

SISTEMI DINAMICI E CAOS

Lezioni

tenute dal Prof. Valter Franceschini

presso la Scuola di Dottorato

in Meccanica Avanzata e Tecnica del Veicolo

della Facoltà di Ingegneria di Modena

a.a. 2006/07

SISTEMI DINAMICI E CAOS

- **NOZIONI INTRODUTTIVE**
- **MODELLI DI RIFERIMENTO**
- **ATTRATTORI**
- **TEORIA DELLA BIFORCAZIONE**
- **SCENARI PER IL CAOS**
- **METODI E TECNICHE NUMERICHE**
- **PERIOD-DOUBLINGS DI UN TORO
E FENOMENOLOGIA SUCCESSIVA**
- **BIBLIOGRAFIA**

PREMESSA

Queste pagine riproducono più o meno integralmente le trasparenze utilizzate per le lezioni tenute presso la Scuola di Dottorato in Meccanica Avanzata e Tecnica del Veicolo della Facoltà di Ingegneria di Modena. Gli argomenti trattati, che hanno riguardato gran parte dell'attività di ricerca del docente, sono svolti da una parte con un minimo di rigore matematico, dall'altra con l'obiettivo di fornire conoscenze e strumenti necessari per uno studio numerico/sperimentale.

Ritenendo poi di grande utilità l'uso delle figure ai fini della comprensione dei fenomeni illustrati, l'autore ne ha incluse molte, prese sia dai lavori sui temi trattati più importanti a livello internazionale, sia dai propri lavori. Non potendo corredare tutte le figure dei commenti opportuni, il lettore interessato è rinviato ai lavori in questione (di cui è fornita la referenza).

NOZIONI INTRODUTTIVE

Cos'è un sistema dinamico? *Un sistema dinamico è un'equazione che descrive l'evoluzione temporale di una variabile $\vec{X} \in \mathcal{R}^n$.*

\vec{X} , in generale, rappresenta lo stato di un sistema fisico.

mappa (tempo discreto) : $\vec{X}_{k+1} = \vec{G}(\vec{X}_k, \vec{\mu})$

flusso (tempo continuo) : $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \vec{\mu})$

$\vec{\mu} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ denota un parametro esterno m -dimensionale. Lo studio di un sistema dinamico risulta già complicato se $m=2$. Per questa ragione, in genere, si fissano tutti i parametri eccetto uno: quello che si ritiene più interessante far variare ai fini dello studio del comportamento del sistema.

Osservazione: i flussi considerati sono autonomi (cioè non dipendenti in modo esplicito dal tempo). Flussi non autonomi, cioè del tipo

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, t, \vec{\mu}),$$

possono essere resi autonomi con l'aggiunta dell'equazione $\dot{t} = 1$.

I sistemi dinamici si distinguono in sistemi **conservativi** e sistemi **dissipativi**. Nel primo caso c'è conservazione di energia e quindi *conservazione delle aree nello spazio delle fasi*. Nel secondo caso c'è dissipazione di energia e quindi *contrazione delle aree*.

La condizione perché un flusso sia dissipativo è che la sua *divergenza* sia negativa in ogni punto, ovvero

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\vec{X}) < 0, \quad \forall \vec{X} \in \mathcal{R}^n,$$

mentre per una mappa deve essere:

$$|D\vec{G}(\vec{X})| < 1, \quad \forall \vec{X} \in \mathcal{R}^n,$$

essendo $D\vec{G}$ lo Jacobiano di \vec{G} .

È importante sottolineare che la contrazione delle aree può avvenire con diminuzione delle lunghezze in tutte le direzioni, ma anche con contrazione in alcune e allungamento in altre.

In questi seminari ci occuperemo dei sistemi dissipativi e del comportamento asintotico delle loro soluzioni.

Gli argomenti discussi in questo paragrafo sono trattati in modo più esauriente nelle referenze [2,8].

Asintoticamente le soluzioni di un sistema dissipativo tendono ad un **attrattore**. Di tale oggetto diamo una definizione matematica limitandoci al caso di un flusso. Per farlo occorre prima dare quella di insieme invariante. (Analoghe definizioni si danno per una mappa).

Definizione:

Un *insieme invariante* è un insieme $A \subset R^n$ tale che

$$\vec{X}(t) \in A, \quad \forall \vec{X}(0) \in A.$$

Definizione:

Un insieme A invariante è un *ATTRATTORE* se

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 & : \text{dist}(\vec{X}(0), A) \leq \delta \\ \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\vec{X}(t), A) &= 0. \end{aligned}$$

Definizione:

Si chiama poi *bacino d'attrazione* di un attrattore A l'insieme costituito da tutti i punti \vec{x}_0 che danno luogo a traiettorie attratte da A .

Si noti che un sistema dinamico può avere più attrattori, anche coesistenti per lo stesso valore del parametro μ . In questo caso ciascun attrattore ha il proprio bacino d'attrazione.

Il fenomeno della coesistenza di più attrattori, molto comune nello studio dei sistemi dinamici, è detto *isteresi*.

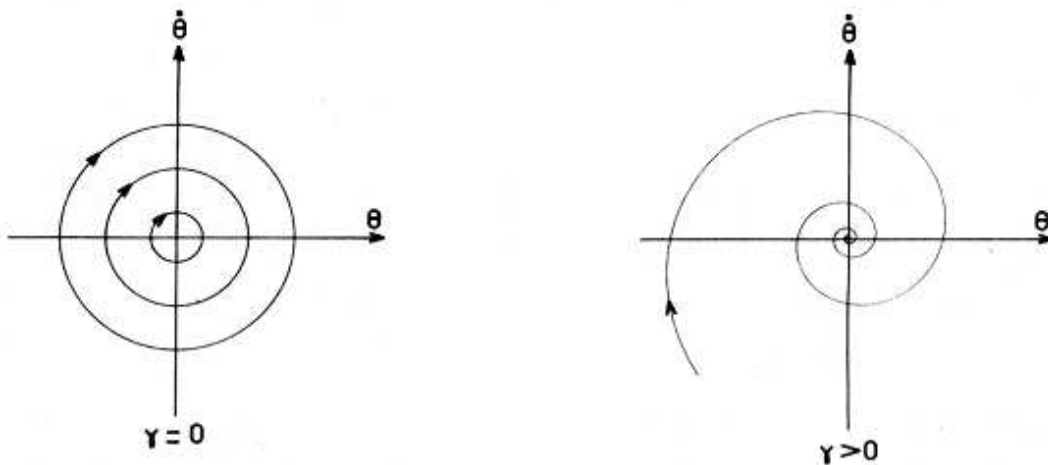
Il più semplice esempio di attrattore è fornito dal pendolo smorzato linearizzato [Ref. 2]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0.$$

Ovvero, posto: $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$, dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 x. \end{cases}$$

Il pendolo smorzato è dissipativo per $\gamma > 0$. In questo caso ha un punto come attrattore: l'origine.

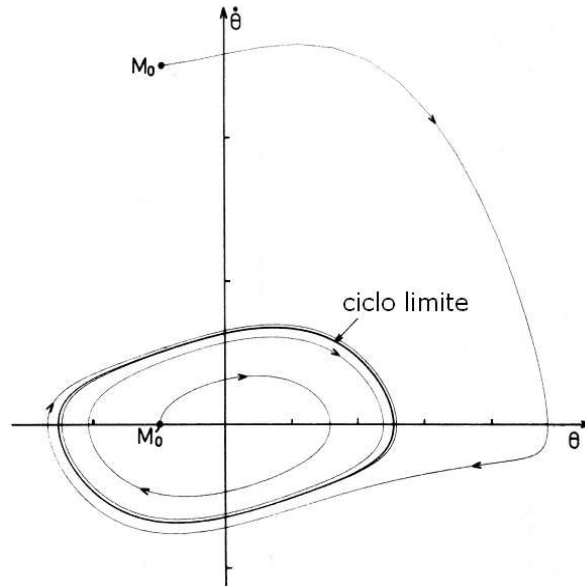


La figura mostra sia il caso conservativo ($\gamma=0$) che quello dissipativo: nel primo caso le traiettorie sono delle circonferenze centrate nell'origine; nel secondo delle spirali che tendono all'origine, che pertanto risulta essere un “attrattore”.

Un altro esempio di attrattore si ha nell'equazione di Van der Pol [Ref. 2]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \epsilon(\theta^2 - 1)\frac{d\theta}{dt} + \theta = 0.$$

Questa equazione, che si riduce a quella dell'oscillatore armonico per $\epsilon=0$, dà luogo a dissipazione di energia per $\theta > 1$, a immissione di energia per $\theta < 1$. Ciò determina, come mostra la figura, l'esistenza come attrattore di un'orbita chiusa (*ciclo limite*).



Nel seguito ometteremo di indicare il segno di vettore sia per indicare le funzioni \vec{F} e \vec{G} , che per indicare un punto \vec{x} di \mathcal{R}^n .

MODELLI DI RIFERIMENTO

MODELLO DI LORENZ

È il modello che più ha contribuito alla storia dei sistemi dinamici. Introdotto dal meteorologo Edward Lorenz nel 1963 [Ref. 3] nell'ambito di studi riguardanti il problema delle previsioni del tempo, con esso si mostrava per la prima volta che condizioni iniziali molto vicine potevano dar luogo a traiettorie esponenzialmente divergenti. In altre parole, quello di Lorenz fu il primo modello ad esibire un *attrattore strano*.

Ciò destò enorme interesse, il che portò diversi ricercatori a riprendere il modello e a studiarlo come sistema dinamico da svariati punti di vista, prescindendo totalmente dalla sua attinenza o meno col problema che aveva portato Lorenz a formularlo. (Per un'ampia bibliografia in merito si veda la referenza [14]).

Il modello è costituito dalle seguenti tre equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases},$$

dove σ , r e b sono tre parametri reali positivi.

Brevemente la storia di come è stato ottenuto il modello. Un fluido bidimensionale, posto all'interno di una cella di profondità H , è riscaldato con le superfici superiore ed inferiore sottoposte ad una differenza di temperatura costante ΔT . Il moto di convezione del fluido risulta quindi descritto da un sistema di equazioni alle derivate parziali dovuto a Rayleigh. Lorenz ottenne il suo modello sviluppando opportunamente in serie di Fourier le equazioni di Rayleigh e considerandone il troncamento minimale. I parametri σ e r sono rispettivamente proporzionali al numero di Prandtl e al numero di Rayleigh, mentre b è legato alle dimensioni della cella.

MAPPA DI HENON

La mappa di Henon è la seguente:

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2 \\ y_{i+1} = bx_i \end{cases} \quad \text{con } a=1.44 \text{ e } b=0.3.$$

Si tratta di una mappa bidimensionale, proposta nel 1976 da Henon [Ref. 5], con lo scopo di fornire un modello, il più semplice possibile, capace di mostrare le proprietà essenziali dell'attrattore strano presente nel modello di Lorenz. In particolare, esso giocò un ruolo fondamentale per capirne la struttura geometrica.

TRONCAMENTI DI EQUAZIONI NAVIER-STOKES

Si tratta di diversi sistemi tutti ottenuti mediante opportuni troncamenti dello sviluppo in serie di Fourier delle equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile su un toro bidimensionale [15-22]. Questi sistemi, a prescindere dal loro significato fisico e dalla loro attinenza con le equazioni vere, si sono dimostrati interessantissimi sistemi dinamici, capaci di esibire una moltitudine di fenomeni di biforcazione, per la gran parte utili a capire e descrivere fenomeni che avvengono nel mondo reale. Il primo e più noto modello [Ref. 15,16], che fu studiato nel 1979 e consiste in un troncamento in cui sono considerati solo 5 modi di Fourier, è il seguente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_4x_5 \\ \dot{x}_2 &= -9x_2 + 3x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -5x_3 - 7x_1x_2 + R \\ \dot{x}_4 &= -5x_4 - x_1x_5 \\ \dot{x}_5 &= -x_5 - 3x_1x_4\end{aligned}$$

dove R può essere assunto come numero di Reynolds.

ATTRATTORI

FLUSSI:

- PUNTO FISSO

- ORBITA CHIUSA

- TORO T^k , $k=2,3,\dots$

- ATTRATTORE STRANO

MAPPE:

- ORBITA PERIODICA

- TORO T^{k-1}

- ATTRATTORE STRANO

Lo schema proposto tiene conto del fatto che per ogni flusso N-dimensionale è possibile costruire, con una opportuna sezione, una mappa (N-1)-dimensionale (chiamata *mappa di Poincaré* o *di primo ritorno*), che presenta gli “stessi” attrattori con una dimensione in meno.

Diamo una definizione dei diversi attrattori, producendo anche diversi grafici illustrativi. Si rinvia poi di nuovo alle referenze [2] e [8] per una più completa trattazione degli argomenti teorici. Si consiglia poi il libro [1] per una completa ed interessante “storia romanzata” del caos.

ATTRATTORI DI UN FLUSSO $\vec{F}(\vec{x})$

Definizione:

\vec{x}_0 è un *punto fisso* se $\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

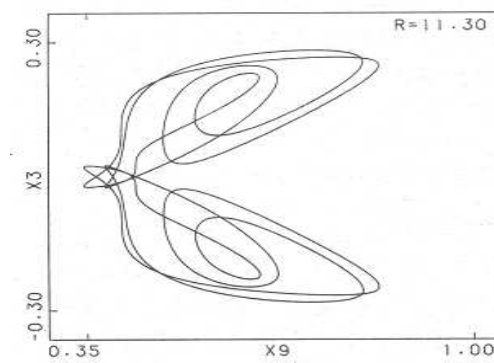
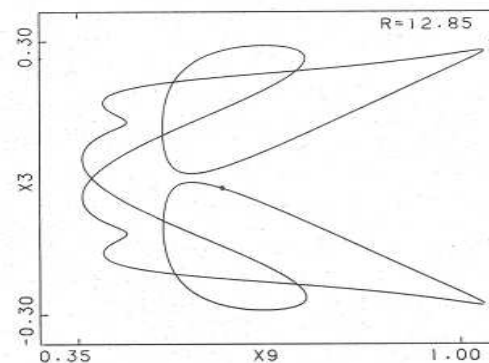
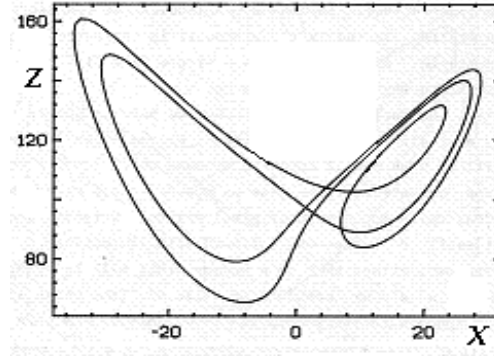
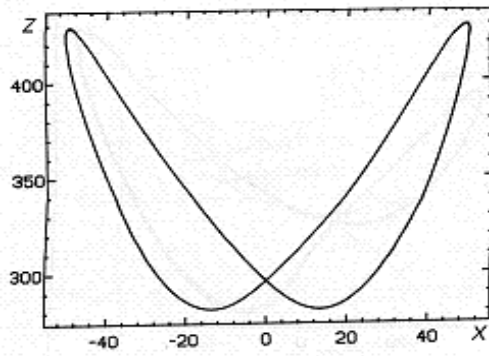
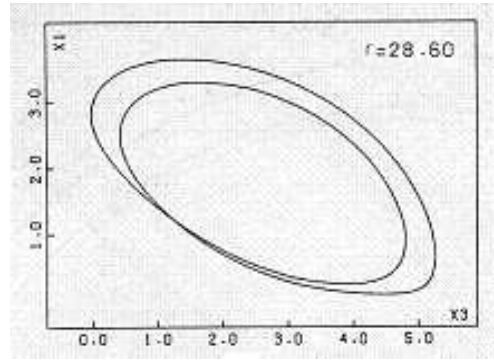
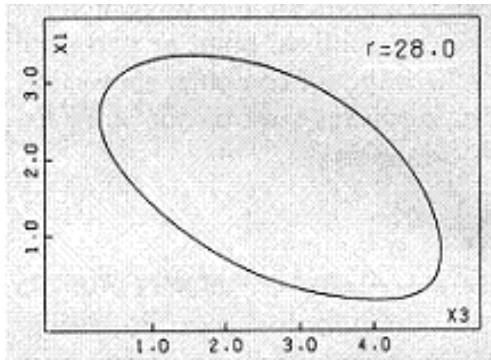
Definizione:

Un'orbita chiusa (o periodica) è una curva integrale del flusso $\Gamma(t)$ tale che

$$\exists T > 0 : \Gamma(t + T) = \Gamma(t) \quad \forall t.$$

Il minimo T positivo per cui la relazione vale è il *periodo* dell'orbita.

