sup>Più precisamente, egli faceva riferimento a un noto teorema di Poincaré che è alla base di tali considerazioni, e sul quale ritorneremo più avanti.



non un fatto reale. È infatti del tutto non banale, non avendo a disposizione la comprensione matematica del fenomeno, capire che il fenomeno stesso sussista.

Le figure di Hénon e Heiles saranno mostrate nel presente capitolo, insieme con le figure, sostanzialmente equivalenti del punto di vista illustrativo, relative al modello più semplice del pendolo forzato. Ma il modello ancor più semplice in cui si presenta tale fenomeno di coesistenza di moti ordinati e moti caotici è quello di una trasformazione di un piano in sé (in effetti di un compatto bidimensionale in sé). Il modello più classico di questo tipo è quello del cosiddetto **standard map**. Questo sarà descritto nel prossimo paragrafo, dove mostreremo dapprima le figure rilevanti che illustrano il fenomeno della coesistenza dei moti ordinati e dei moti caotici. Il resto del capitolo sarà dedicato a fornire una introduzione, il più possibile di tipo discorsivo e descrittivo, degli elementi matematici rilevanti che permettono di comprendere la natura del fenomeno della coesistenza di moti ordinati e moti caotici. In effetti lo standard map, come il modello di Hénon–Heiles e quello del pendolo forzato, sono prototipi di sistemi di tipo hamiltoniano (o simplettico, o conservativo). Il modello di Lorenz e con il suo attrattore strano, è invece il prototipo dei sistemi dinamici di tipo dissipativo, e verrà brevemente discusso alla fine di questo capitolo.

**Nota: altri contributi alla teoria moderna dei sistemi dinamici.** Vi sono diversi altri problemi, oltre a quelli illustrati sopra, che hanno svolto un importante ruolo nello sviluppo della teoria dei sistemi dinamici. Ricordiamo tra gli altri

- **Il problema del raggiungimento dell'equilibrio statistico nella dinamica gassistica.** Vi furono dei lavori di Hénon e di Lynden Bell, che in qualche modo costituirono l'analogo del contributo di FPU nell'ambito della dinamica molecolare. Essi mostrarono che le stelle presentano quello che venne chiamato un **rilassamento violento** (*violent relaxation*), cioè un rapidissimo rilassamento ad uno stato di apparente equilibrio (o metaequilibrio), completamente diverso dallo stato di equilibrio che ci si attendeva. Il fatto curioso è che tale stato di metaequilibrio è qualitativamente simile a uno stato di equilibrio quantistico fermionico (distribuzione di Lynden Bell).
- **I frattali.** Tutti hanno sentito parlare dei frattali. Essi erano stati introdotti e spiegati negli anni '20 dal matematico francese P. Fatou, poi ripresi da Gaston Julia, ma poi dimenticati. Si ha qui una situazione abbastanza simile a quella di Poincaré per il punto omoclino. Negli anni '60, ancora soprattutto attraverso la visualizzazione mediante calcolatori, i frattali vennero poi resi popolari da B. Mandelbrot.<sup>22</sup>

**Nota bibliografica.** Un testo standard per gli aspetti matematici dei sistemi dinamici, cui faremo ampio riferimento nel seguito, è il libro di Arnol'd e Avez<sup>23</sup>, di

<sup>22</sup>Benoit S. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman and C. (New York, 1983).

<sup>23</sup>V.I. Arnol'd, A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars (Parigi, 1967).

cui esistono la originale edizione francese e una traduzione inglese. Tale libro fu forse il primo libro moderno sull'argomento, e costituisce la raccolta, compiuta da Avez, di lezioni tenute da Arnol'd a Parigi nel 1966; il libro è costituito per metà di appendici, che sono divenute celebri. Si veda anche V.I. Arnold (Ed.) *Dynamical systems, III*, Springer (Berlino, 1980).<sup>24</sup> Un altro testo fondamentale cui faremo riferimento è il libro di Arnol'd "Capitoli supplementari sulle equazioni differenziali ordinarie" di cui esiste, oltre alla originale versione russa, la traduzione francese e le successive inglese ed italiana<sup>25</sup>. Faremo riferimento soprattutto al capitolo terzo e ai successivi. È questo un libro bellissimo, scritto in maniera alquanto compatta, che copre uno spettro amplissimo di argomenti. Esso fa seguito ad un altro libro di Arnol'd, sulle equazioni differenziali ordinarie, che è scritto invece in maniera molto più piana, ma non tratta della maggior parte dei problemi che qui discutiamo. Una bella presentazione, molto compatta, dei problemi qui illustrati è stata data diversi anni fa da E. Zehnder (allievo di Moser) in un corso di lezioni tenute alla Scuola di Fisica Matematica di Ravello; le note manoscritte di quelle lezioni ci sono state alquanto utili.

Ringraziamo diversi studenti, tra cui Stefano Seveso, per averci messo a disposizione le figure da loro ottenute nel corso del laboratorio di calcolo relativo al presente corso, che furono riportate in una prima versione di queste note. In Appendice riportiamo anche i listati dei programmi corrispondenti, scritti in linguaggio C. Per gli studenti che seguono il corso suggeriamo fortemente di scrivervi i programmi da soli, consultando quelli riportati in Appendice solo in caso di estrema necessità.

**§2. Lo standard map: visualizzazione numerica.** Veniamo dunque allo standard map. Si tratta di una applicazione (o di una trasformazione, come si diceva un tempo) del toro bidimensionale (la cui definizione è ricordata qui sotto) in sé, dipendente da un parametro reale  $\epsilon$  (che, per fissare le idee, assumiamo positivo, anzi nell'intervallo  $0 \leq \epsilon < 1$ )<sup>26</sup>. Essa è definita da

$$\begin{aligned} x' &= x + y + \epsilon \sin(2\pi x) & (\text{mod } 1) \\ y' &= y + \epsilon \sin(2\pi x) & (\text{mod } 1) . \end{aligned} \tag{1}$$

Si noti che la prima equazione può anche essere scritta nella forma  $x' = x + y'$ , sicché, nell'eseguire dei calcoli numerici per iterare la trasformazione, può essere conveniente calcolare prima  $y'$ , e quindi scrivere la trasformazione nella forma

<sup>24</sup>È uno dei volumi della magnifica *Enciclopedia delle Scienze Matematiche*, pubblicata in Unione Sovietica sotto la direzione generale di R.V. Gamkrelidze, e tradotta in inglese presso Springer.

<sup>25</sup>Con il titolo più ovattato, nella versione inglese e in quella italiana, di *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*.

<sup>26</sup>La ragione della limitazione a valori di  $\epsilon$  non grandi si comprenderà quando studieremo i punti fissi della trasformazione. In effetti siamo interessati alla trasformazione come perturbazione della trasformazione con  $\epsilon = 0$ , e non ci importa quello che succede per grandi  $\epsilon$

$$\begin{aligned} y' &= y + \epsilon \sin(2\pi x) \pmod{1} \\ x' &= x + y' \pmod{1}, \end{aligned} \quad (2)$$

la quale ha il vantaggio di mostrare abbastanza esplicitamente che lo standard map è una trasformazione canonica.<sup>27</sup>

**Intermezzo: il Toro.** Ricordiamo che il toro monodimensionale (denotato con  $T^1$ ) è nient'altro che la retta reale in cui si identificano i punti che differiscono per un intero ( $\tilde{x}$  è equivalente ad  $x$  se  $\tilde{x} = x + m$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ : è questo il significato della notazione  $\pmod{1}$ ). Pertanto il toro  $T^1$  può essere rappresentato dall'intervallo  $0 \leq x \leq 1$  in cui gli estremi siano identificati (o *incollati*, come si usa dire in geometria). Analogamente il toro bidimensionale  $T^2$  è il piano reale in cui si identificano i punti le cui coordinate differiscono per interi ( $(\tilde{x}, \tilde{y})$  è equivalente a  $(x, y)$  se  $\tilde{x} = x + m$ ,  $\tilde{y} = y + n$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) e quindi può essere rappresentato dal quadrato unitario  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  nel piano, incollando i lati opposti. Analogamente per il toro  $T^n$ .

Tipicamente si ha a che fare con un toro quando le variabili in gioco sono angoli, perché le funzioni di interesse solitamente dipendono da tali variabili una per una in maniera periodica con periodo  $2\pi$ .<sup>28 29</sup> Vedremo che questa situazione si presenta nei sistemi meccanici hamiltoniani quando si possono introdurre le cosiddette variabili

<sup>27</sup>Come complemento di informazione, mostriamo che la trasformazione definita dallo standard map è canonica, nel senso consueto dei sistemi hamiltoniani. Un richiamo sulle nozioni relative ai sistemi hamiltoniani verrà fatto più avanti; qui ci limitiamo a ricordare come vengono costruite tradizionalmente le trasformazioni canoniche prossime all'identità. Volendo costruire una trasformazione da variabili  $(p, q)$  a variabili  $(P, Q)$  prossima all'identità, si introduce una funzione (funzione generatrice)  $F = F(P, q)$  con

$$\det \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial q} \neq 0,$$

e allora la trasformazione è definita (implicitamente) dalle relazioni

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P}.$$

La trasformazione identità  $P = p$ ,  $Q = q$  è evidentemente determinata dalla funzione generatrice  $F(P, q) = Pq$ , mentre una funzione  $F(P, q) = Pq + \epsilon(P, q)$  definirà una trasformazione prossima all'identità. Nel nostro caso si ha  $y \equiv p$ ,  $x \equiv q$ ,  $y' \equiv P$ ,  $x' \equiv Q$ , e per generare lo standard map basta prendere come funzione generatrice la funzione

$$F(y', x) = y'x + \frac{\epsilon}{2\pi} \cos(2\pi x) + \frac{(y')^2}{2}.$$

In particolare, è noto che le trasformazioni canoniche del piano in sé conservano l'area, e dunque sappiamo a priori – ma lo verificheremo direttamente qui sotto – che lo standard map conserva le aree.

<sup>28</sup>Si pensi al piano riferito a coordinate polari  $r, \varphi$ . Allora il cerchio  $r = R$  è appunto un toro  $T^1$ , riferito alla coordinata angolare  $\varphi$ , che è definita  $\pmod{2\pi}$ .

<sup>29</sup>Si osservi che la parola *toro* qui non ha nulla a che fare con l'animale (in latino *taurus*). La parola toro nella presente accezione, in italiano e nelle altre lingue europee, proviene invece probabilmente dalla radice *torno*, nel senso di intorno, cioè *girare*, come appunto succede con le variabili angolari che, aumentando di  $2\pi$ , fanno *ritornare* nello stesso punto.

angolo-azione.<sup>30</sup>

Dovrebbe pertanto essere chiaro ad esempio che, dato  $\alpha$  con  $|\alpha| < 1$ , eseguire la trasformazione  $x \rightarrow x + \alpha \pmod{1}$  del toro  $T^1$  in sé significa prendere  $x$  nell'intervallo fondamentale  $0 \leq x < 1$ , calcolare poi  $\tilde{x}' = x + \alpha$  e infine riportare eventualmente  $\tilde{x}'$  nell'intervallo fondamentale  $0 \leq x < 1$  sottraendo o aggiungendo 1.

Nel caso dello standard map, la vera variabile angolare è la variabile  $x$  (perché la trasformazione si esprime mediante la funzione periodica  $\sin 2\pi x$ ), e quindi si capisce la ragione della restrizione  $\pmod{1}$  nella definizione della trasformazione per quanto riguarda la variabile  $x$ . La restrizione analoga nella variabile  $y$  non sarebbe necessaria (in effetti tale variabile è piuttosto l'analogo della azione dei sistemi hamiltoniani); qui comunque, per pura comodità espositiva, seguendo la tradizione compiamo tale restrizione anche sulla variabile  $y$ . In tal modo dovremmo avere chiarito cosa intendiamo con l'affermare che lo standard map (che denoteremo con il simbolo  $\Phi_\epsilon$ ) è una applicazione (o trasformazione) del toro bidimensionale in sé,  $\Phi_\epsilon : T^2 \rightarrow T^2$  (dipendente dal parametro reale  $\epsilon$ ).

Si osservi che la trasformazione presenta una proprietà di tipo *globale* di cui si farà uso in seguito, ovvero la proprietà di *conservare le aree*. Analiticamente, questa proprietà si traduce nella proprietà che il determinante jacobiano della trasformazione vale 1 *in ogni punto* del toro. In effetti, se denotiamo con  $A \equiv D\Phi$  la derivata della trasformazione  $\Phi$  (cioè, in termini classici, la corrispondente matrice jacobiana, spesso denotata con  $J$ ), si calcola subito

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi\epsilon \cos(2\pi x) & 1 \\ 2\pi\epsilon \cos(2\pi x) & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

e allora si verifica immediatamente che in ogni punto  $(x, y)$  del toro si ha  $\det A = 1$ .

Il problema che ora ci poniamo è di studiare le *orbite* generate da questa trasformazione, ovvero l'analogo dei *movimenti* generati da una equazione differenziale; più precisamente ci interessa comprendere come si presenta in qualche modo l'insieme di tutte le orbite, ovvero l'analogo di quello che nel caso delle equazioni differenziali viene detto il **ritratto in fase** (*phase portrait*). Chiariamo ora questa analogia.

**Intermezzo: soluzioni di equazioni differenziali (e loro flussi) e mappings.** Consideriamo una equazione differenziale in  $\mathbb{R}^n$ , del tipo  $\dot{x} = f(x)$ , a cui si riduce anche il

<sup>30</sup>Si pensi al caso più semplice possibile, ovvero quello dell'oscillatore armonico, in cui lo spazio delle fasi è il piano con coordinate  $x, p_x$  (posizione e momento). È allora spontaneo passare a coordinate polari  $r, \varphi$  nel piano, e allora evidentemente la variabile  $r$  è costante (corrisponde al fatto che l'energia è una costante del moto), mentre l'angolo  $\varphi$  cresce linearmente col tempo. Dunque il moto si svolge su un cerchio (toro monodimensionale immerso nel piano), un punto del quale è individuato dalla variabile angolare  $\varphi$ . Questa è poi una variabile reale definita modulo  $2\pi$ . Risulta infine che la corretta variabile canonica non è il raggio  $r$ , ma l'azione  $I = r^2/2$ , e l'hamiltoniana ha la forma  $H(I, \varphi) = \omega I$  con  $\omega = \text{costante}$ . Sulle variabili angolo-azione per i sistemi integrabili ritorneremo più avanti.

sistema di equazioni di Newton per un sistema meccanico (nel qual caso  $n$  è pari: si pensi alle equazioni in forma di Hamilton).<sup>31</sup> Allora è ben noto che sotto condizioni standard di regolarità per la funzione  $f$  (che è un campo vettoriale, cioè definisce un vettore di  $\mathbb{R}^n$  in ogni punto  $x \in \mathbb{R}^n$ ), per ogni “punto iniziale”  $x_0$  esiste una unica soluzione  $x = x(t)$  che soddisfa la *condizione iniziale*  $x(0) = x_0$ . Abbiamo in tal modo una famiglia di movimenti  $x = x(t, x_0)$ , dipendente parametricamente dal *dato iniziale*  $x_0$ . Il punto di vista più elementare con cui si può riguardare questa situazione consiste nel pensare fissato il dato iniziale  $x_0$  e porre l'attenzione sul modo in cui il corrispondente punto evolve nel tempo, cioè riguardare il singolo movimento  $x = x(t)$ . Un modo complementare di riguardare le cose consiste invece nel riguardare al tempo  $t$  come a un parametro, che si pensa fissato, e rivolgere l'attenzione al modo in cui *ogni* punto iniziale  $x_0$  viene inviato, per ogni  $t$  fissato, da qualche parte. Per ogni  $t$  fissato, si ha dunque una applicazione di  $\mathbb{R}^n$  in sé, diciamola (con la notazione di Arnol'd)

$$g^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

Si ha in tal modo una famiglia a un parametro di trasformazioni dello spazio ambiente ( $\mathbb{R}^n$ ) in sé, ed è un utilissimo esercizio dimostrare la fondamentale proprietà che tale famiglia presenta, ovvero quella di essere un gruppo (commutativo):

$$g^{t+s} = g^s g^t = g^t g^s .$$

Il gruppo  $\{g^t\}$  si dice costituire il **flusso** generato dalla data equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$ . Evidentemente si fa riferimento allo scorrere, al fluire, di un fluido (man mano che passa il tempo  $t$ ) quando sia assegnato un campo di velocità  $v(x) \equiv f(x)$ .<sup>32</sup>

Consideriamo ora in particolare il cosiddetto *time-one map*  $g \equiv g^1$  (la trasformazione che dice dove è finito al tempo 1 ogni punto iniziale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ). Questa è la trasformazione che è l'analogo dello standard map o di qualunque altra trasformazione  $\Phi$  assegnata, la quale ci permette di sapere come viene trasformato (dove va a finire) qualunque assegnato punto iniziale. In particolare, se si considera poi un ben definito punto iniziale  $x_0$ ,<sup>33</sup> attraverso il mapping (ad esempio, il mapping  $\Phi = g^1$ ) viene in maniera ovvia definito il movimento<sup>34</sup>

$$\{x_n\} \quad n \in \mathbb{Z}$$

<sup>31</sup>Si noti che questa equazione ha il secondo membro indipendente dal tempo, cioè, come talvolta si dice, è una equazione *autonoma*. A questo caso ci si può sempre ridurre, pur di passare da una equazione in  $\mathbb{R}^n$  ad una equazione in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Infatti, se si ha una equazione  $\dot{x} = f(x, t)$ , allora basta introdurre una variabile ausiliaria  $y \in \mathbb{R}$  e considerare l'equazione differenziale in  $\mathbb{R}^{n+1}$  data dal sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= 1, \quad \text{con } y(0) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

perché la seconda equazione ha la sola soluzione  $y(t) = t$ .

<sup>32</sup>Per questo motivo, nella scuola di Arnol'd il campo vettoriale  $f(x)$  viene denotato con la lettera  $v$  di velocità, e l'equazione differenziale si scrive  $\dot{x} = v(x)$ .

<sup>33</sup>Nel caso dello standard map denotiamo  $\mathbf{x} = (x, y)$ , e poi con abuso di linguaggio, denotiamo  $\mathbf{x} \equiv x$ .

<sup>34</sup>Qui occorre una precisazione. Per un mapping in generale ogni punto iniziale  $x_0$  genera un movimento  $\{x_n\}$  soltanto per “tempi positivi”, cioè solo per  $n$  intero positivo (basta applicare successivamente la mappa  $\Phi$ ). L'orbita “per tempi negativi” è definita soltanto se la mappa è invertibile, come avviene ad esempio nel caso dello standard map.

mediante iterazione, ovvero mediante

$$x_{n+1} = \Phi(x_n).$$

Questo *movimento a tempo discreto* (cioè la successione  $\{x_n\}$ ) è ovviamente l'analogo del movimento a tempo continuo  $x = x(t)$  indotto da una equazione differenziale per un fissato dato iniziale  $x_0$ . In particolare, dal movimento a tempo continuo si ottiene un movimento a tempo discreto  $\{x_n\}$  considerando i tempi  $t_n = n$ . Per un fissato dato iniziale  $x_0$ , questo movimento viene determinato dal corrispondente time-1 map, ovvero dal mapping<sup>35</sup>

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (g \equiv g^1).$$

Abbiamo dunque visto come le orbite  $\{x_n\}$  definite per iterazione di una trasformazione siano l'analogo dei singoli movimenti  $x = x(t)$  definiti da una equazione differenziale. Ma per una equazione differenziale sappiamo, dal corso di Meccanica Razionale, che è spesso più interessante riguardare non al singolo movimento, ma in qualche modo all'insieme di tutti i movimenti, tracciando l'insieme dei movimenti più significativi, come si fa nel ritratto in fase (conosciamo ad esempio quello del pendolo). Ora è ovvio che l'analogo del ritratto in fase può essere disegnato anche nel caso di una trasformazione, di un mapping. L'unica differenza è che ora avremo orbite costituite da punti discreti anziché orbite continue.

Concludiamo osservando per inciso che, come vedremo in seguito, oltre al metodo del time-1 map, vi sono altri due modi significativi per ottenere un mapping a partire dal flusso di una equazione differenziale. Il primo viene introdotto quando si ha a che fare con una equazione differenziale dipendente in maniera periodica dal tempo,  $\dot{x} = f(x, t)$  con  $f(x, t+T) = f(x, t)$  per ogni  $t$ : è questo il caso del pendolo forzato che discuteremo in questo stesso capitolo. Il secondo è il metodo della *superficie di sezione di Poincaré*, che discuteremo, sempre in questo capitolo, a proposito del lavoro di Hénon e Heiles. Infine osserviamo che, dato un mapping, esistono metodi standard per costruire una equazione differenziale da cui si riottienga il mapping di partenza con uno dei metodi suddetti: si tratta della costruzione nota con il nome di *sospensione*.

Dopo questa forse troppo lunga digressione, veniamo dunque a descrivere quello che avviene nello standard map, disegnandone il ritratto in fase, e facciamo questo per diversi valori del parametro  $\epsilon$ , specificamente  $\epsilon = 0$ ,  $\epsilon = 0.05$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\epsilon = 1$ . (Figure 1.2–1.6).

Nella prima figura sono stati presi come dati iniziali 18 punti distribuiti uniformemente sull'asse delle  $y$ , e per ciascuno di essi si è calcolate la corrispondente orbita  $\{x_n, y_n\}$  con  $n = 1, 2, \dots, 10^4$ . Nelle altre figure, con  $\epsilon > 0$ , i dati iniziali, ed il numero di iterazioni, sono stati scelti in modo da far risaltare alcune caratteristiche significative delle orbite. La differenza tra i diversi casi è alquanto impressionante. Per  $\epsilon = 0$  (caso imperturbato) il ritratto può dirsi avere, a confronto con gli altri, carattere ordinato: i punti appaiono essere disposti su rette orizzontali (lo vedremo più sotto in maniera analitica). Per  $\epsilon > 0$  il ritratto cambia sensibilmente, particolarmente attorno ai due punti  $P_1 = (0, 0)$  e

<sup>35</sup>È come nel caso dello stroboscopio. Si tengono gli occhi chiusi, e li si apre solo ai tempi  $t = 1, 2, 3, \dots$ .

$P_2 = (1/2, 0)$  (vedremo subito sotto l'importanza di questi punti). Nelle regioni lontane da questi punti, il ruolo che nel caso imperturbato era svolto dalle rette orizzontali è ora svolto da curve poco deformate rispetto a quelle (si tratta dei famosi tori KAM). Invece, la natura delle orbite cambia completamente (ovvero topologicamente) in prossimità dei due punti sopra menzionati. Attorno al punto  $P_2$  (che vedremo essere un punto fisso ellittico, almeno per  $\epsilon$  non troppo grande) si nota che sono insorte delle **isole** (anche questi sono tori KAM), mentre attorno all'altro punto  $P_1$  si osservano (almeno per  $\epsilon \geq 0.1$ , si veda la Fig. 1.4) orbite che appaiono in qualche modo confuse, ovvero sparpagliate, distribuite, diciamo disordinate, caratterizzate dal fatto che appaiono "riempire" una regione bidimensionale anziché giacere su una curva monodimensionale. Vedremo che questo punto  $P_1$  è (per qualsiasi valore di  $\epsilon > 0$ ) un punto fisso iperbolico, e il fenomeno di caoticità sarà legato al famoso punto omoclino di Poincaré. Abbiamo dunque che, nel caso perturbato, si presenta coesistenza di moti ordinati e di moti caotici.

Per quanto riguarda la zona caotica, si possono notare due fatti rilevanti. Il primo è che essa si espande al crescere del parametro perturbativo  $\epsilon$ , fino ad occupare praticamente tutto lo spazio disponibile (vedi Figura 1.6). D'altra parte sembra che essa non sia presente al disotto di un certo valore di  $\epsilon$ , come si vede in Figure 1.3 relativa ad  $\epsilon = 0.05$ . In realtà si dimostra che la zona caotica è **sempre** presente, comunque piccolo sia il parametro perturbativo; avviene però che la sua misura decresce così tanto al decrescere di  $\epsilon$  da essere di fatto inosservabile al di sotto di un certo  $\epsilon$  critico. In effetti si dimostra che la misura della regione caotica decresce in maniera esponenziale, precisamente come

$$e^{-\frac{\pi}{\epsilon}}.$$

Questa stima è dovuta al matematico russo V. Lazutkin, e la proprietà generale della decrescita esponenziale va comunemente sotto il nome di **Teorema di Melnikov**, che verrà discusso in appendice.

L'altro fenomeno rilevante che si osserva è che per invadere la regione caotica in generale basta addirittura una sola orbita. In effetti, in tutte le figure le zone caotiche sono state "ottenute" con un'unica orbita. In particolare, per  $\epsilon$  abbastanza grande, si ha quindi che una unica orbita "invade" sostanzialmente tutta la regione disponibile (qui, il toro  $T^2$ ). Il sistema, da integrabile che era per  $\epsilon = 0$  è ora praticamente **ergodico**. Mentre per  $\epsilon = 0$  ogni punto iniziale dà luogo ad un'orbita giacente su una superficie monodimensionale – ovvero una curva, in effetti un toro orizzontale – e quindi il ritratto in fase è costituito da curve orizzontali, per grandi  $\epsilon$  avviene invece che esiste un dato iniziale che dà luogo a un'orbita che ricopre densamente tutta la regione a priori disponibile; anzi, ciò avviene per quasi ogni dato iniziale nella regione che viene invasa. Nel caso della Figura 1.6, vi è ancora una piccola regione che non viene invasa dall'orbita generata dal dato iniziale considerato. Se invece il sistema ammette un'orbita densa in *tutto* lo spazio delle fasi, si dice che il sistema ha la proprietà di **ergodicità**

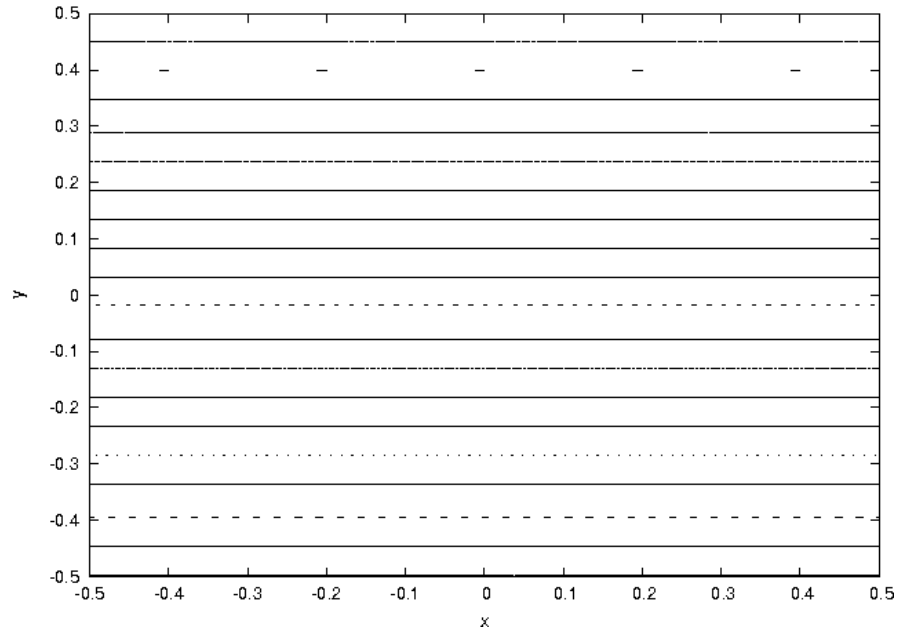


Figura 1.2: Orbite dello standard map per  $\epsilon = 0$ .

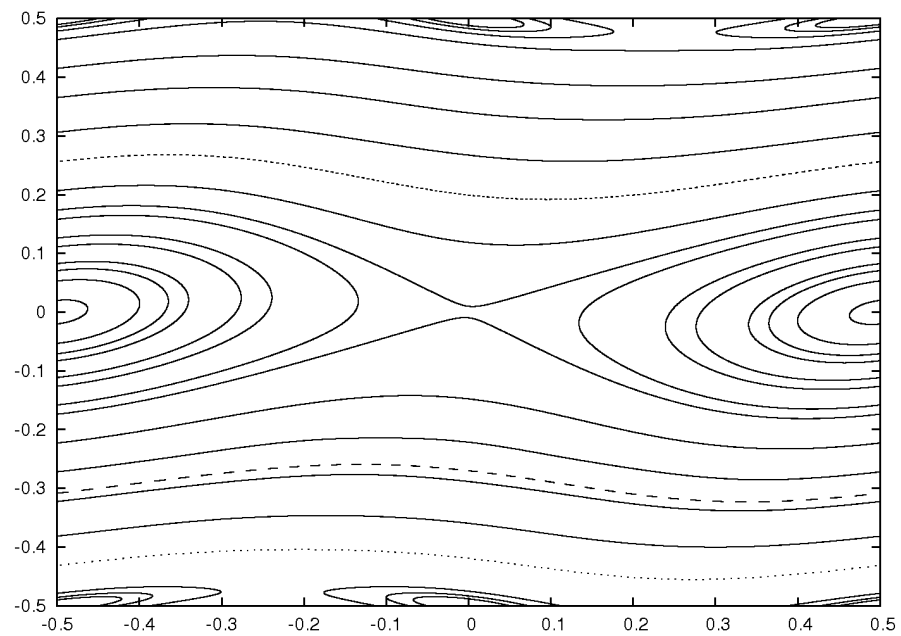
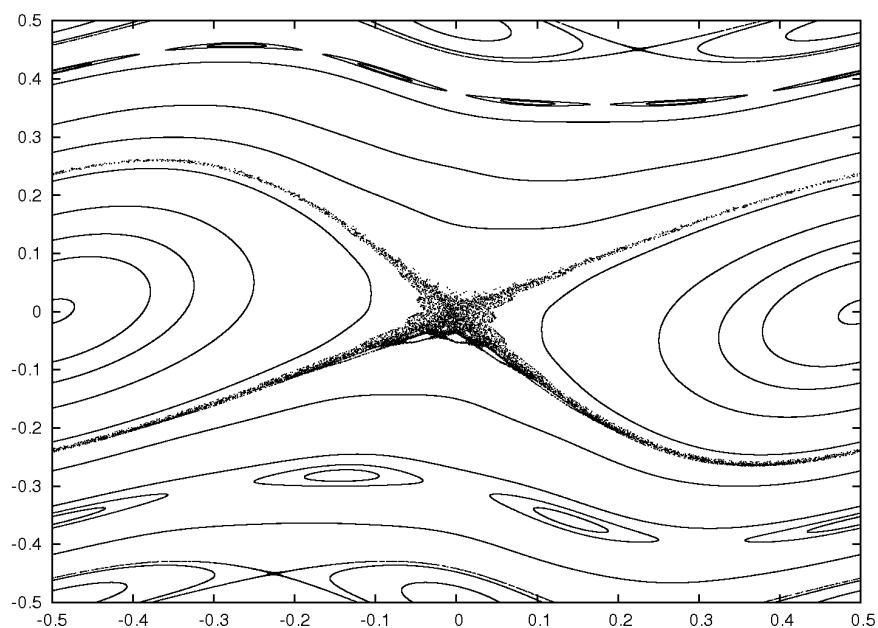
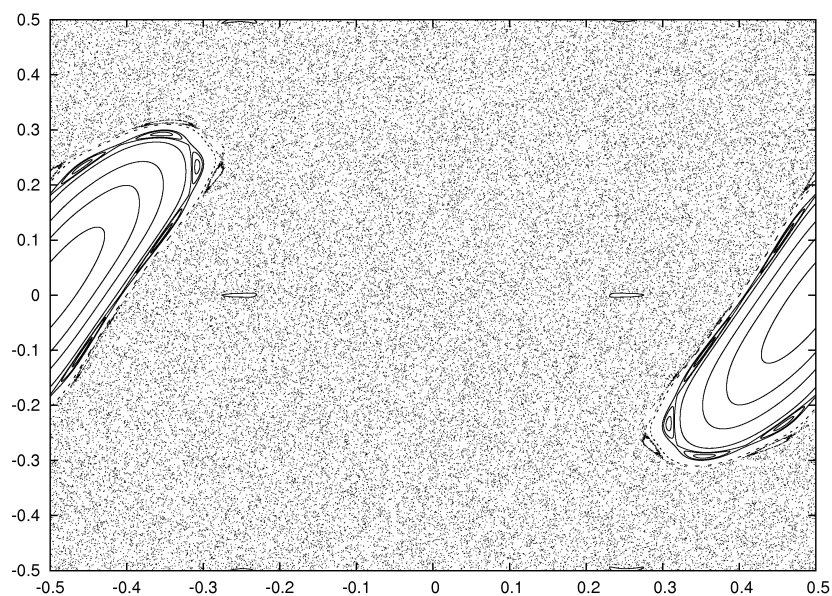


Figura 1.3: Orbite dello standard map per  $\epsilon = 0.05$



Figura 1.4: Orbite dello standard map per  $\epsilon = 0.1$ Figura 1.5: Orbite dello standard map per  $\epsilon = 0.5$ . Si noti che il “mare” uniforme centrale è composto da una sola orbita. Nel mare si notano piccole isole di stabilità attorno ad un'orbita periodica.

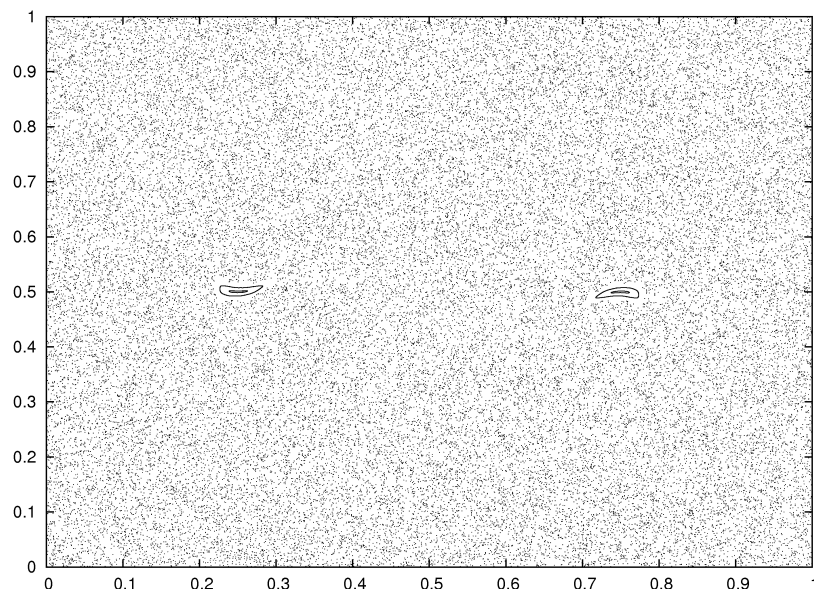


Figura 1.6: Orbite dello standard map per  $\epsilon = 1$ . Il mare caotico (formato da una sola orbita) ha invaso tutto il toro se si escludono due piccole isole stabili attorno ad un'orbita periodica.