I grafici che seguono mostrano una proiezione piana di alcune orbite chiuse.

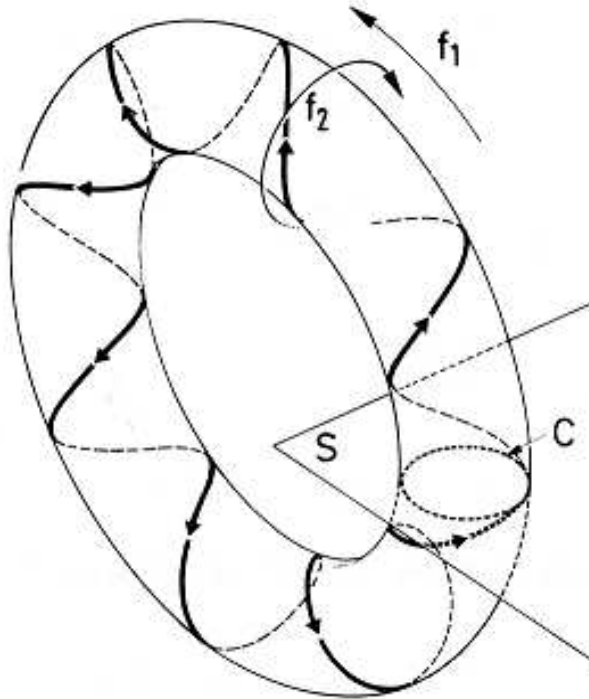


Definizione:

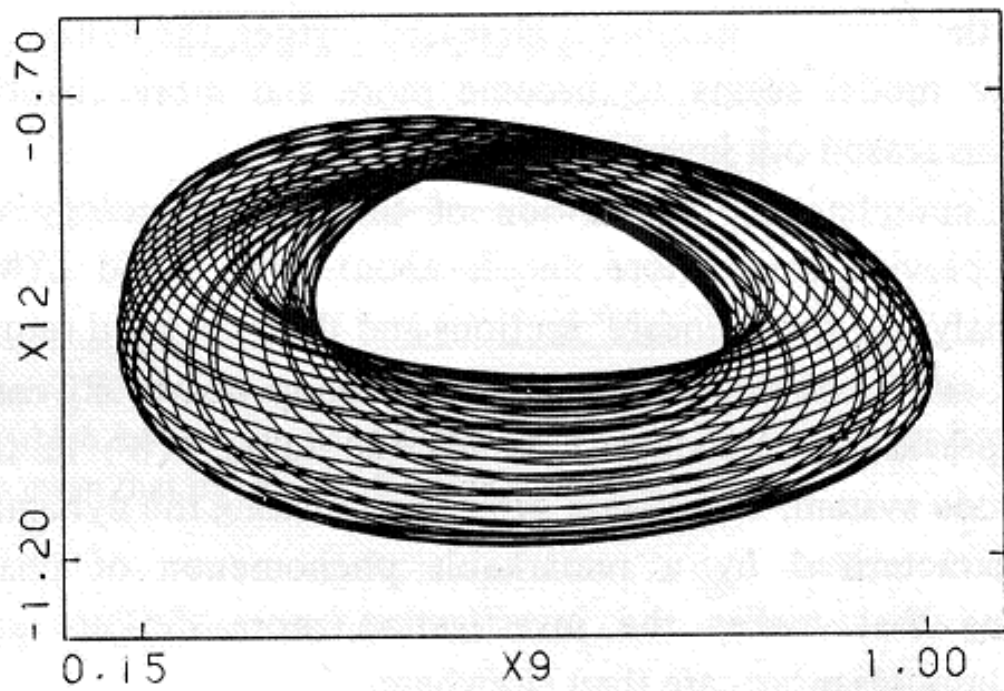
Un *toro* T^k è una superficie che in un opportuno sistema di coordinate angolari $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ è data dal prodotto cartesiano $[0, 2\pi]^k$. Una soluzione $\Gamma(t)$ su un toro T^k si dirà poi *quasiperiodica* se ciascuna $\varphi_j(t)$ è periodica rispetto a t , ovvero se

$$\varphi_j(t) = \omega_j t.$$

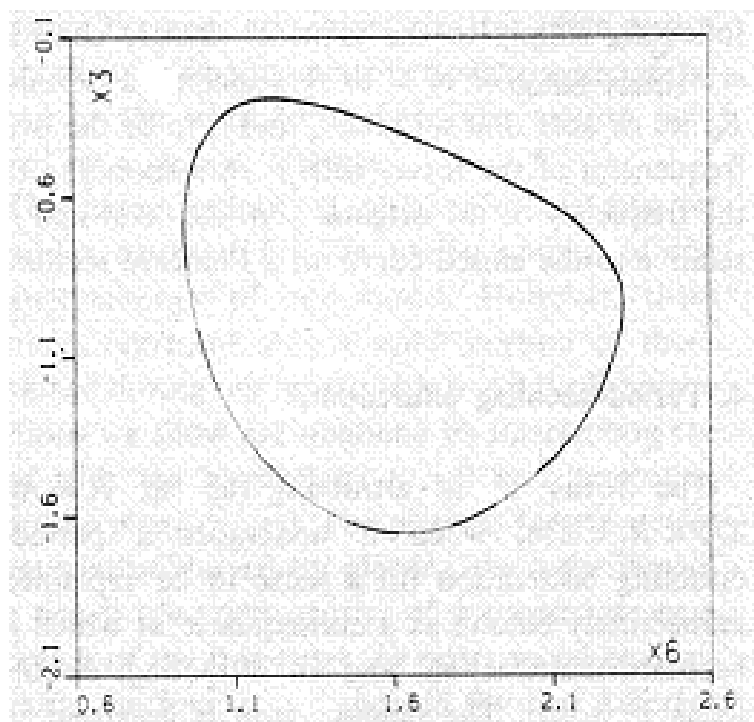
Quando si dice che l'attrattore è un toro T^k si afferma il fatto che asintoticamente la soluzione è attirata da un toro T^k e che, in generale, tenderà ad essere quasiperiodica con k periodi $T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$ (e quindi con k frequenze $f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$).



TRAIETTORIA SU UN TORO



SEZIONE DI POINCARÉ



Diamo ora due definizioni, più operative che matematiche, dell'attrattore che è alla base del *CAOS*. La prima, oltre che sulla sua natura geometrica, si basa sulla dinamica che lo caratterizza; la seconda, invece, è puramente operativa.

Definizione:

Un *attrattore strano* è un attrattore avente dimensione frattale (cioè non intera) e caratterizzato da una forte dipendenza dalle condizioni iniziali.

Definizione alternativa:

Un *attrattore strano* è un attrattore che non è nè un punto fisso nè un'orbita periodica nè un toro T^k .

La proprietà principale di un attrattore strano è la forte dipendenza dalle condizioni iniziali (in inglese: *sensitive dependence*). In altre parole: due condizioni iniziali estremamente vicine danno luogo, sull'attrattore, a *traiettorie che divergono esponenzialmente*.

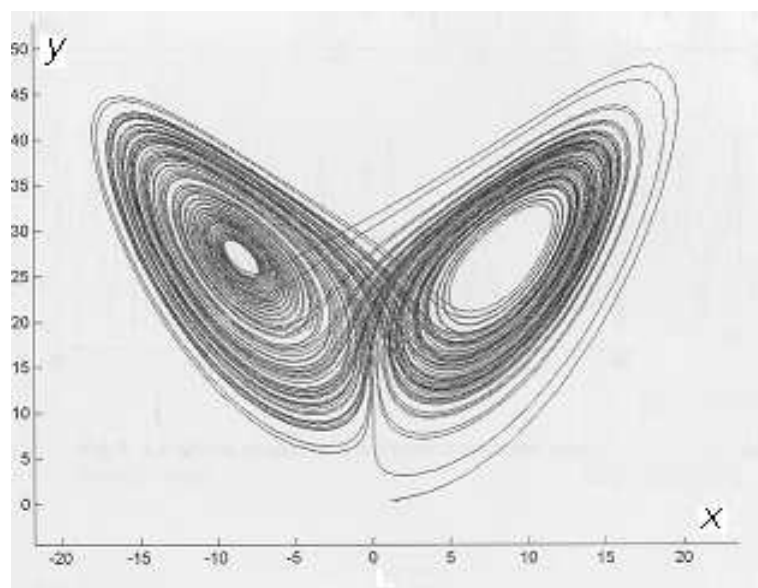
Questo porta, ad esempio, all'impossibilità di fare predizioni corrette a lungo termine in campo meteorologico: essendo i dati iniziali sempre approssimati, così come i nostri modelli di calcolo, la soluzione che noi calcoliamo può risultare estremamente "lontana" da quella vera.

Ma non solo: una causa non prevista, anche apparentemente irrilevante, può produrre una piccola variazione nelle condizioni iniziali e quindi portare a situazioni totalmente imprevedibili. A ciò si riferisce il famoso *effetto farfalla*, che pare prenda il nome dal titolo di una comunicazione di Lorenz: *Predicibilità: può il battito d'ali di una farfalla in Brasile causare un tornado in Texas?* ([Ref. 1]).

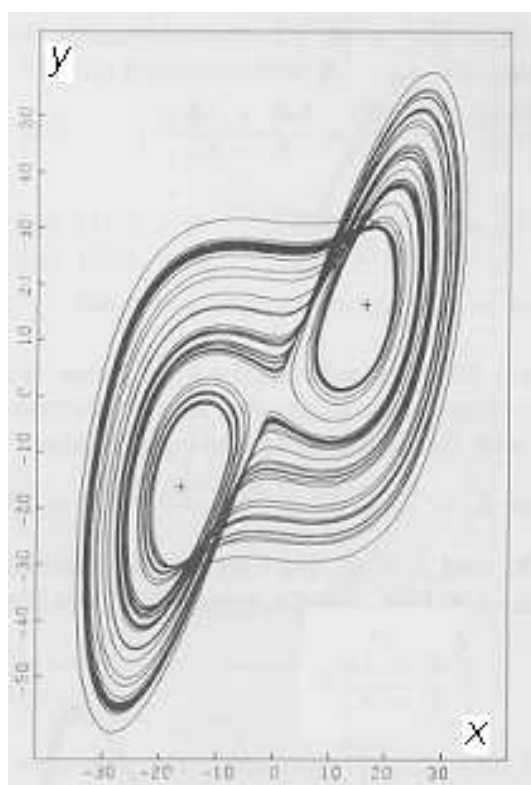
L'impossibilità di fare previsioni a lungo termine circa il comportamento di un sistema fisico può essere giustificata anche da un altro punto di vista. Spesso la dinamica è determinata da più attrattori, anche di natura assai diversa. Ebbene, ciascuno di essi ha il proprio bacino d'attrazione e questi bacini, quando non sono tra loro intrecciati, condividono almeno la frontiera. Di conseguenza, una piccola perturbazione della condizione iniziale può portare ad un attrattore piuttosto che un altro, determinando una dinamica qualitativamente del tutto diversa.

C'è *caos* ogni qualvolta c'è una dinamica determinata da un attrattore strano. *Caos*, dunque, è sinonimo, di *dinamica caotica*, o equivalentemente, *dinamica stocastica*, *irregolare*, *turbolenta*, *complessa*, *disordinata*. Vediamo ora come ci appare il caos nei grafici di alcuni attrattori strani.

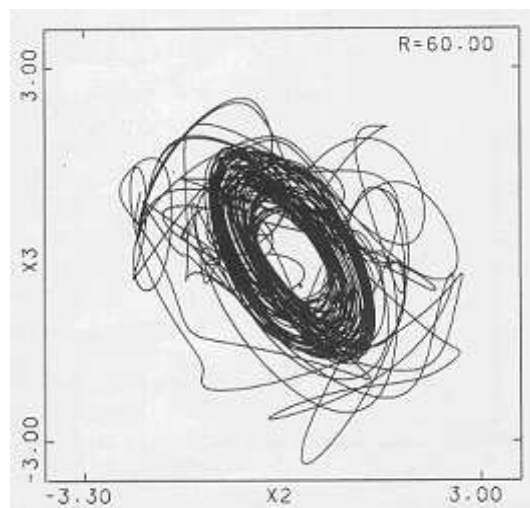
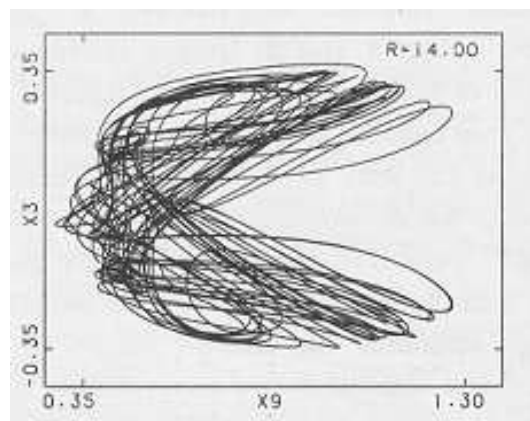
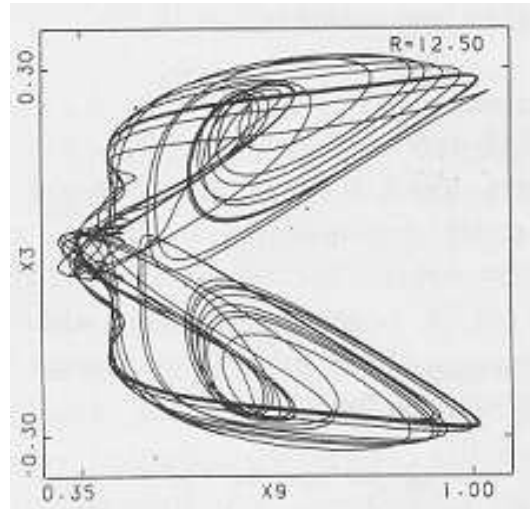
ATTRATTORE DI LORENZ ($r=28$)



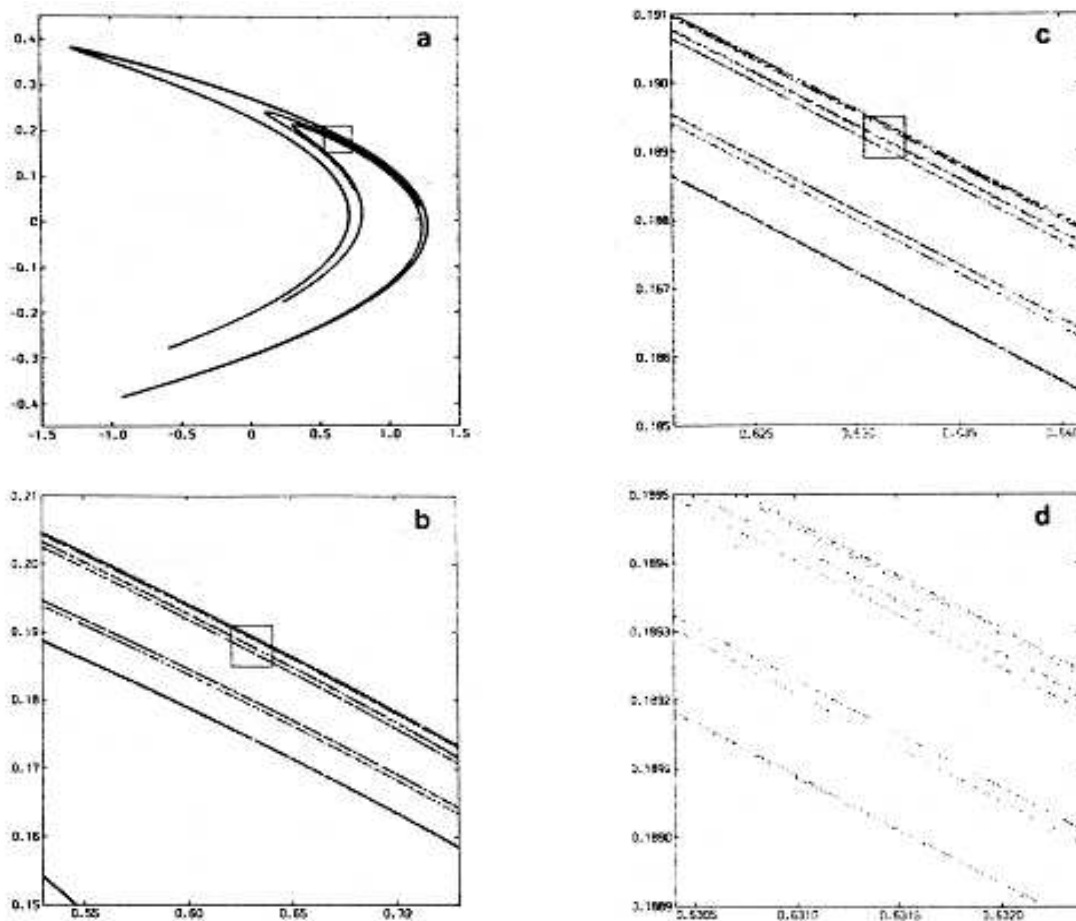
UN ALTRO ATTRATTORE STRANO
DEL MODELLO DI LORENZ ($r \simeq 110.8$)



TRE ATTRATTORI STRANI DI UN *12-MODI NST* [22]



ATTRATTORE DI HENON [5]



I quattro grafici mostrano che un attrattore strano ha la proprietà tipica di un frattale: la sua struttura geometrica, quando la si analizza su scale via via più piccole, è sempre la stessa.

TEORIA DELLA BIFORCAZIONE $([2,22])$

STABILITÀ DI UN PUNTO FISSO

Teorema:

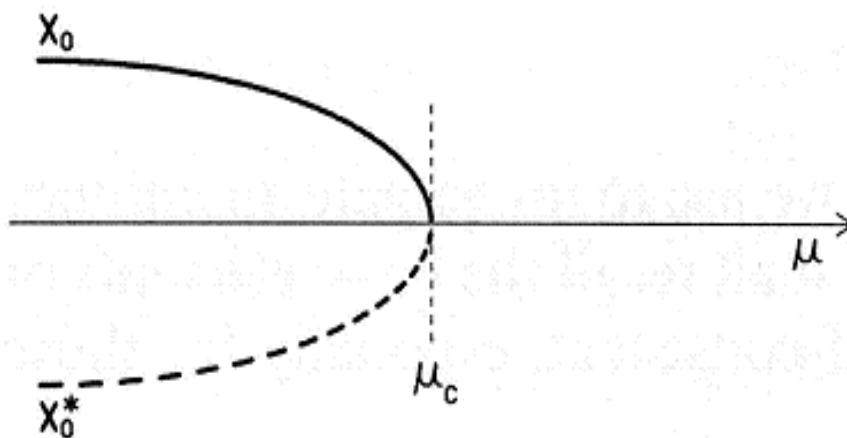
Un punto fisso \vec{x}_0 è stabile ed attrattivo se tutti gli autovalori della Jacobiano (o matrice di Liapunov) di \vec{F} in \vec{x}_0 , che indichiamo con $D\vec{F}|_{\vec{x}_0}$, hanno tutti parte reale negativa.

Un punto fisso \vec{x}_0 , stabile ed attrattivo per $\mu = \mu_0$, al variare di μ dà luogo ad una biforcazione se è soggetto ad un cambiamento qualitativo di stabilità. Supponendo che un tale cambiamento avvenga per $\mu = \mu_c$ e per μ crescente, andiamo ad esaminare le possibili biforcazioni.

BIFORCAZIONI DI UN PUNTO FISSO

BIFORCAZIONE SELLA-NODO

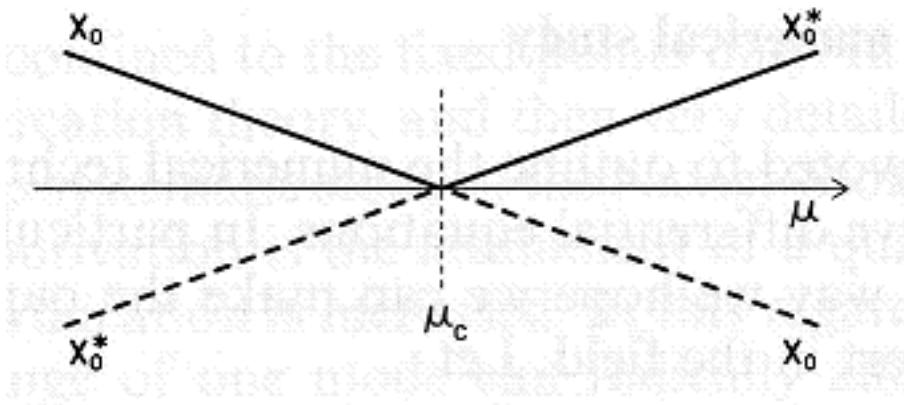
Questa biforcazione, detta anche *biforcazione tangente*, si ha quando, per μ tendente a μ_c , due punti fissi \vec{x}_0 e \vec{x}_0^* , l'uno stabile e l'altro instabile, tendono l'uno all'altro, e per $\mu = \mu_c$ scompaiono collassando. Essa avviene quando un autovalore reale di $D\vec{F}|_{\vec{x}_0}$ tende a zero (senza oltrepassare l'asse immaginario).



Si noti che la biforcazione sella-nodo costituisce la via più comune per la scomparsa (o, per la nascita, se si guardano le cose nel verso opposto di μ) di un punto fisso.

BIFORCAZIONE TRANSCRITICA

Questa biforcazione, più comunemente detta *biforcazione con scambio di stabilità*, si ha quando, per μ tendente a μ_c , due punti fissi \vec{x}_0 e \vec{x}_0^* , l'uno stabile e l'altro instabile, tendono l'uno all'altro, e per $\mu = \mu_c$ si fondono, separandosi poi immediatamente dopo essersi scambiata la stabilità. Essa avviene quando un autovalore reale di $D\vec{F}|_{\vec{x}_0}$ oltrepassa l'asse immaginario diventando positivo.



BIFORCAZIONE A FORCA

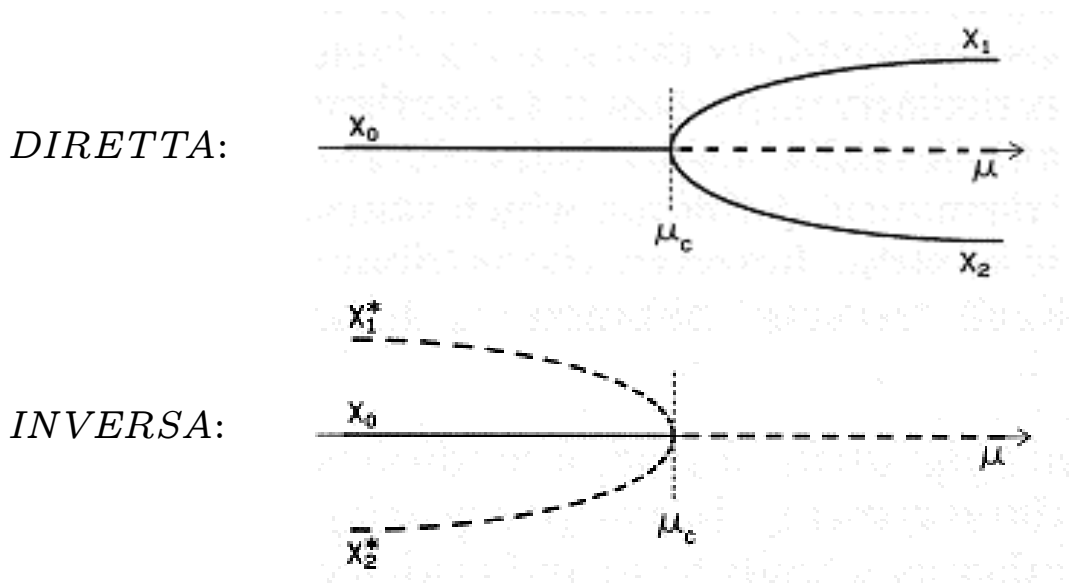
Questa biforcazione può essere di due tipi: *diretta* (o *supercritica*) oppure *inversa* (o *sottocritica*).

La biforcazione diretta si ha quando, per $\mu = \mu_c$ un punto fisso \vec{x}_0 stabile diventa instabile originando due punti \vec{x}_1 e \vec{x}_2 stabili ed attrattivi per $\mu > \mu_c$.

La biforcazione inversa, invece, si ha quando, oltre ad \vec{x}_0 , per $\mu < \mu_c$ esistono anche due punti \vec{x}_1^* e \vec{x}_2^* instabili, che per $\mu = \mu_c$ vanno a collassare su \vec{x}_0 rendendolo instabile.

In entrambi i casi questa biforcazione avviene quando un autovalore reale di $D\vec{F}|_{\vec{x}_0}$ oltrepassa l'asse immaginario diventando positivo.

\vec{x}_1 e \vec{x}_2 sono simmetricamente posti rispetto ad \vec{x}_0 .



BIFORCAZIONE DI HOPF

Come quella a forca, anche la biforcazione di Hopf può essere *diretta* (o *supercritica*) oppure *inversa* (o *sotto-critica*).

Nel caso diretto il punto fisso \vec{x}_0 , diventando instabile, genera per $\mu = \mu_c$ un'orbita chiusa $\gamma(t, \mu)$, stabile ed attrattiva per $\mu > \mu_c$.

Nel caso inverso, invece, un'orbita chiusa $\gamma(t, \mu)$ instabile "circonda" \vec{x}_0 per $\mu < \mu_c$ e si restringe su di esso al tendere di μ a μ_c . Per $\mu = \mu_c$ l'orbita $\gamma(t, \mu)$ collassa su \vec{x}_0 rendendolo instabile.

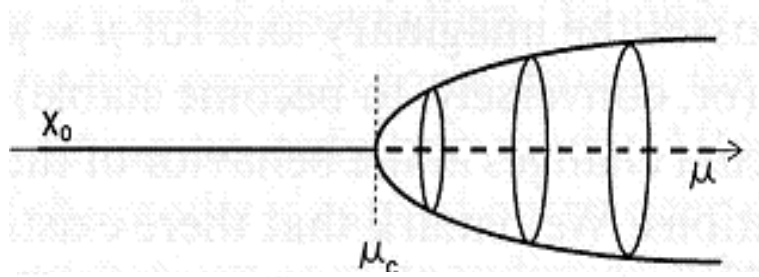
La biforcazione avviene quando una coppia di autovalori complessi coniugati di $D\vec{F}|_{\vec{x}_0}$ per $\mu = \mu_c$ attraversa l'asse immaginario (acquisendo parte reale positiva). In ogni caso, il periodo dell'orbita $\gamma(t, \mu)$ per $\mu \rightarrow \mu_c$ tende a $2\pi/|\lambda_0|$, essendo λ_0 la parte immaginaria degli autovalori che attraversano l'asse immaginario.

Il "raggio" r dell'orbita generata da una biforcazione di Hopf per μ tendente a μ_c si comporta come segue:

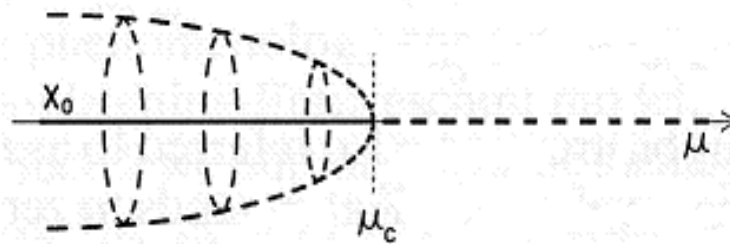
$$r \simeq a\sqrt{|\mu - \mu_c|},$$

con a costante.

DIRETTA:



INVERSA:



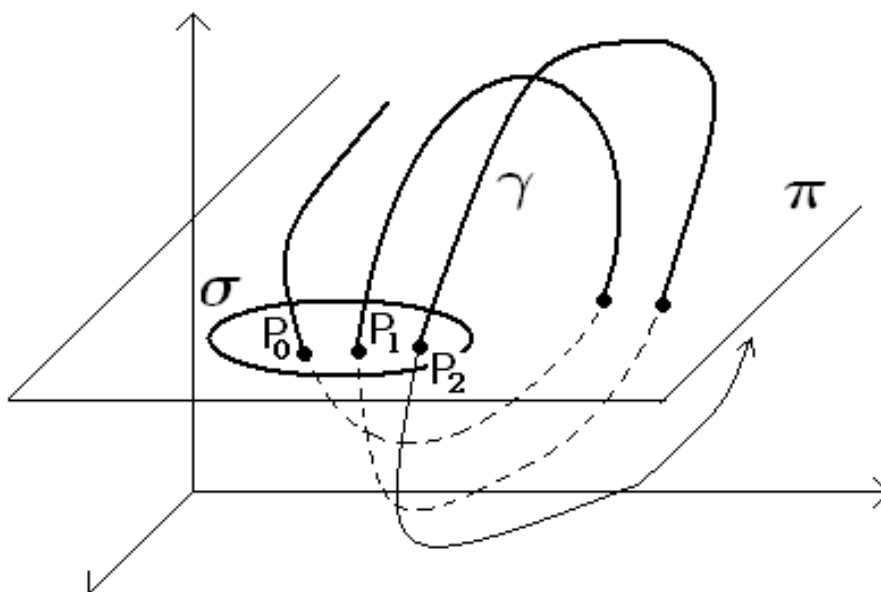
STABILITÀ DI UN'ORBITA PERIODICA

Il concetto di stabilità di un'orbita periodica γ è legato a quello di mappa di Poincaré.

Definizione:

Sia π un iperpiano $(N-1)$ -dimensionale trasversale a γ in un punto \vec{x}_0 e σ una porzione di π contenente \vec{x}_0 . Si definisce *mappa di Poincaré* la mappa $\vec{\Phi}$ di σ in se stessa tale che $\vec{\phi}(\vec{y})$, $\vec{y} \in \sigma$, è la prima intersezione con σ della curva soluzione che passa per \vec{y} .

È molto conveniente definire il piano π fissando una delle N coordinate, ovvero un piano del tipo $x^{(k)} = x_0^{(k)}$.



$$P_1 = \vec{\Phi}(P_0), \quad P_2 = \vec{\Phi}(P_1) = \vec{\Phi}^2(P_0)$$

$$P_k = \vec{\Phi}(P_{k-1}) = \vec{\Phi}^2(P_{k-2}) = \dots = \vec{\Phi}^k(P_0)$$

Se la traiettoria è una curva chiusa γ , allora

$$P_0 \in \gamma \implies \vec{\Phi}(P_0) = P_0,$$

ovvero P_0 è un punto fisso per la mappa $\vec{\Phi}$. Ciò porta al seguente **Teorema:**

Un'orbita chiusa γ è stabile ed attrattiva se tutti gli autovalori dello Jacobiano (o matrice di Liapunov) della mappa di Poincaré in \vec{x}_0 , $D\vec{\Phi}|_{\vec{x}_0}$, sono interni al cerchio unitario, instabile se almeno un autovalore è esterno.