**topologica.** La nozione di ergodicità, nel senso comune della teoria della misura, verrà discussa in un successivo capitolo.

**§3. Due esempi di coesistenza di moti ordinati e caotici: il pendolo forzato e il sistema di Hénon e Heiles.** Illustriamo qui due esempi in cui la coesistenza di moti ordinati e moti caotici si presenta per sistemi retti da equazioni differenziali. Abbiamo già osservato come questo fenomeno di coesistenza sia stato riscoperto modernamente proprio in sistemi di equazioni differenziali e come si possa comprendere che in generale debba esistere una profonda analogia con la dinamica indotta da mappings. Il presente paragrafo ha quindi carattere sostanzialmente informativo, e può essere letto “tra le righe”.

**Il pendolo forzato.** Il più semplice esempio fisicamente significativo che si può considerare è forse quello del pendolo forzato, retto dall'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = A \sin \Omega t. \quad (5)$$

Qui  $x$  (definito in  $\mathbb{R} \pmod{2\pi}$ ) rappresenta l'angolo di rotazione del pendolo attorno al punto di sospensione, in un piano verticale, contato a partire dal punto di equilibrio stabile (quello inferiore); le due costanti positive  $\omega$  ed  $\Omega$  rappresentano la pulsazione del pendolo libero e la pulsazione della “forzante”, mentre la costante  $A$  (ampiezza della forzante) svolge il ruolo del parametro perturbativo:

per  $A = 0$  si ottiene il caso imperturbato.

La dinamica imperturbata è ben nota.<sup>36</sup> Nello spazio delle fasi<sup>37</sup> (angolo  $x$  e velocità angolare  $\dot{x}$ ) vi è una variabile dinamica che è una costante del moto, l'energia<sup>38</sup>

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega^2 \cos x,$$

e le orbite nello spazio delle fasi giacciono sulle linee di livello dell'energia  $E(x, \dot{x}) = E_0$ , anzi coincidono con esse, salvo nel caso della separatrice (vedi sotto) in cui le orbite coincidono con dei sottoinsiemi della curva di livello. Un insieme significativo di curve di livello (ovvero il ritratto in fase) è rappresentato nella figura 1.7. Si distinguono: a) la regione delle **librazioni**, in cui l'angolo  $x$  oscilla tra un massimo e un minimo, con velocità che passano da positive a negative (senza che il pendolo possa raggiungere il punto di equilibrio superiore); b) la regione delle **rotazioni positive** e quella delle **rotazioni negative**. In queste ultime regioni, l'energia è abbastanza grande da far sì che la velocità angolare non si annulli mai, e resti sempre positiva o sempre negativa: il pendolo supera il punto di equilibrio superiore senza mai arrestarsi. In mezzo stanno le due **separatrici**.

Vi sono poi naturalmente i punti di equilibrio, in cui si annulla il campo di forze, nel nostro caso i punti in cui si ha  $\sin x = 0$ . Si hanno in tal modo nello spazio delle fasi i due punti  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (\pi, 0)$ . Si tratta di due punti che, in analogia con il caso del mapping che vedremo più avanti, vengono detti rispettivamente ellittico e iperbolico. L

Vediamo ora come avviene l'associazione di questa equazione differenziale con un mapping. Si tratta di prendere il corrispondente *time-T-map*, dove  $T = 2\pi/\Omega$  è il periodo della forzante. Ovvero, si fa una osservazione stroboscopica di periodo  $T$ : si osserva il sistema a un certo tempo iniziale, diciamo  $t_0 = 0$ , poi si chiudono gli occhi e si lascia che il sistema evolva, e lo si guarda al tempo  $t = T$ , poi si richiudono gli occhi e lo si riguarda al tempo  $t = 2T$ , e così via fino al tempo  $t_n = nT$ . Perché la scelta dell'intervallo  $T$ ? La ragione è che, diversamente dal caso considerato nel precedente paragrafo, si ha qui una equazione differenziale dipendente dal tempo (o, come si dice, **nonautonoma**), il che cambia completamente le cose. Si utilizza qui il fatto che il campo vettoriale definente l'equazione differenziale è periodico nel tempo (nel nostro caso, di periodo  $T$ ). Avviene allora che solo usando questo intervallo  $T$  (o ogni suo multiplo) l'evoluzione indotta dall'equazione differenziale produce un mapping dello spazio delle fasi in sé. Infatti, il mapping deve trasformare un punto arbitrario  $(x_0, \dot{x}_0)$  in un altro ben definito punto  $(x_1, \dot{x}_1)$ , attraverso un movimento determinato dall'assegnato punto. Ma, nel nostro caso, per individuare un movimento non è sufficiente assegnare un dato iniziale  $(x_0, \dot{x}_0)$ , perché il campo vettoriale dipende

<sup>36</sup>Si veda il corso di Meccanica Razionale 1, e anche Arnol'd-Avez, Appendice 5.

<sup>37</sup>Si noti che lo spazio delle fasi è un cilindro: si tratta del prodotto cartesiano di una circonferenza (variabile angolare  $x$ ) e di una retta (variabile reale  $\dot{x}$ , rappresentante la velocità angolare).

<sup>38</sup>In effetti, l'energia divisa per la massa.

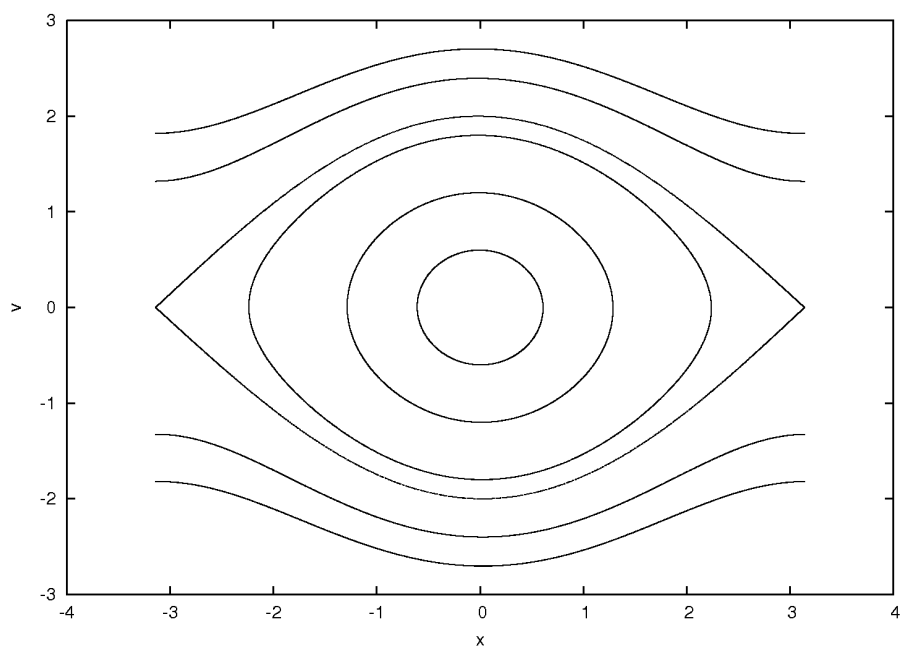


Figura 1.7: La mappa di Poincaré del pendolo per  $A = 0$ . Si noti che essa coincide con il ritratto in fase del pendolo libero (cioè non forzato).

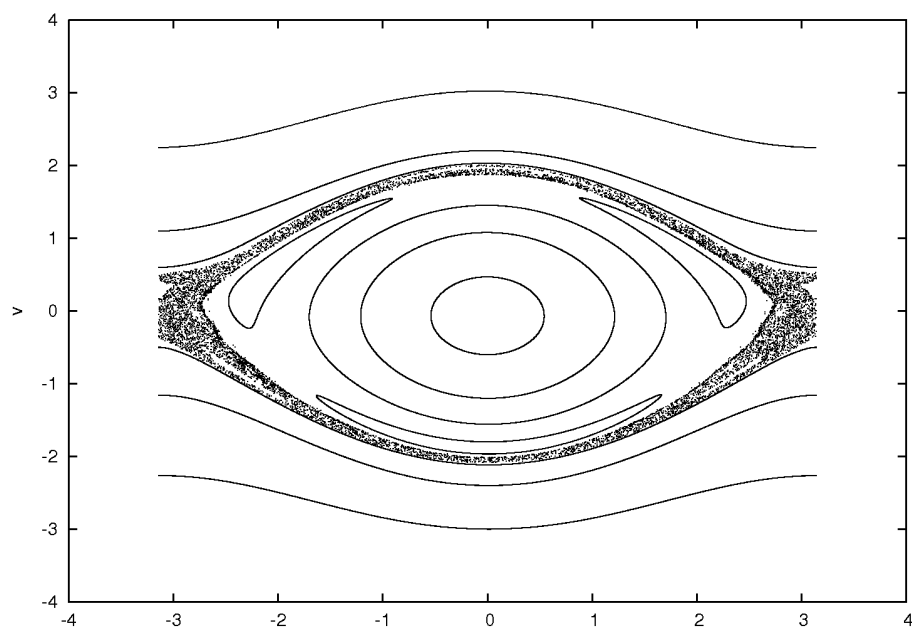


Figura 1.8: La mappa di Poincaré del pendolo per  $A = 0.1$ . In questo esempio la forzante ha frequenza  $\Omega = 2$ , doppia della frequenza naturale (delle piccole oscillazioni)  $\omega = 1$  del pendolo libero.

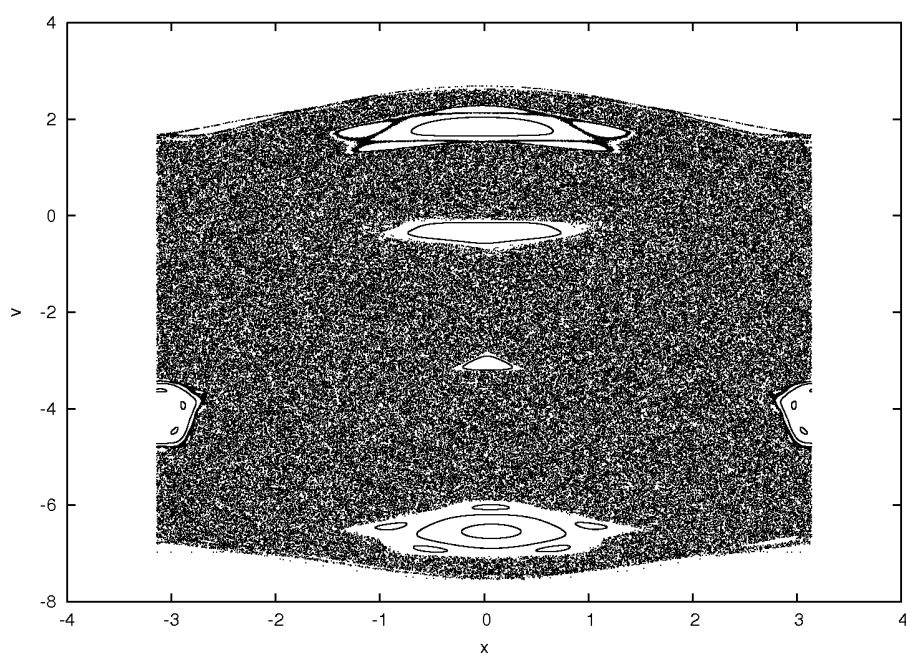


Figura 1.9: La mappa di Poincaré del pendolo per  $A = 5$ . In questo esempio la forzante ha frequenza  $\Omega = 2$ , doppia della frequenza naturale (delle piccole oscillazioni)  $\omega = 1$  del pendolo libero.

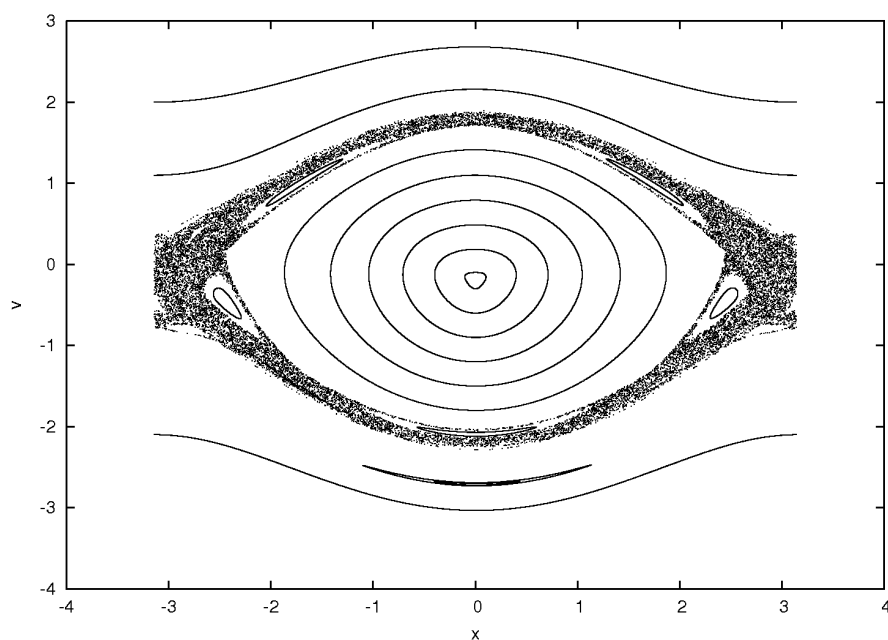


Figura 1.10: La mappa di Poincaré del pendolo per  $A = 0.5$ . In questo esempio la forzante ha frequenza  $\Omega = 3$ , tripla delle frequenze di piccola oscillazione  $\omega = 1$ .

esplicitamente dal tempo, e il medesimo “dato iniziale” riferito a tempi diversi produce orbite diverse. Se però si riparte a tempi  $t_n$  multipli di  $T$ , allora il campo vettoriale si presenta di nuovo come la volta precedente, e il movimento è univocamente determinato in funzione della differenza  $t - t_n$ . A questo punto, abbiamo a disposizione un mapping anche per il sistema imperturbato (con  $A = 0$ ), e possiamo tracciare le figure delle orbite significative come nei paragrafi precedenti.<sup>39</sup> Il risultato è quello già riportato nella Figura 1.7. In questo caso i due punti  $P_1$ ,  $P_2$  hanno il ruolo di due punti fissi, che risultano essere ellittico e iperbolico nel senso dei mapping che sarà descritto in un prossimo paragrafo. Le Figure 1.7–1.9 si riferiscono ai valori 0, 0.1, 5 del parametro perturbativo  $A$ , tutte per  $\Omega = 2$ ,  $\omega = 1$ , mentre la Figura 1.10 si riferisce ad  $A = 0.5$ ,  $\Omega = 3$  ed ancora  $\omega = 1$ . Si noti come la separatrice si è “spezzata”. Vedremo in seguito che ciò corrisponde al fatto che si è presentato un punto omoclino. Per simmetria, tale punto ha sempre ascissa  $x = 0$ . Al crescere della perturbazione, la “regione caotica” diventa sempre più grande.

**Il modello di Hénon e Heiles.** Si tratta di un sistema di due oscillatori armonici (con coordinate  $x, y$  e momenti coniugati  $p_x = \dot{x}$ ,  $p_y = \dot{y}$  – pensiamo al caso di massa unitaria) di uguale pulsazione  $\omega = 1$ , accoppiati mediante forze quadratiche. Lo spazio delle fasi è dunque  $\mathbb{R}^4$ . L’hamiltoniana è data da

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3, \quad (6)$$

cui corrisponde il sistema di equazioni di moto

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 2xy \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (7)$$

L’hamiltoniana  $H$  (l’energia) è una costante del moto, e si considera il valore  $E$  dell’energia come un parametro. Dunque, per ogni valore di  $E$  (nel codominio di  $H$ ) si considera il moto ristretto sulla corrispondente “superficie dell’energia”  $H(x, y, p_x, p_y) = E$ , sicché i movimenti sono ridotti a svolgersi su una varietà tridimensionale, diciamola  $\Sigma_E$ . Come coordinate libere su  $\Sigma_E$  si possono prendere ad esempio  $x, y, p_y$ , perchè allora  $p_x$  è determinata, a meno del segno, dall’assegnato valore di  $E$ . Si trova che la “superficie dell’energia”  $\Sigma_E$  ha una componente compatta nell’intervallo  $0 \leq E \leq 1/6$ .<sup>40</sup>

Poiché ogni moto si svolge su una superficie tridimensionale, si ha ora il problema della sua visualizzazione. A questo fine si fa uso della cosiddetta tecnica

<sup>39</sup>NOTA PER GLI AUTORI. Spiegare meglio.

<sup>40</sup>Se si integrano le equazioni di moto al calcolatore prendendo dati iniziali “a caso” in maniera ingenua, si troverà che il calcolo produce molto spesso delle *runaways* (o *overflows*), cioè che dopo breve tempo le coordinate divergono. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che si è preso il dato iniziale in una regione noncompatta, come si capisce perfettamente nell’esempio dell’equazione

della **superficie di sezione di Poincaré**. Ad esempio, si considera la superficie bidimensionale definita in  $\Sigma_E$  dalla condizione  $x = 0$  (che dunque, nella “carta” delle coordinate  $x, y, p_y$  è individuata dal “piano”  $y, p_y$ ). Denotiamo tale superficie bidimensionale con  $\Gamma_E$ . Ora, un punto di questa superficie  $\Gamma_E$  determina univocamente un dato iniziale nello spazio delle fasi originale (compiamo una volta per tutte la scelta del segno di  $p_x$ , ad esempio  $p_x > 0$ ), e quindi possiamo integrare le equazioni di moto. Procediamo così nel calcolo fino a quando il punto nello spazio delle fasi, durante il suo moto, interseca per la prima volta (con  $p_x > 0$ ) la superficie bidimensionale  $\Gamma_E$ ,<sup>41</sup> e in tal modo abbiamo determinato il trasformato del punto originale, ovvero un mapping  $\Phi : \Gamma_E \rightarrow \Gamma_E$ . Possiamo poi iterare il mapping, ottenendo le orbite come negli esempi già considerati. Le figure classiche di Hénon e Heiles (vedi Fig.1.11–1.13)<sup>42</sup> si riferiscono a tre valori dell’energia, ovvero  $E = 1/12$ ,  $E = 1/8$  ed  $E = 1/6$ , e mostrano un passaggio da una situazione completamente ordinata a una praticamente del tutto disordinata, passando attraverso una fase di “coesistenza”. Si notino i punti fissi ellittici con le loro curve invarianti (si veda più avanti), e le zone caotiche attorno ai punti iperbolici.

Nel lavoro originale di Hénon ed Heiles viene anche dato un ulteriore importante risultato: per ogni valore del parametro  $E$  viene data una stima della misura relativa  $\mu(E)$  della regione ordinata (ovvero l’area della regione in cui si hanno moti ordinati, divisa per l’area della regione totale  $\Gamma_E$ ). Il risultato significativo che si trova è che la funzione  $\mu(E)$  è praticamente costante, uguale ad 1 (esistono in pratica solo moti ordinati), fino ad un certo valore  $E_1$  di  $E$ . Al di là di questo valore, la curva rappresentante la funzione  $\mu = \mu(E)$  scende a zero sostanzialmente come una retta, e la funzione si annulla per un certo altro valore  $E_2$  di  $E$ . Il fatto che la funzione sostanzialmente coincida con il valore costante 1 per piccole energie è in accordo con il teorema KAM sui tori invarianti, come vedremo in seguito.

Vale anche la pena di osservare che vi è un altro aspetto significativo a questo proposito. Si tratta del procedimento seguito da Hénon e Heiles per determinare,

---

$\ddot{y} = -y + y^2$  corrispondente all’hamiltoniana

$$H(y, p_y) = \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) - \frac{1}{3}y^3.$$

<sup>41</sup>Naturalmente, stiamo ammettendo che questa intersezione si produca davvero. A priori questo non sembra garantito. Nel caso in cui i termini cubici nell’hamiltoniana possono essere trascurati, l’intersezione è garantita, perché i due oscillatori sono indipendenti. Si può mostrare che l’intersezione si produce davvero. L’esempio tipico considerato da Poincaré è quello in cui il sistema presenta una orbita periodica. Infatti, in tal caso, sezionando l’orbita in un suo punto mediante un piano trasversale all’orbita, il punto di intersezione viene mandato in se stesso dall’evoluzione temporale, e allora, per pure ragioni di continuità, ogni punto del piano che sia sufficientemente vicino al punto fisso dà luogo a un’orbita che riattraversa il piano, in un punto vicino al punto fisso.

<sup>42</sup>Queste figure sono provvisorie. Figure più simili a quelle originali saranno riportate in una versione futura.

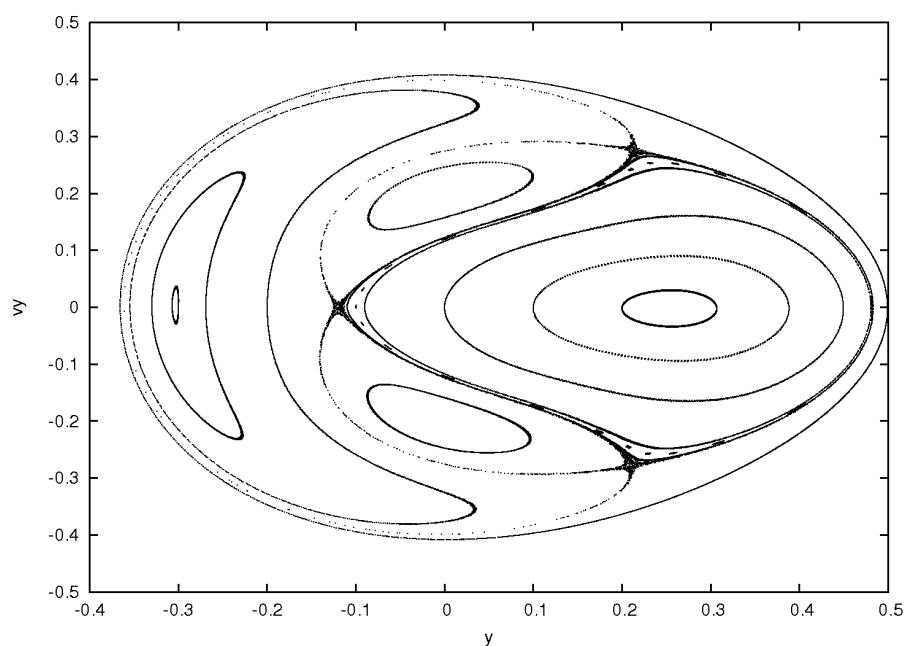


Figura 1.11: La mappa di Poincaré per il sistema di Hénon-Heiles, per un energia pari a  $E = 1/12$ .

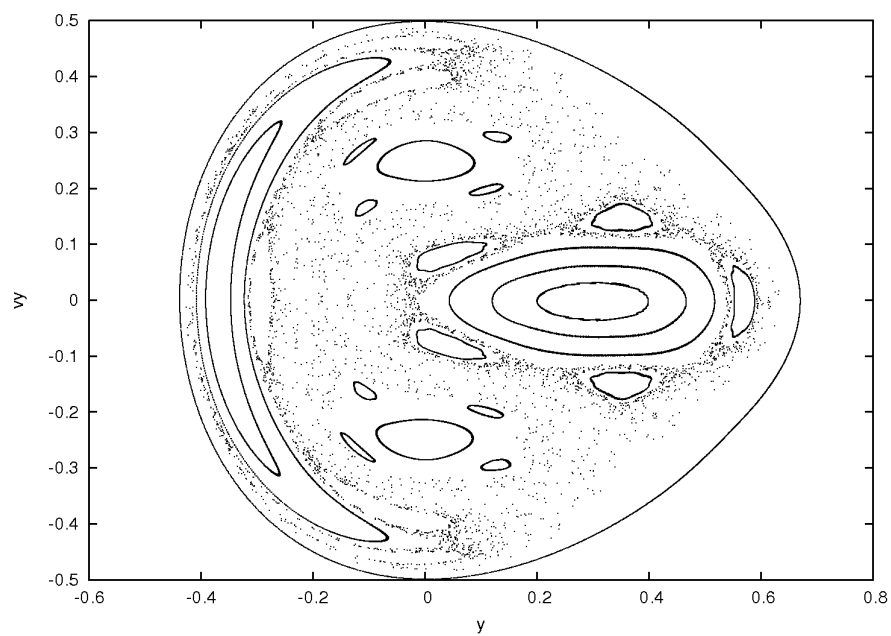


Figura 1.12: La mappa di Poincaré per il sistema di Hénon-Heiles, per un energia pari a  $E = 1/8$ .



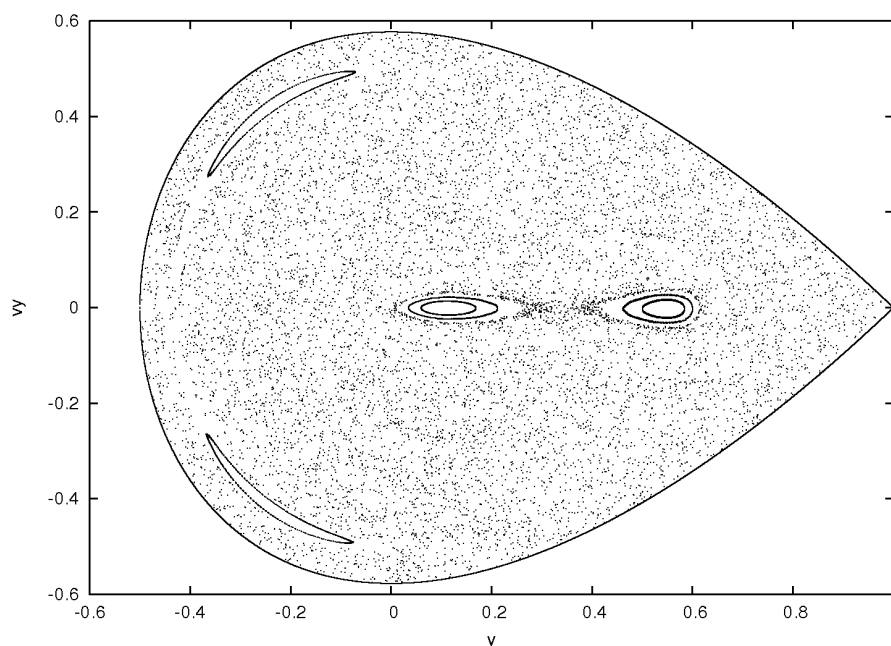


Figura 1.13: La mappa di Poincaré per il sistema di Hénon–Heiles, per un energia pari a  $E = 1/6$

in qualche modo in maniera automatica, se un movimento è di tipo ordinato o di tipo caotico (ciò al fine di poter valutare la funzione  $\mu(E)$ ). Infatti, essi usarono il criterio che un'orbita debba essere considerata caotica se la distanza tra due orbite originate in punti vicini cresce esponenzialmente col tempo. D'altra parte questo procedimento è all'origine degli sviluppi successivi che hanno condotto a caratterizzare la caoticità mediante lo strumento degli esponenti di Liapunov. Su questo argomento ritorneremo in seguito.

**Intermezzo: pendolo forzato e superficie di sezione.** Può essere interessante osservare che anche nel caso del pendolo forzato si può passare ad un corrispondente mapping con un procedimento che è del tutto simile a quello della superficie di sezione. A tal fine, basta osservare che la forzante può essere riguardata come una coordinata  $y$  soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico con pulsazione  $\Omega$ , ovvero

$$\ddot{y} = -\Omega^2 y .$$

Infatti, la soluzione generale è  $y(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t$ , e in particolare si ha  $y(t) = A \sin \Omega t$  se si pone  $B = 0$ , o equivalentemente  $y(0) = 0$ . È dunque evidente che l'originaria equazione dipendente dal tempo, (o, come anche si dice, **nonautonoma**) (5) è sostanzialmente equivalente al sistema autonomo

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 \sin x &= y \\ \ddot{y} + \Omega^2 y &= 0 , \end{aligned} \tag{8}$$

con la restrizione  $y(0) = 0$ . I movimenti si svolgono ora in uno spazio delle fasi di dimensione 4, con coordinate  $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ , e la situazione è sostanzialmente simile (con opportune modificazioni) a quella considerata nel caso di Hénon e Heiles.

**§4. Lo standard map imperturbato.** Dopo questa parentesi su esempi modello di equazioni differenziali che portano alla coesistenza di moti ordinati e moti disordinati, torniamo ora a considerare il nostro esempio modello di mapping, ovvero lo standard map. Vogliamo comprendere che cosa è avvenuto nel passaggio dal caso imperturbato ( $\epsilon = 0$ ) al caso perturbato. A tal fine occorre cominciare dal comprendere il caso imperturbato, con  $\epsilon = 0$ , in cui lo standard map si riduce alla forma

$$\Phi_0: \quad y' = y, \quad x' = x + y \pmod{1}.$$

In questo caso, ogni punto iniziale  $(x_0, y_0)$  dà luogo a un'orbita molto semplice, ovvero  $\{x_n, y_n\}$ , con  $y_n = y_0$ ,  $x_n = x_0 + ny_0 \pmod{1}$ . Dunque per ogni orbita accade che l'ordinata  $y$  resta inalterata, mentre l'ascissa  $x$  trasla uniformemente, della stessa quantità  $y_0$  ad ogni passo (sottintendendo che poi il punto rientra nel segmento fondamentale  $0 \leq x \leq 1$  per il consueto "incollamento dei bordi"). Questa "traslazione orizzontale" costituisce quella che viene detta la "**traslazione del toro**" e verrà studiata subito sotto. Preliminarmente però vogliamo concentrarci sul fatto che in ogni orbita il valore dell'ordinata  $y$  resta inalterato. Questo fatto può essere propriamente descritto dicendo che siamo in presenza di una **costante del moto** (detta anche **funzione invariante**), precisamente la funzione (definita sul toro, a valori reali)  $F(x, y) = y$ .

**Intermezzo: costanti del moto e superfici invarianti.** Ricordiamo che, data una equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  in  $\mathbb{R}^n$  (dove  $\mathbb{R}^n$  è l'analogo dello spazio delle fasi di un sistema meccanico), con corrispondente flusso dato dal gruppo di evoluzione  $g^t$ , una funzione  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene detta **variabile dinamica o osservabile**. A sua volta, una variabile dinamica  $F$  è detta **costante del moto (o funzione invariante)** se vale

$$F(g^t(x)) = F(x)$$

per tutti i "punti iniziali"  $x$  e per tutti i tempi  $t$ . In altri termini, il valore di  $F$  è costante su ogni orbita. È allora interessante considerare le "superfici di livello" di  $F$ , cioè le varietà  $\Gamma_c$  (in generale di dimensione  $n - 1$ ) definite dalla condizione  $F(x) = c$  con  $c$  nel codominio di  $F$ , spesso denotate con  $\Gamma_c = F^{-1}(c)$  (immagine inversa di  $c$ ). Infatti ogni varietà appartenente a questa famiglia (individuata dal valore  $c$  della funzione  $F$ ) è una **varietà invariante**, cioè è costituita da orbite: in altri termini, fissato  $c$ , ogni punto  $x \in \Gamma_c$  dà luogo a un movimento la cui traiettoria giace completamente su  $\Gamma_c$ . Avviene allora che lo spazio delle fasi è completamente riempito dalla famiglia di superfici  $\Gamma_c$ , ovvero si ha  $\mathbb{R}^n = \bigcup_c \Gamma_c$ . Si usa dire che lo spazio delle fasi è stratificato (come una cipolla), tecnicamente **fogliato (foliated)**, in superfici  $(n - 1)$ -dimensionali invarianti (rispetto all'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$ ).

Ora, una situazione simile si presenta nel caso in cui si abbia un mapping in luogo di una equazione differenziale, sicché invece di movimenti  $x = x(t)$ , soluzioni dell'assegnata equazione differenziale, si hanno orbite  $\{x_n\}$  definite dal mapping. Veniamo

direttamente al caso dello standard map, in cui lo spazio delle fasi è il toro  $T^2$ . Diremo che una variabile dinamica  $F : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è una costante del moto se, contenendo un punto, contiene tutta l'orbita da esso generata. Nel caso dello standard map imperturbato  $\Phi_0$ , la variabile dinamica  $F(x, y) = y$  è ovviamente una costante del moto. Le corrispondenti superfici invarianti (ora di dimensione 1, cioè delle curve) sono le rette orizzontali definite da  $y = c$  (rette ridotte poi sul toro  $T^2$ ). Tutto il toro  $T^2$  è stratificato, fogliato, da queste curve invarianti. Si noti bene che una curva invariante è costituita da orbite, ma non è essa stessa un'orbita. Se un punto vi appartiene, tutta la corrispondente orbita vi appartiene, ma sono infinite le diverse orbite giacenti su una definita curva invariante (l'analogo fenomeno si presenta nel caso dell'equazione differenziale).

La situazione che qui si presenta, come vedremo più avanti, è analoga a quella dei sistemi hamiltoniani integrabili, in cui lo spazio delle fasi, di dimensione pari  $2n$  (qui il toro  $T^2$ ), è fogliato in tori invarianti di dimensione  $n$  (qui i tori monodimensionali  $T^1$  definiti da  $y = c$ ), e la dinamica su ogni toro è l'analogo continuo della traslazione del toro.

Mettiamo subito in luce, con una anticipazione significativa, che la grande scoperta di Kolmogorov fu la seguente (per semplicità, la enunciamo nel caso particolare dello standard map). Mentre nel caso integrabile si ha una costante del moto, cui corrisponde una famiglia continua di superfici invarianti che ricoprono (fogliano) tutto lo spazio delle fasi, nel sistema perturbato avviene che si hanno ancora delle superfici invarianti (che sono piccole deformazioni di quelle imperturbate), ma ora tali superfici invarianti esistono soltanto in corrispondenza di certi speciali valori di  $c$ , e non per tutti i possibili valori di  $c$ . Non si ha quindi una costante del moto nel senso classico del termine<sup>43</sup>. Nello spazio delle fasi restano dei "buchi" "entro i quali" si sviluppano i moti caotici di Poincaré. E tutto questo avviene per perturbazioni regolarissime, definite da funzioni di una regolarità così grande come quella delle funzioni analitiche. Nel fenomeno di Kolmogorov, la continuità (rispetto al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ) viene ricostituita nel senso della teoria della misura (*in the measure-theoretic sense*), in quanto si dimostra che la misura (di Lebesgue) dell'insieme dei tori invarianti di Kolmogorov tende alla misura di tutto lo spazio delle fasi (nel nostro caso, del toro  $T^2$ ) per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si ricordi quanto era stato detto più sopra sulla misura relativa della regione ordinata nel modello di Hénon e Heiles.

Veniamo ora a descrivere le orbite che si sviluppano, nel caso dello standard map imperturbato, su ogni singola curva invariante  $y = c$ . Essendo fissato il valore  $c$  della coordinata  $y$ , l'orbita è quindi individuata dai valori della variabile  $x$ , cioè dalla successione  $\{x_n\}$ , con  $x_{n+1} = x_n + c \pmod{1}$ . Si tratta della celebre *traslazione del toro*.

**Intermezzo: La traslazione del toro** (Arnol'd-Avez, appendice 1). La traslazione del toro  $T^1$  è definita da<sup>44</sup>

$$x' = x + \alpha \pmod{1}$$

<sup>43</sup>Si troverà che anche nel celebre libro di Meccanica Razionale di Levi-Civita e Amaldi viene considerata la possibilità dell'esistenza di singole superfici invarianti anziché di una famiglia continua di superfici invarianti relativa ad una costante del moto. Si veda il capitolo sui sistemi hamiltoniani.

<sup>44</sup>La costante  $\alpha$  prende chiaramente il posto della costante che avevamo denotato sopra con la lettera  $c$ .

Si ha la semplicissima proprietà: Ogni punto iniziale  $x$  dà luogo a un'orbita periodica se e solo se "la costante di traslazione"  $\alpha$  è razionale,  $\alpha = p/q$  con  $p, q$  interi,  $q > 0$ . Nel caso razionale, con la frazione ridotta ai minimi termini, il periodo minimo delle orbite è  $q$ .

La dimostrazione è banalissima. L'evoluto  $n$ -esimo di  $x$  è dato (sulla retta, prima della riduzione al segmento fondamentale) da  $x + n\alpha$ . Affinché l'evoluto (sul toro) "al tempo  $n$ " coincida con il punto iniziale  $x$  deve esistere un intero  $m$  tale che si abbia

$$x + n\alpha = x + m,$$

ovvero  $n\alpha = m$ , ovvero  $\alpha = m/n$ . Il viceversa è immediato.

Cosa avviene poi se  $\alpha$  è irrazionale? È un facilissimo esercizio, molto istruttivo, dimostrare che ogni punto iniziale dà luogo a un'orbita densa nel toro  $T^1$ ; questa proprietà viene detta *ergodicità topologica*.

**Dimostrazione.** La dimostrazione è la seguente. Denotiamo con  $\Phi$  la trasformazione. Si suddivide l'intervallo  $[0, 1)$  in  $q$  intervalli uguali, con  $q$  intero arbitrariamente grande, e prendiamo un punto iniziale arbitrario  $x_0$ . Consideriamo i primi  $q + 1$  punti dell'orbita. Poiché essi sono tutti distinti, ne esitono almeno due, diciamoli l'iterato  $n$ -esimo e l'iterato  $m$ -esimo di  $x_0$ , che appartengono a un medesimo subintervallo, e quindi distano tra loro di una quantità  $\epsilon < 1/q$  (larghezza di un subintervallo):

$$|\Phi^m x_0 - \Phi^n x_0| = \epsilon < \frac{1}{q}.$$

Con  $p = n - m$  (sia ad esempio  $n > m$ ), si ha allora

$$|x_0 - \Phi^p x_0| = \epsilon < \frac{1}{q}.$$

Poiché la trasformazione conserva la distanza tra due punti, si ha allora che la successione,  $\{x_{kp}\}$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , è tale che

$$|x_{(k+1)p} - x_{kp}| = \epsilon < \frac{1}{q}.$$

Per l'arbitrarietà di  $q$ , l'orbita è dunque densa.

Nel capitolo sulla teoria ergodica dimostreremo un risultato molto più forte, ovvero: per  $\alpha$  irrazionale ogni orbita non solo è densa ma, di più, è (asintoticamente) uniformemente distribuita. Con ciò si intende quanto segue. Per un assegnato numero  $n$  di iterazioni e un arbitrario aperto  $I$ , denotiamo con  $N(n, I)$  (quantità detta *tempo di soggiorno* nell'assegnato intervallo  $I$ ) il numero di volte che l'orbita *visita* l'intervallo  $I$  (cioè viene a trovarsi in  $I$ ). Allora per una traslazione del toro irrazionale si ha la proprietà che  $N(n, I)/n$  (tempo di soggiorno relativo) tende alla misura di  $I$  per  $n \rightarrow \infty$ . È questo il primo risultato di teoria ergodica (nell'usuale accezione riferita alla teoria della misura) che incontriamo.<sup>45</sup>

<sup>45</sup>Questo risultato permette di risolvere un problema posto in tutti i suoi libri da Arnol'd, ovvero determinare la distribuzione asintotica della prima cifra del numero  $2^n$  (la successione  $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \dots$ ). Si veda la discussione nell'appendice citata sopra.

Dunque, per lo standard map imperturbato  $\Phi_0$  la dinamica viene descritta nel modo seguente. Il toro  $T^2$  (lo spazio delle fasi) è fogliato in tori invarianti monodimensionali  $T^1$  corrispondenti alla costante del moto  $F(x, y) = y$ , ciascuno dei quali è dunque definito da una equazione  $y = c$ . La dinamica ristretta a ciascuno di tali tori invarianti è una traslazione del toro con costante di traslazione  $c$ . Per i tori con  $c$  irrazionale ogni punto iniziale dà luogo a un'orbita densa nel corrispondente toro (e addirittura distribuita uniformemente), mentre per  $c$  razionale,  $c = p/q$  ( $p, q$  interi,  $q > 0$ ) ogni punto dà luogo a un'orbita periodica di periodo  $q$ ; in altri termini, per  $c = p/q$  ogni punto del corrispondente toro è punto fisso del mapping  $\Phi_0^q = \Phi_0 \cdots \Phi_0$  ( $q$  volte). In particolare, il toro  $y = 0$  (equivalente a  $y = 1$ ) è costituito da un continuo di punti fissi del mapping  $\Phi_0$  stesso. L'ultimo teorema di Poincaré, congiunto col teorema KAM, ci mostrerà che, sotto perturbazione (cioè quando si passa a considerare il mapping  $\Phi_\epsilon$  con  $\epsilon > 0$  invece del mapping  $\Phi_0$ ), il destino dei singoli tori invarianti di  $\Phi_0$  è del tutto diverso secondo che la costante di traslazione sia razionale o irrazionale (o meglio *molto irrazionale*, si veda sotto).

**§5. Lo standard map perturbato.** La dinamica più semplice concepibile è quella del non movimento. Nel caso di un mapping  $\Phi$  questo avviene per i **punti fissi**, cioè per i punti  $\bar{x}$  che vengono inviati in se stessi:  $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$ . Nel caso di un'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  si parla di **punti di equilibrio o punti critici**: sono i punti  $\bar{x}$  in cui si annulla il campo vettoriale, in cui cioè  $f(\bar{x}) = 0$ .<sup>46</sup>

Andiamo dunque a ricercare i punti fissi dello standard map imperturbato  $\Phi_0$  e dello standard map perturbato  $\Phi_\epsilon$ . Per il mapping  $\Phi_0$  – definito da  $y' = y \pmod{1}$ ,  $x' = x + y \pmod{1}$  – la condizione di punto fisso si riduce a  $x' = x \pmod{1}$ , ovvero  $x = y + x \pmod{1}$ , ovvero  $y = 0$  con  $x$  arbitrario. Come già sappiamo, ritroviamo dunque che si ha un continuo di punti fissi, tutti i punti del toro  $y = 0$ .

Sinoti che, in generale, i punti fissi sono le soluzioni di due equazioni in due incognite, e quindi i punti fissi sono discreti. Invece, nel caso imperturbato una delle due equazioni è un'identità, e si resta quindi con una equazione in due incognite, che ammette un continuo di soluzioni. Invece, nel caso perturbato, tale situazione eccezionale non si presenta, e si resta con due equazioni in due incognite. La condizione di punto fisso è allora che esistano interi  $m, n$  tali che valga  $y' = y + m$ ,  $x' = x + n$ , ovvero

$$y + \epsilon \sin(2\pi x) = y + m \quad x + y + \epsilon \sin(2\pi x) = x + n.$$

La prima equazione induce spontaneamente a porre la limitazione  $0 \leq \epsilon < 1$ ,<sup>47</sup> e si ottiene dunque  $\sin(2\pi x) = 0$  ovvero  $x = 0$  (equivalente a  $x = 1$ ), oppure  $x = 1/2$ . Allora la seconda condizione fornisce (poiché si annulla il seno)  $y = n$ ,

<sup>46</sup>Ricordiamo che un movimento  $x = x(t)$  è soluzione dell'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  se vale  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  per ogni  $t$ . Dunque, se  $\bar{x}$  è tale che  $f(\bar{x}) = 0$ , allora per il movimento  $x(t) = \bar{x}$  si ha  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  per ogni  $t$ , cioè tale movimento è una soluzione.

<sup>47</sup>Siamo interessati al caso perturbativo, cioè con  $\epsilon$  piccoli

ovvero, riducendosi al quadrato fondamentale,  $y = 0$ . Dunque i punti fissi, da un infinito continuo che erano nel caso imperturbato (il toro  $T^1$  definito da  $y = 0$ ), si riducono ora, comunque piccolo sia  $\epsilon$ , a due soltanto, il punto  $P_1 = (0, 0)$  e il punto  $P_2 = (1/2, 0)$ . Possiamo dire che l'insieme dei punti invarianti si è "sgretolato": dall'essere un continuo (per  $\epsilon = 0$ ) si è ridotto a un insieme di soli due punti. Vedremo ora che tali due punti hanno carattere completamente diverso, essendo  $P_1$  di tipo iperbolico e  $P_2$  (almeno per  $\epsilon$  non troppo grandi, precisamente  $\epsilon < 2/\pi$  – si veda più avanti) di tipo ellittico, mentre i punti fissi costituenti un continuo nel caso imperturbato erano di tipo parabolico. Inoltre, l'ultimo teorema di Poincaré ci farà comprendere la ragione generale di questo "sgretolamento".<sup>48</sup>

Veniamo dunque alla caratterizzazione dei punti fissi, nel caso particolare che qui ci interessa, ovvero di un mapping di uno spazio bidimensionale in sé che conserva le aree. In generale, quando si è trovato un punto fisso  $\bar{x}$  di un certo mapping  $\Phi$  di uno spazio in sé, la prima cosa che si fa è di studiare la corrispondente linearizzazione, cioè si sostituisce la trasformazione  $\Phi$  con la trasformazione lineare definita dalla corrispondente matrice jacobiana valutata nel punto fisso  $\bar{x}$ .<sup>49</sup>

**§6. Classificazione delle trasformazioni lineari simplettiche piane.** Sia  $A$  una matrice due per due, con  $\det A = 1$ , e siano  $\lambda_1, \lambda_2$  i suoi autovalori.<sup>50</sup> Poiché si ha  $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ , la condizione di conservare l'area (detta anche di simpletticità) comporta  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ . Se poi si tiene conto che gli autovalori sono

<sup>48</sup>Il fatto che i due punti fissi sopravvissuti giacciono ancora sulla curva invariante, luogo dei punti fissi parabolici del caso imperturbato, e l'ulteriore fatto che i due punti fissi siano addirittura i medesimi al variare di  $\epsilon$ , sono invece due circostanze fortuite, casualmente presenti nello standard map.

<sup>49</sup>Ovvero, si scrive  $\Phi(x) = \Phi(\bar{x} + h) = \Phi(\bar{x}) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} \cdot h + R$ , dove  $R$  è un resto di ordine superiore al primo, e ci si arresta al primo ordine. Si noti che, mentre lo spazio delle fasi di partenza (il toro  $T^2$ , nel caso dello standard map) può essere una varietà nonlineare, qui il punto  $x$  viene scritto nella forma  $x = \bar{x} + h$  con  $h$  arbitrario in  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^2$  nel caso dello standard map). In altri termini, la matrice jacobiana

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{\bar{x}}$$

è pensata come un operatore lineare che agisce sullo spazio tangente (che è uno spazio lineare) alla varietà nel suo punto  $\bar{x}$ . Con abuso di notazione, denoteremo ancora il vettore  $h$  con  $x$ .

<sup>50</sup>Ricordiamo che si dice *equazione agli autovalori* un'equazione della forma

$$Ax = \lambda x,$$

dove  $A$  è un operatore lineare in  $\mathbb{R}^n$  (una matrice  $n \times n$ , in una base assegnata). Si cercano quindi i vettori  $x$  i cui trasformati sono paralleli al vettore di partenza: questi si chiamano autovettori (*eigenvectors*), mentre i corrispondenti numeri  $\lambda$  vengono detti autovalori (*eigenvalues*). L'equazione agli autovalori si scrive anche  $(A - \lambda I)x = 0$  (dove  $I$  è la matrice identità), e questa equazione omogenea ammette soluzioni nonbanali solo se è soddisfatta la condizione (detta talvolta *equazione caratteristica o secolare*)  $\det(A - \lambda I) = 0$ . È questa una equazione algebrica di secondo grado a coefficienti reali nell'incognita  $\lambda$ , ed allora tutti sanno che le soluzioni sono reali oppure complesse coniugate.

reali oppure complessi coniugati (perché gli elementi della matrice  $A$  sono reali), si trova allora evidentemente che si presenta **in generale** uno dei due seguenti casi:

1. **caso iperbolico**; gli autovalori sono reali, e allora sono entrambi positivi o entrambi negativi (caso iperbolico con riflessione), essendo ad esempio  $|\lambda_1| > 1$ ,  $|\lambda_2| = |\lambda_1^{-1}| < 1$ ;
2. **caso ellittico**; gli autovalori giacciono, nel piano complesso, sul cerchio unitario e hanno parte immaginaria diversa da zero ed opposta.

Si ha poi il **caso eccezionale parabolico** in cui i due autovalori coincidono, essendo  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  oppure  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Il nome di iperbolico o ellittico o parabolico è dovuto al fatto che in tutti e tre i casi gli iterati di un arbitrario punto iniziale giacciono su curve invarianti che sono rispettivamente iperboli, ellissi e parabole. Questo fatto si dimostra (e in maniera semplice) per tutte le matrici simplettiche. Qui basti ricordare i casi paradigmatici seguenti:

1. *rotazione iperbolica* (ad esempio con  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1/2$ )

$$x' = 2x, \quad y' = y/2,$$

(oppure  $x' = -2x$ ,  $y' = -y/2$ , caso iperbolico con riflessione), in cui si ha

$$x'y' = xy.$$

Dunque si ha la costante del moto  $F(x, y) = xy$ , e il piano è fogliato in curve invarianti che sono iperboli<sup>51</sup> (nel caso con riflessione è invariante l'insieme di due iperboli simmetriche rispetto all'origine);

2. *rotazione di angolo  $\alpha$*  ( $\lambda_1 = e^{i\alpha}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$ )

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

in cui si ha

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2.$$

Dunque si ha la costante del moto  $F(x, y) = x^2 + y^2$ , e il piano è fogliato in curve invarianti che sono cerchi aventi per centro l'origine.

Venendo infine ai **problemi di genericità e di eccezionalità**, si deve tenere presente che gli autovalori sono funzioni continue degli elementi di matrice. Quindi, se ad esempio una matrice è di tipo ellittico, sicché gli autovalori sono ad una certa distanza finita dall'asse reale, allora, pur di variare abbastanza poco gli elementi di matrice (ma sempre con la condizione  $\det A = 1$ ), gli autovalori

<sup>51</sup>È compreso anche il caso limite in cui le curve degenerano nell'asse  $x$  e nell'asse  $y$ .

resteranno ancora sul cerchio unitario a distanza finita dall'asse reale. In altri termini, nello spazio dei parametri (gli elementi di matrice) si ha che se un punto corrisponde a una matrice di tipo ellittico, allora esiste un intorno del punto considerato tale che tutti i suoi punti corrispondono a matrici ancora ellittiche. In tal caso si usa dire che si ha **stabilità strutturale** (cioè il tipo qualitativo è robusto): si veda Arnol'd, Capitoli supplementari, cap. 3. L'analoga proprietà di stabilità strutturale, o genericità, vale evidentemente anche per i punti iperbolici. In tal senso è ovvio che il caso parabolico è eccezionale. Se un punto dello spazio dei parametri corrisponde a una matrice parabolica, variando di poco i parametri si cadrà in generale in un caso ellittico o in un caso iperbolico, e sono eccezionali i cambiamenti di parametri che mantengono inalterato il tipo parabolico della matrice. Il variare del tipo qualitativo al variare dei parametri costituisce l'argomento della **teoria delle biforcazioni**. Si veda Arnol'd, Capitoli supplementari, cap. 6.

Fin qui abbiamo considerato il caso di una applicazione lineare simplettica del piano, il cui unico punto fisso è quindi l'origine. Quando si ha invece a che fare con un mapping nonlineare, e con un suo punto fisso  $\bar{x}$ , si considera la corrispondente matrice jacobiana in  $\bar{x}$ , e il punto fisso si dice iperbolico, ellittico o parabolico secondo la natura della corrispondente matrice jacobiana. Un fatto importante da osservare è che se si ha un continuo di punti fissi per il mapping nonlineare (simplettico), questi punti sono necessariamente parabolici. Il modo più intuitivo di comprendere questo fatto consiste nel considerare che, nell'approssimazione della linearizzazione, i punti situati in prossimità di un punto fisso ellittico o iperbolico devono necessariamente ruotare (in maniera standard o in maniera iperbolica), sicché al primo ordine non esistono altri punti fissi vicino ai punti fissi ellittici o iperbolici.<sup>52</sup>

Studiamo ora la natura dei due punti fissi  $P_1 = (0,0)$  e  $P_2 = (1/2,0)$  dello standard map perturbato, al variare del parametro  $\epsilon > 0$ . La matrice jacobiana (3) assume nei due punti la forma

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 1+2\pi\epsilon & 1 \\ 2\pi\epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

e rispettivamente

$$A(1/2,0) = \begin{pmatrix} 1-2\pi\epsilon & 1 \\ -2\pi\epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

<sup>52</sup>Questo argomento può essere reso rigoroso introducendo la nozione di *indice* di Poincaré di uno zero di un campo vettoriale (punto in cui il campo vettoriale si annulla), e nell'osservare che l'indice non dipende dalla perturbazione. Nel nostro caso, il campo vettoriale  $f(x)$  è definito da  $f(x) = \Phi(x) - x$ , che ha uno zero in un punto fisso  $\bar{x}$  di  $\Phi$ . Si veda Arnold-Avez, appendice 27, e una appendice a queste note (non ancora disponibile, nella presente versione delle note).



sicché si ha (dove  $\text{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$  è la traccia della matrice)

$$\frac{1}{2} \text{Tr}A(0,0) = 1 + \pi\epsilon, \quad \frac{1}{2} \text{Tr}A(1/2,0) = 1 - \pi\epsilon.$$

Ricordando che l'equazione caratteristica  $\det(A - \lambda I) = 0$  ha la forma esplicita  $\lambda^2 - (\text{Tr}A)\lambda + \det A = 0$ , ovvero nel nostro caso  $\lambda^2 - (\text{Tr}A)\lambda + 1 = 0$ , si trova che il discriminante è dato da  $(\frac{1}{2}\text{Tr}A)^2 - 1$ . Quindi, il punto  $P_1 = (0,0)$  è sempre iperbolico. Invece, il punto  $P_2 = (1/2,0)$  è ellittico per tutti gli  $\epsilon$  abbastanza piccoli. Precisamente esso resta ellittico per  $\pi\epsilon < 2$ , cioè per  $\epsilon < 2/\pi$ , mentre per  $\epsilon = 2/\pi$  si ha una *biforcazione*: il punto  $P_2$  ridiventa parabolico e al crescere di  $\epsilon$  diventa poi anch'esso, come  $P_1$ , iperbolico.

Veniamo da ultimo allo studio delle **orbite periodiche**. Abbiamo visto che, nel caso dello standard map imperturbato, su ogni toro  $T^1$  invariante, definito da  $y = c$  con  $c$  razionale,  $c = p/q$  ( $p, q$  interi con  $q > 0$ ), ogni punto iniziale dà luogo a un'orbita periodica di periodo  $q$ . Equivalentemente, possiamo dire che ogni punto del toro monodimensionale  $y = p/q$  è punto fisso per il mapping

$$\Psi_0 = \Phi_0^q, \quad \Phi_0^q := \overbrace{\Phi_0 \circ \dots \circ \Phi_0}^{q \text{ volte}}.$$

Dunque siamo ancora nel caso eccezionale di un continuo di punti fissi (ora per il mapping  $\Psi_0$  anziché per il mapping  $\Phi_0$ ), e ci si potrebbe attendere che tale situazione eccezionale non persista sotto perturbazione. Vedremo nel prossimo paragrafo come ciò sarà giustificato in virtù della visione generale che viene proposta dall'ultimo teorema di Poincaré. Infatti, secondo tale teorema, sotto perturbazione (cioè passando da  $\Psi_0$  a  $\Psi_\epsilon$ ) in generale un continuo di punti fissi si "sgretola" e permane soltanto un numero finito (pari) di punti fissi, alternativamente ellittici e iperbolici (come abbiamo verificato, mediante calcolo esplicito, nel caso particolare dello standard map per  $q = 1$ ). Ovviamente tali punti fissi del mapping  $\Psi_\epsilon = \Phi_\epsilon^q$  (che sono un insieme finito), corrisponderanno a orbite periodiche di periodo  $q$  del mapping  $\Phi_\epsilon$ .

**§7. L'ultimo teorema di Poincaré: il twist map.** Mostriamo ora, seguendo Poincaré, come si comprenda che, se si ha un mapping simplettico di un dominio piano e il mapping presenta un insieme di punti fissi parabolici (o di orbite periodiche paraboliche) costituente una curva continua, allora sotto perturbazione tale curva in generale si "sgretola" e si rimane con un numero finito, pari, di punti fissi (o di orbite periodiche), alternativamente ellittici ed iperbolici.

A tal fine consideriamo un esempio alquanto significativo, che è quello del *twist map* simplettico. Daremo poi un cenno di come si possa adattare questo caso particolare al caso dello standard map.

Cominciamo dunque con il twist map imperturbato, ovvero la *rotazione anisocrona del piano*. Con riferimento alle familiari coordinate polari  $r, \varphi$  del piano (con  $r > 0$ ), si tratta del mapping  $\mathcal{T}_0$  definito da

$$\begin{aligned} r' &= r \\ \varphi' &= \varphi + 2\pi\alpha(r) \pmod{2\pi}, \quad \text{con} \quad \frac{d\alpha}{dr} \neq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

su ogni circonferenza, di raggio  $r$ , si ha una rotazione di un angolo  $2\pi\alpha$ , con la proprietà che la rotazione varia al variare del raggio ( $\frac{d\alpha}{dr} \neq 0$ ). Dunque, se si fissa l'attenzione su un anello situato attorno a una circonferenza avente un certo raggio (diciamo  $r^*$ ), le rotazioni saranno maggiori sulle circonferenze di raggio maggiore, e minori su quelle di raggio minore (nel caso ad esempio in cui  $\frac{d\alpha}{dr} > 0$ ): a seguito della rotazione, un segmento  $\gamma$  ortogonale al cerchio (cioè disposto lungo un raggio) verrà allora trasformato in una curva inclinata (verso sinistra per  $r > r^*$ , verso destra  $r < r^*$ , nell'esempio considerato in cui  $\frac{d\alpha}{dr} > 0$ ). Di qui la qualifica di *twist* per il mapping.<sup>53</sup> Il caso perturbato è ora quello del mapping  $\mathcal{T}_\epsilon$  definito da

$$\begin{aligned} r' &= r + \epsilon f(r, \varphi) \\ \varphi' &= \varphi + 2\pi\alpha(r) + \epsilon g(r, \varphi) \pmod{2\pi}, \quad \text{con} \quad \frac{d\alpha}{dr} \neq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

dove le funzioni perturbanti  $f$  e  $g$ , periodiche di periodo  $2\pi$  nella variabile angolare  $\varphi$ , sono supposte tali da soddisfare la condizione che la trasformazione conservi le aree (come già avveniva per la trasformazione imperturbata  $\mathcal{T}_0$ ).

Dunque, per la trasformazione imperturbata la descrizione del mapping è quasi<sup>54</sup> del tutto equivalente a quella dello standard map imperturbato. Si ha una fogliazione continua in tori  $T^1$  invarianti (qui proprio i cerchi  $r = c$  con  $c > 0$ ), e su ogni toro invariante la dinamica si riduce a una traslazione del toro, con una costante di rotazione variabile da toro a toro. Si ha dunque un succedersi di traslazioni irrazionali (in cui ogni punto dà luogo a un'orbita densa, uniformemente distribuita), e di traslazioni razionali  $\alpha = p/q$  (con  $p, q$  interi,  $q > 0$ ); nel secondo caso ogni punto iniziale dà luogo a un'orbita periodica di periodo  $q$ , o equivalentemente è punto fisso per il mapping  $\mathcal{T}_0^q$ .

Fissiamoci ora su un certo raggio  $r$  con una certa traslazione razionale  $\alpha = p/q$ , e consideriamo il mapping

$$\Psi_\epsilon = \mathcal{T}_\epsilon^q$$

e il corrispondente mapping imperturbato  $\Psi_0 = \mathcal{T}_0^q$ . Sia  $\Gamma$  il cerchio corrispondente al raggio  $r$  considerato. Consideriamo poi un piccolo segmento  $\gamma$  (vedi Figura 1.14) trasversale al cerchio (disposto radialmente, e individuato da un certo angolo  $\varphi$ ), e sia  $P$  il punto di intersezione di  $\gamma$  con  $\Gamma$ . Come abbiamo già osservato, a causa dell'anisocronia il segmento  $\gamma$  viene trasformato in una curva

<sup>53</sup>La qualifica di *anisocrono* si riferisce al fatto che vengono dette isócrone le oscillazioni in cui il periodo non dipende dall'ampiezza ( $r$ ), come nel caso dell'oscillatore armonico.

<sup>54</sup>La differenza è illustrata più sotto.

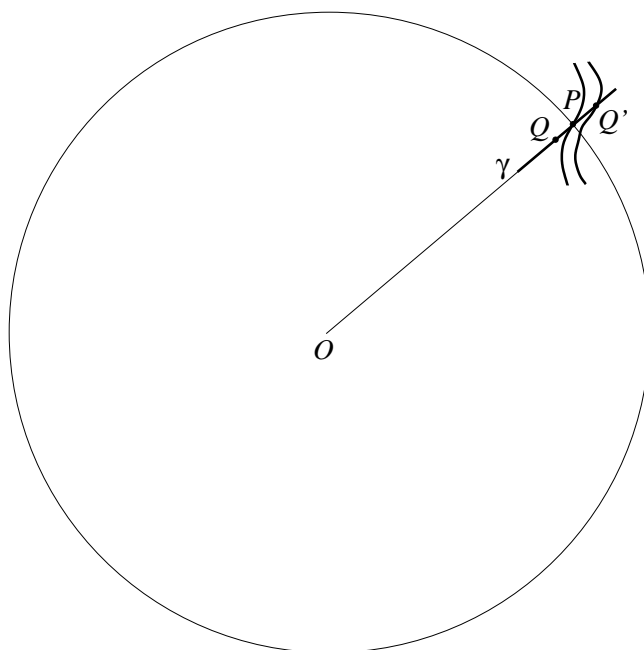


Figura 1.14: Dimostrazione dell'esistenza di un punto  $Q$  che si muove in modo puramente radiale.

$\Psi_0(\gamma)$  che è inclinata verso  $\Gamma$  ed interseca  $\Gamma$  nello stesso punto  $P$  in cui la intersecava  $\gamma$  (perché  $P$  è un punto fisso di  $\Psi_0$ ). Se ora consideriamo il corrispondente mapping perturbato  $\Psi_\epsilon$ , pur di prendere  $\epsilon$  abbastanza piccolo, semplicemente per continuità avverrà che il piccolo segmento trasversale  $\gamma$  sarà trasformato in una curva  $\Psi_\epsilon(\gamma)$  vicina quanto si vuole a  $\Psi_0(\gamma)$ , e dunque esiste un punto  $Q'$  (prossimo a  $P$ ) in cui le due curve  $\gamma$  e  $\Psi_\epsilon(\gamma)$  si intersecano. Si noti bene che però ora  $Q'$  non è punto fisso di  $\Psi_\epsilon$ . Quello che noi sappiamo di  $Q'$  è soltanto che esso “proviene” da un punto del segmento trasversale  $\gamma$ , diciamolo  $Q$ . Dunque quello che sappiamo è che sul segmento trasversale  $\gamma$  esiste un punto  $Q$  tale che il suo trasformato  $Q' = \Psi_\epsilon(Q)$  appartiene ancora a  $\gamma$ . È questo il primo risultato significativo che otteniamo: *in ogni direzione  $\varphi$  esiste un punto  $Q = Q(\varphi)$  che, sotto la trasformazione  $\Psi_\epsilon$ , viene trasformato radialmente, cioè viene trasformato in un punto  $Q'$  che ha lo stesso angolo  $\varphi$  di  $Q$ .*

La curva, luogo dei punti  $Q$  aventi tale proprietà di venire trasformati radialmente, è evidentemente una curva chiusa. Denotiamola con  $\Sigma$ .

Consideriamo ora la curva  $\Psi_\epsilon(\Sigma)$  ottenuta da  $\Sigma$  applicando il mapping  $\Psi_\epsilon$ . Il punto cruciale è che tale curva non può essere né completamente esterna né completamente interna alla curva di partenza  $\Sigma$ , semplicemente per il fatto che la trasformazione conserva l'area, e l'area sarebbe maggiore oppure minore di quella racchiusa da  $\Sigma$  se la curva trasformata fosse tutta esterna o tutta interna a  $\Sigma$ . Dunque le due curve  $\Sigma$  e  $\Psi_\epsilon(\Sigma)$  in generale debbono intersecarsi (il caso

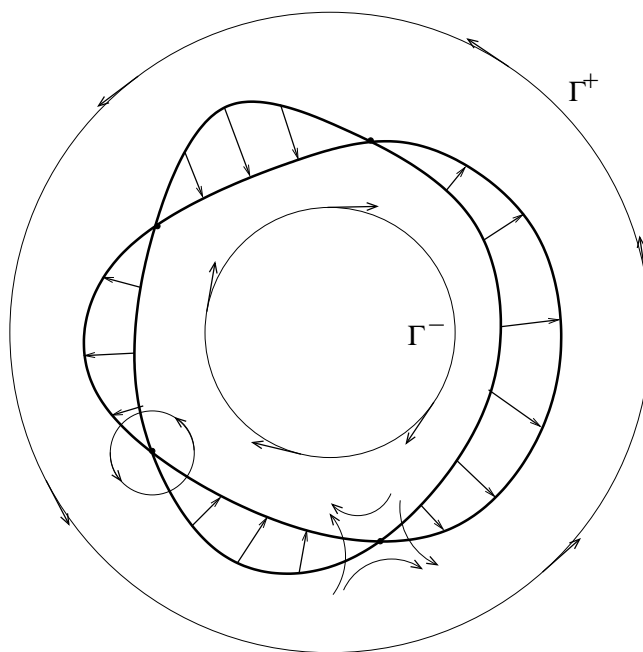


Figura 1.15: Dimostrazione dell'esistenza di punti fissi per il twist-map (Da V.I. Arnold, A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*).

in cui le due curve coincidono è eccezionale), e in un numero pari (diciamo  $2k$ ) di punti (un semplice ragionamento mostra poi che  $k$  è un multiplo di  $q$ ).<sup>55</sup> Si ha pertanto che, in luogo del continuo di punti fissi sotto  $\Psi_0$ , si hanno ora  $2k$  punti fissi sotto la trasformazione  $\Psi_\epsilon$ . Una semplice ispezione della figura in cui si rappresentano la curva  $\Gamma$  (con il suo verso di rotazione) e si tracciano delle frecce per mostrare se, nei pressi dei punti fissi, i punti di  $\Sigma$  vengono inviati (radialmente) verso l'esterno o verso l'interno, convince immediatamente del fatto che questi punti fissi di  $\Psi_\epsilon$  sono alternativamente ellittici ed iperbolici.

Naturalmente, come già detto sopra, potrebbe presentarsi anche il caso in cui le due curve  $\Sigma$  e  $\Psi_\epsilon(\Sigma)$  coincidano, nel qual caso si avrebbe ancora un continuo di punti fissi parabolici. Ma dovrebbe essere ovvio che questo ultimo caso è eccezionale.

In conclusione, possiamo dire di avere dimostrato una versione particolare dell'ultimo teorema di Poincaré nella forma seguente (Arnol'd-Avez, paragrafo 20)

**Teorema 1 (Ultimo teorema di Poincaré (per il twist map))** *Nel passaggio dal twist map conservativo imperturbato  $\mathcal{T}_0$  a quello perturbato  $\mathcal{T}_\epsilon$ , "in generale" avviene che tutti i tori invarianti di  $\mathcal{T}_0$  corrispondenti a traslazioni razionali  $\alpha = p/q$  si "sgretolano". In luogo di ognuno di tali tori restano un numero finito  $2k$  di orbite*

<sup>55</sup>Infatti, se un punto  $A$  è punto fisso per  $\Psi_\epsilon$ , allora lo è anche  $\Phi_\epsilon^n A$  con  $n = 0, 1, \dots, q-1$ .

periodiche di periodo  $q$  sotto  $\Phi_\epsilon$ , cui corrispondono punti fissi del mapping  $\Psi_\epsilon = \mathcal{T}_\epsilon^q$ , alternativamente ellittici e iperbolici.

Vedremo nel seguito di questo capitolo che, nei “buchi” che si vengono a trovare tra i  $2k$  punti fissi di  $\Psi_\epsilon$ , si inseriscono le varietà stabili ed instabili corrispondenti ai punti fissi iperbolici di  $\Psi_\epsilon$ , e che i corrispondenti punti omoclini daranno origine a orbite caotiche del tipo di quelle che si osservano nello standard map.