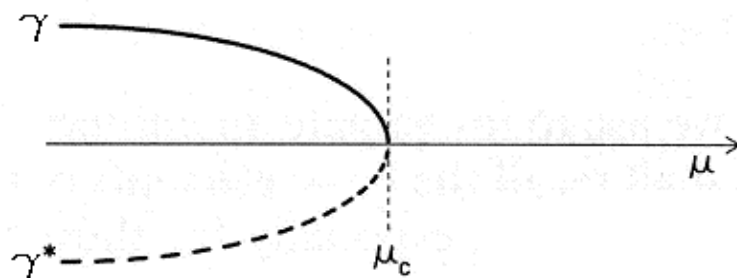
BIFORCAZIONI DI UN'ORBITA PERIODICA

Come appare evidente dal teorema di stabilità appena visto, la teoria della biforcazione per le orbite periodiche di un flusso si riduce a quella per le orbite periodiche di una mappa. Questa teoria è del tutto analoga a quella per i punti fissi di un flusso. In sostanza, mentre nel caso già visto ciò che determina la biforcazione è il modo in cui un autovalore s'annulla e attraversa l'asse immaginario, ora conta come un autovalore assuma modulo uno e attraversi il cerchio unitario. Si avranno quindi le "stesse biforcazioni", con l'aggiunta del *raddoppio di periodo*. Per completezza riproponiamo anche le quattro del tutto analoghe a quelle già viste.

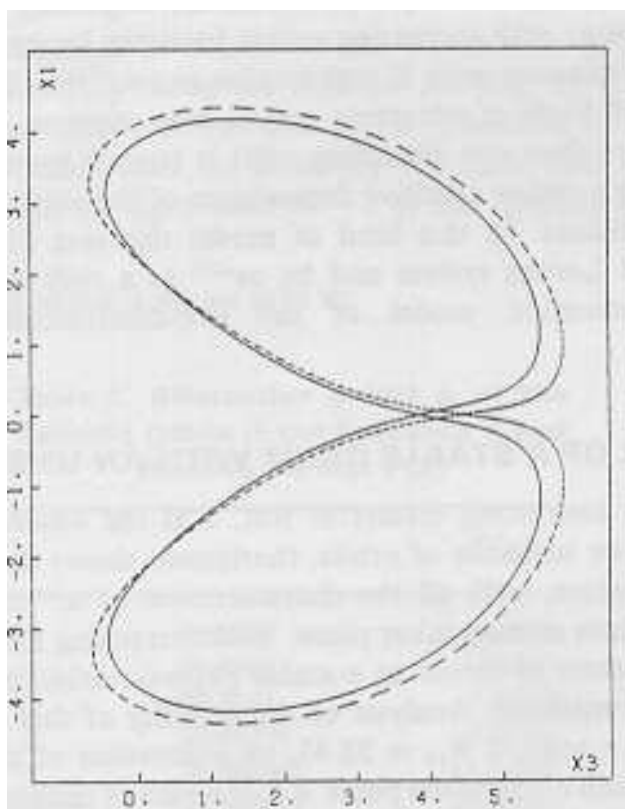
BIFORCAZIONE SELLA-NODO

Questa biforcazione si ha quando, per μ tendente a μ_c , due orbite periodiche γ e γ^* , l'una stabile e l'altra instabile, tendono l'una all'altra, e per $\mu = \mu_c$ scompaiono collassando. *Essa avviene quando un autovalore reale di $D\vec{\Phi}|_{\vec{x}_0}$ tende a uno (senza uscire dal cerchio unitario).*

Con rappresentazione del tutto analoga a quella adottata per i punti fissi, una linea continua indicherà un'orbita periodica stabile ed attrattiva, una tratteggiata un'orbita instabile.



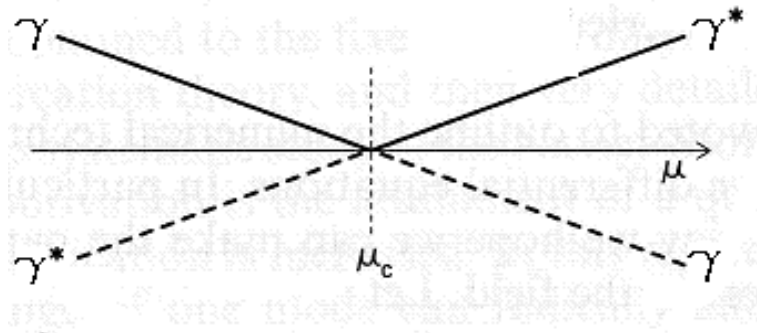
Come per i punti fissi la biforcazione sella-nodo costituisce la via più comune per la scomparsa (o, per la nascita) di un'orbita periodica.



La figura mostra una proiezione piana di due orbite chiuse, una stabile (tratto continuo) ed una instabile (tratto discontinuo), originate da una biforcazione sella-nodo ([18]).

BIFORCAZIONE TRANSCRITICA

Questa biforcazione, si ha quando, per μ tendente a μ_c , due orbite periodiche γ e γ^* , l'una stabile e l'altra instabile, tendono l'una all'altra, e per $\mu = \mu_c$ si fondono, separandosi poi immediatamente dopo essersi scambiata la stabilità. Essa avviene quando un autovalore reale di $D\vec{\Phi}|_{\vec{x}_0}$ esce dal cerchio unitario attraverso $+1$.



BIFORCAZIONE A FORCA

Questa biforcazione, spesso detta *biforcazione con rottura di simmetria*, può essere di due tipi: *diretta* (o *supercritica*) oppure *inversa* (o *sottocritica*).

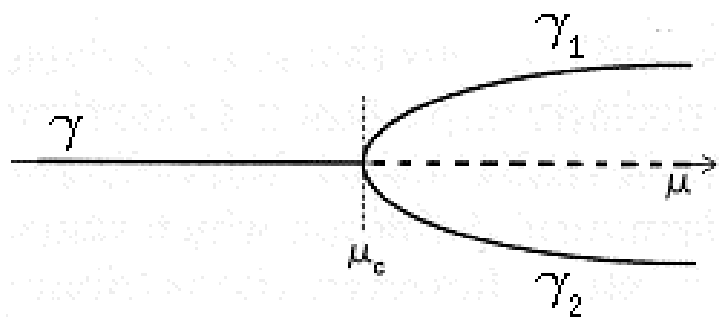
La biforcazione diretta si ha quando, per $\mu = \mu_c$ un'orbita chiusa stabile γ diventa instabile originando due nuove orbite γ_1 e γ_2 stabili ed attrattive per $\mu > \mu_c$.

La biforcazione inversa, invece, si ha quando, oltre a γ stabile, per $\mu < \mu_c$ esistono anche γ_1^* e γ_2^* instabili, che per $\mu = \mu_c$ vanno a collassare su γ rendendola instabile.

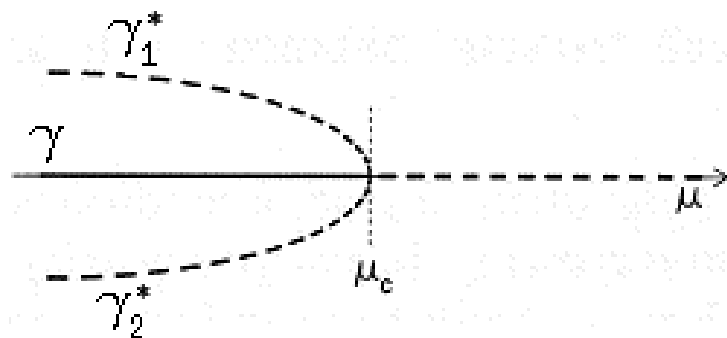
In entrambi i casi questa biforcazione avviene quando un autovalore reale di $D\vec{\Phi}|_{\vec{x}_0}$ esce dal cerchio unitario attraverso $+1$.

Si noti che γ_1 e γ_2 (così come γ_1^* e γ_2^*) sono simmetricamente poste rispetto a γ . Si noti anche che, mentre γ è dotata di una simmetria interna, γ_1 e γ_2 (così come γ_1^* e γ_2^*) non lo sono. Per questo si parla di “rottura di simmetria”.

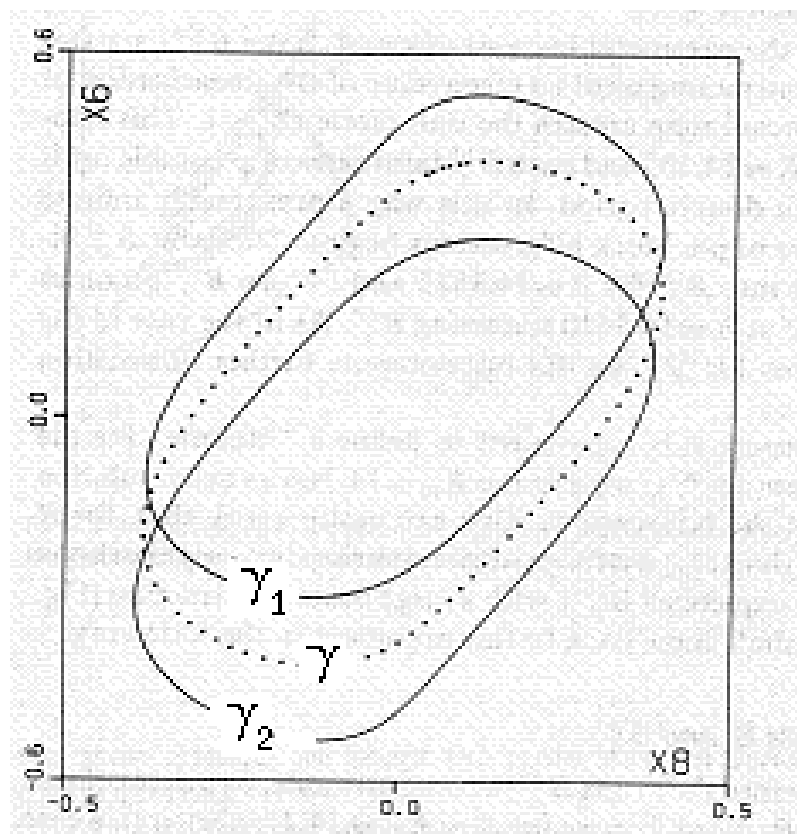
DIRETTA:



INVERSA:



La figura che segue mostra le due orbite chiuse (tratto continuo) originate da una biforcazione a forza di tipo diretto, simmetricamente poste rispetto all'orbita biforcante (tratto discontinuo). [Ref. 19]



BIFORCAZIONE PERIOD-DOUBLING

Anche questa biforcazione può essere *diretta* (o *supercritica*) oppure *inversa* (o *sottocritica*).

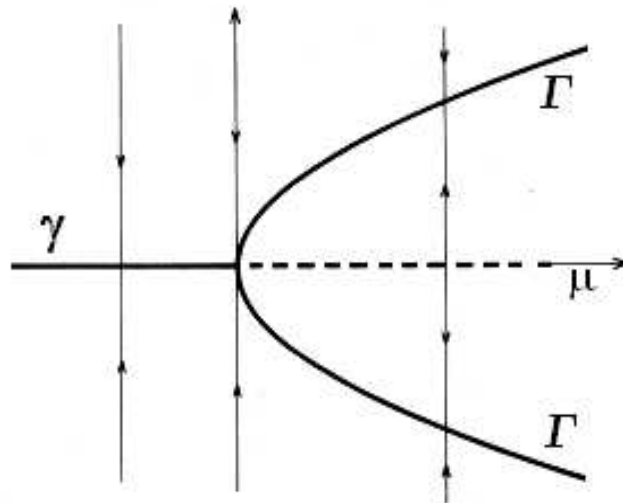
La biforcazione diretta si ha quando, per $\mu = \mu_c$ un'orbita chiusa stabile γ diventa instabile originando una nuova orbita Γ di periodo doppio, stabile ed attrattiva per $\mu > \mu_c$.

La biforcazione inversa, invece, si ha quando, oltre a γ stabile, per $\mu < \mu_c$ esiste anche Γ^* di periodo doppio instabile, che per $\mu = \mu_c$ va a collassare su γ rendendola instabile.

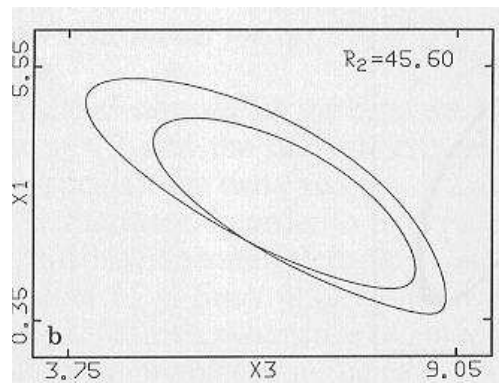
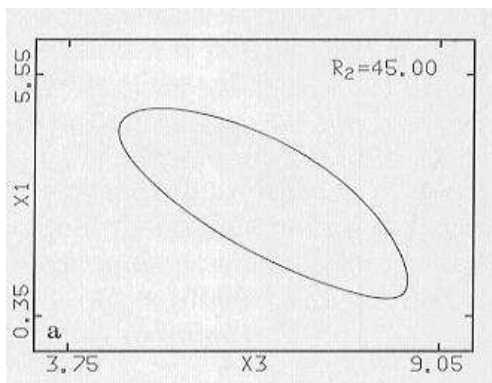
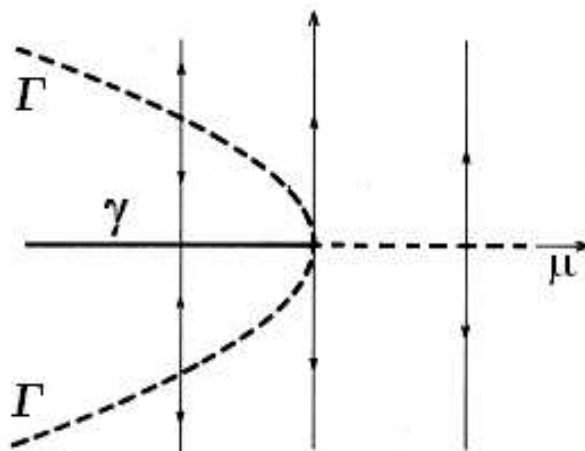
In entrambi i casi questa biforcazione avviene quando un autovalore reale di $D\vec{\Phi}|_{\vec{x}_0}$ esce dal cerchio unitario attraverso -1.

I due diagrammi di biforcazione sono esattamente gli stessi della biforcazione a forca, con i due rami corrispondenti alla due orbite γ_1 e γ_2 (γ_1^* e γ_2^*) che vanno riguardati come un'unica orbita Γ (Γ^*) che fa due giri anzichè uno.