Abbiamo dunque compreso, mediante l'ultimo teorema di Poincaré, che cosa succede, sotto perturbazione, ai tori invarianti “razionali” del twist map imperturbato. È ora spontaneo domandarsi quale è invece il destino, sotto perturbazione, dei tori invarianti di  $\mathcal{T}_0$  con costante di rotazione irrazionale. A questa domanda risponde il celebre teorema di Kolmogorov del 1954 (specialmente nella sua versione datagli da Moser nel 1961, che riguarda proprio una situazione similissima a quella qui considerata, del twist map). Possiamo enunciare il teorema nella forma seguente

**Teorema 2 (Teorema KAM (per il twist map))** *Consideriamo un toro invariante per il twist map imperturbato, con corrispondente costante di rotazione  $\alpha$  irrazionale. Sia inoltre  $\alpha$  “molto irrazionale”, nel senso che esso sia un numero “di classe  $(K, \sigma)$ ” come definito sotto. Allora, per  $\epsilon$  abbastanza piccolo<sup>56</sup> esiste un toro invariante per il mapping perturbato  $\mathcal{T}_\epsilon$  che è una piccola deformazione del toro imperturbato considerato<sup>57</sup>. Infine, la misura (di Lebesgue) dell'insieme dei tori invarianti del sistema perturbato (si pensi al twist map ristretto a un dominio di misura finita) tende alla misura piena nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

Come già ricordato, la dimostrazione del teorema KAM fu data da Kolmogorov (nell'ambito della teoria delle perturbazioni per sistemi hamiltoniani prossimi a sistemi integrabili) nel 1954, in un lavoro intensissimo, costituito da un piccolissimo numero di pagine, non ben compreso dalla comunità matematica. Una dimostrazione nello stesso ambito (ma di tipo più generale) fu data nel 1963 dal suo allievo Arnol'd, mentre una dimostrazione nel corrispondente problema dell'esistenza di tori invarianti per un mapping del tipo del twist map fu data da Moser nel 1961. Una dimostrazione a livello piuttosto elementare, che ricalca quasi esattamente quella originaria di Kolmogorov, fu data attorno al 1980 da Benettin, Galgani, Giorgilli e Strelcyn in un articolo sul Nuovo Cimento (si veda anche la successiva modificazione datane da Yliashenko, un allievo di Arnol'd, nel 2004). Il modo più semplice di comprendere la sostanza matematica del problema consiste nel comprendere la dimostrazione di un problema apparentemente diverso, ovvero quello della *riduzione analitica dei diffeomorfismi analitici*

<sup>56</sup>Cioè esiste  $\epsilon^* > 0$  tale che la proprietà enunciata vale per  $\epsilon < \epsilon^*$ .

<sup>57</sup>Inoltre, la dinamica ristretta al toro invariante perturbato è prossima, in senso opportuno, a quella sul corrispondente toro imperturbato.

della circonferenza ad una rotazione. Questa dimostrazione si trova in Arnol'd, Capitoli supplementari, Cap. 3. paragrafo 12.

**Intermezzo: i numeri irrazionali di classe  $(K, \sigma)$ .** Resta da definire cosa si intende per numero irrazionale di classe  $(K, \sigma)$  (Arnol'd, Capitoli supplementari, Cap 3, paragrafo 12).

**Definizione.** Un numero irrazionale  $\alpha$  viene detto di classe  $(K, \sigma)$  (con  $K > 0, \sigma > 0$ ) se si ha

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{K}{|q|^{2+\sigma}}$$

per ogni coppia di interi  $p, q$  (con  $q \neq 0$ ). Il significato di questa definizione può essere meglio apprezzato se si ricorda un teorema classico sull'approssimazione dei numeri irrazionali mediante razionali, per la dimostrazione del quale si fa uso del noto algoritmo delle frazioni continue (ovvero dell' algoritmo di Euclide) (Arnol'd, Capitoli supplementari, Cap 3, paragrafo 11 I).

**Teorema.** Per ogni numero irrazionale  $\alpha$  esiste una approssimazione razionale esatta quanto si vuole, il cui errore è inferiore all'inverso del quadrato del denominatore:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Dunque abbiamo illustrato come (per il teorema di Kolmogorov) nel twist map esistano delle curve invarianti monodimensionali (tori) con dinamica del tipo della traslazione irrazionale del toro (ripartizione uniforme), mentre (per l'ultimo teorema di Poincaré) nella regione a forma di anello contenuta tra due tali curve esistono orbite periodiche di opportuno periodo, alternativamente di carattere ellittico e iperbolico. Abbiamo anche detto che mostreremo come le orbite iperboliche diano origine alla "regione caotica", con il meccanismo del punto omoclino di Poincaré. Vogliamo ora illustrare un ulteriore interessantissimo fenomeno, che chiameremo il fenomeno delle scatole dentro le scatole, all'infinito.

**Intermezzo: boxes into boxes, in infinitum.**<sup>58</sup> Le curve invarianti di Kolmogorov di cui abbiamo finora parlato (quelle "molto irrazionali", con dinamica ergodica) sono piccole perturbazioni di quelle corrispondenti al mapping imperturbato  $\mathcal{T}_0$ , che compiono un giro completo attorno al punto fisso centrale, l'origine delle coordinate. Consideriamo ora un'orbita periodica avente un opportuno periodo  $q$  (originata per sgretolamento da una curva invariante imperturbata "razionale"), che si trova tra due tori invarianti

<sup>58</sup>La visione di questo fenomeno è fortemente impressa nella mente del più anziano dei presenti autori. Infatti nel 1971 egli compì, insieme al suo amico e maestro Antonio (Tonino) Scotti, una visita a Moser, che allora si trovava all'Institute for Advanced Studies a Princeton. Durante una lunghissima conversazione, Moser passò un certo tempo a tracciare sulla lavagna, di plastica verde, una figura illustrante il twist map, con i corrispondenti punti fissi iperboliche ed ellittici sotto un opportuno iterato del mapping, e andando poi a concentrarsi attorno a uno di tali punti ellittici, insistendo sul fatto che in tale regione (box) si ripeteva la stessa situazione che si aveva attorno al punto fisso centrale, e così via, all'infinito. Una analoga figura è la figura 20.10 di Arnol'd-Avez (paragrafo 20).

KAM del tipo appena descritto. Fissiamoci poi su un particolare punto  $P$  di tale orbita. Abbiamo ripetutamente osservato che  $P$  è punto fisso, che può essere iperbolico od ellittico, del mapping  $\Psi_\epsilon = \mathcal{T}_\epsilon^q$ . Prendiamo  $P$  di tipo ellittico. Ma allora, rispetto al mapping  $\Psi_\epsilon$ , il punto  $P$  si trova in una situazione del tutto analoga a quella dell'origine,<sup>59</sup> punto fisso ellittico per  $\mathcal{T}_\epsilon$ . Dunque quanto avveniva per l'origine relativamente a  $\Phi_\epsilon$  avviene ancora nella scatola attorno a  $P$  relativamente a  $\Psi_\epsilon$ , con tori invarianti che girano attorno a  $P$  e orbite periodiche ellittiche e orbite periodiche iperboliche (con le corrispondenti regioni caotiche), e così via, all'infinito. Si presenta in tal modo una struttura che si ripete ad ordini successivi arbitrariamente alti, con la caratteristica che ogni ordine coinvolge un dominio di misura decrescente al crescere dell'ordine.<sup>60</sup>

È ora spontaneo domandarsi se la discussione appena compiuta della dinamica del twist map sia applicabile all'esempio dello standard map, sul quale avevamo concentrato la nostra attenzione. La possibilità di questa applicazione può essere considerata in relazione a due diverse situazioni.

1. La prima riguarda il punto fisso ellittico  $P_2 = (1/2, 0)$  dello standard map, perché sembrerebbe spontaneo congetturare che la dinamica del twist map descriva qualitativamente bene quella dello standard map attorno a tale punto fisso ellittico. Ora, il fatto che tale punto sia ellittico, significa per definizione che la dinamica, al primo ordine nella distanza dal quel punto, è una rotazione (si pensi pure, per semplicità, a una rotazione in senso proprio, cioè su cerchi anziché su ellissi). Ma la rotazione è per definizione isocrona, cioè avviene con un angolo di rotazione che è indipendente dall'ampiezza (analogamente a quanto avviene nell'oscillatore armonico, in cui il periodo di rotazione è indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione). Dunque la rotazione non è di tipo twist, e le considerazioni fatte sopra non si applicano direttamente. La via d'uscita consiste nel prendere in considerazione la nonlinearità, che dovrebbe condurre a un anisocronismo, come si verifica nel caso del pendolo rispetto al caso della sua linearizzazione attorno all'origine (l'oscillatore armonico). La situazione è infatti la seguente. Se si considera la trasformazione completa, non dunque nella sua approssimazione lineare, allora esiste un celebre teorema di Birkhoff sulle *forme normali* il quale asserisce che *in generale* si può trovare un cambiamento di variabili sotto il quale il mapping nonlineare assume la forma di un twist map. È questo un argomento di notevole interesse, che si trova discusso in Arnol'd, Capitoli supplementari, cap. 5 (*forme normali*), sul quale speriamo di potere ritornare in seguito.

<sup>59</sup>A dire il vero, la situazione è *quasi* del tutto analoga: si tratta della proprietà di twist. Ritorniamo su questo punto subito sotto.

<sup>60</sup>La misura di tali regioni ai vari ordini fu stimata per primo da Contopoulos. In seguito ne fu fatto un uso interessante da Chirikov. Si noti che la presenza di una orbita periodica come quelle qui considerata viene spesso descritta, in ambito fisico, come corrispondente ad una situazione di *risonanza*. Cercheremo di illustrare la ragione di questo fatto nel seguito di queste note.

2. La seconda situazione riguarda, anziché i tori centrati sul punto fisso ellittico del sistema perturbato, i tori invarianti dello standard map imperturbato che, come è già stato osservato per inciso, appaiono svolgere un ruolo analogo ai tori invarianti del twist map imperturbato. Si noti che nel caso dello standard map la proprietà di twist è già presente nell'approssimazione imperturbata, poiché la costante di traslazione del toro coincide con il valore dell'ordinata  $y$  che definisce il toro stesso, e pertanto varia al variare del toro. Sembrerebbe dunque che si potesse applicare direttamente l'ultimo teorema di Poincaré a tale situazione. Ciò però non è completamente vero. Il problema consiste nel modo in cui viene utilizzata, nella dimostrazione del teorema, la proprietà di conservazione delle aree. Nel caso del twist map le curve invarianti imperturbate, essendo curve che circondano l'origine, hanno la proprietà di "racchiudere" un'area, mentre ciò non è vero nel caso dello standard map (è proprio la natura topologica del toro che consente questo fatto)<sup>61</sup>. D'altra parte la proprietà di racchiudere un'area viene proprio utilizzata nella dimostrazione dell'ultimo teorema (il trasformato di  $\Sigma$  non può essere né esterno né interno a  $\Sigma$ ). L'estensione della dimostrazione al caso presente richiede dunque un adattamento, che qui non abbiamo tempo di esporre, e che lasciamo come esercizio al lettore volenteroso.

**§8. Il teorema della varietà stabile e i punti omoclini di Poincaré .** Abbiamo dunque compreso come siano eccezionali i sistemi cosiddetti integrabili, di cui un tipico esempio è lo standard map imperturbato  $\Phi_0$ , con la sua costante del moto  $F(x, y) = y$  e la corrispondente fogliazione dello spazio delle fasi  $T^2$  in un continuo di tori monodimensionali invarianti  $y = c$ . Sotto perturbazione (cioè passando a  $\Phi_\epsilon$ ) il continuo di tori invarianti si sfalda: soltanto i tori con traslazione "molto irrazionale" mantengono il loro carattere di varietà invarianti, deformandosi leggermente. Invece tutti i tori imperturbati con traslazione razionale  $p/q$  si sgretolano, e al loro posto restano un certo numero pari ( $2k$ ) di orbite periodiche di periodo  $q$ , ciascun punto delle quali è punto fisso sotto  $\Phi_\epsilon^q$ , e questi punti fissi sono alternativamente ellittici ed iperbolici. Attorno a ciascuno di questi punti fissi ellittici si origina un twist map, così da dare inizio a una catena che in generale si riproduce all'infinito (meccanismo delle scatole dentro le scatole). Vogliamo ora illustrare invece cosa succede attorno ai punti iperbolici. Si presenta qui in effetti il meccanismo del punto omoclinico di Poincaré, che è alla base della proprietà stessa di caoticità.

Conviene considerare il caso abbastanza generale di una applicazione  $\Phi$  di una varietà  $M$  di dimensione  $n$  in sé,  $\Phi: M \rightarrow M$ . Ammettiamo che  $\Phi$  sia invertibile, cioè esista  $\Phi^{-1}$ ; ciò comporta che in ogni punto  $x$  di  $M$  la matrice jacobiana corrispondente a  $\Phi$  ha determinante diverso da 0. Sia  $\bar{x}$  un punto fisso di  $\Phi$ , cioè tale che  $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$ , e sia  $A$  la corrispondente matrice jacobiana in  $\bar{x}$ . Si dà allora la

<sup>61</sup>Se si pensa al toro come a una ciambella, allora questa fatto è ancora più evidente.



**Definizione 1** La matrice  $A$  è detta iperbolica se tutti i suoi autovalori  $\lambda_i$  hanno modulo diverso da 1, ovvero si ha  $|\lambda_i| \neq 1$ . Il corrispondente punto fisso  $\bar{x}$  di  $\Phi$  viene allora detto iperbolico.

Si osservi che nel caso particolare in cui  $n = 2$  e il mapping è симплектический (cioè conserva le aree, sicché  $\det A = 1$ ), che è il caso dello standard map, la presente definizione di iperbolicità si riduce a quella data in quel caso. Lì si aveva in più la proprietà  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , e quindi la condizione di iperbolicità comportava che gli autovalori fossero reali, e dunque uno maggiore, l'altro minore di 1.

**Lo spazio lineare stabile (o contraente)  $E^+ \equiv E^s$  e quello instabile (o dilatante)  $E^- \equiv E^u$ .** Mettiamo ora in luce la proprietà più significativa della dinamica linearizzata attorno a un punto fisso iperbolico, cioè della dinamica determinata dalla corrispondente matrice jacobiana  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sappiamo che ad ogni autovalore  $\lambda_i$  corrisponde un autospazio  $E_i \subset \mathbb{R}^n$ , con la proprietà  $Ax = \lambda_i x$  se  $x \in E_i$ . Denotiamo ora con  $E^+ \equiv E^s$  (vedremo fra poco il significato dei simboli  $+$  ed  $s$ ) la somma diretta degli autospazi relativi agli autovalori  $\lambda_i$  con  $|\lambda_i| < 1$ : lo chiamiamo *spazio lineare contraente (o stabile)*. La ragione del nome contraente è ovvia: se  $x \in E^+$ , allora  $\|Ax\| < \|x\|$ , ovvero applicando  $A$  ad un vettore di  $E^+$  il vettore si accorcia. Così anche gli iterati successivi diventano sempre più corti (e in maniera esponenziale), tendendo al vettore nullo. È pertanto chiaro che lo spazio lineare  $E^+$  può anche essere caratterizzato nella maniera seguente:<sup>62</sup>

$$E^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : A^n x \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty\}, \quad (13)$$

ovvero lo spazio contraente è l'insieme di tutti e soli i vettori  $x$  di  $\mathbb{R}^n$  che danno luogo a un'orbita  $\{x_n\}$  (con  $x_{n+1} = Ax_n$ ) che cade sull'origine per  $n \rightarrow +\infty$ . Di qui la ragione del simbolo  $+$  in  $E^+$  (perché ricorda  $n \rightarrow +\infty$ ).

Analogamente denotiamo con  $E^- \equiv E^u$  la somma diretta degli autospazi  $E_i$  con  $|\lambda_i| > 1$ . Lo chiamiamo *spazio lineare dilatante (o instabile, ingl. unstable)*. Esso è evidentemente caratterizzato dalla proprietà

$$E^- = \{x \in \mathbb{R}^n : A^n x \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow -\infty\}. \quad (14)$$

Di qui la ragione del simbolo  $E^-$ : i punti di  $E^-$  cadono sull'origine per tempi negativi. Si noti bene che sarebbe forse più spontaneo dire che i punti di  $E^-$  si allontanano dall'origine per tempi positivi. Ma essendo la matrice  $A$  per ipotesi invertibile, si può equivalentemente dire che lo spazio dilatante di  $A$  coincide con lo spazio contraente di  $A^{-1}$ .<sup>63</sup> Quanto ai nomi di stabile ed instabile (usati rispet-

<sup>62</sup>Qui l'intero  $n$  appare con due significati diversi, in  $\mathbb{R}^n$  e come indice di iterazione. Questa confusione verrà eliminata in una prossima versione.

<sup>63</sup>La ragione della preferenza per questa scelta sta nel passaggio al nonlineare che vedremo subito sotto. Infatti, nel caso lineare i punti di  $E^-$  effettivamente si allontanano dall'origine, ma passando al nonlineare tale proprietà sarà vera solo per i punti iniziali sufficientemente vicini al punto fisso,

tivamente per  $E^+$  ed  $E^-$ ), essi fanno evidente riferimento al cadere sull'origine o al fuggirne via (per tempi positivi).

Ovviamente, l'esempio più semplice è quello che si ha nel caso tipico della matrice simplettica iperbolica

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

in cui  $E^+$  coincide con l'asse  $x$  ed  $E^-$  coincide con l'asse  $y$ .

Nel caso generale di  $\mathbb{R}^n$ , poiché gli autospazi corrispondenti a tutti i possibili autovalori  $\lambda_i$  di  $A$  esauriscono tutto lo spazio  $\mathbb{R}^n$  (proprio per l'ipotesi di iperbolicità), avremo allora che la iperbolicità della matrice  $A$  corrisponde alla fondamentale proprietà geometrica

$$\mathbb{R}^n = E^+ + E^-.$$

Ciò significa che ogni vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  è univocamente decomposto nella somma di due altri, di cui uno viene contratto, l'altro dilatato, sotto l'applicazione  $A$ , ovvero

$$\mathbf{x} = x + y, \quad x \in E^+, \quad y \in E^-,$$

con le proprietà  $A^n x \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $A^n y \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow -\infty$ .

**Il teorema della varietà stabile (locale).** Prendiamo ora in considerazione il contributo della parte nonlineare di  $\Phi$  in prossimità di un suo punto fisso iperbolico. La proprietà qualitativa più significativa messa in luce da Poincaré a questo proposito è quella che possiamo colloquialmente descrivere con le seguenti parole: la dinamica attorno ai punti fissi iperboliche è localmente robusta, ovvero in regioni abbastanza prossime al punto fisso il contributo nonlineare non altera sostanzialmente la dinamica rispetto a quella linearizzata.

Questa affermazione può essere resa precisa facendo riferimento a un teorema noto come *teorema di Hartmann–Grobman*. Qui invece faremo riferimento alla formulazione originaria di Poincaré, ai nostri fini più significativa, che va sotto il nome di *teorema della varietà stabile*. Possiamo enunciarlo nel modo seguente:

**Teorema 3 (della varietà stabile locale.)** *Sia  $\bar{x}$  un punto fisso di un mapping  $\Phi$  in  $\mathbb{R}^n$ , invertibile. Sia poi  $\bar{x}$  iperbolico, e sia  $E^+$  il corrispondente spazio lineare contraente (o stabile). Restringiamo ora l'attenzione a un intorno  $U \subset \mathbb{R}^n$  di  $\bar{x}$  sufficientemente piccolo,<sup>64</sup> e consideriamo l'insieme  $W_U^+(\bar{x}) \subset U$  definito da*

$$W_U^+(\bar{x}) = \{x \in U : \Phi^n(x) \in U \forall n \geq 0, \Phi^n(x) \rightarrow \bar{x} \text{ per } n \rightarrow +\infty\}. \quad (15)$$

e per i loro iterati con grande  $n$  non si potrà dire nulla in generale; invece la caratterizzazione mediante l'andamento asintotico dell'orbita per tempi negativi sarà proprio una caratteristica del punto fisso.

<sup>64</sup>Questo è l'aspetto locale del teorema. Si dovrebbe dire: "Allora esiste un intorno  $U$  di  $\bar{x}$  tale che ...".

Allora risulta che  $W_U^+(\bar{x})$  è una varietà<sup>65</sup> che ha la stessa dimensione di  $E^+$ , passa per il punto  $\bar{x}$  e ivi è tangente allo spazio lineare contraente  $E^+$ . Inoltre la varietà è “un grafico”: se  $\mathbf{x}$  è una coordinata in  $E^+$  e  $\mathbf{y}$  una coordinata in  $E^-$ , allora la varietà  $W_U^+$  è definita da una funzione  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$  (cioè la varietà non può “ripiegarsi” (to fold) sopra  $E^+$ ).

La varietà  $W_U^+(\bar{x})$  viene detta *varietà stabile locale* del punto fisso  $\bar{x}$ . Un teorema analogo vale per la *varietà instabile locale*  $W_U^-(\bar{x})$  di  $\bar{x}$ , definita da

$$W_U^-(\bar{x}) = \{x \in U : \Phi^n(x) \in U \forall n \leq 0, \Phi^n(x) \rightarrow \bar{x} \text{ per } n \rightarrow -\infty\}. \quad (16)$$

La dimostrazione di questo teorema verrà data in un prossimo capitolo. Si troverà che la proprietà geometrica di iperbolicità del punto fisso  $\bar{x}$  di  $\Phi$  (con la corrispondente proprietà contrattiva di  $E^+$ ) si manifesterà nel fatto che un certo operatore agente in un certo spazio funzionale sarà un *operatore di contrazione*, nel consueto senso tecnico degli spazi funzionali.

Si noti la genialità del procedimento seguito da Poincaré. Egli ha considerato dapprima la matrice  $A$  linearizzante il mapping  $\Phi$  attorno al punto fisso, e per il corrispondente spazio lineare stabile  $E^+$  egli ha trovato una caratterizzazione, ovvero la (13), che ha potuto essere trasportata (localmente, cioè restringendosi all'intorno  $U$  di  $\bar{x}$ ) alla trasformazione nonlineare  $\Phi$ . Ciò è avvenuto mediante la definizione (15): infatti questa definizione coincide con quella (13) del caso linearizzato pur di fare intervenire la trasformazione nonlineare  $\Phi$  in luogo della sua linearizzazione  $A$ . È stato in tal modo definito un insieme che è invariante per tempi positivi (se  $x$  vi appartiene, tutta l'orbita *successiva* vi appartiene), cioè è costituita da *semiorbite positive*, e l'unione di queste semiorbite positive viene a costituire un insieme che è liscio (una superficie regolare), e in prossimità del punto fisso finisce coll'identificarsi con il corrispondente spazio lineare contraente  $E^+$ . Questo costituisce il passaggio locale dal lineare al nonlineare: localmente (in prossimità di  $\bar{x}$ ) esiste una superficie che è una piccola deformazione di  $E^+$  e che ha le analoghe proprietà dinamiche rispetto alla dinamica nonlineare, ovvero ogni suo punto dà luogo a un'orbita (meglio, a una semiorbita positiva) che cade (in un tempo infinito) sul punto fisso,

Vedremo ora come la piena nonlinearità del mapping  $\Phi$  si manifesti globalmente, cioè senza limitazioni ad un opportuno intorno  $U$  di  $\bar{x}$ . La cosa stupefacente è come la discussione proceda ora mediante argomentazioni di tipo qualitativo, assolutamente generali.

---

<sup>65</sup>Cioè una superficie regolare, precisamente della stessa classe di regolarità – ad esempio  $C^\infty$  – del mapping  $\Phi$ .

**Passaggio dal locale al globale.** A questo punto Poincaré elimina dunque la restrizione di considerare punti contenuti nell'intorno  $U$  di  $\bar{x}$ , e viene a considerare a priori tutto la varietà  $M$  su cui agisce il mapping. A tal fine, introduce gli insiemi  $W^+(\bar{x})$  e  $W^-(\bar{x})$  definiti da

$$W^+(\bar{x}) = \{x \in M : \Phi^n(x) \rightarrow \bar{x} \text{ per } n \rightarrow +\infty\}, \quad (17)$$

e

$$W^-(\bar{x}) = \{x \in M : \Phi^n(x) \rightarrow \bar{x} \text{ per } n \rightarrow -\infty\}, \quad (18)$$

che vengono detti senz'altro *varietà stabile* e *varietà instabile* del punto fisso iperbolico  $\bar{x}$  (e sono denotati anche con  $W^s(\bar{x})$ ,  $W^u(\bar{x})$ ).

La varietà stabile è dunque definita come l'insieme di tutti i punti  $x$  di  $M$  che danno luogo ad orbite che finiscono col cadere (in un tempo infinito) su  $\bar{x}$  per evoluzione a tempi positivi. Si tratta dunque di un insieme *invariante*, cioè costituito dall'unione di orbite: se un punto vi appartiene, tutta la sua orbita vi appartiene. Si noti bene come vi appartiene *tutta* l'orbita, sia per tempi positivi che per tempi negativi (nonostante che la proprietà definitoria si riferisca a tempi positivi). Se un punto appartiene all'insieme  $W^+(\bar{x})$ , vi appartiene anche ogni altro punto *da cui* esso proviene (cioè ogni suo antecedente). Questa proprietà fornisce un metodo *costruttivo*, sia teorico sia concreto – al calcolatore –, per costruire l'insieme  $W^+(\bar{x})$ : basta infatti iterare all'indietro l'insieme  $W_U^+(\bar{x})$ . Si ha così

$$W^+(\bar{x}) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \Phi^{-k} W_U^+(\bar{x}). \quad (19)$$

Il che vuol dire quanto segue, riferendoci per semplicità al caso  $n = 2$ . Osserviamo che  $W_U^+(\bar{x})$  è una curva che ha un estremo in  $\bar{x}$  stesso e dall'altra parte è aperta (perché  $U$  è stato preso aperto). Aggiungendole l'estremo superiore, otteniamo una curva, diciamola  $\gamma$ , che contiene i suoi estremi, di cui uno è il punto fisso  $\bar{x}$  e l'altro lo chiamiamo  $Q$ . Allora l'insieme  $\Phi^{-1}(\gamma)$  è un "prolungamento" di  $\gamma$ , cioè una nuova curva  $\gamma_1$  che si sovrappone a  $\gamma$  (perché  $\Phi^{-1}(\bar{x}) = \bar{x}$ ) e vi aggiunge un "intervallo", che è nient'altro che l'immagine inversa del tratto di  $\gamma$  delimitato dagli estremi  $\Phi(Q)$  e  $Q$ . Evidentemente questo nuovo insieme  $\gamma_1$  è una curva della stessa classe di regolarità di  $\gamma$  e del mapping  $\Phi$ . Analogamente poi si costruisce  $\gamma_2 = \Phi^{-1}\gamma_1 = \Phi^{-2}\gamma$ , e così via, aggiungendo man mano dei nuovi intervalli, ottenendo infine  $W^+(\bar{x})$ .

Questo procedimento costruttivo "ideale", teorico, viene reso concreto mediante l'uso del calcolatore. Nel caso dello standard map si considera il punto fisso iperbolico  $\bar{x} = P_1 = (0, 0)$ . Conoscendo la corrispondente matrice jacobiana  $A$ , possiamo determinare l'autospazio  $E^+$  corrispondente all'autovaleore ..., e si trova che  $E^+$  è individuato ad esempio dal vettore  $v^+ = \dots$  (si ricordi che è arbitraria la lunghezza del vettore che si può scegliere per individuare un autospa-

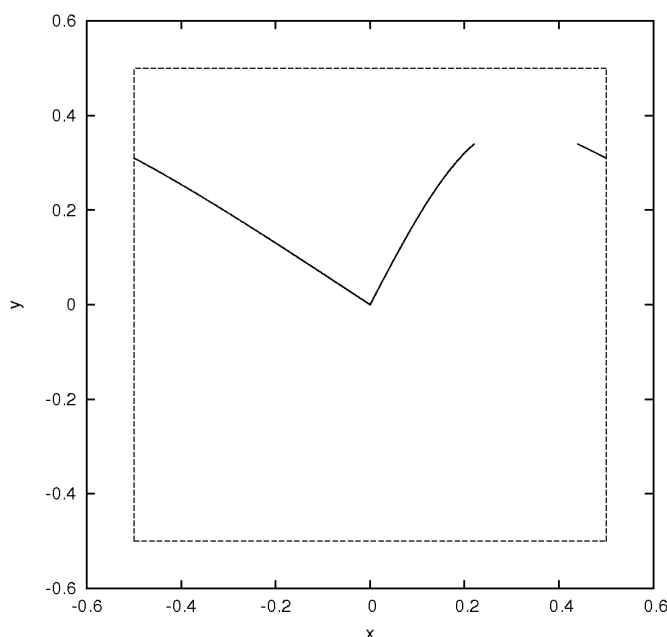


Figura 1.16: Le varietà stabili ed instabili per la standard map, con  $\epsilon = 0.2$ . Si è iterata la mappa (e la sua inversa) un numero di volte  $K = 9$ .

zio). Poiché sappiamo che la varietà locale  $W_U^+(\bar{x})$  si sovrappone definitivamente (man mano che ci si avvicina ad  $\bar{x}$ ) allo spazio lineare contraente  $E^+$ , prendiamo allora un certo numero  $N$  di punti distribuiti su  $E^+$ , sufficientemente vicini ad  $\bar{x}$ . Applichiamo poi in successione la trasformazione  $\Phi^{-1}$  un certo numero  $K$  di volte, e in tal modo costruiamo un insieme (finito, costituito da  $KN$  punti) che approssima la curva  $\gamma_K$ .<sup>66</sup> Il risultato del procedimento, applicato alla costruzione di  $W^+(\bar{x})$  e di  $W^-(\bar{x})$  è illustrato nella figura 1.16, in cui si sono presi  $N = 1000$  punti, disposti su  $E^+$  (ed altrettanti su  $E^-$ ) uniformemente distribuiti su di un segmento di lunghezza  $10^{-5}$ .

Il punto cruciale è che ora la nonlinearità del mapping  $\Phi$  ha modo di esprimersi completamente. Man mano che le successive applicazioni del mapping  $\Phi^{-1}$  allungano il tratto primitivo  $W_U^+(\bar{x})$ , la curva che si ottiene si allunga sempre più, e dunque, se la curva si allontana dal punto fisso  $\bar{x}$ , la nonlinearità di  $\Phi$  può assolutamente prevalere sulla parte lineare  $A$ . Si vedano le figure 1.17–1.21 (l'ultima delle quali è stata disposta all'inizio del capitolo, al fine di illustrare la celebre citazione di Poincaré ivi riportata) che, a fissato  $\epsilon = 0.2$ , si riferiscono a diversi valori del numero di iterazioni ( $K = 10 \div 14$ ). È facile convincersi, con puri argomenti di continuità, che la varietà stabile  $W^+(\bar{x})$  non può intersecarsi, e così pure la varietà instabile  $W^-(\bar{x})$  non può intersecare se stessa. Invece, nulla osta a che le due varietà abbiano in comune un punto, cioè nulla osta a che esi-

<sup>66</sup>Lavorando sul calcolatore, conviene cominciare col prendere  $K$  abbastanza piccolo.

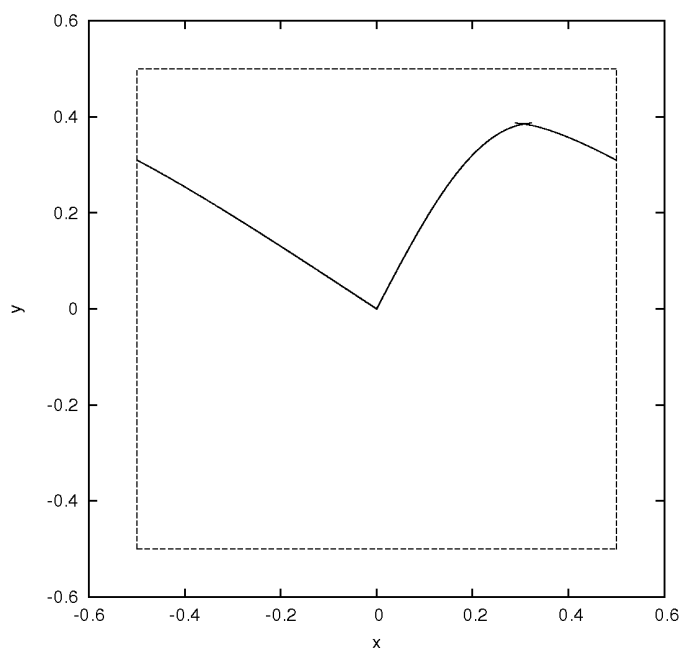


Figura 1.17: Le varietà stabili ed instabili per la standard map, con  $\epsilon = 0.2$ , dopo  $K = 10$  iterazioni. Notare il punto omoclino.

sta un punto, che chiamiamo *omoclino* e che denotiamo con  $\nu$ , con la proprietà  $\nu \in W^+(\bar{x})$ ,  $\nu \in W^-(\bar{x})$ . Ciò segue dalla definizione stessa di varietà stabile e di varietà instabile: il fatto che la semiorbita positiva di  $\nu$  finisca col cadere su  $\bar{x}$  non impedisce che essa “provenga” definitivamente dallo stesso  $\bar{x}$ . Anzi, può persino presentarsi il caso in cui le due varietà coincidano:  $W^+(\bar{x}) = W^-(\bar{x})$ . Questo caso è evidentemente eccezionale, ma non escluso. Questo in effetti è proprio il caso che si presenta nel pendolo, in connessione con le “separatrici” tra i moti di “librazione” e di “rotazione”; più in generale, vedremo che coincidenze di questo tipo si presentano nei casi di sistemi integrabili nonlineari. Queste varietà stabili che coincidono con varietà instabili vengono dette da Poincaré (nel caso  $n = 2$ ) curve “doppiamente asintotiche”, cioè asintotiche a un punto fisso iperbolico per tempi positivi, ma anche asintotiche a un punto fisso iperbolico (che può anche essere diverso dal primo) per tempi negativi.

Abbiamo dunque discusso il caso in cui una varietà stabile coincida con una varietà instabile (caso della separatrice). Ma il caso più generale che si presenta è quello in cui esista un punto  $\nu$  omoclino<sup>67</sup> senza che le corrispondenti varietà stabile ed instabile coincidano: può dunque succedere che esista  $\nu$  tale che sia  $\nu \in W^+(\bar{x})$ ,  $\nu \in W^-(\bar{x})$ , e invece  $W^+(\bar{x}) \neq W^-(\bar{x})$ .

È anzi questo il caso più generale, ed è proprio quello che dà luogo alla caoticità. Il punto cruciale consiste nel comprendere che, quando le varietà  $W^+(\bar{x})$

<sup>67</sup>O eteroclino, come si dice nel caso in cui si tratti di due punti iperbolici diversi.

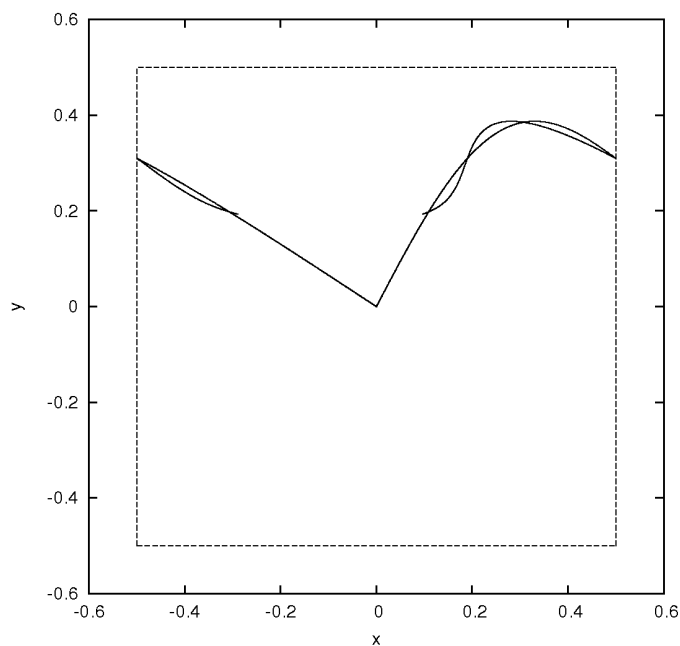


Figura 1.18: Le varietà stabili ed instabili per la standard map, con  $\epsilon = 0.2$ , dopo  $K = 11$  iterazioni.

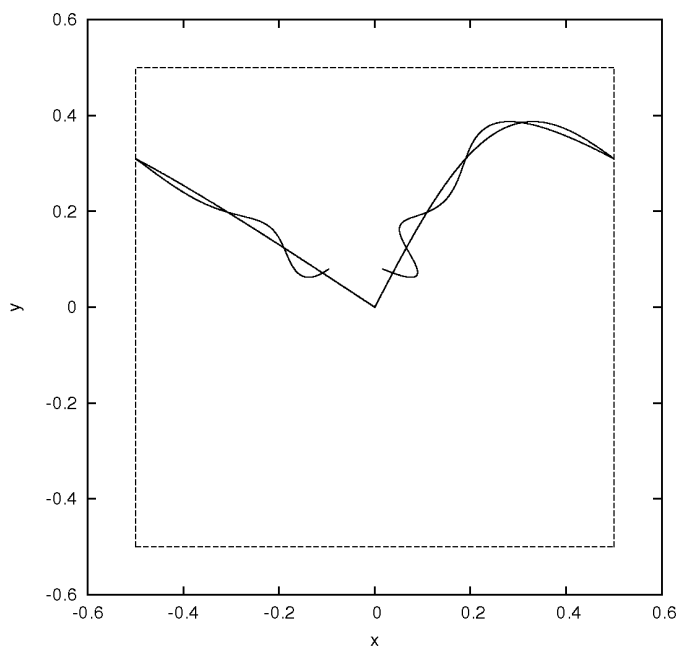


Figura 1.19: Le varietà stabili ed instabili per la standard map, con  $\epsilon = 0.2$ , dopo  $K = 12$  iterazioni.

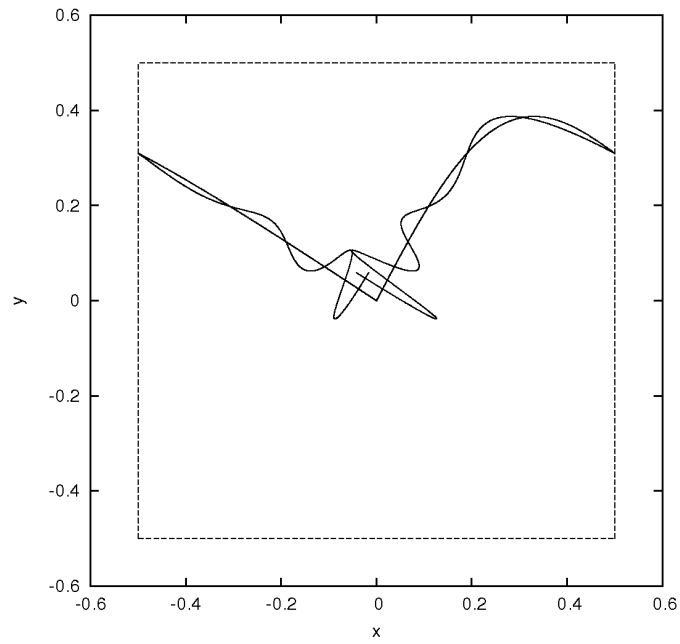


Figura 1.20: Le varietà stabili ed instabili per la standard map, con  $\epsilon = 0.2$ , dopo  $K = 13$  iterazioni.

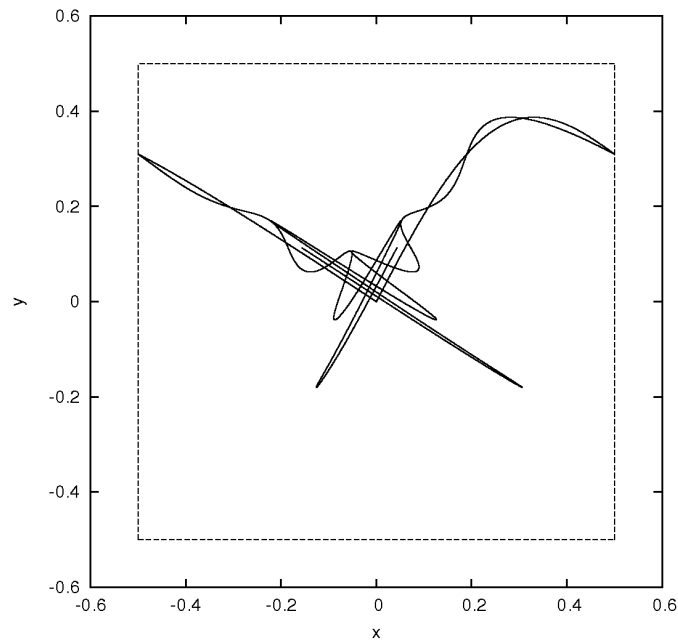


Figura 1.21: Le varietà stabili ed instabili per la standard map, con  $\epsilon = 0.2$ , dopo  $K = 14$  iterazioni. In questo caso si sono presi  $N = 10^4$  punti iniziali.



e  $W^-(\bar{x})$  si sono incontrate una volta nel punto omoclino  $\nu$ , allora esse danno inizio ad una danza congiunta in cui esse si intrecciano infinite volte. Questo è dovuto semplicemente al fatto che sia  $W^+(\bar{x})$  sia  $W^-(\bar{x})$  sono insiemi invarianti, cioè se contengono un punto (in questo caso il punto omoclino  $\nu$ ) allora contengono anche tutto l'orbita che quello genera. Dunque, se  $\nu$  appartiene ad entrambe le varietà, allora anche  $\nu_1 = \Phi(\nu)$  vi appartiene, come anche  $\Phi(\nu_1) = \Phi^2(\nu) \equiv \nu_2$  e così via, come anche  $\nu_{-1} = \Phi^{-1}(\nu)$ ,  $\Phi^{-1}(\nu_{-1}) = \Phi^{-2}(\nu) \equiv \nu_{-2}$  e così via all'infinito.

Si pensi al caso caratteristico in cui esista una separatrice per un certo mapping imperturbato  $\Phi_0$ ; allora esiste un teorema (noto come *teorema di Melnikov*, anche se esso può senz'altro ricondursi a Poincaré) che assicura che sotto perturbazione si ha uno "spezzamento (ingl. *splitting*)" della separatrice. Le due curve  $W^+(\bar{x})$  e  $W^-(\bar{x})$  non coincidono più, ma esiste un punto omoclino  $\nu$  in cui esse si *tagliano trasversalmente* (lo abbiamo visto nel caso del pendolo forzato): ciò vuol dire che in  $\nu$  le due curve  $W^+(\bar{x})$  e  $W^-(\bar{x})$  hanno due tangenti che non coincidono<sup>68</sup>

Sia dunque  $\nu$  un punto omoclino in cui le due curve  $W^+(\bar{x})$  e  $W^-(\bar{x})$  si tagliano trasversalmente. Allora le due curve si tagliano trasversalmente anche in  $\Phi(\nu)$ , in  $\Phi^2(\nu)$ , in  $\Phi^3(\nu)$  e così via, e si ha inoltre  $\Phi^n(\nu) \rightarrow \bar{x}$  per  $n \rightarrow +\infty$ . I punti  $\Phi^n(\nu)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  si dicono costituire l'*orbita omoclina*, e la semiorbita positiva ( $n > 0$ ) giace sulla varietà stabile, mentre la semiorbita negativa ( $n < 0$ ) giace sulla varietà instabile. Per comprendere pienamente quello che succede, occorre descrivere come evolve tutto il "segmento" che ha per estremi il punto omoclino  $\nu$  e il suo antecedente  $\Phi_{-1}(\nu)$ . Poiché  $\Phi(\nu) \in W^+(\bar{x})$ , l'iterato di tale segmento è costretto a piegarsi (ingl. *to fold*) affinché il suo estremo giaccia su  $W^+(\bar{x})$ . Si forma in tal modo un *lobo* (ingl. *lobe*). Anzi, è facile mostrare che in effetti si formano due lobi, ovvero che l'iterato del segmento considerato prende una forma come di lettera "esse", e attraversa la varietà stabile in un punto intermedio tra il punto omoclino  $\nu$  e il suo trasformato  $\Phi(\nu)$ .

Seguiamo ora gli iterati successivi di questo doppio lobo. Al crescere di  $n$  per  $n$  positivi, il punto  $\Phi^n(\nu)$  si avvicina sempre più al punto fisso  $\bar{x}$  lungo la varietà stabile (che definitivamente viene in pratica a sovrapporsi ad  $E^+$ ), e anche il doppio lobo "gli va dietro". Ma in prossimità del punto fisso i punti del doppio lobo prossimi all'evoluto del punto omoclino si vengono a trovare in prossimità della varietà instabile (ivi praticamente coincidente con  $E^-$ ), e quindi per continuità debbono muoversi sostanzialmente come i punti della varietà instabile stessa. Dunque debbono allontanarsi dal punto fisso "parallelamente" alla varietà instabile, in due rami separati, uno a destra, l'altro a sinistra della varietà stabile. Consideriamo il lobo che si trova dalla parte del ramo di  $W^-(\bar{x})$  che ha dato luogo al punto omoclino. Si ricordi ora che i punti di questo lobo, essendo essi stessi punti della varietà instabile, non possono attraversare tale ramo di varietà instabile, ed essendo in tal modo "chiusi" devono dunque rimanere "all'interno" della maglia (*loop*) formata dal punto fisso, dal punto omoclino, e

<sup>68</sup>E quindi definiscono due direzioni che sottendono il piano tangente alla varietà  $M$  in  $\nu$ .

dai due tratti di  $W^+(\bar{x})$  e  $W^-(\bar{x})$  che li congiungono. Con tale meccanismo, al crescere di  $n$  il lobo risale ancora verso il punto omoclino  $v$ , “parallelamente” al ramo suddetto della varietà instabile. Giunti in prossimità del punto omoclino  $v$ , il lobo incontra la varietà stabile  $W^+(\bar{x})$  che però può attraversare. Con tale meccanismo, dopo un sufficiente numero di iterazioni si viene a creare quello che si potrebbe chiamare una coppia di *punti omoclini di secondo ordine*. Da allora in poi si ripete il precedente procedimento di avvicinamento al punto fisso e di allontanamento da esso, con successive dilatazioni lungo la varietà instabile fino a che, dopo un sufficiente numero di iterazioni si crea una coppia di punti omoclini di terzo ordine, e così via all’infinito. A questo punto dovrebbe essere chiarito il significato della citazione di Poincaré riportata all’inizio di queste note, e non ci si dovrebbe meravigliare di come egli abbia affermato di *non cercare neppure di tracciare* queste curve, che la sua mente gli aveva mostrato. Alle persone normali queste figure apparvero sessanta anni dopo, prodotte da calcoli numerici. Si veda qui la Figura 1.1.

**§9. Il gatto di Arnol’d e i sistemi iperbolici (o di Anósov).** Abbiamo dunque visto quale sia l’importanza della varietà stabile e della varietà instabile di un punto fisso iperbolico, e abbiamo cominciato ad illustrare come l’intrecciarsi di queste due varietà determini delle figure che sembrerebbero rendere ragione dell’apparente caoticità che abbiamo visivamente riscontrato nei ritratti in fase dello standard map. In effetti, le figure ci avevano mostrato che le regioni di apparente caoticità per lo standard map si presentano proprio in corrispondenza del punto fisso iperbolico. Nel presente paragrafo illustriamo un esempio molto significativo, il celebre gatto di Arnol’d, avendo in mente tre obbiettivi. Il primo consiste nel mostrare un esempio concreto in cui la varietà stabile e quella instabile di un punto fisso iperbolico possono essere costruite, per così dire, a mano. Il secondo consiste nell’introdurre, proprio sulla base di tale esempio, la nozione di sistema completamente caotico, o iperbolico o di Anósov. Il terzo obbiettivo consiste nel mostrare come, in presenza di proprietà di iperbolicità, si possa proprio affermare di trovarsi in una situazione caotica, nello stesso senso che intendiamo quando ci troviamo in una situazione in cui tutto avviene “a caso”, come tipicamente nel gioco del testa e croce. Vedremo come questa proprietà sarà garantita dalla validità di un fondamentale teorema, che viene detto lemma dell’orbita pedinatrice (ingl. *shadowing lemma*).<sup>69</sup> Questo argomento ci introdurrebbe al problema generale della cosiddetta *dinamica simbolica*, sul quale ritorneremo eventualmente in un’altra parte delle note.

**Definizione del mapping.** Consideriamo la matrice

<sup>69</sup>Si ricordi che il termine inglese *shadow*, come gli analoghi tedesco e russo, significa *ombra*. Ma in inglese il verbo *to shadow* significa anche pedinare, come fa l’investigatore che sta attaccato all’ombra di una persona che insegue.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (20)$$

si tratta di una matrice che ha elementi interi e determinante uguale ad 1 (matrice simplettica, che conserva le aree). Queste due proprietà garantiscono che essa, pensata originariamente come definente una trasformazione del piano  $\mathbb{R}^2$  in sé, in effetti definisce anche una trasformazione, un mapping (invertibile)  $G$  del toro  $T^2$  in sé:  $G : T^2 \rightarrow T^2$ . Infatti, si realizzi il toro  $T^2$  come il piano modulo 1, ovvero  $T^2 = \mathbb{R}^2 \pmod{1}$ . Allora per definizione un punto del toro è la classe di equivalenza di tutti i punti del piano le cui coordinate differiscono per interi ( $(\tilde{x}, \tilde{y})$  è equivalente a  $(x, y)$  se  $\tilde{x} = x + m$ ,  $\tilde{y} = y + n$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ). D'altra parte, la matrice  $A$  rispetta le classi di equivalenza, perché ha elementi interi,<sup>70</sup> e lo stesso vale per la matrice inversa, perché anch'essa ha elementi interi (dato che  $\det A = 1$ ).

Si verifica immediatamente che l'origine è l'unico punto fisso del mapping  $G$ .<sup>71</sup> La matrice jacobiana della trasformazione nel punto fisso coincide con la matrice  $A$  stessa, e si calcolano immediatamente gli autovalori:

$$\lambda^+ = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1, \quad \lambda^- = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1.$$

Siamo dunque nel caso iperbolico. Un immediato calcolo fornisce anche gli autovettori,<sup>72</sup> e abbiamo quindi lo spazio lineare contraente  $E^+$  e quello dilatante  $E^-$ , che risultano essere dati rispettivamente dalle rette  $y = \alpha^+ x$ ,  $y = \alpha^- x$  con  $\alpha^+ = (1 - \sqrt{5})/2$ ,  $\alpha^- = (1 + \sqrt{5})/2$ . Questa espressione esplicita degli spazi lineari stabile ed instabile non ci importa particolarmente. L'unica proprietà rilevante per il seguito del discorso è che le rette definenti tali spazi lineari hanno *pendenza irrazionale*. Si noti che la direzione dilatante si trova nel primo (e nel terzo) quadrante, la direzione contraente nel secondo (e nel quarto) quadrante; tali direzioni sono inoltre tra loro ortogonali (perché la matrice  $A$  è simmetrica).

Dopo aver calcolato lo spazio lineare stabile  $E^+$  e quello instabile  $E^-$ , vogliamo ora discutere le corrispondenti varietà  $W^+(0)$ ,  $W^-(0)$  che, ricordiamolo, sono curve giacenti sulla varietà nonlineare  $T^2$  (si pensi ad esempio al toro  $T^2$  come immerso in  $\mathbb{R}^3$ , nella consueta forma della ciambella). A tal fine è sufficiente riportare nel quadrato fondamentale  $0 \leq x, y \leq 1$ , con il consueto procedimento di equivalenza, le due corrispondenti rette  $E^+$  ed  $E^-$  definite nel piano. Consideriamo ad esempio la retta  $E^-$ . Essa, partendo dall'origine ( $x_0 = 0, y_0 = 0$ ) con

<sup>70</sup>Due punti del piano che differiscono per interi vanno in due altri punti che pure differiscono per interi. Infatti, i trasformati di  $(x, y)$  e di  $(x + m, y + n)$  sono rispettivamente  $(x + y, x + 2y)$  e  $(x + y + m + n, x + 2y + m + 2n) = (x + y + p, x + 2y + q)$  con opportuni interi  $p, q$ .

<sup>71</sup>Infatti la condizione di punto fisso, letta nel piano (senza ancora riduzione al toro), è  $x' = x + n$ ,  $y' = y + m$ , ovvero  $x + y = x + n$ ,  $x + 2y = y + m$ . Dalla prima si ottiene  $y = n$  (equivalente a  $y = 0$ ) e dalla seconda si ha allora  $x = m$  (equivalente a  $x = 0$ ).

<sup>72</sup>Gli autovettori si ottengono risolvendo il sistema  $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} = 0$ . La prima equazione dà allora  $(1 - \lambda)x + y = 0$ , e quindi i corrispondenti autospazi risultano essere le rette  $y = x/(\lambda - 1)$  che si ottengono per  $\lambda = \lambda^+$  e  $\lambda = \lambda^-$ .

inclinazione  $\alpha^-$ , interseca il “lato destro” del quadrato fondamentale ( $x = 1$ ) nel punto di ordinata  $y_1 = \alpha^-$  e poi riappare a sinistra ( $x = 0$ ) alla stessa altezza. Dunque, “con un giro” lungo la coordinata  $x$  si è compiuta lungo la coordinata  $y$  una traslazione con costante di traslazione  $\alpha^-$ . Poi la retta riparte con la medesima inclinazione, e riattraversa il lato destro (e riappare sul lato sinistro) con ordinata  $y_2 = 2\alpha^-$ , e così via. Si capisce che in tal modo viene definita sul toro  $T^1$  corrispondente a  $x = 0$  una traslazione  $y' = y + \alpha^- \pmod{1}$ , di cui abbiamo in particolare considerato l’orbita  $\{y_n\}$  definita da  $y_0 = 0$ . Ma ci ricordiamo ora che  $\alpha^-$  è irrazionale, ed abbiamo quindi che la varietà instabile  $W^-(0)$  è costituita da una elica che avvolge densamente il toro  $T^2$ . Infatti la sua intersezione con la “sezione”  $x = 0$  ricopre densamente (e uniformemente) tutta la sezione, e lo stesso avviene evidentemente per tutte le sezioni  $x = x_0$  con  $x_0$  arbitrario<sup>73</sup>

Dunque abbiamo costruito “a mano” la varietà instabile  $W^-(0)$ . Ma è evidente che allo stesso modo possiamo costruire la varietà stabile  $W^+(0)$ , e che questa ha le medesime proprietà, perché anche la costante di traslazione  $\alpha^+$  è irrazionale.

In questo caso è dunque evidente quali siano i punti omoclini: essi non solo sono infiniti, ma ovviamente costituiscono anche un insieme denso nello spazio delle fasi (il toro  $T^2$ ). Si tratta infatti delle intersezioni tra le due eliche appena descritte, che sono tra loro ortogonali e entrambe dense.

Per quanto riguarda la dinamica di questo sistema nonlineare, il caso più semplice ed illuminante che si può considerare è quello relativo ad un continuo di dati iniziali costituenti un quadratino con lati paralleli alle direzioni contraente e dilatante, “centrato” in un punto della varietà stabile. Si pensi dapprima alla rappresentazione sul piano; ci ridurremo in seguito sul quadrato fondamentale. Nella rappresentazione sul piano, ad ogni iterazione l’insieme iniziale viene trasformato in un altro “parallelo” al primo, con un lato che è stato contratto e l’altro che è stato dilatato, in modo da conservare l’area; inoltre il “centro” si è avvicinato all’origine, lungo la direzione contraente. Dopo un numero sufficiente di iterazioni, il quadrato iniziale viene praticamente a coincidere con un segmento (opportunamente ispessito) dello spazio lineare dilatante, centrato sull’origine. Quindi, se ci si riporta sul quadrato fondamentale, l’evoluto dell’insieme iniziale si trova ora distribuito sul toro, sempre più “uniformemente” al crescere del numero di iterazioni. Per questo motivo si dice che la trasformazione  $G$  ha la proprietà di essere mescolante (ingl. *mixing*).

**Intermezzo: sistemi mescolanti (o mixing)** La definizione formale è la seguente. Si considera un mapping  $\Phi : M \rightarrow M$  su una varietà  $M$  munita di una misura  $\mu$ , e si ammette che la misura  $\mu$  sia invariante.<sup>74</sup> Nel caso del gatto di Arnol’d, questa proprietà (rispetto alla misura di Lebesgue) è garantita perché il mapping conserva l’area. Allora il

<sup>73</sup>Infatti sul toro monodimensionale  $x = c$  si ha ancora la traslazione irrazionale  $y' = y + \alpha^- \pmod{1}$ , con la sola differenza che ora il punto da cui si parte è  $y_0 = c$  anziché  $y_0 = 0$ .

<sup>74</sup>Per un mapping invertibile, ciò significa che la misura di qualunque insieme (supposto misurabile)  $A$  rimane inalterata quando l’insieme viene trasformato:  $\mu(\Phi(A)) = \mu(A)$ . Nel caso generale, di mappings anche non invertibili, questa proprietà è richiesta per l’immagine inversa:

mapping  $\Phi$  è detto mescolante se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Phi^n(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

per ogni coppia di insiemi misurabili  $A, B$ . A parole: per  $n$  abbastanza grande (definitivamente), l'evoluto di *ogni* insieme  $A$  è uniformemente sparpagliato (l'intersezione con *ogni* insieme  $B$  ha misura proporzionale alla misura di quell'insieme).

Un classico esempio di mapping non mescolante (pur essendo ergodico) è la traslazione irrazionale del toro  $x' = x + \alpha \pmod{1}$  con  $\alpha$  irrazionale. Infatti già sappiamo che ogni punto iniziale dà luogo a un'orbita densa e uniformemente distribuita (cioè "visita" ogni insieme una frazione di volte proporzionale all'area di quell'insieme). Ma se prendiamo una bolla di punti (un segmento), ognuno di questi punti viene traslato della stessa quantità, e quindi la bolla, pur esplorando tutta la regione disponibile, non si sparpaglia, non si mescola, e invece trasla restando rigidamente uguale a se stessa. Un analogo comportamento si presenta nel caso della traslazione del toro bidimensionale

$$(x', y') = (x + \omega_1, y + \omega_2) \pmod{1},$$

con  $\omega_1/\omega_2$  irrazionale (Arnold-Avez, esempio 1.15).<sup>75</sup> Su questi punti ritorneremo in un successivo capitolo. In particolare, mostreremo come esista una caratterizzazione dei sistemi ergodici da cui appare particolarmente evidente che l'ergodicità è una proprietà più debole di quella di mescolamento.

**I sistemi iperbolici.** Da scrivere.

**Lo shadowing lemma.** Da scrivere.

### §10. Sistemi dissipativi e stabilità delle orbite.

Come abbiamo ricordato nell'introduzione, l'altro esempio paradigmatico dell'insorgere dei moti caotici fu la scoperta dell'attrattore, da parte di Lorenz,<sup>76</sup> nel modello che porta appunto il suo nome. Tale modello nasce nel contesto della fluidodinamica, più in particolare nel tentativo di capire l'origine della turbolenza nel moto dei fluidi viscosi. Fa entrare quindi nel contesto dei sistemi dinamici dissipativi, diverso dunque da quelli di cui ci siamo occupati finora. Ma alcuni delle considerazioni che faremo, ad esempio quelle sulla prevedibilità o meno delle orbite, sono generali.

Alcuni sistemi dissipativi elementari, come il pendolo smorzato, l'orologio con scappamento, o la meno elementare equazione di van Der Pool, sono descritti in appendice, ma almeno l'esempio del pendolo smorzato dovrebbe essere noto al lettore. A causa della presenza di attrito ci si aspetta che il sistema non possa vagare nello spazio delle fasi liberamente, ma si porti in uno stato in cui la dissipazione di energia sia bilanciata dal lavoro fatto da un forzante esterna:

---

$\mu(\Phi^{-1}(A)) = \mu(A)$ , dove  $\Phi^{-1}(A)$  denota l'immagine inversa di  $A$ , ovvero  $\Phi^{-1}(A) = \{x \in M; \Phi(x) \in A\}$ .

<sup>75</sup>Questa trasformazione del toro  $T^2$  è nient'altro che il time-one map del sistema  $\dot{x} = \omega_1$ ,  $\dot{y} = \omega_2$ . Questo esempio è di fondamentale importanza, perché descrive il modo in cui evolvono gli angoli nei sistemi integrabili che ammettono variabili angolo-azione.

<sup>76</sup>vedi N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journ. of Atm. Sci. **20**, 130-141 (1963).

questo è precisamente quanto succede per i sistemi lineari dissipativi (vedi Appendice), in cui dopo un transiente, la soluzione converge ad un'unica orbita ben determinata.

Per i fluidi viscosi in *regime laminare* succede essenzialmente la stessa cosa: il campo di velocità è sostanzialmente determinato e stabile. Piccole (o grandi) perturbazioni si smorzano rapidamente, ed il fluido scorre tranquillo, in uno stato stazionario ben preciso. E' il caso dell'acqua che esce a filo da un rubinetto appena socchiuso, chiara e trasparente come un pezzo di vetro.

Le cose cambiano appena cominciamo ad aprire maggiormente il rubinetto: ed un certo punto cominciano ad apparire delle fluttuazioni nel flusso, il suo stato non è più stazionario. Queste fluttuazioni si accentuano continuando ad aprire il rubinetto, ed improvvisamente, l'acqua diventa bianca, non è più trasparente: abbiamo raggiunto il regime turbolento. Il flusso è diventato complicatissimo: la velocità dell'acqua dipende in maniera imprevedibile dal tempo e dal punto in cui si misura. In due punti molto vicini la velocità dell'acqua può avere nel corso del tempo valori molto diversi e totalmente scorrelati tra loro. Se costruisco lo spettro temporale di una qualunque osservabile, in regime turbolento otterrò uno spettro continuo, mentre nel caso laminare ne otterrò uno con pochi picchi ben distinti.

**Lo spettro di una funzione.** La nozione di spettro nasce dal tentativo di capire quali sono le frequenze presenti in un segnale. È noto al lettore lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica, con cui si determinano il contributo delle varie armoniche. Come si può generalizzare questa nozione alle funzioni non periodiche? Un modo può essere attraverso la trasformata di Fourier, che però per essere definita richiede che la funzione sia integrabile cioè che rappresenti un moto che si smorza nel tempo. Non è quindi adatta a caratterizzare dei moti diciamo "permanenti", più complicati delle semplici orbite periodiche, ma che al pari di queste presentano la caratteristica di non svanire. Una prima generalizzazione si ottiene notando che le somme parziali della serie di Fourier di una funzione sono un particolare tipo di polinomio trigonometrico (uno in cui compaiono solo certe frequenze multiple di una fondamentale), e che quindi le funzioni periodiche possono essere approssimate bene quanto si voglia all'interno di questa classe di polinomi. Allora si può pensare di considerare la classe dei polinomi trigonometrici con frequenze arbitrarie, e considerare la chiusura di tale classe (ad esempio con la norma del sup), ovvero l'insieme delle funzioni che possono essere approssimate bene quanto si voglia mediante polinomi trigonometrici. Queste funzioni formano la classe delle funzioni **almost-periodic**<sup>77</sup>, che, come vedremo meglio più sotto, descrivono bene i moti che potremmo dire ordinati. La definizione di funzione almost-periodic è la seguente.

Incominciamo, per ogni  $\varepsilon > 0$ , con il definire l'insieme dei quasi periodi di una funzione  $f(t)$ , come l'insieme dei numeri  $\tau$  per cui

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il nome quasi periodo dovrebbe risultare ovvio, mi dice che  $f(t)$  torna quasi al valore iniziale dopo un tempo  $\tau$ , e questo indipendentemente dal tempo iniziale  $t$  che consi-

<sup>77</sup>Il termine almost-periodic dovrebbe essere tradotto in quasi-periodico, che però, nella letteratura matematica italiana, ha già un suo significato specifico. Lasciamo perciò invariato questo termine, notando solo che le funzioni quasi periodiche sono almost-periodic, ma non vale il viceversa.

dero. Tradizionalmente questo insieme è denotato con  $E(\varepsilon, f(t))$ , ed ovviamente può risultare vuoto per una funzione arbitraria. Invece per una funzione periodica l'insieme  $E(\varepsilon, f(t))$  contiene almeno la successione  $\{nT\}$  dei periodi della funzione, o altrimenti detto, ogni intervallo  $[t, t+T]$  ha una intersezione non vuota con l'insieme dei quasi periodi. Un insieme che, per un opportuno  $T$ , abbia un'intersezione non vuota con ogni intervallo della forma  $[t, t+T]$ , si dice **relativamente denso**.

Bene, le funzioni almost-periodic sono per cui vale

**Definizione 2 (Funzione almost-periodic)** Una funzione  $f(t)$  si dice *almost-periodic* se, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una  $l_\varepsilon > 0$  tale che l'intersezione tra l'insieme  $E(\varepsilon, f(t))$  dei suoi quasi periodi e l'intervallo  $[t, t+l_\varepsilon]$  è non vuoto  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Detto in altri termini, per ogni valore di  $\varepsilon$ , l'insieme dei quasi periodi di  $f(t)$  è relativamente denso.

Almeno in questo senso, le funzioni almost-periodic, rappresenta una generalizzazione delle funzioni periodiche. Ma in realtà rappresentano una generalizzazione delle funzioni periodiche in più di un senso.

Infatti questa classe di funzioni ha parecchie proprietà,<sup>78</sup> quella che più ci interessa è la seguente: presa una funzione  $f(t)$  almost-periodic, si consideri l'integrale

$$c_T(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{-i\omega t}.$$

Allora, come nel caso periodico, il limite

$$c(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} c_T(\omega)$$

esiste finito per ogni  $\omega$ , ed è però non nullo solo per un insieme numerabile di frequenze  $\omega_i$ . Inoltre  $f(t)$  è sviluppabile in serie di Fourier generalizzata, vale cioè

$$f(t) = \sum_i c(\omega_i) e^{i\omega_i t}.$$

Vale anche la proprietà di Parseval, cioè vale l'identità

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt |f(t)|^2 = \sum_i |c(\omega_i)|^2.$$

Nel caso di funzioni quasi periodiche, si dice che lo spettro è discreto, vedremo meglio perchè più sotto.

Però, come detto, le funzioni almost-periodic non possono coprire tutte le necessità che sorgono nella teoria dei sistemi dinamici, perchè, come vedremo, i moti "caotici" sono rappresentate da funzioni che non sono almost-periodic. Infatti, per una funzione generica  $f(t)$ , l'integrale

$$c_T(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{-i\omega t},$$

<sup>78</sup>Uno dei testi di riferimento è il seguente: A.S. Besicovitch *Almost periodic functions*, Dover, New York, 1954.

non ammette limite (nel senso che, a seconda di come si fa tendere  $T$  all'infinito, si ottengono limiti diversi). Wiener allora ha proposto un'ulteriore generalizzazione basata sulla proprietà di Parseval: data una funzione  $f(t)$  consideriamo la trasformata di Fourier della funzione troncata

$$g_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{i\omega t}.$$

Supponiamo che esista, nel senso delle norma  $L^1$ , il limite della funzione  $\frac{g_T(\omega)}{T}$  che indichiamo con  $\sigma(\omega)$ . Tale limite viene detto densità spettrale di  $f(t)$ , e corrispondentemente si dice che  $f(t)$  ha spettro continuo. Le proprietà principali dello spettro sono due. Innanzitutto vale la proprietà

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt |f(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} d\omega \sigma(\omega).$$

Ad esempio, se  $|f(t)|^2$  è proporzionale all'energia (come spesso fisicamente accade), allora  $\sigma(\omega)d\omega$  rappresenta l'energia media presente nell'intervallo di frequenze  $(\omega, \omega+d\omega)$ . In questo senso le funzioni almost-periodic sono dette a spettro discreto, perchè formalmente, introducendo la densità spettrale come somma di delta, cioè come  $\sigma(\omega) = \sum |c(\omega_i)|^2 \delta(\omega - \omega_i)$ , l'identità di Parseval si può riscrivere come integrale su tutte le frequenze. Inoltre se considero l'autocorrelazione della funzione  $f(t)$ , vale

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} ds f(t-s)f(s) = \int_{\mathbb{R}} d\omega \sigma(\omega) e^{i\omega t},$$

cioè l'autocorrelazione esiste ed è data dalla trasformata di Fourier dello spettro. È questo il famoso teorema di **Wiener-Kintchine**.

Dal punto di vista matematico rimangono aperte moltissime questioni, tutte legate al fatto che l'insieme delle funzioni che ammettono spettro continuo non possiede alcuna ovvia struttura algebrica, al contrario ad esempio delle funzioni almost-periodic che formano, viceversa, un'algebra (cioè somme e prodotti di funzioni almost-periodic sono almost-periodic). Questo ad esempio implica che non sia noto (almeno agli scriventi) alcun criterio per determinare se una funzione abbia spettro continuo, oppure ancora che gli esempi proposti dallo stesso Wiener e da autori più recenti per la costruzione di funzioni con spettro continuo siano estremamente complicati. Per questo di solito si preferisce ambientare la teoria dello spettro continuo nell'ambito dei processi stocastici in cui tutto è estremamente più semplice e chiaro (almeno dal punto di vista matematico).

Torniamo adesso al moto dei fluidi. Prima degli anni '60, si riteneva la differenza così marcata tra il comportamento turbolento di questi e quello di sistemi costituiti da pochi oscillatori armonici smorzati, veniva attribuita al fatto che il fluido viene descritto da equazioni alle derivate parziali cioè da un sistema dinamico con uno spazio delle fasi infinito-dimensionale. Dunque si riteneva che l'origine della complessità del moto turbolento fosse da ricercarsi nel numero molto grande di gradi di libertà eccitati.

L'esempio di Lorenz esemplificò il fatto invece che, il comportamento temporale complesso, non dipende dal numero di gradi di libertà di un sistema, ma lo si ritrova anche in sistemi semplicissimi, nel suo caso in un sistema dinamico tridimensionale.



Per veder come ciò sia possibile cominciamo con il considerare dunque uno spazio delle fasi  $\mathcal{M}$  ed un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi  $\Phi^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , e supponiamo che esista un compatto  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$  in cui le orbite risultino intrappolate, cioè tale che se  $\Phi^{t_0}x \in \mathcal{K}$  allora  $\Phi^t x$  appartenerà a  $\mathcal{K}$  per tutti  $t \geq t_0$ . Questa ipotesi è naturale, sia per i sistemi hamiltoniani con superficie dell'energia compatta, sia per i sistemi dissipativi, se si suppone che al di fuori di una certa regione  $\mathcal{K}$  dello spazio delle fasi il sistema dissipi più energia di quanta non ne riceva dall'esterno.