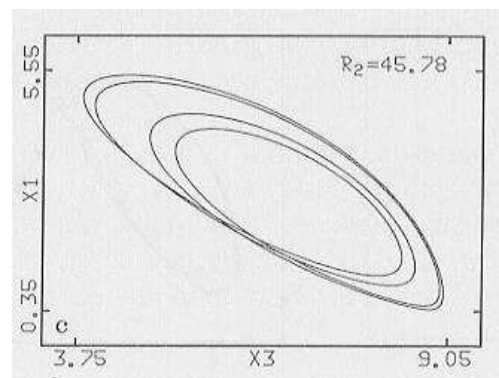
DIRETTA:



INVERSA:



TRE ORBITE γ_0 , γ_1 e γ_2 ,
DI PERIODO T , $2T$ e $4T$,
CON γ_1 GENERATA DA γ_0
e γ_2 GENERATA DA γ_1



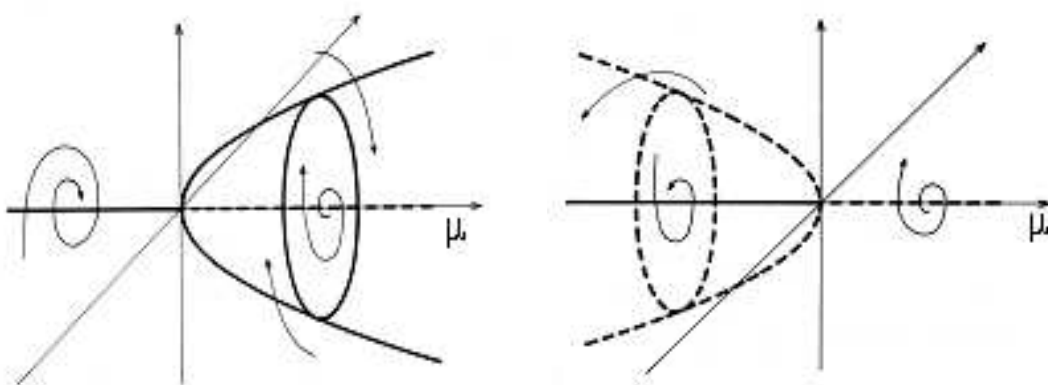
BIFORCAZIONE IN UN TORO

Pure questa biforcazione, detta anche *BIFORCAZIONE DI HOPF SECONDARIA*, può essere *diretta* o *inversa*.

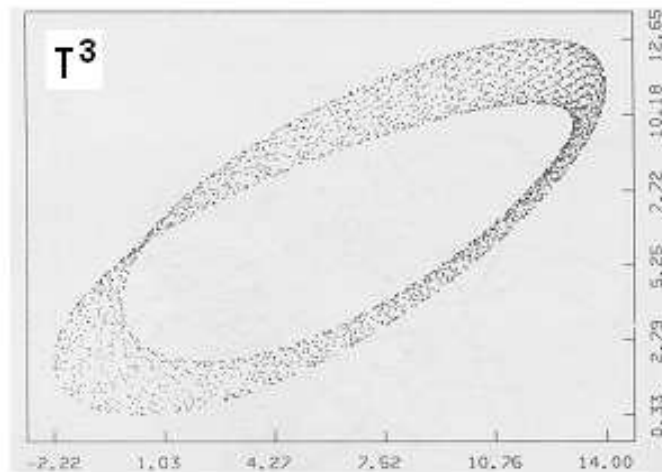
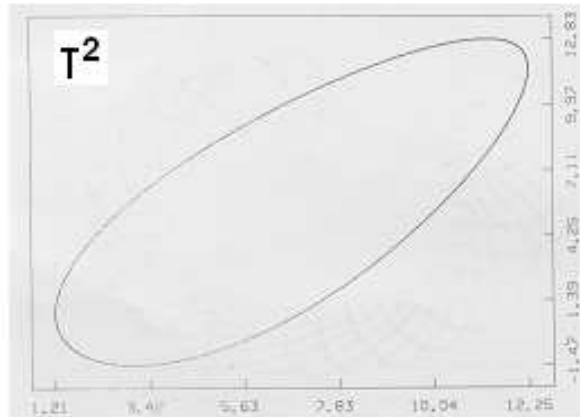
La biforcazione diretta si ha quando, per $\mu = \mu_c$, un'orbita chiusa stabile γ diventa instabile dando origine ad un toro T^2 , stabile ed attrattivo per $\mu > \mu_c$.

Per quanto riguarda invece la biforcazione inversa, essa avviene quando l'orbita γ stabile coesiste con un toro T^2 instabile per $\mu < \mu_c$, e per μ tendente a μ_c si restringe su γ fino a collassarvi sopra, così rendendola instabile.

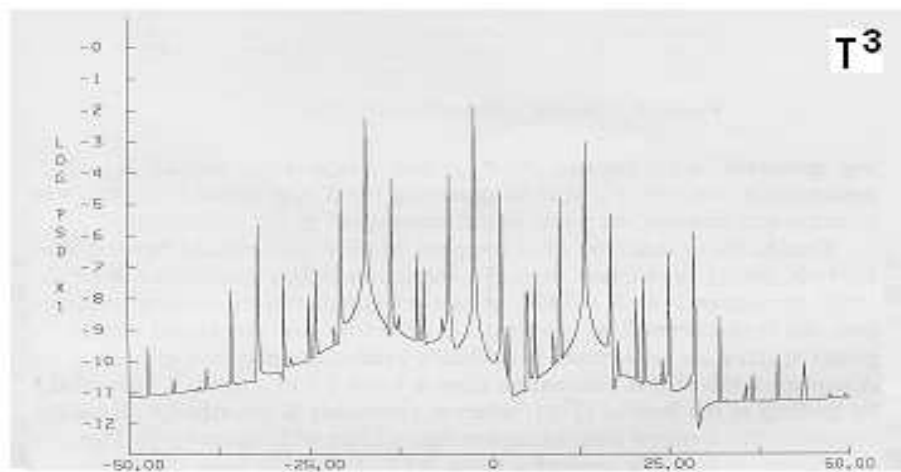
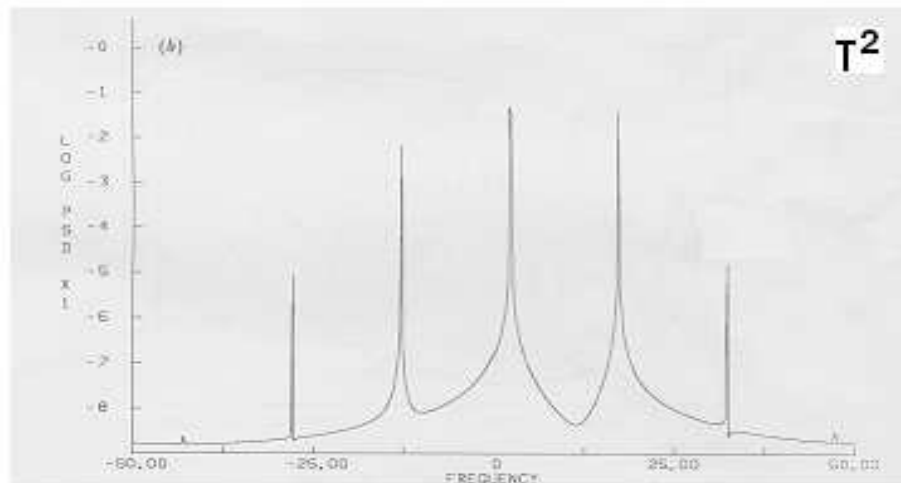
La biforcazione avviene in entrambi i casi quando una coppia di autovalori complessi coniugati di $D\vec{\Phi}|_{\vec{x}_0}$ esce dal cerchio unitario.



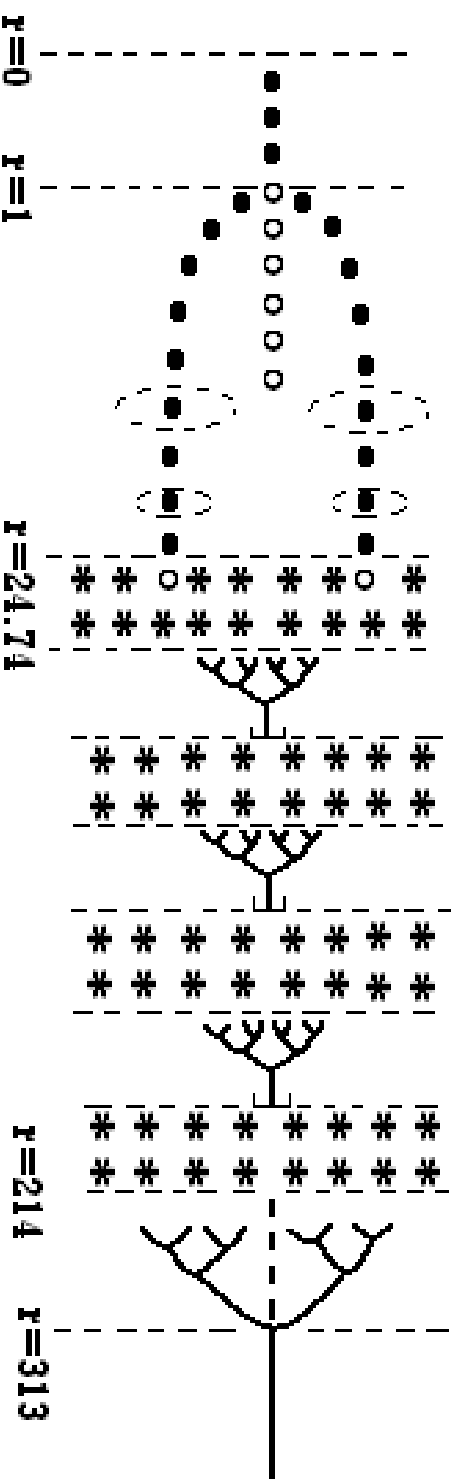
ESEMPIO DI BIFORCAZIONE $T^2 \Rightarrow T^3$
(vista su una sezione di Poincaré [Ref. 23])



*La stessa biforcazione $T^2 \Rightarrow T^3$
vista mediante gli spettri di potenza*

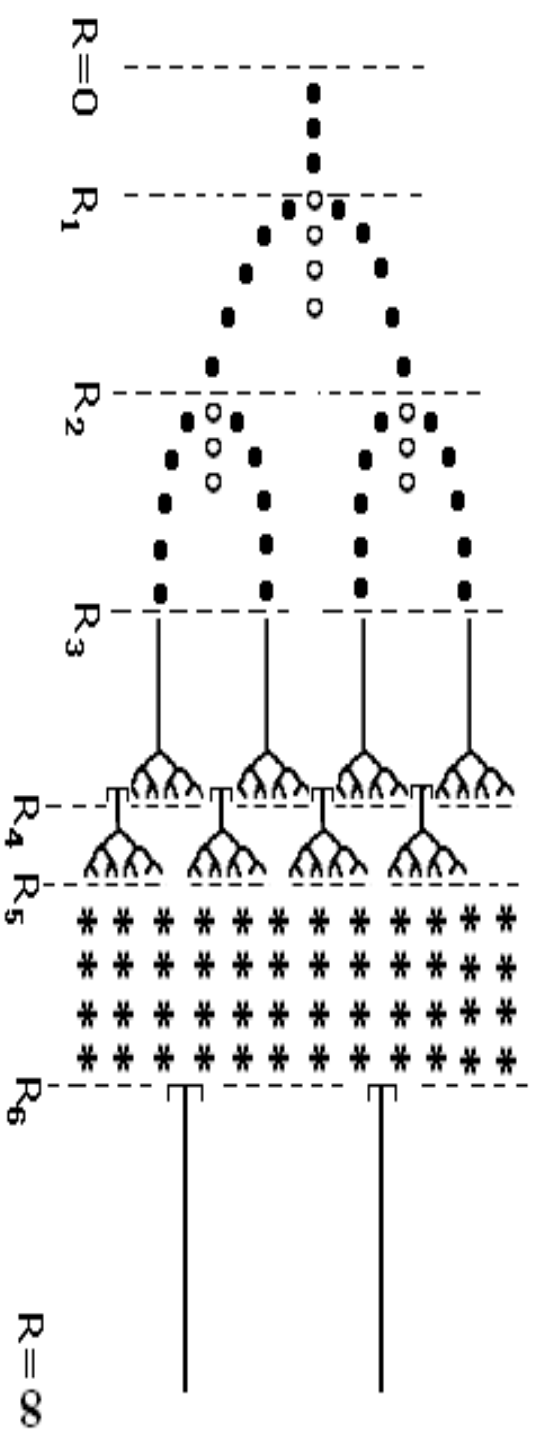


Modello di Lorenz: fenomenologia



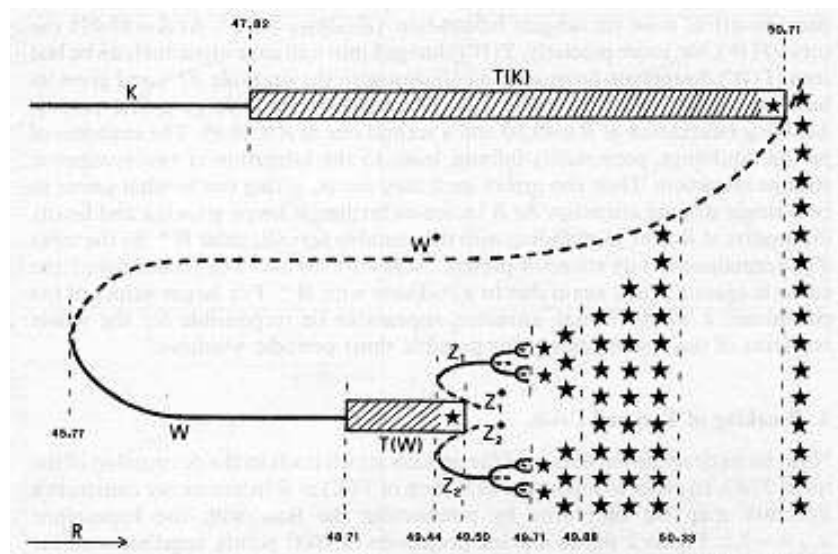
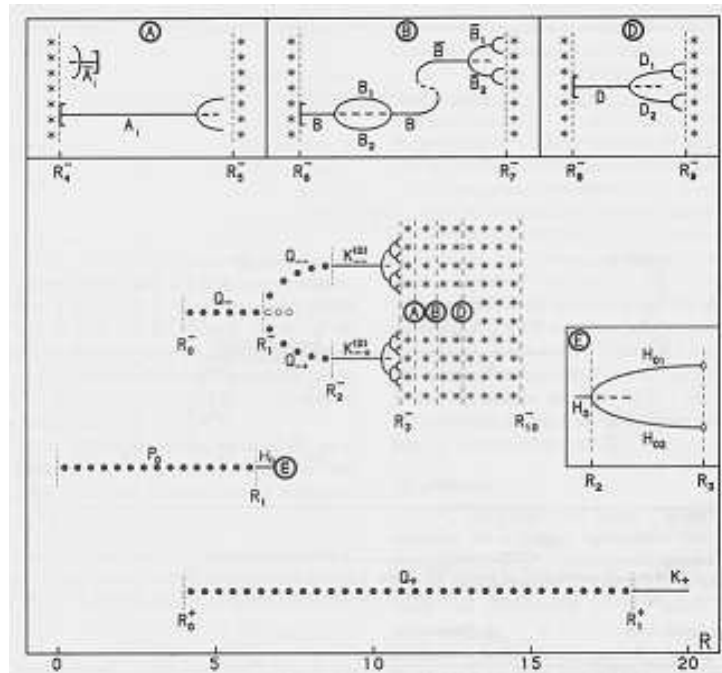
a)	● ● ● ●	: punto fisso stabile	b)	○ ○ ○ ○	: punto fisso instabile
c)	—	: orbita periodica stabile	d)	└	: biforcazione sella-nodo
e)	└	: sequenza di period-doublings	f)	* * *	: attrattore strano

Modello NST 5-modi : fenomenologia



a)	● ● ●	: punto fisso stabile	b)	○ ○ ○	: punto fisso instabile
c)	—	: orbita periodica stabile	d)	—	: biforcazione sella-nodo
e)	└─┘	: sequenza di period-doublings	f)	* * *	: attrattore strano

Modello NST 12-modi: fenomenologia [22]



a) $\bullet \bullet \bullet$: punto fisso stabile	b) $\circ \circ \circ$: punto fisso instabile
c) --- : orbita periodica stabile	d) --- : orbita periodica instabile
e) E : biforcazione sella-nodo	f) --- : biforcazione period-doubling
g) --- : sequenza di period-doublings	h) $**$: attrattore strano
i) --- : toro T^2	

SCENARI (STRADE) PER IL CAOS

Col nome di *scenario* si intende una biforcazione o una sequenza di biforcazioni che portano alla formazione di un attrattore strano e quindi all'instaurarsi di una dinamica caotica (*CAOS*). A questi riguardo c'è anche chi, più semplicemente, parla di *strade verso il caos* [7].