Quello che mostreremo nel seguito è che il problema della complessità o meno del moto, e la forma dello spettro sono fortemente legati. Innanzitutto per complessità del moto intendiamo predicibilità dello stesso, intendendo predicibilità al modo seguente: siccome i dati iniziali sono conosciuti con una certa incertezza, potrà prevedere il comportamento del mio sistema accuratamente solo se le corrispondenti traiettorie rimangono vicine. La traiettoria del sistema in esame deve dunque essere stabile secondo Liapunov, cioè stabile secondo la seguente definizione

**Definizione 3 (Stabilità nel senso di Liapunov)** *Un orbita si dirà stabile (secondo Liapunov) rispetto all'insieme  $B$ , se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che se  $\|\Phi^\tau x - y\| < \delta$ ,  $y \in B$ , allora  $\|\Phi^{t+\tau} x - \Phi^t y\| < \varepsilon$  per ogni  $t > 0$ .*

L'insieme  $B$  della definizione dipende dal contesto, può essere tutto lo spazio delle fasi, oppure un suo sottoinsieme invariante, come meglio vedremo in seguito.

Quello che cambia nella definizione di stabilità, rispetto alla pura continuità del flusso rispetto ai dati iniziali, è che le orbite rimangono vicine per un tempo arbitrariamente lungo, dunque le previsioni possono essere fatte aldilà di ogni orizzonte temporale. Invece, nel caso dei moti disordinati, esemplificati ad esempio dalla standard map nel caso caotico, le traiettorie divergono esponenzialmente, sicché le orbite rimangono vicine per un tempo dipendente da  $\delta$ , e vi è dunque un orizzonte temporale finito (spesso piuttosto breve) su cui è possibile fare le previsioni. Nel caso fisico, le previsioni hanno senso solo per scale temporali ben determinate (dipendenti dal problema in esame, mesi per la meteorologia, milioni di anni per la meccanica celeste), quindi un sistema sarà imprevedibile o no, caotico o no, a secondo della scala dei tempi a cui si sta lavorando. I sistemi stabili secondo Liapunov invece sono stabili a prescindere da ogni scala temporale, e quindi è una richiesta forse troppo forte dal punto di vista fisico. D'altraparte una teoria matematica della stabilità a tempi finiti è molto problematica, ne vedremo degli esempi nel secondo Capitolo, per cui ci limiteremo per ora ad orbite stabili secondo Liapunov.

Con questa richiesta "forte" si trova un risultato molto forte: le orbite stabili "significative" sono necessariamente almost-periodic e dunque hanno spettro discreto. Viceversa quando lo spettro è continuo le soluzioni sono instabili secondo Liapunov, cioè una imprecisione comunque piccola nel determinare i dati iniziali determina un errore finito sulle traiettorie. Quindi la complessità del movimento non è legato al numero di gradi di libertà ma solamente alle proprietà di

stabilità delle traiettorie: Lorentz presentò l'esempio di una mappa semplicissima di un intervallo in se in cui tutte le traiettorie sono instabili e dunque con spettro continuo.

Per mostrare questo risultato bisogna introdurre alcune nozioni utili, che tra l'altro permettono di capire in modo più approfondito le proprietà qualitative delle soluzioni delle equazioni differenziali. Consideriamo ora un'orbita  $\gamma(t) = \Phi^t x$  che appartenga (definitivamente) a  $\mathcal{X}$ , e cerchiamo di capire il comportamento asintotico di  $\gamma(t)$  per tempi "lungi".

Per far questo consideriamo una qualunque successione crescente divergente di tempi  $t_n$ , la corrispondente successione  $\Phi^{t_n} x$ , appartenendo ad un compatto, dovrà ammettere uno o più punti di accumulazione: per l'oscillatore armonico smorzato, l'origine è uno (l'unico in verità) di tali punti, perchè ogni orbita va a cadervi sopra. Questi punti sono in un certo senso i punti tipici dell'orbita, perchè essa continua a ripassare in vicinanza di essi per tempi arbitrariamente grandi. I punti dello spazio delle fasi che non sono di accumulazione in questo senso, sono quindi eccezionali, perchè vengono visitati al più fino ad un tempo fissato, e non contano dunque per le proprietà dell'orbita sul lungo periodo. Questo status giustifica l'introduzione dell'insieme  $\omega$ -limite dell'orbita (indicato con  $\omega(x)$ ) definito al modo seguente

**Definizione 4 (Insieme  $\omega$ -limite)** *L'insieme  $\omega$ -limite di una orbita  $\gamma$  è l'insieme dei punti  $y$  per cui esiste una successione di tempi  $t_n \rightarrow +\infty$  tale che  $\Phi^{t_n} x \rightarrow y$ , ovvero in formule*

$$\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathcal{X} : \exists \{t_n\} \text{ tale che } \Phi^{t_n} x \rightarrow y \text{ e } t_n \rightarrow +\infty\}.$$

Gli  $\omega$ -limite che si incontrano spesso hanno una struttura semplice: si tratta di punti di equilibrio asintoticamente stabile, oppure di cicli limite (cioè orbite periodiche asintoticamente stabili). A volte però, anche in sistemi dinamici semplici come il sistema di Lorenz, possono avere una struttura straordinariamente complessa che cercheremo nel seguito di illustrare.

**Esercizio 1.** Mostrare che se un'orbita appartiene alla varietà stabile di un punto fisso, il suo  $\omega$ -limite è il punto fisso stesso.

E' facile ora mostrare che gli insiemi  $\omega$ -limite sono insiemi invarianti, cioè costituiti da orbite. Infatti se  $y$  è un punto di accumulazione allora lo è anche  $\Phi^\tau y$  per ogni  $\tau$ . Supposto infatti che  $\Phi^{t_n} x \rightarrow y$ , allora usando la proprietà di gruppo vale  $\Phi^{\tau+t_n} x_0 = \Phi^\tau \Phi^{t_n} x_0$  e per continuità si ottiene  $\Phi^\tau \Phi^{t_n} x_0 \rightarrow \Phi^\tau y$ . E' possibile ora classificare le orbite in:

- **Transienti**, se l'orbita non appartiene al suo stesso  $\omega$ -limite;
- **Centrali**, se l'orbita appartiene al suo stesso  $\omega$ -limite.

Nel primo caso, l'orbita si dice transiente per il motivo seguente: preso un tempo arbitrario  $t$ , il punto  $\Phi^t x$  dell'orbita si trova a distanza finita dall'insieme

$\omega(x)$ . Vuol dire che esiste un intorno di tale punto da cui uscirà e non vi ritornerà più: il valore che assumono le osservabili in quell'istante non si ripeteranno più, in questo senso sono transienti. Contemporaneamente l'orbita si avvicina al suo  $\omega$ -limite, in quanto

$$d(\Phi^t x, \omega(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in \omega(x)} \|\Phi^t x - y\| \rightarrow 0.$$

Dopo un transiente appunto, almeno dal punto di vista fisico, l'orbita sarà schiacciata sul suo  $\omega$ -limite, e sarà indistinguibile da un'orbita appartenente ad esso. In questo senso l' $\omega$ -limite è una generalizzazione del concetto di attrattore, che ha senso anche per sistemi non dissipativi. Dato il loro carattere, le orbite transienti non sono rilevanti per lo studio delle proprietà asintotiche delle soluzioni, e dunque per tale studio ci si limita a considerare il caso di orbite centrali.

Le orbite centrali, cioè quelle appartenenti al loro  $\omega$ -limite, possono essere semplici da descrivere o complicate. Ad esempio, punti di equilibrio ed orbite periodiche sono orbite centrali che facilmente ci raffiguriamo; più difficile da immaginarsi sono ad esempio le orbite centrali non periodiche. Un esempio di queste sono quelle ottenute dalla traslazione irrazionale del toro. Per le orbite centrali, comunque esse siano fatte, vale la proprietà che l'intorno di ogni suo punto viene visitato infinitamente spesso dall'orbita, e questo porta a presumere che le proprietà statistiche di ogni tratto di orbita sufficientemente lungo siano le medesime, indipendentemente dal tratto di orbita considerato. Per queste orbite vi è un'alternativa:

- l'orbita è stabile (rispetto a se stessa) allora lo spettro esiste ed è discreto, e viceversa ;
- l'orbita è instabile e lo spettro (posto che esista) è continuo.

Infatti si riesce a dimostrare che le soluzioni sono almost-periodic se e solo se sono stabili rispetto a se stesse secondo Liapunov. Che un'orbita almost-periodic sia stabile rispetto a se stessa segue direttamente dalla definizione. Più complicato è il mostrare il viceversa, cosa che faremo nella parte finale del paragrafo.

Dunque un modo per stabilire se l'orbita sia instabile o no consiste nel calcolarsi lo spettro, o equivalentemente, via il teorema di Wiener-Kintchine, le autocorrelazioni. Spettro discreto implicherà la possibilità di fare previsioni sulle orbite, lo spettro continuo indicherà che in qualche modo questa possibilità è preclusa o almeno limitata ad una finestra temporale finita. Una tecnica alternativa per studiare il medesimo problema è data dallo studio degli esponenti di Liapunov, tecnica che però che non abbiamo il tempo di esporre in queste note (si veda ad esempio, G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J. M. Strelcyn, *Meccanica* 15, pp 9-30).

Ora, per dimostrare che le orbite stabili sono almost-periodic, incominceremo coll'introdurre una nozione più debole, cioè quella di orbita *ricorrente*

**Definizione 5 (Orbite Ricorrenti)** *L'orbita  $\gamma$  è detta ricorrente se per ogni  $\varepsilon$  esiste  $T > 0$  tale che essa risulti contenuta nell'insieme*

$$\gamma \subset \bigcup_{t \in [t_0, t_0 + T)} S(\Phi^t x, \varepsilon),$$

dove  $S(\Phi^t x, \varepsilon)$  è la palla di centro  $\Phi^t x$  e raggio  $\varepsilon$ , essendo il punto  $t_0$  è arbitrario. In altri termini, un'orbita si dice ricorrente se per ogni  $t$  arbitrario esiste  $s \in [t_0, t_0 + T]$  tale che

$$\|\Phi^t x - \Phi^s x\| < \varepsilon.$$

**Nota.** La definizione implica in particolare che l'insieme dei valori di  $s$  per cui vale  $\|x - \Phi^s x\| < \varepsilon$ , sia un insieme relativamente denso.

In parole povere un'orbita ricorrente è un'orbita che può essere approssimata arbitrariamente bene da un tratto qualunque sufficientemente lungo della stessa. Questa proprietà così forte non è in generale vera per delle generiche orbite centrali. Birkhoff riuscì a dimostrare che le orbite sono ricorrenti nel caso in cui l'insieme  $\omega$ -limite sia minimale, cioè sia compatto e non contenga nessun sottoinsieme proprio chiuso invariante.

Non tutti gli  $\omega$ -limite sono minimali. Se torniamo per un attimo all'esempio del gatto di Arnold del paragrafo precedente, si può facilmente constatare che l' $\omega$ -limite di una orbita appartenente alla varietà instabile è tutto il toro, che però contiene un insieme denso di orbite periodiche che sono sottoinsiemi chiusi e invarianti. In questo caso dunque l' $\omega$ -limite non è minimale.

Viceversa, se un'orbita centrale è stabile secondo Liapunov rispetto all' $\omega$ -limite stesso, allora l' $\omega$ -limite è minimale e quindi l'orbita risulta ricorrente, cioè un suo tratto qualunque sufficientemente lungo approssima bene quanto si voglia l'intera orbita.

**Dimostrazione.** Per dimostrare questo fatto, si comincia preliminarmente ad osservare che l' $\omega$ -limite  $\omega(x)$  è un insieme minimale, cioè chiuso, invariante e senza sottoinsiemi propri chiusi invarianti.

Infatti innanzitutto si ha che, per orbite centrali, la chiusura  $\bar{\gamma}$  dell'orbita coincide con l' $\omega$ -limite  $\omega(x)$ . Infatti, da una parte si ha sempre  $\omega(x) \subset \bar{\gamma}$ , perchè l' $\omega$ -limite contiene solo una parte dei punti di accumulazione dell'orbita (ad esempio non quelli che si ottengono mandando  $t$  a  $-\infty$ ) e dall'altra, per le orbite centrali, da  $\gamma \subset \omega(x)$  segue  $\bar{\gamma} \subset \omega(x)$  perchè l' $\omega$ -limite è chiuso (come si verifica facilmente). Si ha dunque  $\bar{\gamma} = \omega(x)$ . Sia ora  $y \in \omega(x)$ , e consideriamo l'orbita  $\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^t y$ , e mostriamo che vale anche  $\bar{\sigma} = \omega(x)$ . Questo basta a mostrare che  $\omega(x)$  è minimale.

Come abbiamo già detto, l' $\omega$ -limite è un insieme invariante, cioè  $\sigma \subset \omega(x)$ , e prendendo la chiusura segue  $\bar{\sigma} \subset \omega(x)$ . Bisogna ora mostrare che la chiusura  $\bar{\sigma}$  non sia un sottoinsieme proprio, e a tal fine basta mostrare che  $x \in \omega(y)$ . In tal caso si ha infatti  $\omega(x) = \bar{\gamma} \subset \omega(y) \subset \bar{\sigma}$  e dall'inclusione precedente segue dunque  $\omega(x) = \bar{\sigma}$ .

Per mostrare che  $x \in \omega(y)$ , procediamo per assurdo: supponiamo che questo non sia vero, allora  $x$  è situato a distanza finita, diciamo  $\varepsilon$  dall'insieme  $\omega(y)$ . Poiché  $\omega(y)$  è

compatto la distanza si realizza, cioè esiste  $z \in \omega(y) \subset \omega(x)$ , tale che  $\|z - x\| = \varepsilon$ . Sia ora  $\delta > 0$  il valore che compare nella definizione della stabilità alla Liapunov relativo al valore  $\varepsilon/2$ ; poiché sia  $x$  che  $z$  appartengono ad  $\omega(x)$  esisteranno  $t_2 > t_1$  tali che

$$\|\Phi^{t_1} x - z\| < \delta, \quad \|\Phi^{t_2} x - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, per la proprietà di stabilità vale

$$\|\Phi^{t_2} x - \Phi^{t_2-t_1} z\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi

$$\|x - \Phi^{t_2-t_1} z\| \leq \|x - \Phi^{t_2} x\| + \|\Phi^{t_2} x - \Phi^{t_2-t_1} z\| < \varepsilon.$$

Poiché  $\Phi^{t_2-t_1} z \in \omega(\sigma)$ , ottengo che la distanza di  $x$  da  $\omega(\sigma)$  è minore di  $\varepsilon$  contro l'ipotesi.

Abbiamo mostrato dunque che l' $\omega$ -limite è minimale. Mostriamo ora che l'orbita è ricorrente. Seguiamo qui il bel testo di V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Dover, New York, 1989, pag. 375 e seguente. Supponiamo per assurdo che  $\gamma$  non sia ricorrente, allora esistono punti  $y_n$  ed intervalli  $I_n \stackrel{\text{def}}{=} [t_n - T_n, t_n + T_n]$  con  $T_n \rightarrow +\infty$ , tali che  $y_n$  è a distanza finita, diciamo  $\varepsilon$  dall'arco di orbita  $\Phi^t x$ ,  $t \in I_n$ . Poiché  $\omega(x)$  è compatto possiamo supporre che  $y_n$  converga ad  $y$  e  $\Phi^{t_n} x$  a  $z$  (eventualmente passando a sottosuccessioni) ambedue in  $\omega(x)$ .

Quello che adesso mostreremo è che  $y$  è posto a distanza pari ad almeno  $\varepsilon/3$  dall'orbita  $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^t z$  e che dunque  $\omega(x)$  risulta non minimale che è l'assurdo cercato.

Preso  $T > 0$  qualunque, consideriamo l'arco  $[-T, T]$  della curva  $\sigma$ ; per continuità, se  $\delta$  è sufficientemente piccolo varrà  $\|\Phi^t z - \Phi^t x'\| < \varepsilon/3$  per ogni  $t \in [-T, T]$  purché  $\|z - x'\| < \delta$ . Ora esiste sicuramente un  $n$  per cui siano verificate simultaneamente

$$T_n > T, \quad \|z - \Phi^{t_n} x\| < \delta, \quad \|y - y_n\| < \varepsilon/3,$$

per cui varrà in particolare

$$\|\Phi^t z - \Phi^{t+t_n} x\| < \varepsilon/3, \quad \forall t \in [-T, T].$$

Ma se  $t \in [-T, T]$  allora  $t + t_n \in I_n$ , per cui si ha anche

$$\|y_n - \Phi^{t+t_n} x\| > \varepsilon, \quad \forall t \in [-T, T].$$

In definitiva varrà

$$\|y - \Phi^t z\| \geq \|y_n - \Phi^{t+t_n} x\| - \|y - y_n\| - \|\Phi^t z - \Phi^{t+t_n} x\| \geq \varepsilon/3, \quad \forall t \in [-T, T],$$

e poichè  $T$  è arbitrario segue che la distanza di  $y$  da  $\sigma$  è maggiore di  $\varepsilon/3$ .

L'ultimo passo che resta da compiere è quello di mostrare che un'orbita ricorrente e stabile è una funzione almost-periodic.

Questo fatto non è difficile da dimostrare. Seguiamo qui ancora testo di V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov citato in precedenza. Intanto per un'orbita ricorrente, è relativamente denso l'insieme dei  $\tau$  per cui vale

$$\|x - \Phi^\tau x\| < \delta,$$

$\delta$  essendo quella della definizione di stabilità secondo Liapunov. Ma allora segue

$$|\Phi^t x - \Phi^{t+\tau} x| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

per un insieme relativamente denso, cioè l'orbita è almost-periodic.

### §11. L'attrattore di Lorentz.

Analizziamo ora un sistema concreto che mostrerà l'esistenza di orbite centrali instabili, il famoso sistema di Lorenz appunto che ha la forma seguente

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma X + \sigma Y \\ -XZ + rX - Y \\ XY - bZ \end{pmatrix}. \quad (21)$$

la discussione essendo ristretta al caso dove i parametri  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$  sono tutti positivi.

L'analisi comincia, come di consueto, dalla ricerca dei punti fissi. Si trova che sicuramente ne esiste uno, l'origine  $(0,0,0)$ , ed è facile convincersi che il risulta iperbolico. Infatti la matrice Jacobiana è la seguente

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

che ammette i tre autovalori reali seguenti

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 - \sigma \pm \sqrt{(1 - \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2}, \quad \lambda_z = -b.$$

Il determinante della matrice Jacobiana vale  $-b\sigma(1 - r)$ , ossia cambia segno per  $r = 1$ . Questo implica che se per  $r < 1$  tre gli autovalori sono negativi e dunque il l'origine è punto fisso asintoticamente stabile, diventa instabile per  $r > 1$ . Questa è la prima *biforcazione*.<sup>79</sup> Come spesso avviene, quando un punto fisso perde la stabilità, nascono due altri punti di equilibrio stabile (biforcazione a forchetta). Si controlla infatti, che altri due punti di equilibrio di (21) si trovano al modo seguente: ponendo  $\dot{X} = 0$  si trova  $X = Y$ , che sostituita nella seconda dà  $\dot{Y} = -Y(Z + 1 - r)$  che si annulla per  $Z = r - 1$ , infine sostituendo nella terza trovo  $\dot{Z} = Y^2 - b(r - 1)$  che si annulla per  $Y = \pm\sqrt{b(r - 1)}$  (ricordo che siamo nel caso  $r > 1$ ). Dunque per  $r > 1$  vi sono due ulteriori punti di equilibrio

$$C = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, b(r - 1))$$

<sup>79</sup>Il termine biforcazione ha un significato tecnico preciso, ma in sostanza vuol dire che il comportamento del sistema in esame subisce un cambiamento qualitativo al variare dei parametri.

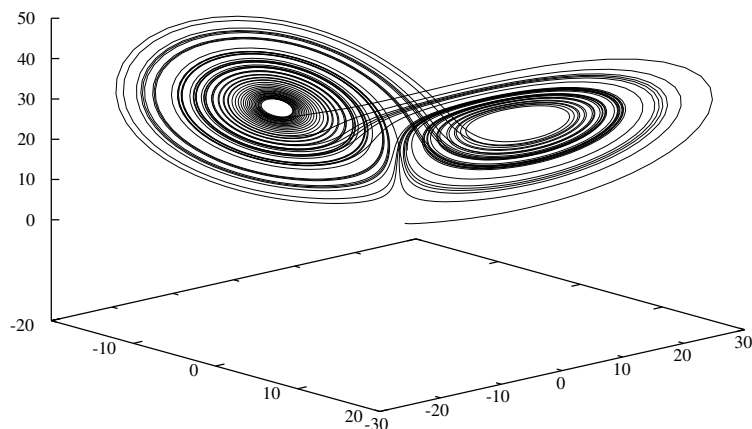


Figura 1.22: Attrattor e di Lorenz nello spazio delle fasi.

$$C' = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, b(r-1)).$$

Per studiare la stabilità di questi punti di equilibrio bisogna calcolare la matrice Jacobiana in questi punti e determinarne gli autovalori. Rimandando per lo studio dettagliato all'articolo originale, si trova che questi punti di equilibrio sono stabili per piccoli valori di  $r$ , ma esistono valori di  $\sigma$  e  $b$  sufficientemente grandi, per cui si verifica un'ulteriore biforcazione, di modo che anche questi punti diventano instabili. In particolare risulta che la varietà stabile è monodimensionale, mentre la varietà instabile è bidimensionale corrispondente ad un fuoco instabile. È questo il caso in cui lo spettro risulta continuo, e nel seguito cercheremo di illustrare il perché.

Nella figura 1.22 è riportata un'orbita corrispondente ai valori di  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = \frac{8}{3}$  (gli stessi dell'articolo originale di Lorenz) e con dato iniziale  $(0, 1, 0)$  preso al tempo  $t_0 = 0$ . Si vede dunque che rapidamente l'orbita sembra adagiarsi su di una superficie fatta di due fogli che poi si fondono in una parte comune. Inoltre alcune volte gira attorno al punto  $C$  rimanendo sullo stesso "foglio" della superficie mentre il suo raggio continua a crescere giro dopo giro fino ad un certo valore massimo, dopo il quale l'orbita cambia "foglio" della superficie girando ora attorno a  $C'$  su di un raggio minore. Il raggio comincia di nuovo a crescere finché ad un certo punto di nuovo l'orbita cambia foglio, e questo processo continua (presumibilmente) all'infinito. La figura 1.23 riporta invece uno spezzone del grafico  $X(t)$  in funzione del tempo, dove le oscillazioni attorno a  $C$  oppure attorno a  $C'$ , corrispondono ad  $X(t)$  negativa oppure ad

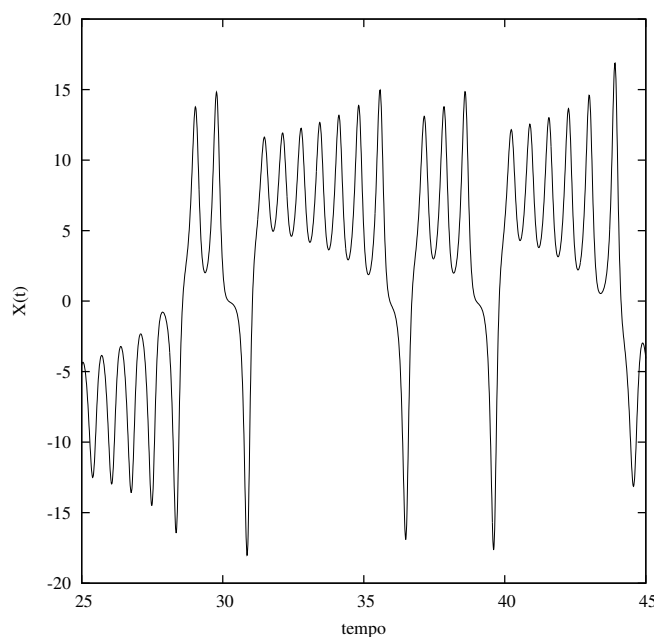


Figura 1.23: Grafico di  $X(t)$  in funzione del tempo.

$X(t)$  positiva. Si vede come il passaggio da un tipo di oscillazione all'altra, non presenta nessuna ovvia regolarità né periodicità.

La spiegazione data da Lorenz per questo comportamento si basa sulla riduzione della dinamica a quella determinata da una semplice mappa di un intervallo in se. Consideriamo infatti la funzione  $Z(t)$  e la successione  $Z_n$  dei suoi massimi relativi: come si può vedere dalla figura 1.24, che mostra la proiezione dell'orbita sul piano  $YZ$ , la conoscenza di  $Z_n$  e di  $Z_{n-1}$  permette di tracciare (approssimativamente) l'arco di spirale che li congiunge sul piano, e sapendo poi su che foglio della superficie la traiettoria giace, si trova l'orbita nello spazio delle fasi. Si nota infine che se  $Z_{n+1} < Z_n$  allora l'orbita cambia foglio, e dunque la successione degli  $Z_n$  contiene tutte le informazioni necessarie per determinare l'orbita. Bene, Lorenz mostra che questa successione è sostanzialmente imprevedibile.

Infatti, riportiamo (vedi la figura 1.25) l'insieme dei punti  $(Z_n, Z_{n+1})$  su di un piano: a differenza di quanto a priori ci si potrebbe aspettare, essi giacciono sostanzialmente su di una curva. Si può dire cioè che  $Z_{n+1} = f(Z_n)$  dove  $f(x)$  è una funzione che mappa l'intervallo  $[a, b]$  con  $a \approx 28$  e  $b \approx 48$  in se. La caratteristica saliente di  $f(x)$  è che vale  $|f'(x)| > 1$  ovunque nell'intervallo (ove esiste). È questo il prototipo delle mappe *espandenti*.

La più semplice di tali mappe è la seguente

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2x & \text{per } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x & \text{per } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$



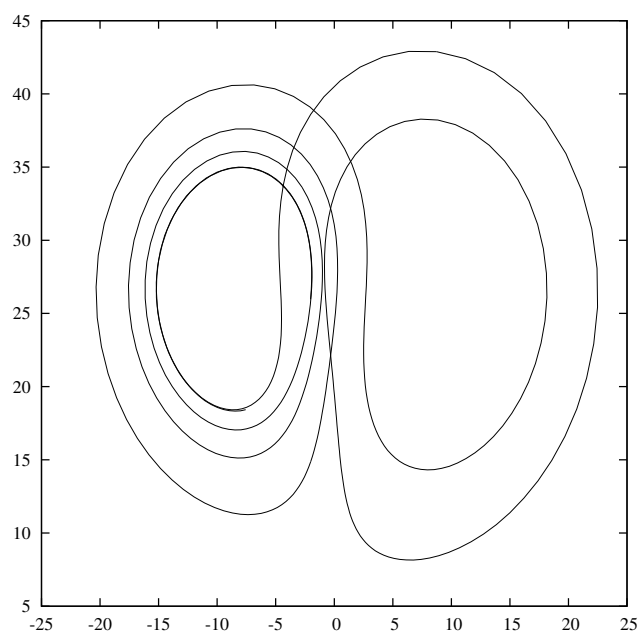


Figura 1.24: Proiezione su piano  $YZ$ , di uno spezzone dell'orbita mostrata in Figura 1.22. Tale spezzone corrisponde a tempi  $t \in [14, 19]$ .

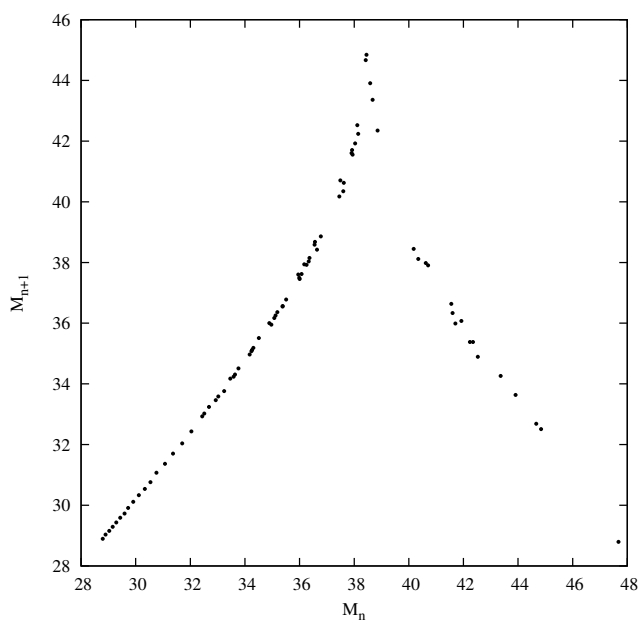


Figura 1.25: Grafico delle coppie  $(Z_n, Z_{n+1})$  di massimi successivi della funzione  $Z(t)$ , per  $t \in [0, 60]$ . Si noti come le coppie si dispongano approssimativamente su di una curva.

le cui orbite possono essere analizzate in dettaglio, come ora mostriamo. Sia  $M_{n+1} = g(M_n)$  è un successione definita per ricorrenza della  $g$ , è evidente che deve essere  $M_n = m_n \pm 2^n M_0$ , dove  $m_n$  è un intero pari.

Consideriamo ora i punti iniziali nella forma  $M_0 = 2^{-k}$ , si vede facilmente che per questi  $M_n = 0$  definitivamente per  $n > k + 1$ . Esiste un insieme di misura nulla di valori iniziali la cui orbita converge a zero. Nel caso del sistema di Lorenz corrispondono ai dati iniziali presi sulla varietà stabile del punto  $(0, 0, 0)$ .

Prendiamo ora dati iniziali nella forma  $M_0 = 2^{-k} u/v$  dove  $v$  è dispari e  $u$  e  $v$  sono primi tra loro. Vale

$$M_{n+k} = m_{n+k} \pm 2^n \frac{u}{v} = \frac{u_{n+k}}{v},$$

dove  $u_{n+k}$  è un intero pari con  $u_{n+k} < v$  (perchè la successione appartiene a  $[0, 1]$ ). Poichè i numeri pari (positivi) minori di un dispari sono in numero finito questi numeri si devono ripetere, cioè l'orbita risulta definitivamente periodica. Ad esempio se  $v = 1/3$  ottengo un unico valore per  $u_n$ , cioè  $u_n = 2$ , per cui  $2/3$  risulta punto fisso della mappa (orbita periodica di periodo 1). Viceversa ogni orbita definitivamente periodica ha come valori un iniziale  $M_0$  nella forma considerata. Dunque questa mappa ammette un insieme numerabile di orbite periodiche. Queste orbite periodiche, come tutte le orbite del resto, sono instabili: infatti preso  $\delta > 0$  arbitrario e posto  $M'_0 = M_0 + \delta$ , allora vale  $M'_n = M_n + 2^n \delta$ , cioè la distanza tra le orbite vicine cresce esponenzialmente, e dunque diventa maggiore di un valore positivo  $\varepsilon$  fissato per  $n > \log(\delta/\varepsilon)$ .<sup>80</sup> Dunque a parte un insieme di misura nulla, tutte le orbite sono nonperiodiche ed instabili, cioè sono imprevedibili. Questa conclusione che si trae per la mappa  $g$ , vale sostanzialmente per ogni mappa espandente, e dunque per la mappa che definisce la successione  $Z_n$  dei massimi. Si conclude che essendo questa successione imprevedibile, è in realtà l'orbita stessa ad essere imprevedibile. Per quanto detto nel paragrafo precedente, in particolare lo spettro delle soluzioni risulterà continuo, riproducendo le caratteristiche qualitative della turbolenza.

L'ultima cosa che vogliamo dire sul sistema di Lorenz, riguarda la superficie su cui giacciono asintoticamente le orbite, cioè l'attrattore, che risulta solo apparentemente una superficie, ma che deve avere di necessità una struttura complessa, "frattale" si potrebbe dire. Vediamo come questo accade. Come abbiamo ricordato più sopra, le varietà locali instabili dei punti fissi sono di dimensione 2 (cioè superfici regolari), che rappresentano una parte dell'attrattore (in quanto il flusso dell'equazione "schiaccia" le soluzioni contro queste superfici). Invece le varietà stabili sono monodimensionali, ed accade che ci sia una intersezione

<sup>80</sup>Questo è vero per ogni mappa espansiva: se  $x_n$  e  $x'_n$  sono orbite vicine, allora in prima approssimazione

$$|x_n - x'_n| \approx \prod_{j=0}^{n-1} |f'(x_j)| |x'_0 - x_0|,$$

e se  $|f'(x)| > 1$  allora la distanza cresce esponenzialmente con  $n$ .

eteroclina tra la varietà instabile del punto  $C$  e quella stabile del punto  $C'$ , e l'analoga tra la varietà stabile di  $C$  e quella instabile di  $C'$ . L'attrattore si costruisce così: prendiamo le orbite sulla varietà instabile di  $C$ , esse si allontaneranno spiraleggiando, fino ad avvicinarsi all'orbita eteroclina che le guiderà verso  $C'$ ; in vicinanza di  $C'$  saranno schiacciate sulla varietà instabile e riprenderanno a spiraleggiare allontanandosi da  $C'$  fino ad avvicinarsi alla seconda orbita eteroclina che le guiderà di nuovo dei pressi di  $C$  dove il processo riprende. Dunque l'attrattore sarà costituito dalle due varietà instabili, che però, come ben sappiamo non possono intersecarsi.<sup>81</sup> Quindi nella zona dove apparentemente i due fogli si fondono in realtà restano distinti (pur avendo una distanza esponenzialmente piccola), anzi ogni volta che l'orbita passa da  $C$  a  $C'$ , il numero di superfici raddoppia, dando origine ad una struttura complessa con un numero infinito di fogli che non si riesce a descrivere a parole. Questo è un altro esempio di come le intersezioni tra varietà stabili ed instabili (eterocline questa volta) diano origine a moti assolutamente complicati.

---

<sup>81</sup>Infatti se un'orbita appartenesse all'intersezione si dovrebbe avere contemporaneamente  $x(t) \rightarrow C$  e  $x(t) \rightarrow C'$  per  $t \rightarrow -\infty$ .



# Appendici

## A.1 Dimostrazione del Teorema della Varietà Stabile

In questa appendice dimostreremo il Teorema della Varietà Stabile Locale. La parte principale della dimostrazione consiste nel formulare il problema della ricerca delle orbite  $\mathbf{x}_n$  che tendono asintoticamente al punto fisso, come problema di punto fisso di una applicazione in un opportuno spazio di Banach. La dimostrazione richiede l'uso del teorema delle contrazioni (la cui dimostrazione viene posposta in una sezione finale), ambientato nello spazio  $C_0$  delle successioni convergenti a zero con la norma del sup. L'enunciato del Teorema della Varietà Stabile che dimostreremo è il seguente:

**Teorema 4 (della Varietà Stabile Locale)** *Sia  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$  un punto fisso iperbolico di una mappa regolare  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Allora in un intorno  $U$  sufficientemente piccolo di  $\bar{\mathbf{x}}$  esiste una superficie  $W_{loc}^s$  tangente in  $\bar{\mathbf{x}}$  allo spazio stabile  $E^s$ , invariante per la mappa  $F(\mathbf{x})$ , e tale che, se  $\mathbf{x}_0 \in W_{loc}^s$ , allora l'orbita  $\mathbf{x}_n$  di  $\mathbf{x}_0$  resta in  $U$  per tutti i tempi positivi  $n > 0$ , e converge a  $\bar{\mathbf{x}}$ , vale cioè*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}}.$$

*Inoltre la varietà stabile locale si proietta univocamente sul sottospazio lineare stabile, cioè può essere descritta come il grafico di una funzione.*

Nel seguito intenderemo sempre, per semplicità di notazione, che  $\bar{\mathbf{x}} = 0$ , cosa che si può ottenere pur di scegliere opportunamente l'origine delle coordinate.

### A.1.1 Rappresentazione delle successioni convergenti al punto fisso

Cominciamo coll'introdurre delle coordinate adattate al problema. Poiché l'origine è un punto fisso iperbolico, allora si ha la decomposizione  $\mathbb{R}^N = E^s \oplus E^u$ , e posso decomporre  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , con  $\mathbf{y} \in E^s$  e  $\mathbf{z} \in E^u$ , in modo che la matrice jacobiana  $DF$  in 0 si possa scrivere a blocchi nel modo seguente

$$DF(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & \mathbb{B} \end{pmatrix},$$

dove le matrici invertibili  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  sono le restrizioni di  $DF(0)$  rispettivamente al sottospazio stabile e a quello instabile, e soddisfano alle relazioni

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbf{y}\| &\leq \lambda\|\mathbf{y}\| \\ \|\mathbb{B}^{-1}\mathbf{z}\| &\leq \lambda\|\mathbf{z}\|, \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

con una costante  $0 < \lambda < 1$  opportuna. Quello che vogliamo mostrare è che la varietà  $W_{loc}^s$  si può scrivere sotto forma di grafico  $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\mathbf{y})$  di una funzione  $\mathbf{Z}$  che nell'origine si annulla con le sue derivate parziali. In particolare cominceremo con il mostrare che la funzione  $\mathbf{Z}$  è tale che, assegnato ad arbitrio un punto  $\mathbf{y}_0 \in E^s \cap U$ , il punto  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{Z}(\mathbf{y}_0))$  dà origine ad un'orbita  $(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n)$  che converge all'origine. Rappresentiamo  $\mathbf{F}$  come la sua parte lineare più un resto di ordine superiore, di modo che  $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  si scriva come

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbb{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ \mathbf{z}' &= \mathbb{B}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

dove i resti di ordine superiore  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  si annullano assieme ai loro jacobiani  $D\mathbf{f}$  e  $D\mathbf{g}$ , per  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Le orbite saranno date dalla ricorrenza

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbb{A}\mathbf{y}_n + \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n) \\ \mathbf{z}_{n+1} &= \mathbb{B}\mathbf{z}_n + \mathbf{g}(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n), \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

ed il problema consiste nel determinare il dato iniziale  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  in modo che l'orbita tenda all'origine, senza uscire dall'intorno come accade invece per quasi tutte le orbite. Nel seguito, denoteremo talvolta con  $\mathbf{f}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n)$  e  $\mathbf{g}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n)$  rispettivamente i valori che  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  assumono sui punti dell'orbita. Allora la ricorrenza (A.1.2) si scrive anche come

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \mathbb{A}^n \mathbf{y}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{A}^{n-k-1} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{z}_n &= \mathbb{B}^n \mathbf{z}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{B}^{n-k-1} \mathbf{g}_k. \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Questa formula segue da un analogo della formula di variazione delle costanti arbitrarie per le equazioni differenziali lineari non omogenee. Se infatti si pensa alle quantità  $\mathbf{f}_k$  ed  $\mathbf{g}_k$  come a vettori assegnati, allora la ricorrenza si può pensare come una ricorrenza lineare inhomogenea. Allora la soluzione generale della ricorrenza omogenea è semplicemente  $\mathbf{y}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}^n \mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{z}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}^n \mathbf{z}_0$ , con  $\mathbf{y}_0$  e  $\mathbf{z}_0$  costanti arbitrarie. Per trovare una soluzione particolare della inhomogenea la si ricerca nella forma (l'analogo appunto della variazione delle costanti arbitrarie)  $\mathbf{y}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}^n \tilde{\mathbf{y}}_n$  e  $\mathbf{z}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}^n \tilde{\mathbf{z}}_n$ . In questo modo la (A.1.2) si riscrive, in termini delle variabili  $\tilde{\mathbf{y}}_n$  e  $\tilde{\mathbf{z}}_n$ , come

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_n - \tilde{\mathbf{y}}_{n-1} &= \mathbb{A}^{-n} \mathbf{f}_{n-1} \\ \tilde{\mathbf{z}}_n - \tilde{\mathbf{z}}_{n-1} &= \mathbb{B}^{-n} \mathbf{g}_{n-1}. \end{aligned}$$

Ora, sommando su  $n$  si ottengono le espressioni seguenti per  $\tilde{\mathbf{y}}_n$  e per  $\tilde{\mathbf{z}}_n$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}_n &= \mathbf{y}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{A}^{-k-1} \mathbf{f}_k \\ \tilde{\mathbf{z}}_n &= \mathbf{z}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{B}^{n-k-1} \mathbf{g}_k,\end{aligned}\tag{A.1.4}$$

e da queste le espressioni (A.1.3) per  $\mathbf{y}_n$  ed  $\mathbf{z}_n$ . Le espressioni (A.1.3) hanno il pregio di farci subito capire quale condizione debba verificare  $\mathbf{z}_0$  affinché l'orbita converga all'origine. Notiamo infatti che, per successioni limitate,  $\mathbf{g}_k$  è una quantità limitata, per cui la seconda stima di (A.1.1) implica che la serie  $\sum \mathbb{B}^{-k-1} \mathbf{g}_k$  converga. Ma allora, se  $\mathbf{z}_0 + \sum \mathbb{B}^{-k-1} \mathbf{g}_k \neq 0$ , la quantità  $\mathbf{z}_n = \mathbb{B}^n \left( \mathbf{z}_0 + \sum \mathbb{B}^{-k-1} \mathbf{g}_k \right)$  diverge invece di tendere a zero, per cui deve essere necessariamente

$$\mathbf{z}_0 = - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{B}^{-k-1} \mathbf{g}_k.$$

Questa è la condizione che permette di determinare il punto iniziale  $\mathbf{z}_0 \in E^u \cap U$  che dia origine ad orbite giacenti sulla varietà stabile. Sostituendo tale condizione nella (A.1.3) si trova che le orbite sulla varietà stabile si possono rappresentare come

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_n &= \mathbb{A}^n \mathbf{y}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{A}^{n-k-1} \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k) \\ \mathbf{z}_n &= - \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{B}^{n-k-1} \mathbf{g}(\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k).\end{aligned}\tag{A.1.5}$$

Si noti che abbiamo parlato di “rappresentazione” della successione, perché scritta in questo modo la successione  $\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n$  non si può calcolare per ricorrenza, in quanto bisognerebbe già conoscere tutti i valori di  $\mathbf{z}_k$ ,  $k > n$  per poter calcolare  $\mathbf{z}_n$ .

Però questo modo di scrivere la successione permette di utilizzare un altro metodo per determinare la successione, che dà il valore “giusto” di  $\mathbf{z}_0$  (in funzione di  $\mathbf{y}_0$ ), al fine di determinare l'orbita stabile. Si tratta di “vedere” la rappresentazione (A.1.5) come determinante un problema di punto fisso in uno spazio di Banach. Ciò lo si può capire in questo modo. Introduciamo lo spazio (di Banach)

$$X = \left\{ \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n \in E^s, n \geq 1; \mathbf{u}_n \rightarrow 0 \right\} \times \left\{ \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \in E^u, n \geq 0; \mathbf{v}_n \rightarrow 0 \right\},$$

delle successioni di  $\mathbb{R}^N$  convergenti all'origine<sup>82</sup>, e normiamolo usando la norma del sup seguente:

$$\| \{ \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n \} \| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \geq 1} \| \mathbf{u}_n \| + \sup_{n \geq 0} \| \mathbf{v}_n \|.$$

<sup>82</sup>Notiamo solamente che l'indice delle componenti che stanno nello spazio stabile  $E^s$  partono da  $n = 1$ , cioè consideriamo le successioni di  $\mathbb{R}^N$  che partono dal piano  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$  fissato.

Definiamo una mappa  $\Phi : X \rightarrow X$  da questo spazio di Banach in sè, nel modo seguente: la successione

$$\{\mathbf{u}'_n, \mathbf{v}'_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\{\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\})$$

immagine, mediante  $\Phi$ , della successione  $\{\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\}$  è definita come da

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_n &= \mathbb{A}^n \mathbf{y}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{A}^{n-k-1} \mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \\ \mathbf{v}'_n &= - \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{B}^{n-k-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k). \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

Allora la (A.1.5) risulta essere equivalente al problema di punto fisso

$$\{\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n\} = \Phi(\{\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n\})$$

cioè al problema di trovare una successione che viene mappata da  $\Phi$  in se stessa. Notiamo che l'operatore  $\Phi$  dipende parametricamente da  $\mathbf{y}_0$ . Poiché andremo a mostrare che il punto fisso è unico, risulterà che questo punto fisso (cioè la successione sulla varietà stabile), dipende parametricamente da  $\mathbf{y}_0$ . In particolare il primo elemento  $\mathbf{z}_0$ , dipende parametricamente da  $\mathbf{y}_0$ , ed al variare di questo, il punto  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  descriverà la varietà  $W_{loc}^s$ . Ciò sarà visto meglio più avanti.

### A.1.2 Studio dell'esistenza del punto fisso

Dal punto di vista matematico occorre innanzitutto verificare che  $\Phi$  sia realmente una mappa da  $X$  in se stesso, cioè verificare che anche la successione  $\mathbf{u}'_n, \mathbf{v}'_n$  in  $\mathbb{R}^N$  ha limite nullo, se è nullo il limite di  $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n$  per  $n \rightarrow \infty$ . Per quanto riguarda  $\mathbf{v}'_n$  dalla seconda di (A.1.6) si ricava la stima

$$\|\mathbf{v}'_n\| \leq \sup_{k \geq n} \|g(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\| \sum_{k \geq n} \lambda^{k-n} = \frac{\sup_{k \geq n} \|g(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\|}{1 - \lambda},$$

in cui si è fatto uso della seconda delle stime (A.1.1). Ora, se prendiamo il limite per  $n \rightarrow \infty$ , otteniamo che  $\|\mathbf{v}'_n\|$  si annulla, poiché  $g(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$  si annulla per  $k \rightarrow \infty$  (ricordiamo che le successioni  $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n$  tendono a zero).

Per quanto riguarda invece  $\mathbf{u}'_n$ , dalla prima di (A.1.6) otteniamo la stima

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'_n\| &\leq \lambda^n \|\mathbf{y}_0\| + \sum_{k=0}^{n/2} \lambda^{n-k} \|\mathbf{f}_k\| + \sum_{k > n/2}^{n-1} \lambda^{n-k} \|\mathbf{f}_k\| \\ &\leq \lambda^n \|\mathbf{y}_0\| + \sup_{k > 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\| \sum_{k=0}^{n/2} \lambda^{n-k} + \sup_{k > n/2} \|\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\| \sum_{k > n/2}^{n-1} \lambda^{n-k} \\ &\leq \lambda^n \|\mathbf{y}_0\| + \sup_{k > 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\| \frac{\lambda^{n/2}}{1 - \lambda} + \frac{\sup_{k > n/2} \|\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\|}{1 - \lambda}, \end{aligned}$$



dove si è fatto uso della prima delle stime (A.1.1). Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , tutti i termini si annullano; in particolare l'ultimo termine, in cui compare l'estremo superiore per  $k > n/2$ , si annulla in quanto  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$  tende a zero per  $k \rightarrow \infty$ .

Ora per potere applicare il teorema delle contrazioni, bisogna trovare un chiuso  $K \subset X$  che sia invariante per  $\Phi$ , e tale che  $\Phi$  ristretta a  $K$  sia effettivamente una contrazione. Mostriamo che se  $\mathbf{y}_0$ , in norma, è sufficientemente piccolo, la bolla  $S(0, r)$  (chiusa) in  $X$  di raggio  $r = \|\mathbf{y}_0\|$  è un chiuso  $K$  che soddisfa alle ipotesi del teorema delle contrazioni.

Cominciamo con il mostrare che  $\Phi(S(0, r)) \subset S(0, r)$ , cioè che se  $\sup \|\mathbf{u}_n\| \leq r$ ,  $\sup \|\mathbf{v}_n\| \leq r$  allora vale anche  $\sup \|\mathbf{u}'_n\| \leq r$  e  $\sup \|\mathbf{v}'_n\| \leq r$ . Ricordiamo che  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  sono di ordine superiore al primo nell'intorno dell'origine, per cui vale

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \leq K r^2, \quad \|\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \leq K r^2, \quad (\text{A.1.7})$$

se  $\|(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \leq r$ . Dalle (A.1.6) si ottengono le stime seguenti

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'_n\| &\leq \lambda^n \|\mathbf{y}_0\| + \frac{\sup_{k \geq 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\|}{1 - \lambda} \\ \|\mathbf{v}'_n\| &\leq \frac{\sup_{k \geq 0} \|\mathbf{g}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\|}{1 - \lambda}, \end{aligned}$$

ed essendo  $\|\mathbf{y}_0\|, \|\mathbf{u}_n\|, \|\mathbf{v}_n\| \leq r$ , usando le (A.1.7) e ricordando che  $\lambda^n \leq \lambda$ , si trova per ogni  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'_n\| &\leq \lambda r + \frac{K r^2}{1 - \lambda} \\ \|\mathbf{v}'_n\| &\leq \frac{K r^2}{1 - \lambda}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

cioè

$$\sup_{n \geq 1} \|\mathbf{u}'_n\| + \sup_{n \geq 0} \|\mathbf{v}'_n\| \leq \lambda r + \frac{2K r^2}{1 - \lambda} \leq r$$

pur di prendere  $r < (1 - \lambda)^2 / 2K$ . Questo mostra che  $\Phi(S(0, r)) \subset S(0, r)$ .

Mostriamo ora che  $\Phi$  è una contrazione, cioè che, per ogni coppia di successioni  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)$  e  $(\mathbf{s}_n, \mathbf{t}_n)$  in  $S(0, r)$ , vale

$$\|\Phi(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) - \Phi(\mathbf{s}_n, \mathbf{t}_n)\| < k \|(\mathbf{u}_n - \mathbf{s}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{t}_n)\|,$$

con  $k < 1$ . Si hanno le maggiorazioni

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'_n - \mathbf{s}'_n\| &\leq \sum_{k \leq n} \lambda^{n-k} \|\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{s}_k, \mathbf{t}_k)\| \\ &\leq \sum_{k \leq n} \lambda^{n-k} \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq r} \|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \sup_{k \geq 0} (\|\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_k\| + \|\mathbf{v}_k - \mathbf{t}_k\|) \\ &\leq \frac{C'}{1 - \lambda} \|(\mathbf{u}_n - \mathbf{s}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{t}_n)\|, \end{aligned}$$

dove si è indicato con  $C'$  l'estremo superiore della norma della matrice Jacobiana  $\|Df(\mathbf{x})\|$  in un intorno dell'origine, di raggio  $r$ . Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}'_n - \mathbf{t}'_n\| &\leq \sum_{k \geq n} \lambda^{n-k} \|\mathbf{g}(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) - \mathbf{g}(\mathbf{s}_n, \mathbf{t}_n)\| \\ &\leq \sum_{k \geq n} \lambda^{n-k} \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq r} \|D\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \sup_{k \geq 0} (\|\mathbf{u}_k - \mathbf{s}_k\| + \|\mathbf{v}_k - \mathbf{t}_k\|) \\ &\leq \frac{\lambda C''}{1-\lambda} \|(\mathbf{u}_n - \mathbf{s}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{t}_n)\|, \end{aligned}$$

dove si è indicato con  $C''$  il sup di  $\|D\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$  nell'intorno  $\|\mathbf{x}\| < r$ . Ora siccome i Jacobiani di  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  tendono a zero per  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , allora pur di prendere  $r$  sufficientemente piccolo, si avrà

$$\frac{C'}{1-\lambda} + \frac{\lambda C''}{1-\lambda} < 1,$$

che mostra come  $\Phi$  sia una contrazione.

### A.1.3 La varietà stabile

Il teorema delle contrazioni mostra allora che esiste un **unico** punto fisso dell'applicazione  $\Phi$ , cioè una unica successione  $(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n)$  appartenente allo spazio di Banach  $X$ , che soddisfa la (A.1.5). Per come è definito lo spazio  $X$ , la successione appartiene alla varietà stabile locale. Questo mostra ad esempio che l'insieme  $W_{loc}^s$  non è vuoto; ma in realtà mostra molto di più.

Infatti abbiamo già detto che il funzionale  $\Phi$  dipende parametricamente da  $\mathbf{y}_0$ , per cui tutta la successione  $(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n)$  dipende parametricamente da tale valore, cioè al variare di  $\mathbf{y}_0$  otterremo successioni diverse. In particolare il valore  $\mathbf{z}_0$  risulta funzione di  $\mathbf{y}_0$ , cioè potremmo dire che esiste una funzione  $\mathbf{Z}(\mathbf{y})$  tale che

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{Z}(\mathbf{y}_0).$$

Detto in altri termini, una volta che fissiamo la proiezione  $\mathbf{y}_0$  del punto iniziale dell'orbita sull'autospazio stabile  $E^s$ , risulta univocamente fissato il punto da cui parte l'orbita stabile.

Bene, allora risulta che la varietà stabile locale è il grafico della funzione  $\mathbf{Z}$ , cioè si ha

$$W_{loc}^s = \{(\mathbf{y}_0, \mathbf{Z}(\mathbf{y}_0)), \quad \mathbf{y}_0 \in E^s, \quad \|\mathbf{y}_0\| < r\}.$$

Infatti, abbiamo mostrato che gli unici punti che danno origine ad orbite che tendono asintoticamente al punto fisso sono nella forma  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{Z}(\mathbf{y}_0))$ . Quello che resta da mostrare è che il grafico sia una superficie invariante, cioè che si abbia  $\mathbf{z}_n = \mathbf{Z}(\mathbf{y}_n)$ .

Consideriamo per fissare le idee il caso di  $\mathbf{y}_1$ , per  $n > 1$  il ragionamento è analogo. Abbiamo a priori due punti che danno origine ad orbite stabili: il

punto  $(y_1, z_1)$  ed il punto  $(y_1, Z(y_1))$ . Poiché, una volta fissato il valore della proiezione sulla varietà stabile, il punto che dà origine ad una orbita stabile è unico, ne consegue che  $z_1 = Z(y_1)$ , cioè il grafico è invariante.

La seconda delle (A.1.8), specializzata al caso  $n = 0$ , mostra che

$$\|z_0\| = \|Z(y_0)\| < \frac{K}{1-\lambda} \|y_0\|^2,$$

per una opportuna costante  $K > 0$ . Ne segue allora sia che  $Z(y_0) \rightarrow 0$  per  $y_0 \rightarrow 0$ , dunque la continuità di  $Z$  nell'origine, come pure  $DZ(0) = 0$ , cioè come il grafico sia tangente all'autospazio stabile  $E^s$  (nelle nostre coordinate il piano  $z = 0$ ).

La regolarità della funzione  $Z$  negli altri punti dell'intorno è un pochino più complessa da verificare. La continuità segue ancora dal teorema delle contrazioni, una volta che si osservi che l'operatore  $\Phi$  è continuo come funzione di  $y_0$ .

#### A.1.4 La dimostrazione del teorema delle contrazioni

L'enunciato del teorema delle contrazioni che abbiamo usato nella dimostrazione precedente è il seguente:

**Teorema 5 (delle contrazioni)** *Sia  $f : X \rightarrow X$  una funzione da uno spazio di Banach  $X$  in se, e sia  $K \subset X$  un insieme chiuso tale che  $f(K) \subset K$  (cioè invariante per  $f$ , nel linguaggio dei sistemi dinamici). Se esiste una costante positiva  $0 < k < 1$  tale che  $\forall x, y \in K$  valga*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|, \quad 0 < k < 1,$$

*allora esiste un unico punto fisso  $\bar{x} \in K$ , cioè un punto per cui*

$$\bar{x} = f(\bar{x}).$$

**Dimostrazione** La dimostrazione consiste nel mostrare che la successione  $\{x_n\} \subset K$  definita per ricorrenza da  $x_n = f(x_{n-1})$ , a partire da un punto qualunque  $x_0 \in K$ , converge ad un valore  $\bar{x}$ . Infatti in questo caso, essendo  $f$  continua, dalla relazione  $x_n = f(x_{n-1})$ , passando al limite trovo  $\bar{x} = f(\bar{x})$ , cioè  $\bar{x}$  è punto fisso.

Mostriamo ora la convergenza di  $\{x_n\}$ . Usando il fatto che  $f$  è una contrazione, otteniamo le stime seguenti: si ha dapprima

$$\|x_2 - x_1\| = \|f(x_1) - f(x_0)\| < k \|x_1 - x_0\|,$$

che fornisce

$$\|x_3 - x_2\| < k \|x_2 - x_1\| < k^2 \|x_1 - x_0\|,$$

ed iterando si trova per ogni  $n$  positivo

$$\|x_{n+1} - x_n\| < k^n \|x_1 - x_0\|.$$

Allora la successione  $\{x_n\}$  risulta essere una successione di Cauchy, in quanto

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \left\| \sum_{j=n}^{m-1} x_{j+1} - x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|x_{j+1} - x_j\| \\ &\leq \|x_1 - x_0\| \sum_{j=n}^{m-1} k^j = \frac{k^m - k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

che mostra appunto  $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$  per  $m, n \rightarrow +\infty$ . Allora, essendo  $X$  completo, esiste il limite  $\bar{x}$ , ed inoltre essendo  $K$  chiuso segue  $\bar{x} \in K$ . Il fatto che il punto fisso sia unico deriva dal fatto che se  $\bar{y} = f(\bar{y})$  e  $\bar{x} = f(\bar{x})$  allora vale

$$\|\bar{y} - \bar{x}\| = \|f(\bar{y}) - f(\bar{x})\| \leq k \|\bar{y} - \bar{x}\|,$$

che implica  $\|\bar{y} - \bar{x}\| = 0$ , cioè  $\bar{y} = \bar{x}$ .

Q.E.D.

Supponiamo ora che  $f$  dipenda con continuità da un parametro  $y$ , cioè  $f : U \times X \rightarrow X$ , dove<sup>83</sup>  $U \subset \mathbb{R}^N$ , e che la costante di contrazione  $k = k(y)$  sia limitata da un valore  $\bar{k} < 1$  per tutti gli  $y \in U$ . Naturalmente per ogni  $y$  fissato esiste un punto fisso  $\bar{x}$  che a priori dipende da  $y$ . Ottengo dunque una funzione  $\bar{x} = \bar{x}(y)$ . Questa funzione è continua. Infatti, denotando con  $\bar{x}' = \bar{x}(y')$  si ottiene

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(y) - \bar{x}(y')\| &= \|f(y, \bar{x}) - f(y', \bar{x}')\| \leq \\ &\leq \|f(y, \bar{x}) - f(y, \bar{x}')\| + \|f(y, \bar{x}') - f(y', \bar{x}')\| \leq \\ &\leq k(y) \|\bar{x}(y) - \bar{x}(y')\| + \|f(y, \bar{x}') - f(y', \bar{x}')\|, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\|\bar{x}(y) - \bar{x}(y')\| \leq \frac{\|f(y, \bar{x}') - f(y', \bar{x}')\|}{1 - \bar{k}},$$

e passando al limite per  $y \rightarrow y'$ , sfruttando la continuità di  $f$ , trovo che  $\bar{x} - \bar{x}' \rightarrow 0$ .

### A.1.5 Lo spazio delle successioni convergenti come spazio di Banach

Infine può non essere chiaro a tutti i lettori che lo spazio  $C_0$  delle successioni convergenti a zero sia uno spazio di Banach, cioè completo, se munito della norma del sup.

La dimostrazione procede in questo modo. Sia  $\{u^{(n)}\} \in C_0$  una successione fondamentale di  $C_0$ , cioè una successione tale che

$$\sup_k |u_k^{(n)} - u_k^{(m)}| \rightarrow 0 \quad \text{per } m, n \rightarrow +\infty,$$

<sup>83</sup>Ma  $U$  potrebbe essere un generico spazio topologico, la dimostrazione non cambia.

dove si sono indicato con  $u_k^{(n)}$  gli elementi della successione  $u^{(n)}$ . Allora, per ogni  $k$ , la successione (in  $\mathbb{R}$ )  $u_k^{(n)}$  è fondamentale, cioè esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_k^{(n)} = u_k$ . Bisogna ora mostrare che la successione limite  $\{u_k\}$  sta in  $C_0$ , cioè che vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0.$$

Ora, per ogni  $\varepsilon > 0$  fissato, pur di prendere  $n$  ed  $m$  abbastanza grandi vale

$$|u_k^{(n)} - u_k^{(m)}| \leq \sup_k |u_k^{(n)} - u_k^{(m)}| \leq \varepsilon,$$

per cui passando al limite per  $m$  che tende all'infinito, trovo

$$|u_k^{(n)} - u_k| \leq \varepsilon \quad \forall k.$$

Ricordiamo ora che, pur di prendere  $k$  sufficientemente grande, vale  $|u_k^{(n)}| \leq \varepsilon$  (perchè la successione  $u_k^{(n)}$  converge a zero per  $k \rightarrow +\infty$ ), e che quindi si ha

$$|u_k| \leq |u_k^{(n)}| + |u_k^{(n)} - u_k| \leq 2\varepsilon,$$

che dimostra appunto che  $u_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

## A.2 Integrazione numerica della equazione di Newton

### A.2.1 Il metodo del *leap-frog*

Esistono moltissimi metodi di integrazione numerica di una generica equazione differenziale (ordinaria, in forma normale)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.2.1})$$

in  $\mathbb{R}^n$ ; uno dei più utilizzati è ad esempio quello noto come metodo di Runge-Kutta. Esiste però anche un altro metodo, che può essere impiegato nel caso particolare delle equazioni di Newton, e che anzi in tal caso è molto più vantaggioso (specialmente se le forze non dipendono dalla velocità): si tratta del metodo talvolta noto con il nome di *metodo leap-frog*, che ora illustriamo.

Consideriamo l'equazione di Newton

$$\ddot{x} = F(x) \quad (\text{A.2.2})$$

(ci riferiamo al caso di una particella di massa unitaria, che si muove su una retta, sicché qui  $x \in \mathbb{R}$ , con forza  $F$  dipendente solo da  $x$ ; ma la trasposizione al caso forze dipendenti dal tempo, o al caso del moto di una particella nello spazio o del moto di più particelle con masse arbitrarie, apparirà del tutto ovvia). Ben sappiamo che questa equazione del secondo ordine si riduce immediatamente alla forma generale (A.2.1) con il consueto procedimento di introdurre come variabile indipendente la velocità. Infatti si ha in tal modo come incognita la quantità vettoriale (a due componenti)  $\mathbf{x} = (x, v)$ , che risulta retta dall'equazione del primo ordine in forma normale,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= F(x). \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Il punto rilevante è che i metodi tradizionali come ad esempio quello di Runge-Kutta si riferiscono all'equazione (A.2.1) ovvero, nel caso di  $n = 2$ , del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, v) \\ \dot{v} &= f_2(x, v), \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

dove le funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  sono del tutto arbitrarie, e dunque i metodi alla Runge-Kutta non sfruttano la forma speciale (A.2.3) dell'equazione di Newton, in cui si ha  $f_1(x, v) = v$ ,  $f_2(x, v) = F(x)$ . Il metodo leap-frog invece sfrutta pienamente tale forma particolare. Inoltre esso ha la proprietà di soddisfare un importante requisito qualitativo, quello di rispettare la struttura symplettica sottostante l'equazione di Newton. Questo punto verrà chiarito più sotto. Cominciamo col definire il metodo leap-frog.

Si tratta di questo. Come in tutti i comuni metodi di integrazione, discretizziamo il tempo introducendo un "passo di integrazione" costante,<sup>84</sup> diciamolo

<sup>84</sup>Non ci occupiamo qui del problema che sia talvolta conveniente scegliere invece un passo "variabile".

$\tau$ . Ciò vuol dire che d'ora in poi il tempo sarà costretto ad assumere i valori  $t_n = n\tau$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  (potremmo anche considerare tempi negativi, cioè  $n \in \mathbb{Z}$ ). Avendo assegnato delle condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0$$

con certi "dati iniziali"  $x_0, v_0$ , vogliamo ora determinare in maniera approssimata l'evoluzione, ovvero il moto nello "spazio delle configurazioni" (cioè la posizione in funzione del tempo)  $x_n = x(t_n)$ , o anche il moto nello "spazio delle fasi" del sistema, ovvero la successione  $(x_n, v_n)$ .

L'idea centrale consiste nell'utilizzare la formula di Lagrange (detta anche formula centrata) per la derivata seconda, precisamente

$$\tau^2 \ddot{x}(t) \simeq x(t + \tau) - 2x(t) + x(t - \tau), \quad (\text{A.2.5})$$

o equivalentemente

$$x(t + \tau) - x(t) \simeq x(t) - x(t - \tau) + \tau^2 \ddot{x}(t). \quad (\text{A.2.6})$$

**Dimostrazione.** Dalla formula di Taylor al secondo ordine si ha

$$x(t + \tau) = x(t) + \tau \dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{x}(t) + \dots,$$

$$x(t - \tau) = x(t) - \tau \dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{x}(t) + \dots,$$

e poi si somma, sicché si elidono i due termini in  $\dot{x}$ . Si noti come scompaiano anche i termini in  $\tau^3$  (che sono di segno opposto e uguali in modulo), sicché la formula è esatta a meno di termini del quarto ordine.

Dunque, dall'equazione di Newton  $\ddot{x} = F(x)$ , ovvero  $\ddot{x}(t) = F(x(t))$ , si ottiene la relazione

$$x(t + \tau) - x(t) \simeq x(t) - x(t - \tau) + \tau^2 F(x(t)), \quad (\text{A.2.7})$$

È allora spontaneo introdurre come variabile ausiliaria lo "spostamento compiuto nell'intervallo che precede il tempo  $t$ ", ovvero la quantità

$$(dx)(t) = x(t) - x(t - \tau), \quad (\text{A.2.8})$$

perché, in virtù della (A.2.6), l'equazione di Newton ci fornisce allora in maniera esplicita il "nuovo" spostamento in funzione dello spostamento precedente (o "vecchio") e della posizione precedente, precisamente

$$(dx)(t + \tau) \simeq (dx)(t) + \tau^2 F(x(t)). \quad (\text{A.2.9})$$

Naturalmente, la "nuova" posizione si otterrà da quella vecchia aggiungendo il nuovo spostamento:

$$x(t + \tau) = x(t) + (dx)(t + \tau);$$

in effetti, si tratta ancora della definizione (A.2.8), solo relativa al tempo  $t + \tau$  anziché al tempo  $t$ .

Si perviene in tal modo al metodo esplicito di calcolo (*metodo leap-frog*) dato dalle formule<sup>85</sup>

$$\begin{aligned}(dx)_{n+1} &= (dx)_n + \tau^2 F(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + (dx)_{n+1}.\end{aligned}\tag{A.2.10}$$

Per dare inizio al procedimento iterativo, è necessario procurarsi il valore dell'incremento al tempo zero,  $dx(0) = x(0) - x(-\tau)$ . Questo viene determinato preliminarmente usando lo sviluppo di Taylor per calcolare  $x(-\tau)$ , ad esempio a meno di termini del terzo ordine:

$$x(-\tau) = x(0) - \tau v(0) + \frac{1}{2} \tau^2 F(x(0))$$

( si è usato  $\ddot{x}(0) = F(x(0))$  ), sicché, utilizzando la conoscenza dei dati iniziali, si ottiene per  $(dx)_0 = x(0) - x(-\tau)$  l'espressione

$$(dx)_0 = \tau v_0 - \frac{1}{2} \tau^2 F(x_0).\tag{A.2.11}$$

In questo modo si ottiene direttamente il “movimento nello spazio delle configurazioni”, ovvero la successione  $\{x_n\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ).

In molti casi si ha interesse a calcolare il “movimento nello spazio delle fasi”, ovvero la successione  $\{(x_n, v_n)\}$  approssimante il corrispondente moto  $((x(t), v(t)), t \geq 0$ , e a tal fine è necessario procurarsi una approssimazione delle velocità  $v_n = \dot{x}(t_n)$ . L'approssimazione più semplice che si può considerare consiste nel definire ad esempio

$$v_{n+1} = \frac{(dx)_{n+1}}{\tau} \equiv \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau},\tag{A.2.12}$$

e questo è equivalente a sostituire lo schema (A.2.10) con lo schema<sup>86</sup>

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= v_n + \tau F(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \tau v_{n+1}.\end{aligned}\tag{A.2.13}$$

Una approssimazione migliore si ottiene osservando che l'interpretazione della quantità che appare a secondo membro della (A.2.12) come velocità al tempo  $t_{n+1}$  è una “forzatura”, perché un “rapporto incrementale” rappresenta tanto bene la derivata destra nell'estremo sinistro quanto la derivata sinistra nell'estremo destro. È ovviamente più adeguata una interpretazione “simmetrica” (analogo a quella che abbiamo utilizzato per la derivata seconda), ovvero

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \simeq v\left(t_n + \frac{\tau}{2}\right).\tag{A.2.14}$$

<sup>85</sup>Se la forza dipende dal tempo, basta inserire  $F(x_n, t_n)$  in luogo di  $F(x_n)$ .

<sup>86</sup>NOTA PER GLI AUTORI. Scrivere le formule in modo che sia visibile che la trasformazione è canonica.