Considereremo i tre scenari più comuni, premettendo però una breve enunciazione di un quarto scenario che, sebbene essenzialmente teorico, riveste molta importanza nella storia dei sistemi dinamici.

SCENARIO DI RUELLE-TAKENS

Questo scenario prevede la nascita di un attrattore strano attraverso tre biforcazioni di Hopf: con la prima un punto fisso biforca in un'orbita chiusa; con la seconda l'orbita chiusa biforca in un toro T^2 ; con la terza il toro T^2 biforca in un toro T^3 . Ebbene, se le tre frequenze dell'orbita sul toro T^3 sono indipendenti, allora è “molto probabile” che a questo punto il sistema abbia un attrattore strano.

Nota: fu proprio nel formulare questo scenario che Ruelle e Takens introdussero il concetto di *attrattore strano* [4].

SCENARIO DI FEIGENBAUM

(PERIOD — DOUBLING)

Questo scenario, proposto nel 1978 da Feigenbaum [6], ha luogo quando un'orbita periodica stabile origina una successione di infinite biforcazioni raddoppianti il periodo. In termini più precisi lo scenario può essere descritto come segue.

Sia γ_0 un'orbita stabile, di periodo T , che diventa instabile per $\mu=\mu_1$ generando γ_1 stabile di periodo $2T$. A sua volta γ_1 biforchi per $\mu=\mu_2$ in γ_2 di periodo $4T$; e così proseguendo, γ_{k-1} biforchi per $\mu=\mu_k$ in γ_k di periodo $2^k T$. Ebbene, se questa successione di *period-doublings* è infinita, si ha che:

- $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \mu_\infty$
- $\exists \delta : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} = \delta = 4.6692\dots$
- per $\mu > \mu_\infty$, di norma, c'è un attrattore strano

La costante δ è detta *costante di Feigenbaum* ed ha il grande pregio di essere una *costante universale*. Infatti, essa è riscontrabile in tutti i sistemi fisici dissipativi, anche del mondo reale, ogni qual volta ci sia un fenomeno periodico in cui il periodo si raddoppia infinite volte. Ad esempio, per i flussi si vedano [16,17].

LA MAPPA LOGISTICA [ref. 2]

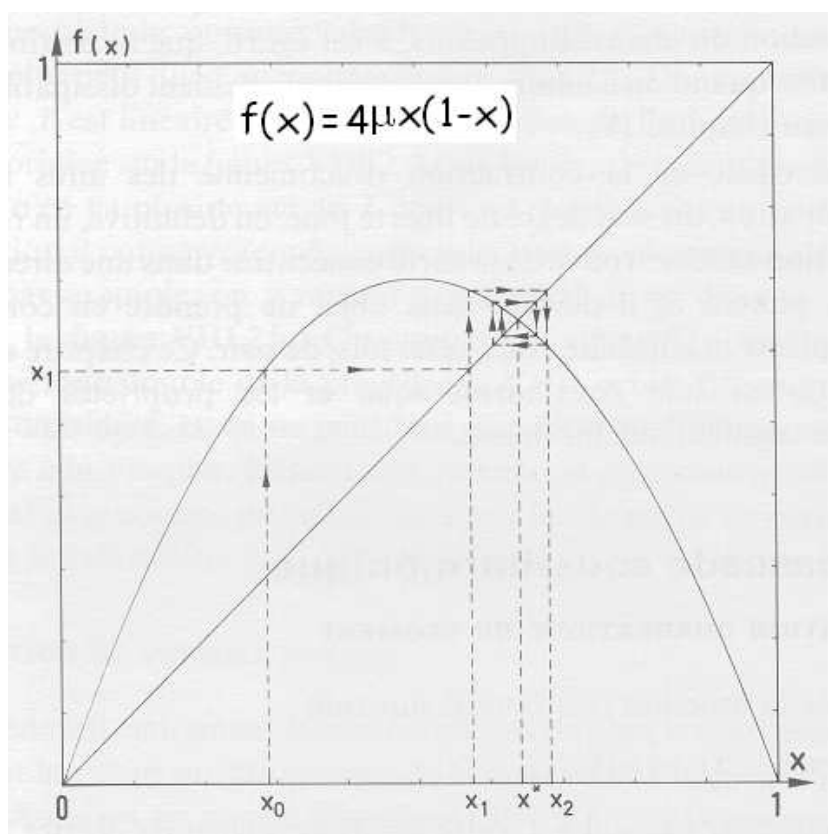
La *mappa logistica* gioca un ruolo fondamentale nella teoria di Feigenbaum. Data la funzione continua

$$f(x) = 4\mu x(1-x), \quad \text{con } 0 < \mu \leq 1,$$

si consideri la mappa quadratica di $[0, 1]$ in sè che si ottiene mediante successive iterazioni della f a partire da un punto iniziale x_0 :

$$x_{k+1} = 4\mu x_k(1-x_k), \quad x_0 \in [0, 1].$$

È facile verificare che per $\frac{1}{4} < \mu < \frac{3}{4}$ la sequenza $\{x_k\}$ converge verso un punto fisso x^* .



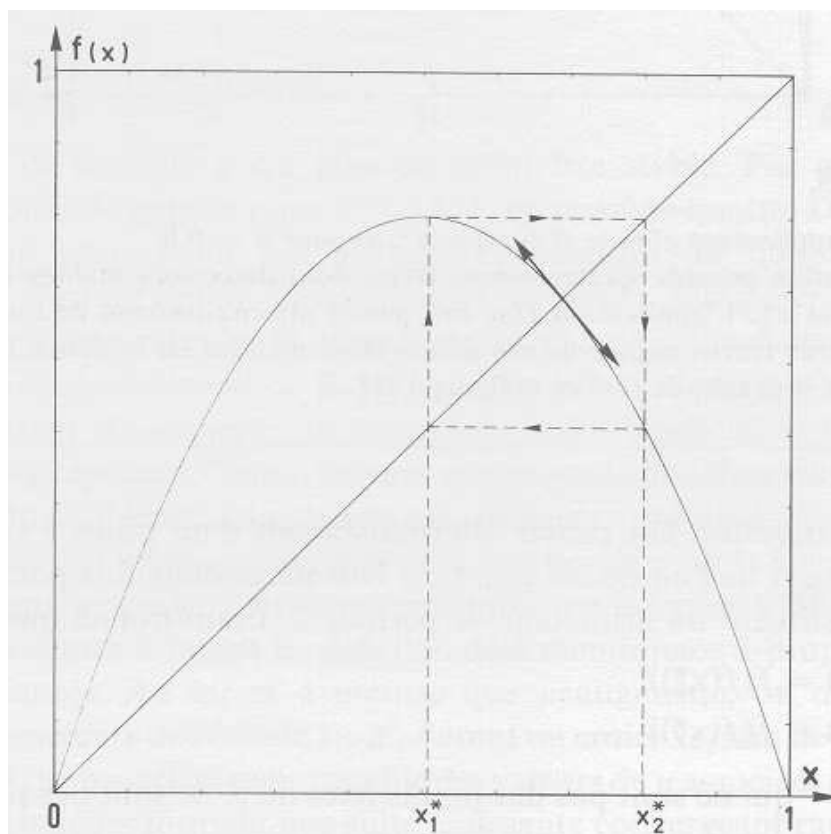
Il punto fisso x^* diventa instabile per $\mu=0.75$, quando $f'(x_*)$ diventa -1 .

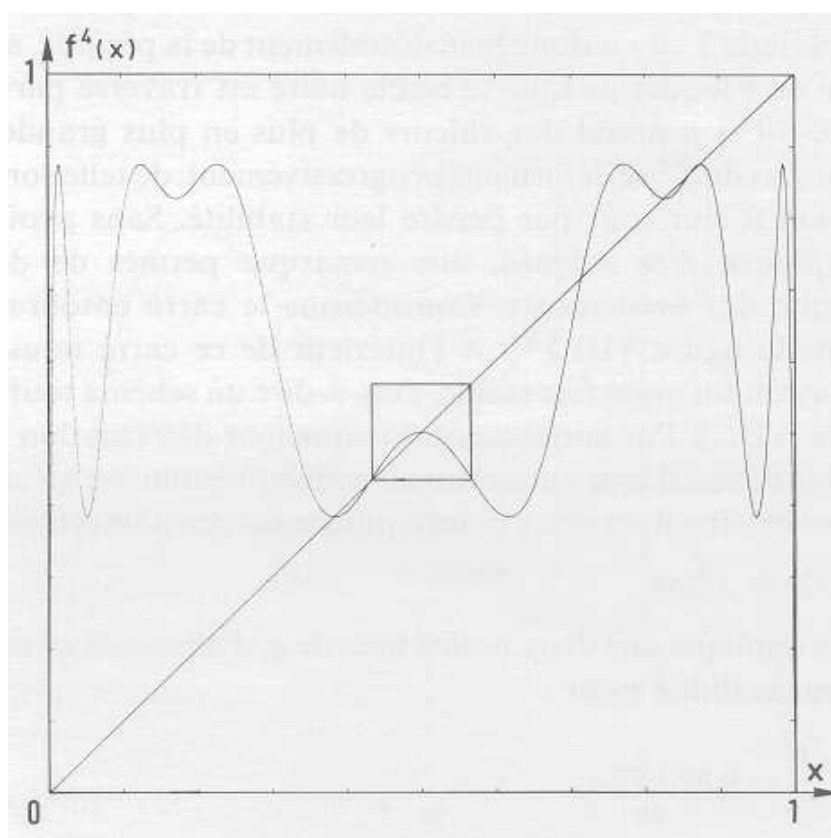
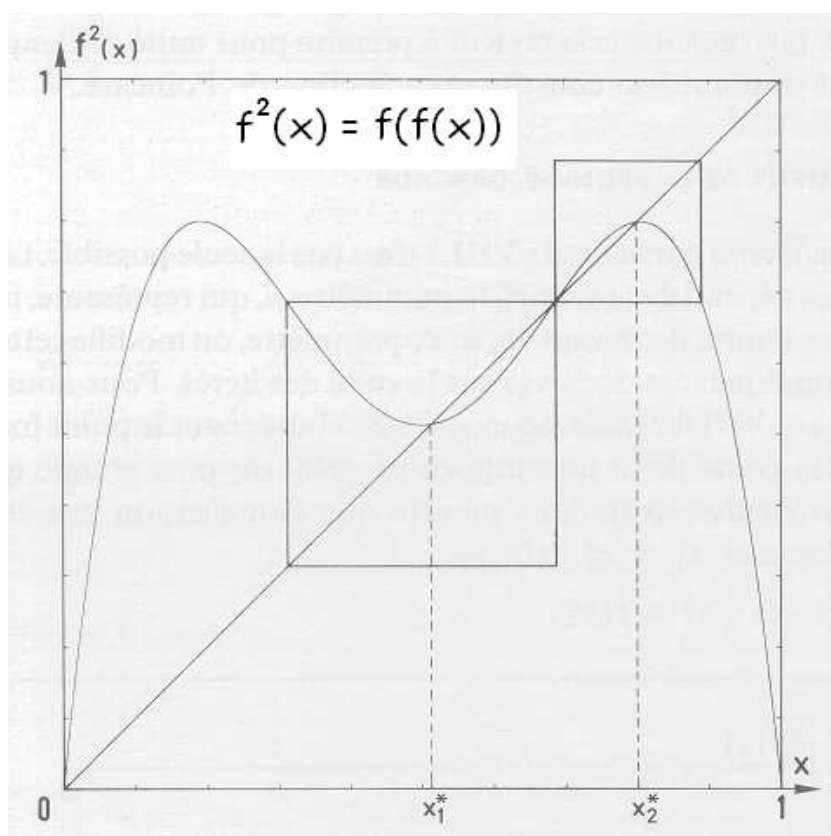
Per $\mu>0.75$, la sequenza $\{x_k\}$ converge ad un'orbita di periodo 2. In altre parole esistono due punti x_1^* e x_2^* che attraggono x_k , tali che

$$x_2^* = f(x_1^*) \quad \text{e} \quad x_1^* = f(x_2^*).$$

Nel momento in cui la sequenza x_k è sull'attrattore (x_1^*, x_2^*) , l'iterazione fa passare il punto passa alternativamente da x_1^* a x_2^* e viceversa.

Si noti che x_1^* e x_2^* sono punti fissi per la mappa $f^2(x)$, ossia:

$$x_1^* = f^2(x_1^*), \quad x_2^* = f^2(x_2^*).$$




Anche il ciclo di periodo 2 si destabilizza a causa del fatto che la derivata $f^{2'}(x_r^*)$ diventa -1 . Ciò si verifica per $\mu=0.86237\dots$ determinando l'instabilità del ciclo di periodo 2 e la nascita di un ciclo di periodo 4 stabile.

La sequenza delle biforcazioni è infinita. Indicando con μ_k il valore del parametro in cui il ciclo 2^{k-1} biforca nel ciclo 2^k , il valore (approssimato) dei primi sei μ_k sono i seguenti:

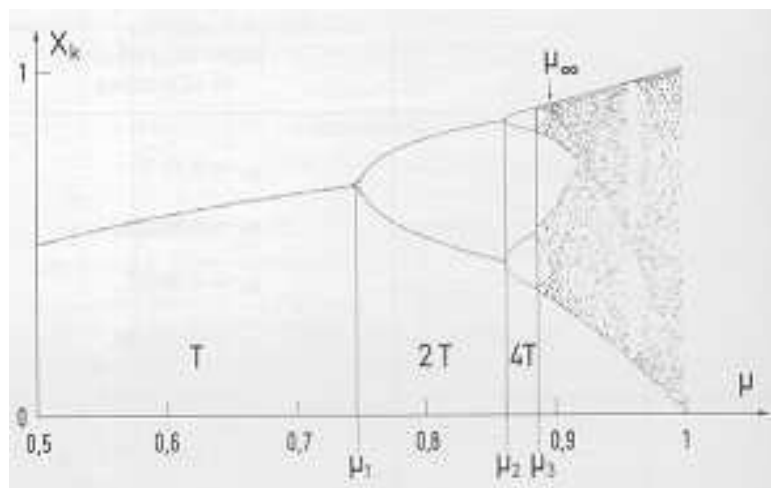
$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0.75, & \mu_2 &\simeq 0.86237, & \mu_3 &\simeq 0.88602, \\ \mu_4 &\simeq 0.89218, & \mu_5 &\simeq 0.892473, & \mu_6 &\simeq 0.8924835,\end{aligned}$$

con $\mu_\infty \simeq 0.892486418$.

Per $\mu > \mu_\infty$ si alternano attrattori periodici ed attrattori aperiodici. Qualcuno di questi ultimi ha un dominio di esistenza in μ sufficientemente ampio. Fra questi si distingue in particolare l'attrattore di periodo 3 che esiste per $\mu \approx 0.96$.

Il grafico che segue mostra le soluzioni asintotiche della mappa logistica per μ variabile in $[0.5, 1]$. In ordinata sono rappresentati gli x_k ottenuti quando k tende all'infinito. Le regioni più chiare corrispondono quindi agli attrattori periodici, mentre quelle più scure corrispondono agli attrattori aperiodici.

DIAGRAMMA DI
BIFORCAZIONE
DELLA MAPPA
LOGISTICA [2,25]



INGRANDIMENTO
DEL DIAGRAMMA
PRECEDENTE

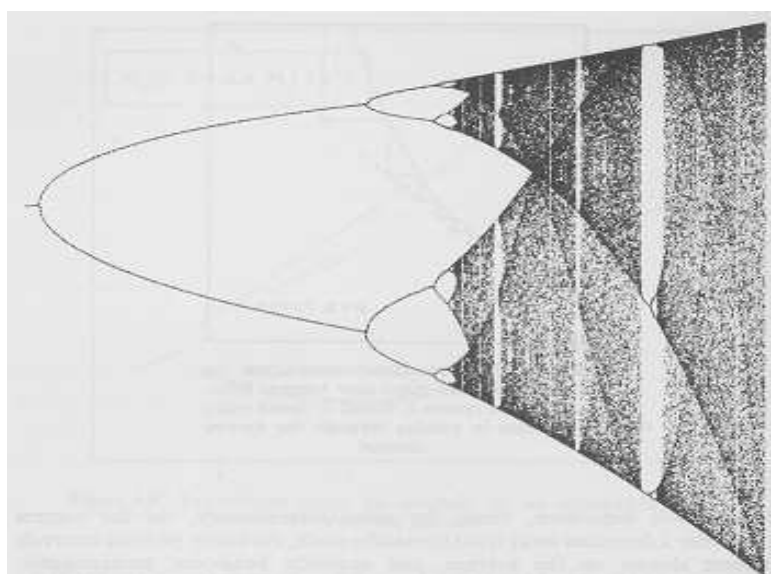
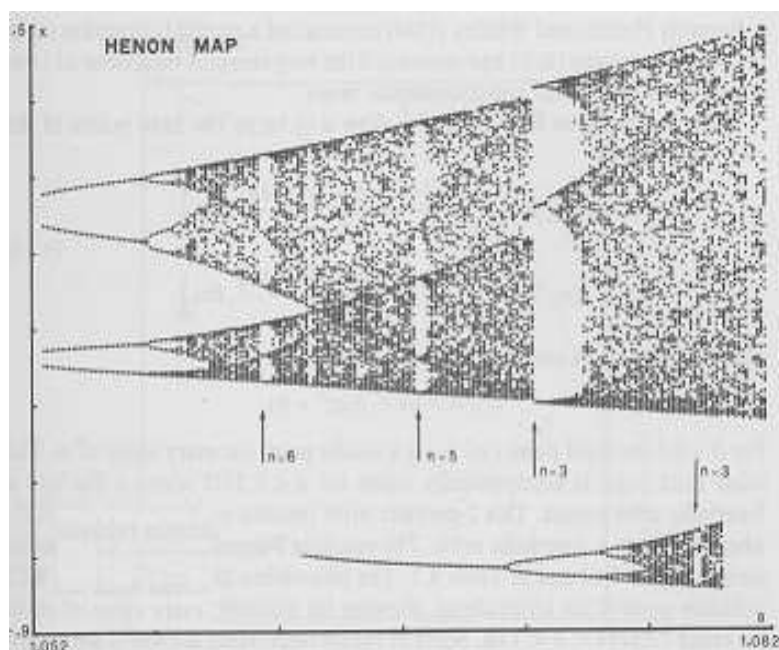
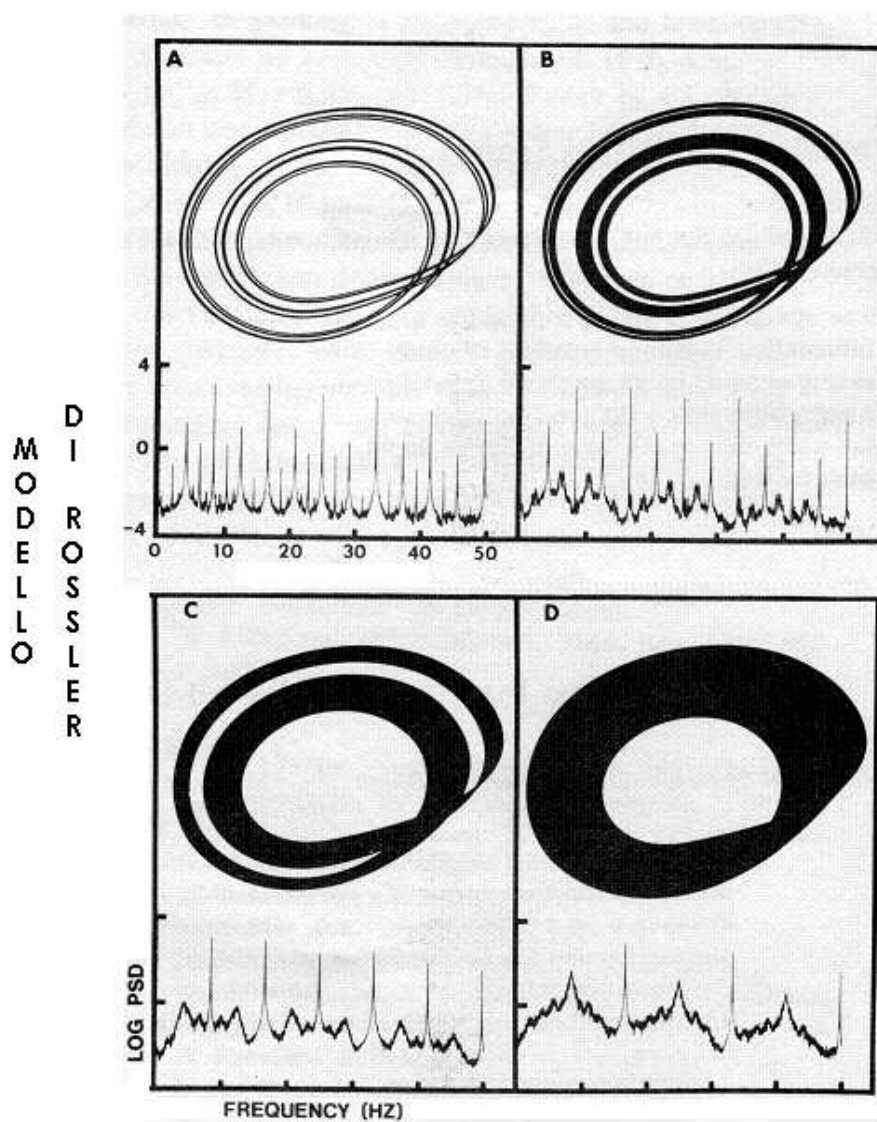
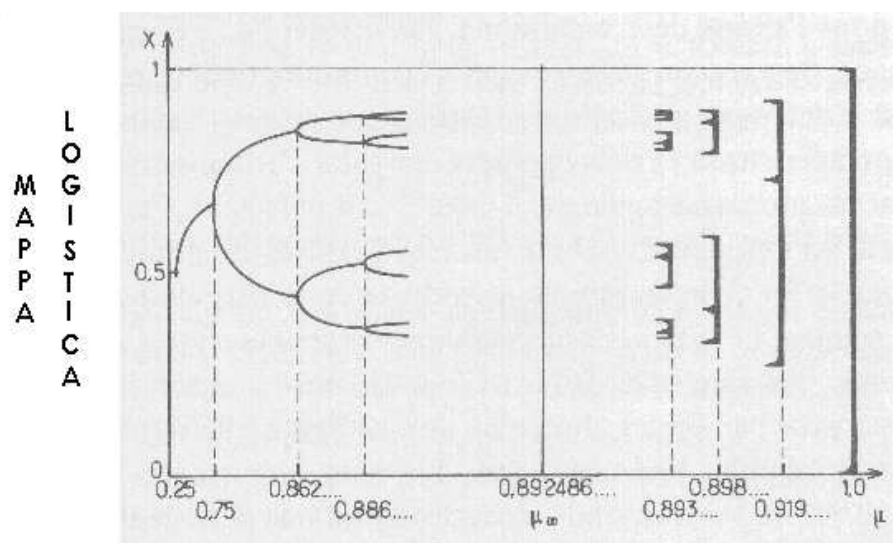


DIAGRAMMA DI
BIFORCAZIONE
DELLA MAPPA
DI HENON [25]



CASCATA INVERSA DI BIFORCAZIONI DI ATTRATTORI STRANI [2,10,13]



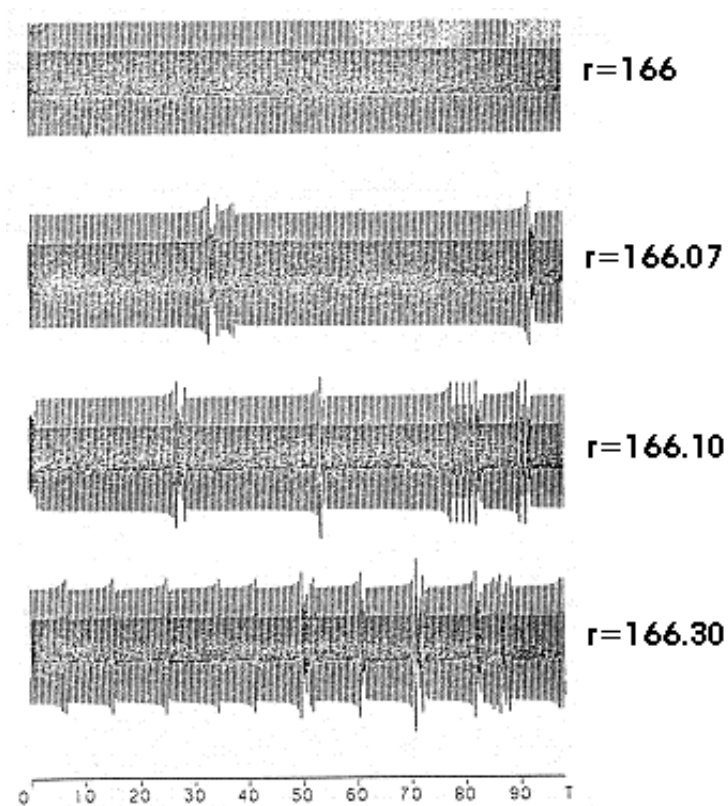
SCENARIO DI POMEAU-MANNEVILLE (INTERMITTENZA)

Questo scenario [9], assai comune, può aver luogo quando un'orbita periodica stabile scompare per $\mu=\mu_c$ collassando su una vicina orbita instabile a causa di una biforcazione sella-nodo. Il nome “*intermittenza*” fa riferimento alle caratteristiche della dinamica a cui dà luogo l'attrattore strano che può apparire per $\mu>\mu_c$.

Quando l'attrattore è un'orbita periodica, il moto consiste di oscillazioni regolari. Per μ di poco maggiore di μ_c il moto appare ancora periodico per lunghi tratti, separati da oscillazioni irregolari di breve durata. Al crescere di μ le fasi periodiche diventano via via più brevi, mentre aumentano, sia in numero che in durata, quelle caotiche. Ad un certo punto non rimane più traccia del comportamento periodico.

L'intermittenza consiste in un alternarsi di fasi periodiche e fasi caotiche. I grafici che seguono illustrano il fenomeno. Essi si riferiscono ad un attrattore strano presente nel modello di Lorenz, dove $\sigma=10$ e $b=8/3$ sono fissati, ed r è variabile. La biforcazione che fa apparire l'attrattore ha luogo per $r\approx 166.0615$.

I grafici, che mostrano una coordinata in funzione del tempo, sono relativi nell'ordine a $r=166$ (quando il moto è ancora periodico) e a tre valori di r successivi alla biforcazione sella-nodo che fa apparire l'attrattore strano.



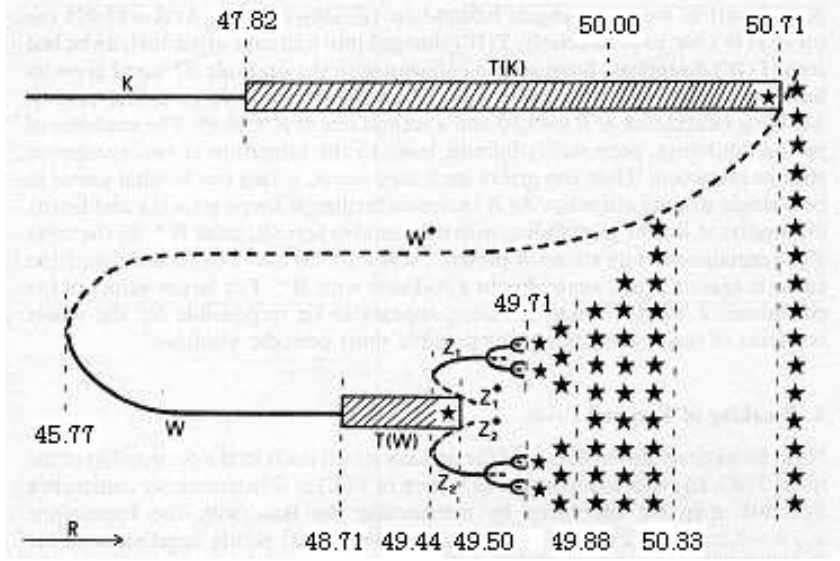
FORMAZIONE DI UN ATTRATTORE STRANO PER ROTTURA DI UN TORO E SUA SCOMPARSA PER CRISI

La *rottura di un toro* è il meccanismo che più frequentemente porta un toro T^2 ad evolvere in un attrattore strano. Essa ha luogo quando la *curva sezione* del toro che si ottiene con una *mappa di Poincaré* cessa di essere una curva chiusa regolare.

Ci si potrà render conto della rottura esaminando la curva stessa o, ancor meglio, studiando la *mappa di ritorno*. Infatti, finchè il toro esiste ed è regolare, la mappa di ritorno esiste ed è regolare. Se e quando, in qualche modo, il toro si rompe, la mappa di ritorno sviluppa un punto di flesso o una singolarità. Si vedrà anche come sia significativo ai fini della rottura del toro la vicinanza di un'orbita periodica instabile.

Un altro fenomeno che si riscontra molto spesso è quello della scomparsa dell'attrattore strano nato dal toro a causa di una *crisi*, cioè a causa della collisione dell'attrattore con l'orbita periodica instabile vicina. Questo fenomeno è descritto assieme a quello della rottura nelle referenze [21,22].

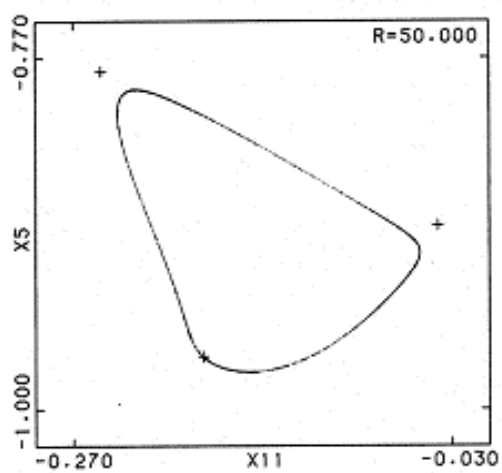
Studieremo il fenomeno della rottura di un toro esaminandone uno presente nel modello NST 12-modi già visto [22]. Per meglio inquadrare la situazione riproponiamo il grafico riassuntivo della fenomenologia che ci interessa.



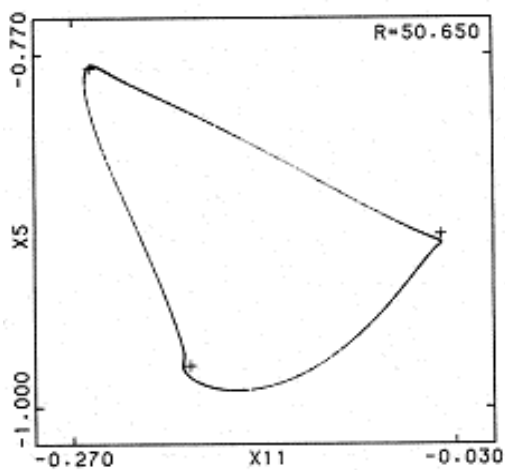
Il toro oggetto del nostro interesse è $T(K)$. Tale toro, per R prossimo a 50.71, prima si “rompe” diventando un attrattore strano, e subito dopo scompare a causa di una “crisi” dovuta alla collisione con l’orbita periodica instabile W^* .