D'altra parte noi siamo interessati alla velocità al tempo  $t_{n+1}$ , ovvero  $v_{n+1} = v(t_n + \tau)$ . La corrispondente espressione si ottiene allora da quella appena ottenuta per  $v(t_n + \frac{\tau}{2})$  mediante sviluppo di Taylor:

$$v(t_{n+1}) \simeq v(t_n + \frac{\tau}{2}) + \frac{\tau}{2} F(x(t_n + \frac{\tau}{2})) \simeq v(t_n + \frac{\tau}{2}) + \frac{\tau}{2} F(x(t_n)).$$

Si perviene in tal modo alla formula che migliora la (A.2.12), ovvero alla formula

$$v_{n+1} = \frac{(dx)_{n+1}}{\tau} + \frac{\tau}{2} F(x_n). \quad (\text{A.2.15})$$

Si noti bene però che questa formula per il calcolo della nuova velocità non deve affatto interferire con lo schema leap-frog (A.2.10) per il calcolo della nuova posizione, il quale procede in modo del tutto indipendente.<sup>87</sup> Si perviene in tal modo allo schema

$$\begin{aligned} (dx)_{n+1} &= (dx)_n + \tau^2 F(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + (dx)_{n+1} \\ v_{n+1} &= \frac{1}{\tau} (dx)_{n+1} + \frac{\tau}{2} F(x_n). \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

congiunta con<sup>88</sup>

$$(dx)_0 = \tau v_0 - \frac{1}{2} \tau^2 F(x_0) + \frac{1}{6} \tau^3 F'(x_0) v_0. \quad (\text{A.2.17})$$

In effetti, in moltissimi casi è richiesto solo di calcolare il movimento nello spazio delle configurazioni, per cui basta lo schema (A.2.10), e si richiede poi il calcolo delle velocità soltanto saltuariamente, ad esempio per verificare la conservazione dell'energia, o per tracciare il ritratto in fase nei modelli di Hénon-Heiles o del pendolo forzato. In tali casi si procederà con lo schema leap-frog (A.2.10), inserendo il calcolo "più esatto" delle velocità (A.2.15) o approssimazioni ancora migliori) solo quando richiesto (ad esempio, a tempi multipli di  $2\pi/\Omega$  nel caso del pendolo forzato).

## A.2.2 I metodi di splitting

Il metodo del *leap-frog* ammette una generalizzazione amplissima alle equazioni differenziali di tutti i tipi (anche alle derivate parziali) che ora discuteremo. In particolare mostreremo quella che è la sua caratteristica peculiare, cioè di essere un algoritmo *simplettico*, cioè di essere particolarmente adatto all'integrazione di equazioni differenziali Hamiltoniane.

<sup>87</sup>Da qui viene il nome "salto della rana", perché si "saltano" i tempi intermedi  $t_n + \tau/2$ : *to leap = to pass over by a jump*.

<sup>88</sup>Rispetto alla formula A.2.11 si è inserito il termine del terzo ordine nello sviluppo di Taylor per  $(dx)_0 = x(0) - x(-\tau)$ . Si è usato poi il fatto che la derivata terza della funzione  $x(t)$  è data da  $\frac{d}{dt} \ddot{x} = \frac{d}{dt} F(x(t)) = F'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$  (per la formula di derivata di una funzione composta).

Per fare questo è opportuno formalizzare i concetti appena visti. Riassumendo quello che si è fatto nel paragrafo precedente, si può dire che con il metodo del *leap-frog* abbiamo una mappa  $\Psi^\tau$  (un diffeomorfismo sullo spazio delle fasi, per essere precisi) che fa passare dal punto  $(x_n, v_n)$  al punto  $(x_{n+1}, v_{n+1})$  in modo da approssimare (ad un certo ordine che vedremo), l'evoluzione determinata dalla soluzione delle equazioni di Newton. Abbandonando per ora la notazione  $(x, v)$ , indichiamo semplicemente con  $\mathbf{x}$  (intendendo che può avere un numero arbitrario di coordinate) il punto nello spazio delle fasi, e consideriamo una generica equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (22)$$

ed il relativo flusso  $\Phi^\tau$ . Un algoritmo numerico sarà semplicemente una mappa (esplicita)  $\Psi^\tau$  che approssima il flusso in modo opportuno. Anzi, il grado di approssimazione dell'algoritmo sarà definito nel modo seguente:

**Definizione 6 (Ordine di un Algoritmo)** *L'ordine di un algoritmo è l'intero  $s$  tale che*

$$\sup_{\mathbf{x}} |\Phi^\tau \mathbf{x} - \Psi^\tau \mathbf{x}| \leq C \tau^{s+1},$$

con una costante  $C$  indipendente da  $\tau$ .

Insomma se l'algoritmo è di ordine  $s$ , allora l'errore decresce come  $\tau^{s+1}$  per  $\tau$  che tende a zero. Perché si considera  $s + 1$  all'esponente? Perché non interessa sapere l'approssimazione compiuta sul singolo passo (cioè dopo un tempo  $\tau$ ), ma quanto è vicina l'orbita approssimata all'orbita vera. A questo proposito citiamo il teorema seguente

**Teorema 6 (Approssimazione delle orbite)** *Per ogni  $n$  vale la stima seguente*

$$|\Phi^{n\tau} \mathbf{x} - (\Psi^\tau)^n \mathbf{x}| \leq C \tau^{s+1} n e^{Kn\tau},$$

dove  $K$  è la costante di Lipschitz di  $\Psi^\tau$ .

La dimostrazione si esegue sulla stessa linea di quanto verrà fatto nel primo paragrafo del successivo capitolo, e si lascia come esercizio al lettore.<sup>89</sup> Si vede dunque che l'errore sull'orbita decresce se riduciamo il passo di integrazione  $\tau$ ; in questo modo però se vogliamo conoscere l'orbita per un intervallo di tempo  $t_0$  finito indipendente da  $\tau$ , è necessario aumentare il numero  $n$  di passi di integrazione fino ad un valore  $n_0$  in modo che si abbia  $t_0 = n_0 \tau$ . Espresso in termini di  $t_0$  la stima del teorema diviene

$$|\Phi^{t_0} \mathbf{x} - (\Psi^\tau)^{n_0} \mathbf{x}| \leq C \tau^s t_0 e^{Kt_0}, \quad (\text{A.2.18})$$

<sup>89</sup>Nella formula abbiamo scritto  $(\Psi^\tau)^n$ , invece che  $\Psi^{n\tau}$ , per non indurre il lettore nel ritenere che  $\Psi^\tau$  sia il flusso di qualcosa. Per ora  $\tau$  è un semplice parametro che compare nell'algoritmo.

che ci dice appunto che ad ogni tempo finito l'errore decresce come  $\tau^s$ . Per semplificare, possiamo analizzare il cosiddetto metodo di Eulero.<sup>90</sup> La  $\Psi$  è definita come

$$\Psi^\tau \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} + \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Allora poiché le soluzioni dell'equazione (22) soddisfano

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(0) + \tau \dot{\mathbf{x}}(0) + O(\tau^2) = \mathbf{x}(0) + \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}(0)) + O(\tau^2),$$

allora detto  $\mathbf{x}_0$  il dato iniziale, vale evidentemente

$$\Phi^\tau \mathbf{x}_0 - \Psi^\tau \mathbf{x}_0 = O(\tau^2),$$

cioè il metodo di Eulero è di ordine 1. Naturalmente si può ottenere un algoritmo di ordine maggiore (ad esempio 2) se si considerano gli ordini successivi nello sviluppo di Taylor.<sup>91</sup>

Per noi, l'aspetto più interessante della stima (A.2.18) è un altro: essa infatti mette in luce il fatto che l'errore possa crescere esponenzialmente con  $t_0$ , cioè che esiste in pratica un limite di tempo oltre il quale non si può garantire che l'errore sia piccolo, comunque si scelga  $\tau$ , in quanto a causa degli inevitabili errori di arrotondamento non si può prendere  $\tau$  arbitrariamente piccolo (per un metodo di ordine 2, con  $\tau$  dell'ordine di  $10^{-5}$  si è già raggiunto il limite per calcoli in doppia precisione). Questo rappresenta un problema se si intendono scoprire proprietà qualitative delle soluzioni dell'equazione (22) valide per tempi grandi (attrattori, varietà invarianti, etc.). L'idea è quella di scegliere un metodo che riproduca le caratteristiche qualitative importanti del flusso che stiamo approssimando, di modo che se anche non si riesce più a seguire esattamente la singola orbita, si riescono a ritrovare le proprietà qualitative "stabili", cioè quelle che non dipendono troppo strettamente dall'esatta equazione differenziale che stiamo studiando. Ci dobbiamo ricordare infatti che, se stiamo integrando delle equazioni differenziali che modellizzano un fenomeno reale (sia esso fisico, che chimico, che biologico) il modello è inevitabilmente un'approssimazione della realtà, non fosse altro perché i vari parametri sono conosciuti con una certa approssimazione, così come le condizioni iniziali. E dunque, i risultati qualitativi significativi, sono quelli che sono stabili sotto piccole perturbazioni del modello (problema della stabilità strutturale). Di queste importanti problematiche non ci occuperemo, però sono la premessa per la discussione seguente.

Tornando agli algoritmi di integrazione, la caratteristica qualitativa più importante della mappa  $\Phi^\tau$  è che essa appartiene ad una famiglia che forma un

<sup>90</sup>Questo metodo è fortemente sconsigliato come metodo di risoluzione delle equazioni differenziali, avendo una serie di "difetti" se preso come tale. È invece estremamente utile come metodo teorico: ad esempio tramite il suo uso si ottiene la dimostrazione dell'esistenza delle soluzioni delle equazioni differenziali nella semplice ipotesi di continuità di  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , al posto dell'usuale più forte richiesta di Lipschitzianità.

<sup>91</sup>Ad esempio il termine  $\ddot{\mathbf{x}}$  si ottiene derivando la relazione  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , cioè  $\ddot{\mathbf{x}} = (\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}) \dot{\mathbf{x}} = (\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}) \mathbf{f}$ .

gruppo continuo di diffeomorfismi (il flusso generato dall'equazione differenziale), cioè che l'inversa di  $\Phi^\tau$  si ottiene semplicemente cambiando il segno di  $\tau$ . Vorremmo dunque che la sua approssimazione  $\Psi^\tau$  abbia la stessa proprietà, che valga dunque

$$(\Psi^\tau)^{-1} = \Psi^{-\tau}. \quad (\text{A.2.19})$$

Questo requisito è molto forte. Ad esempio si vede che questa proprietà non vale per il metodo di Eulero. Infatti, definito  $\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^\tau \mathbf{x}$ , la mappa inversa  $\mathbf{x} = (\Psi^\tau)^{-1} \mathbf{y}$  è definita implicitamente come soluzione dell'equazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

mentre se cambio il segno di  $\tau$  ottengo

$$\Psi^{-\tau} \mathbf{y} = \mathbf{y} - \tau \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

(la differenza tra le due formule sta nel punto in cui  $\mathbf{f}$  viene calcolata). I metodi per cui vale la (A.2.19), sono detti **metodi Simmetrici**. Tali metodi sono generalmente *impliciti*, cioè l'evoluto del punto  $\mathbf{x}$  viene determinato come soluzione di una certa equazione. Un esempio di tale genere è fornito dal cosiddetto metodo di Eulero modificato definito al modo seguente. Se  $\mathbf{x}_n$  è l' $n$ -esimo punto dell'orbita, il punto successivo  $\mathbf{x}_{n+1}$  viene determinato da

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\tau}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)),$$

cioè, come già detto, risolvendo ad ogni passo una certa equazione (lasciamo al lettore la verifica che questo metodo è simmetrico).<sup>92</sup>

La complessità di questo approccio è evidente, e ci si domanda se non possano esistere dei metodi espliciti (come il leap-frog) che siano allo stesso tempo simmetrici. Un modo per costruire tali metodi, è il cosiddetto metodo di splitting, che si può applicare in tutti i casi in cui si possa scrivere  $\mathbf{f}$  come somma

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$$

e si sappia risolvere analiticamente le equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2,$$

cioè si sappiano scrivere esplicitamente i flussi  $\Phi_1^\tau$  e  $\Phi_2^\tau$ . Ad esempio per l'equazione di Newton con una forza generica (tornando ora alla notazione  $(x, v)$  per il punto nello spazio delle fasi) si può scrivere

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m} f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} f(x) \end{pmatrix},$$

<sup>92</sup>Per  $\tau$  piccoli tale equazione si risolve bene per approssimazioni successive, cioè scegliendo  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_n + \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  e successivamente ponendo, per  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_n + \frac{\tau}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}))$ . Per  $k \rightarrow +\infty$  la successione  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  converge alla soluzione dell'equazione  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_n + \frac{\tau}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}))$ , cioè al valore cercato  $\mathbf{x}_{n+1}$ . In tutti i casi pratici già  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  fornisce una approssimazione sufficiente.

e possiamo considerare dunque le due equazioni seguenti. La prima sarà

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre la seconda sarà

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}f(x) \end{pmatrix}.$$

Queste due equazioni si sanno risolvere esplicitamente in modo del tutto banale. La prima mi dà un moto rettilineo uniforme (essendo la forza nulla), per cui il flusso  $\Phi_1^\tau$  è dato esplicitamente da

$$\Phi_1^\tau \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \tau v \\ v \end{pmatrix}.$$

La seconda si risolve in modo molto simile:  $\dot{x} = 0$ , cioè  $x$  è costante; dunque la seconda mi fornisce  $\dot{v}$  costante e dunque un moto lineare per  $v$ . Il flusso  $\Phi_2^\tau$  è quindi dato esplicitamente da

$$\Phi_2^\tau \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ v + \tau \frac{f(x)}{m} \end{pmatrix}.$$

Tornando ora al caso generale il metodo di splitting consiste nel costruire la mappa approssimante  $\Psi^\tau$  come composizione dei flussi  $\Phi_i^\tau$ , e precisamente come

$$\Psi^\tau \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1^{\tau/2} \Phi_2^\tau \Phi_1^{\tau/2}.$$

Vale allora il seguente

**Teorema 7** *L'algoritmo  $\Psi^\tau$  è simmetrico ed almeno di ordine 2.*

Il fatto che sia simmetrico è di verifica immediata. Vale infatti

$$(\Psi^\tau)^{-1} = (\Phi_1^{\tau/2})^{-1} (\Phi_2^\tau)^{-1} (\Phi_1^{\tau/2})^{-1},$$

ma poiché  $\Phi_i^\tau$  sono flussi e dunque  $(\Phi_i^\tau)^{-1} = \Phi_i^{-\tau}$ , segue

$$(\Psi^\tau)^{-1} = \Phi_1^{-\tau/2} \Phi_2^{-\tau} \Phi_1^{-\tau/2} = \Psi^{-\tau}.$$

La dimostrazione che l'algoritmo è almeno di ordine 2 è più complessa. Diamo una semplice traccia della dimostrazione. Intanto si dimostra che l'algoritmo è almeno di ordine 1. Infatti innanzitutto vale

$$\Phi_i^\tau \mathbf{x} = \mathbf{x} + \tau \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + O(\tau^2);$$

indichiamo ora con

$$\mathbf{x}' \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1^{\tau/2} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{\tau}{2} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + O(\tau^2),$$

e con

$$\mathbf{x}'' \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_2^\tau \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \tau \mathbf{f}_2(\mathbf{x}') + O(\tau^2) = \mathbf{x}' + \tau \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + O(\tau^2),$$

dove la funzione  $\mathbf{f}_2$  può essere valutata, a meno di un errore di ordine  $O(\tau^2)$ , indifferentemente in  $\mathbf{x}'$  oppure in  $\mathbf{x}$ . Vale allora

$$\begin{aligned} \Psi^\tau \mathbf{x} &= \Phi_1^{\tau/2} \mathbf{x}'' = \mathbf{x}'' + \frac{\tau}{2} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}'') + O(\tau^2) = \mathbf{x}'' + \frac{\tau}{2} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + O(\tau^2) = \\ &= \mathbf{x}' + \tau \mathbf{f}_2(\mathbf{x}') + \frac{\tau}{2} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + O(\tau^2) = \mathbf{x}' + \tau \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + O(\tau^2) = \\ &= \mathbf{x} + \frac{\tau}{2} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \frac{\tau}{2} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + O(\tau^2) = \mathbf{x} + \tau \mathbf{f}(\mathbf{x}) + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Ricordiamo ancora che le funzioni  $\mathbf{f}_i$  possono essere valutate, a meno di errori di ordine  $O(\tau^2)$ , indifferentemente in  $\mathbf{x}''$  oppure  $\mathbf{x}'$  o  $\mathbf{x}$ .

Abbiamo dunque mostrato che il metodo è almeno di ordine uno. Ora, si può dimostrare che i metodi simmetrici hanno l'importante proprietà di essere di ordine pari, per cui il metodo di splitting deve essere almeno di ordine 2. Generalizzazioni si ottengono decomponendo  $\mathbf{f}$  in una somma di addendi maggiore di 2, oppure facendo composizioni di flussi  $\Phi_i^\tau$  più complesse di quella indicata (quest'ultimo caso si usa se si vuole avere un algoritmo di ordine  $s$  elevato).

Per i sistemi Hamiltoniani i metodi di splitting hanno l'ulteriore vantaggio che l'algoritmo  $\Psi^\tau$  è *simplettico*, cioè è una trasformazione canonica dello spazio delle fasi. L'algoritmo ha dunque tutte le caratteristiche qualitative del flusso che vuole approssimare. Tanto più che si può dimostrare il risultato di approssimazione seguente<sup>93</sup>

**Teorema 8** *Se  $\Psi^\tau$  è una mappa simplettica che approssima il flusso  $\Phi^\tau$ , relativo ad un sistema hamiltoniano con Hamiltoniana  $H$ , allora esiste una Hamiltoniana  $\tilde{H}$  che differisce da  $H$  di una quantità  $O(\tau^s)$ , tale che*

$$|\tilde{\Phi}^{n\tau} - (\Psi^\tau)^n| < C n \tau^{s+1} e^{-k'/\tau} e^{nK\tau},$$

dove  $\tilde{\Phi}^\tau$  è il flusso relativo ad  $\tilde{H}$ .

In sostanza questo teorema dice che, benché la soluzione numerica rimanga vicino alla soluzione dell'equazione differenziale solo fino ad un tempo  $1/K$ , essa rimane però vicino per un tempo molto più lungo, di ordine  $1/\tau$ , alla soluzione di un sistema hamiltoniano che è una piccola perturbazione del sistema in esame.

Per vedere che  $\Psi^\tau$  risulta canonico basta fare uno splitting  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ , in cui entrambi i campi  $\mathbf{f}_i$  risultano Hamiltoniani. Allora i flussi  $\Phi_i^\tau$  risultano trasformazioni canoniche, per cui risulta *simplettico* anche  $\Psi^\tau$  in quanto composizione di trasformazioni canoniche. Notiamo che lo splitting si presenta naturalmente

<sup>93</sup>Vedi: G. Benettin, A. Giorgilli, *On the Hamiltonian Interpolation of Near to the Identity Symplectic Mappings with Application to Symplectic Integration Algorithms*, J. Stat. Phys. **74**, 1117-1144 (1994).

per le Hamiltoniane naturali che si presentano sotto forma di somma di energia cinetica più energia potenziale, cioè

$$H = K(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}),$$

dove  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  sono le variabili canoniche coniugate. Allora le hamiltoniane  $K(\mathbf{p})$  e  $V(\mathbf{q})$  sono integrabili, e i flussi sono i seguenti: quello relativo a  $V(\mathbf{p})$ , che indichiamo con  $\Phi_1^\tau$ , è dato da

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \tau \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}),$$

mentre quello relativo a  $V(\mathbf{p})$ , che indichiamo con  $\Phi_2^\tau$ , è dato da

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \tau \partial_{\mathbf{p}} K(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}.$$

Con questa scelta l'algoritmo  $\Psi^\tau$  è precisamente il leap-frog che abbiamo discusso nel paragrafo precedente. Infatti cominciamo a notare che in generale vale

$$\begin{aligned} (\Psi^\tau)^n &= (\Phi_1^{\tau/2} \Phi_2^\tau \Phi_1^{\tau/2}) (\Phi_1^{\tau/2} \Phi_2^\tau \Phi_1^{\tau/2}) \dots (\Phi_1^{\tau/2} \Phi_2^\tau \Phi_1^{\tau/2}) = \\ &= \Phi_1^{-\tau/2} (\Phi_1^\tau \Phi_2^\tau) (\Phi_1^\tau \Phi_2^\tau) \dots (\Phi_1^\tau \Phi_2^\tau) \Phi_1^{\tau/2}; \end{aligned}$$

ora l'evoluzione determinata dalla mappa  $\Phi_1^\tau \Phi_2^\tau$ , correttamente determina i valori  $\mathbf{q}_n$  lungo l'orbita, in quanto  $\Phi_1^{\tau/2}$  modifica solo i momenti. Dalle espressioni esplicite date più sopra, si controlla allora che  $\Phi_2^\tau \Phi_1^\tau$  agisce nel modo seguente

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \tau \partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q}' = \mathbf{q} + \tau \partial_{\mathbf{p}} K(\mathbf{p}'),$$

espressione che è identica alla (A.2.13) del paragrafo precedente, dove si ricordi che nel caso dell'equazione di Newton l'energia cinetica è semplicemente  $K = p^2/2m$ . Per trovare invece il corretto valore di  $\mathbf{p}_n$  devo applicare ancora  $\Phi_1^{\tau/2}$ , e questo coincide con l'usare la terza di (A.2.16). Abbiamo allora dimostrato che il metodo del leap-frog è un metodo simmetrico e simplettico, anzi il più semplice tra tali metodi. Per questo è molto usato letteratura, specialmente per le simulazioni di dinamica molecolare.

Ma i metodi di splitting sono utili per integrare anche sistemi non Hamiltoniani, ad esempio può essere utilizzato per integrare il sistema di Lorenz (21), che nell'articolo originale venne integrato numericamente mediante il metodo di Eulero modificato. Infatti se consideriamo il sistema di Lorenz

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma X + \sigma Y & & \\ -XZ & +rX - Y & \\ XY & & -bZ \end{pmatrix},$$

possiamo fare lo splitting nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma X + \sigma Y & & \\ rX - Y & & \\ & & -bZ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -XZ \\ XY \end{pmatrix},$$

che porta ai due sistemi di equazioni seguenti: il primo

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma X + \sigma Y \\ rX - Y \\ -bZ \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.20})$$

è una sistema lineare, e il secondo è invece il seguente

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -XZ \\ XY \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.21})$$

che è solo apparentemente non lineare. Infatti poichè  $\dot{X} = 0$  esso fornisce  $X$  costante, per cui le due equazioni rimanenti non sono altro che le equazioni dell'oscillatore armonico con frequenza  $X$ . Dunque il flusso  $\Phi_2^\tau$  è dato da

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \cos(X\tau) - Z \sin(X\tau) \\ Z \cos(X\tau) + Y \sin(X\tau) \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda il flusso  $\Phi_1^\tau$ , cominciamo col notare, che l'equazione (A.2.20) per  $Z$  si disaccoppia dalle altre due, la soluzione essendo  $Z = Z_0 e^{-bt}$ . Le equazioni per  $X$  e per  $Y$  sono invece accoppiate, ma si possono disaccoppiare al modo seguente: si deriva ad esempio la prima, ed si esprimono  $Y$  e  $\dot{Y}$  mediante le espressioni fornite dal sistema stesso. Si ottiene che  $X(t)$  soddisfa a

$$\ddot{X} - (1 - \sigma)\dot{X} + \sigma(1 - r)X = 0,$$

che ha come integrale generale

$$X = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t},$$

essendo  $\lambda_\pm$  le soluzioni dell'equazione secolare

$$\lambda^2 - (1 - \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)\lambda = 0,$$

ed  $A$  e  $B$  costanti arbitrarie. Se si raccoglie  $e^{(\lambda_+ + \lambda_-)t/2}$  nell'espressione dell'integrale generale, è facile verificare che l'integrale generale si può esprimere tramite le funzioni iperboliche per esempio alla maniera seguente

$$X = e^{\alpha t} \left( X_0 \cosh \beta t + \frac{\dot{X}_0 - \alpha X_0}{\beta} \sinh \beta t \right),$$

dove si è definito

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} = \frac{1 - \sigma}{2}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} = \frac{\sqrt{(1 - \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2},$$



ed le costanti  $X_0$  e  $\dot{X}_0$  sono ora i valori iniziali rispettivamente di  $X$  e della sua derivata.

Con passaggi analoghi si arriva alla formula seguente per la soluzione  $Y(t)$ , e cioè

$$Y = e^{\alpha t} \left( Y_0 \cosh \beta t + \frac{\dot{Y}_0 - \alpha Y_0}{\beta} \sinh \beta t \right),$$

con il medesimo significato per le costanti  $Y_0$  e  $\dot{Y}_0$ . Ora, dati i valori iniziali  $X_0$  e  $Y_0$  delle funzioni  $X(t)$  ed  $Y(t)$ , i valori iniziali delle derivate si ricavano dal sistema (A.2.20) come

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma X_0 + \sigma Y_0 \\ r X_0 - Y_0 \end{pmatrix},$$

per cui sostituendo nell'espressioni dell'integrale generale, si ottiene che il flusso  $\Phi_1^\tau$  risulta così definito

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \left( \cosh \beta \tau - \frac{1+\sigma}{2\beta} \sinh \beta \tau \right) e^{\alpha \tau} + Y \frac{\sigma}{\beta} e^{\alpha \tau} \sinh \beta \tau \\ Y \left( \cosh \beta \tau - \frac{3-\sigma}{2\beta} \sinh \beta \tau \right) e^{\alpha \tau} + X \frac{r}{\beta} e^{\alpha \tau} \sinh \beta \tau \\ e^{-b \tau} Z \end{pmatrix},$$

cioè dato da una semplice trasformazione lineare.

## A.3 Listati dei programmi usati per generare le figure

### A.3.1 Standard map

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(int argc, char ** argv) {
    // valori di default per i parametro
    int ny = 20      ; // numero dei i punti fatti evolvere
    double x = 0.01   ; // valore iniziale di x
    double y = 0.01   ; // valore iniziale di y (primo punto)
    double eps = 0.10 ; // parametro del termine perturbativo
    int    ntot = 1000 ; // numero di iterazioni

    char * namefile = "stdmap.dat";
    int i;
    int j;
    int k;

    FILE * pf = fopen(namefile,"w");
    FILE * qf = fopen("dati.in","r"); // File contenente alcuni valori
    // iniziali che danno orbite
    // interessanti.

    eps = 1.      ;
    ntot = 50000   ;
    for (i=0;i<1;i++) {

        y = sqrt(.1)*i -0.0272 ; // Scelta di alcuni dati iniziali che
        x = 0.4                ; // producono curve ‘belle’

        while (y > 1.){ y = y-1;}
        while (y < -0.){ y = y+1;}
        while (x > 1.){ x = x-1;}
        while (x < -0.){ x = x+1;}

        for (j=0;j<ntot;j++) {

            y = y + eps*sin(2*M_PI*x)      ;
            x = x + y                       ;
        }
    }
}
```

```

    while (y > 1.){ y = y-1;}
    while (y < -0.){ y = y+1;}
    while (x > 1.){ x = x-1;}
    while (x < -0.){ x = x+1;}

    fprintf(pf,"%f \t %f \n", x , y ) ;

}
fprintf(pf,"\n\n") ;
}

ntot = 10000 ;
if (qf == NULL) exit(0L) ;
while(fscanf(qf,"%lf %lf \n", &x, &y) != EOF){
    // Legge i dati iniziali da file
    for (j=0;j<ntot;j++) {

        y = y + eps*sin(2*M_PI*x) ;
        x = x + y ;

        while (y > 1.){ y = y-1;}
        while (y < -0.){ y = y+1;}
        while (x > 1.){ x = x-1;}
        while (x < -0.){ x = x+1;}

        fprintf(pf,"%f \t %f \n", x , y ) ;

    }
    fprintf(pf,"\n\n");
}

fclose(qf) ;
fclose(pf) ;

return ;
}

```

### A.3.2 Pendolo forzato

```

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

```

```

#define PASSO 300
#define NUM 20000 // Numero di iterazioni
#define TAU 2*M_PI/(PASSO*OMEGA) // Passo di integrazione

int main() {

    int    i,j,k      ;
    double x0,v0      ;
    FILE    *fp,*qf    ;
    double x,v,t,E,vel ;
    double omega=1     ; // Frequenza di piccola oscillazione
    double OMEGA=2     ; // Frequenza della forzante
    double EPS=0.5     ; // Ampiezza della perturbazione

    fp = fopen("pendolo.dat", "w") ; //File dove si trovano le orbite
    qf = fopen("dati.in", "r")     ; //File di dati iniziali

    for(k=1;k<10;k++){

        x0=0. , v0= -3 + k*0.3 ;
        x = x0                  ;
        v = v0                  ;
        t=0.                    ;

        for (i = 0; i < NUM; i++) {
            for (j = 0; j < PASSO*OMEGA; j++) {

x = x + TAU*v ;
v = v + TAU*(-omega*omega*sin(x) + EPS*sin(OMEGA*t)) ;
t=t+TAU ;
if (x > M_PI ) x = x - 2*M_PI ;
if (x < -M_PI ) x = x + 2*M_PI ;
            }
            vel = v - 0.5*TAU*(-omega*omega*sin(x)) ;
            E = 0.5*vel*vel - omega*omega*cos(x) ;
            fprintf(fp,"%f %f %f \n",x,v,t) ;
            t=0. ;
        }
        fprintf(fp,"\n\n") ;
    }

    if (qf == NULL) exit(0L) ;
    while(fscanf(qf,"%lf %lf \n", &x, &v) != EOF){
        t=0. ;
    }
}

```

```

        for (i = 0; i < NUM; i++) {
            for (j = 0; j < PASSO*OMEGA; j++) {

x  = x + TAU*v ;
v  = v + TAU*(-omega*omega*sin(x) + EPS*sin(OMEGA*t)) ;
t=t+TAU ;
if (x >  M_PI ) x = x - 2*M_PI ;
if (x < -M_PI ) x = x + 2*M_PI ;
        }
        vel = v - 0.5*TAU*(-omega*omega*sin(x)) ;
        E = 0.5*vel*vel - omega*omega*cos(x) ;
        fprintf(fp,"%f %f %f \n",x,v,t) ;
        t=0. ;
    }
    fprintf(fp,"\n\n") ;
}

fclose(qf) ;
fclose(fp) ;

return 0 ;
}

```

### A.3.3 Il sistema di Hénon ed Heiles

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

#define En 1./6.
#define TAU 0.01
#define NUM 5000

int main() {
    int count = 0 ;
    FILE * fp, *fq ;
    double x,vx,y,vy,E;
    int i ;
    double vx0,vy0,x0,tmp;

    fq = fopen("dati.in", "r") ;

```

```

fp = fopen("henon.dat", "w") ;

for(i=0;i<10*NUM;i++){ // Calcola la curva limite con vx=0, x=0.
                        // tramite la conservazione dell'energia
    x = 0. ,    x0=x ;
    y = -0.499999 + (1.5*i)/(10*NUM) ;

    vy = 2*(En + y*y*y/3) - y*y ;
    if (vy < 0) continue ;
    else {
        vy = sqrt(vy) ;
        fprintf(fp, "%lf %lf\n", y , vy ) ;
        fprintf(fp, "%lf %lf\n", y , -vy ) ;
    }
}

for(i=0;i<10;i++){ // Calcola alcune orbite

    x = 0. ,    x0=x ;
    y = -0.499999 + 2.*i ,    vy = 0.0 ;
    vx = 2*(En - x*x*y + y*y*y/3) - vy*vy - x*x -y*y ;
    if (vx < 0) continue ;
    else vx= sqrt(vx) ;
    count = 0 ;

    do {
        y = y + TAU*vy ;
        x = x0 + TAU*vx ;
        vx = vx + TAU*(-x-2*x*y) ;
        vy = vy + TAU*(-y-x*x+y*y) ;
        if (x0*x < 0 && vx > 0) { //controllo se il punto ha attraversato
                                //il piano e se la velocita' e' corretta
        fprintf(fp, "%lf %lf\n", y , vy ) ;
        count++ ;
        }
        x0 = x ;

    } while (count < NUM ) ;
}

if (fq == NULL) exit(OL) ;
while(fscanf(fq,"%lf %lf \n", &y, &vy) != EOF){
    fprintf(fp, "%lf %lf\n", y, vy) ;
    x = 0. ,    x0=x ;

```

```

vx = 2*(En - x*x*y + y*y*y/3) - vy*vy - x*x -y*y ;
if (vx < 0) continue ;
else vx= sqrt(vx) ;
count = 0 ;

do {
    y = y + TAU*vy ;
    x = x0 + TAU*vx ;
    vx = vx + TAU*(-x-2*x*y) ;
    vy = vy + TAU*(-y-x*x+y*y) ;
    if (x0*x < 0 && vx > 0) { //controllo se il punto ha attraversato
        //il piano e se la velocita' e' corretta
    }
    fprintf(fp, "%lf %lf\n", y , vy ) ;
    count++ ;
}
x0 = x ;

} while (count < NUM ) ;
}

fclose(fq) ;
fclose(fp) ;
return 0 ;
}

```

### A.3.4 Le varietà stabili ed instabili

```

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define ITER 5
#define NUM 10000
#define EPS 1

FILE *S, *S1 ;

int Orbita (double, double) ;
int OrbitaInst (double, double) ;
double Modulo(double) ;

int main() {

```

```

int i;
double x0,x1,x,y,gamma ;
system("rm orbita.dat") ;
system("rm orbita2.dat") ;

S = fopen("orbita.dat", "at") ;
S1 = fopen("orbita2.dat", "at") ;

x0 =-0.01;
x1=0.01;
for (i = 0; i < NUM; i++) {
x = i*(x1-x0)/NUM + x0 ;
gamma = 0.5*(2+EPS*2*M_PI+sqrt(4*M_PI*M_PI*EPS*EPS+8*M_PI*EPS));
y = x * gamma /(gamma-1) ;
x = Modulo(x) ;
y = Modulo(y) ;
Orbita(x,y) ;
y = x/(1-gamma);
y = Modulo(y);
OrbitaInst(x,y) ;
}
fclose(S) ;
fclose(S1) ;
system("gnuplot pl_scr") ;

return 0;
}

int Orbita (double x0, double y0) {
int i ;
double x1, y1 ;

fprintf(S, "%lf %lf\n", x0, y0) ;
for (i =0; i < ITER; i++) {
x1 = x0 + EPS*sin(2*M_PI*y0) ;
//x1 = Modulo(x1) ;
y1 = y0 + x1 ;
//modulo
x1=Modulo(x1);
y1=Modulo(y1);
fprintf(S, "%lf %lf\n", x1, y1);
x0 = x1;
y0 = y1;
}
}

```



```
fprintf(S, "0.5 0.5\n -0.5 -0.5\n\n\n");  
return 0 ;  
}
```

```
int OrbitaInst (double x0, double y0) {  
    int i ;  
    double x1, y1 ;
```

```
    fprintf(S1, "%lf %lf\n", x0, y0) ;  
    for (i =0; i < ITER; i++) {  
        y1 = y0 - x0 ;  
        //x1 = Modulo(x1) ;  
        x1 = x0 - EPS*sin(2*M_PI*(y0-x0)) ;  
        //modulo  
        x1=Modulo(x1);  
        y1=Modulo(y1);  
        fprintf(S1, "%lf %lf\n", x1, y1);  
        x0 = x1;  
        y0 = y1;  
    }  
    fprintf(S1, "0.5 0.5\n -0.5 -0.5\n");  
    return 0 ;  
}
```

```
double Modulo(double x) {  
    while (x > 1) x--;  
    while (x < 0) x++ ;  
    if (x > 0.5) x = x - 1;  
    return x ;  
}
```