Le figure che seguono, relative ad $R=50$, $R=50.65$ e $R=50.708$, illustrano il fenomeno della rottura di $T(K)$. Mentre l’ingrandimento dell’angolo superiore per $R=50.65$ mostra una curva sezione perfettamente regolare, per $R=50.708$ ci sono diversi ripiegamenti, tipici di una struttura caotica. Altri ingrandimenti (non mostrati) portano a concludere che la rottura avviene per $R \simeq 50.705$.

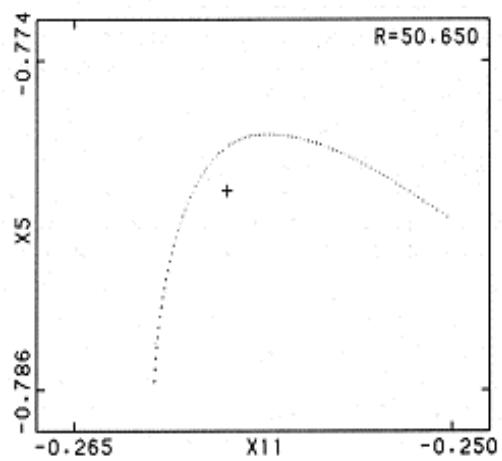
Sezione di Poincaré



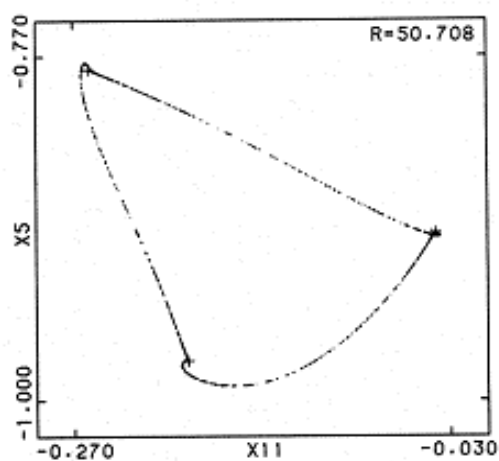
Sezione di Poincaré



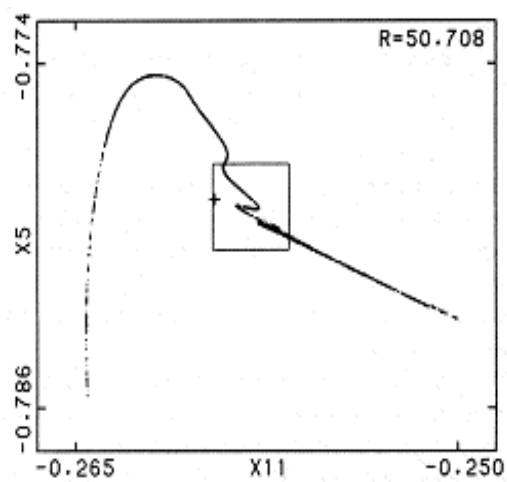
Ingrandimento della
sezione precedente
(angolo superiore)



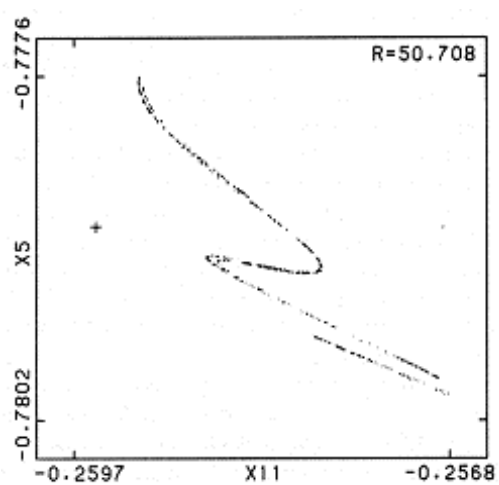
Sezione di Poincaré



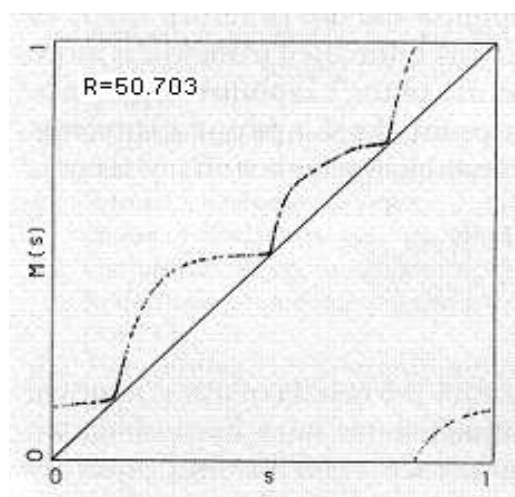
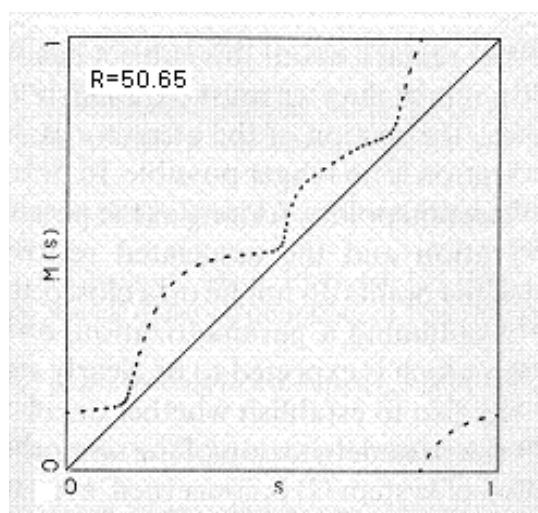
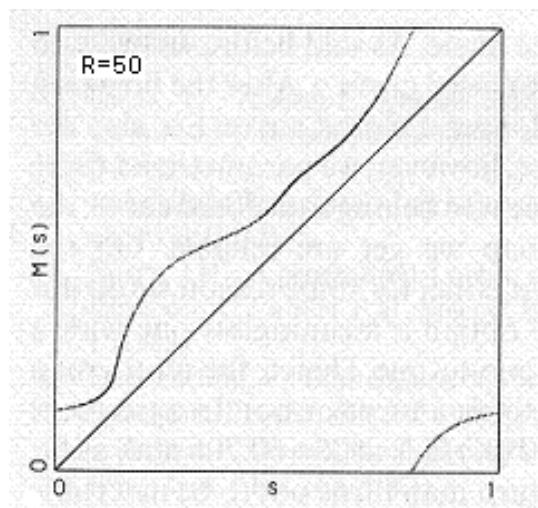
Ingrandimento della
sezione precedente
(angolo superiore)



Ingrandimento
dell'ingrandimento
precedente



MAPPE DI RITORNO:



METODI E TECNICHE NUMERICHE PER LO STUDIO DI UN FLUSSO

- **RICERCA DEGLI ATTRATTORI**
- **STABILITÀ DELLE ORBITE PERIODICHE**
- **ESPONENTI DI LIAPUNOV**
- **SPETTRI DI POTENZA**
- **SEZIONI DI POINCARÉ E MAPPE DI RITORNO**
- **SPAZIO RICOSTRUITO**

Per una trattazione degli argomenti di questo capitolo si suggeriscono le referenze [8,22] e soprattutto [24]. Altre referenze, più specifiche, saranno indicate in seguito.

RICERCA E DEFINIZIONE DEGLI ATTRATTORI

Studiare un sistema dinamico significa studiare il comportamento asintotico delle sue soluzioni al variare del parametro esterno μ e delle condizioni iniziali. In altre parole: significa determinarne gli attrattori più rilevanti e le relative biforcazioni (e quindi i loro intervalli di esistenza).

Il metodo più semplice e più naturale per cercare gli attrattori consiste nei seguenti passi:

- a) *far evolvere il sistema per diversi valori di μ* integrandone numericamente le equazioni a partire da “ragionevoli” condizioni iniziali \mathcal{X}_0 , scelte a caso, con **tempi di rilassamento** “sufficientemente alti”;
- b) *identificare gli attrattori* su cui sono finite le diverse traiettorie, in primis aiutandosi con più proiezioni piane o tridimensionali; nei casi incerti definire la natura dell’attrattore calcolandone esponenti di Liapunov e spettri di potenza, costruendo sezioni di Poincaré;
- c) *“definire la vita” di ciascun attrattore* seguendolo al variare del parametro e studiando tutte le biforcazioni a cui esso dà luogo. Il principio su cui ci si basa nel seguire un attrattore è il seguente: al variare del parametro gli attrattori e i loro bacini d’attrazione si modificano con continuità, per cui, se

x_0 è un punto dell'attrattore per $\mu=\mu_0$ e $\delta\mu$ è abbastanza piccolo, è ragionevole pensare che x_0 sia una buona condizione iniziale per “catturare” lo stesso attrattore per $\mu=\mu_0 + \delta\mu$.

STABILITÀ DELLE ORBITE PERIODICHE

Come abbiamo visto in precedenza, la stabilità di un'orbita periodica dipende dagli autovalori dello Jacobiano della mappa di Poincaré. Se tutti gli autovalori sono interni al cerchio unitario, l'orbita è stabile ed attrattiva; se almeno un autovalore è esterno, l'orbita è instabile.

Se γ è la nostra orbita, che supponiamo di periodo T , indicato con $W(T)$ lo Jacobiano in questione, esso si calcola integrando lungo γ , esattamente per un periodo T , il seguente sistema di $n \times n$ equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{W}_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x^{(k)}} , & i, j = 1, \dots, n, \\ W(0) = I, \end{cases}$$

essendo I la matrice unitaria e $x^{(k)}$ la coordinata k -sima di $\vec{X} \in \mathcal{R}^n$.

ESPONENTI DI LIAPUNOV

Gli *esponenti di Liapunov* o *numeri caratteristici* misurano la velocità esponenziale media con cui traiettorie “vicine” ad una soluzione di riferimento $\gamma(t)$ fissata (che si suppone appartenente ad un attrattore) convergono (divergono) verso (da) questa. Essi costituiscono quindi un validissimo strumento per determinare la natura di un attrattore, ed in particolare per vedere se è caotico oppure no.

Limitandoci al caso di un flusso, indicati con

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n ,$$

gli n esponenti di Liapunov relativi alla nostra traiettoria di riferimento, ordinati in ordine decrescente, si hanno le corrispondenze seguenti:

$$\lambda_1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{punto fisso}$$

$$\lambda_1 = 0 , \lambda_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{orbita chiusa}$$

$$\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 0 , \lambda_3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{toro } T^2$$

$$\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 0 , \lambda_3 = 0 , \lambda_4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{toro } T^3$$

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0 , \dots , \lambda_{k-1} > 0 \\ \lambda_k = 0 , \lambda_{k+1} < 0 , k > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{attrattore strano}$$

Il calcolo permette di calcolare quanti esponenti si desiderano, e in ordine decrescente a partire dal maggiore. Ne consegue, ad esempio, che se uno vuole sapere solo se il suo attrattore è caotico oppure no, basta che calcoli il solo λ_1 (come si evince subito dallo schema precedente). Se λ_1 è positivo, l'attrattore è caotico, altrimenti non lo è.

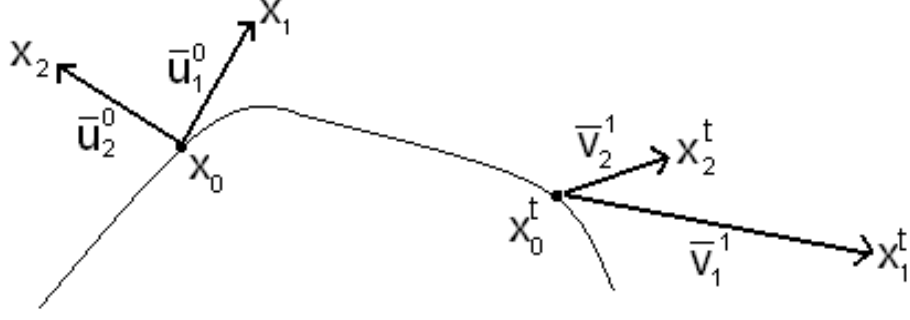
Supponiamo dunque che si vogliano calcolare gli esponenti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, con $1 \leq m \leq n$. Illustriamo ora un metodo per calcolare λ_1 e λ_2 . Il procedimento che poi daremo per calcolare m esponenti si otterrà generalizzando tale metodo.

Sia $\gamma(t)$ la traiettoria di riferimento fissata e sia x_0 un punto su di essa. Siano poi x_1 e x_2 due punti vicini ad x_0 tali che i vettori

$$\overline{u}_1^0 = x_1 - x_0, \quad \overline{u}_2^0 = x_2 - x_0$$

siano ortogonali e di uguale lunghezza d . Indicato poi con $\Phi^t(x)$ il punto in cui il flusso ha fatto evolvere il punto x dopo un tempo t e con $\Phi^t(\overline{u}_1^0)$ e $\Phi^t(\overline{u}_2^0)$ i vettori in cui contemporaneamente si sono evoluti \overline{u}_1^0 e \overline{u}_2^0 , si ha

$$\begin{aligned}\Phi^t(\overline{u}_1^0) &= \Phi^t(x_1) - \Phi^t(x_0), \\ \Phi^t(\overline{u}_2^0) &= \Phi^t(x_2) - \Phi^t(x_0).\end{aligned}$$



Supponiamo ora di aver calcolato le tre traiettorie a partire da x_0 , x_1 e x_2 per un tempo H e di aver quindi determinato i vettori

$$\bar{v}_1^1 = \Phi^H(\bar{u}_1^0), \quad \bar{v}_2^1 = \Phi^H(\bar{u}_2^0).$$

Il rapporto

$$\beta_1^1 = \frac{\|\bar{v}_1^1\|}{d}$$

misurerà l'allungamento o la contrazione di \bar{u}_1^0 sotto l'azione del flusso per il tempo H . Se poi indichiamo con $(\bar{v}_2^1)_\perp$ la componente di \bar{v}_2^1 normale a \bar{v}_1^1 , il rapporto

$$\beta_2^1 = \frac{\|(\bar{v}_2^1)_\perp\|}{d}$$

misura l'allungamento (possibile solo se $\beta_1^1 > 1$) o la contrazione di \bar{u}_2^0 .

Se poi si rinormalizzano a d le lunghezze di \bar{v}_1^1 e di $(\bar{v}_2^1)_\perp$, si ottengono due nuovi vettori \bar{u}_1^1 e \bar{u}_2^1 di lunghezza d e ortogonali fra loro (così come erano \bar{u}_1^0 e \bar{u}_2^0). Facendo evolvere anche \bar{u}_1^1 e \bar{u}_2^1 per un intervallo di tempo H , questi

evolveranno nei vettori \bar{v}_1^2 e \bar{v}_2^2 , mediante i quali si otterranno due nuovi coefficienti di espansione o contrazione β_1^2 e β_2^2 e due nuovi vettori \bar{u}_1^2 e \bar{u}_2^2 , ortogonali e di lunghezza d da far evolvere al passo successivo.

Supposto di iterare all'infinito il procedimento si ottegono due successioni $\{\beta_1^k\}$ e $\{\beta_2^k\}$. Ciò permette di definire gli esponenti di Liapunov λ_1 e λ_2 nel modo seguente:

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kH} \sum_{h=1}^k \ln \beta_i^h, \quad i = 1, 2.$$

Nel calcolo effettivo si considerano ovviamente le approssimazioni

$$\lambda_i \simeq \frac{1}{kH} \sum_{h=1}^k \ln \beta_i^h, \quad i = 1, 2.$$

con k sufficientemente grande da permettere che i λ_i si siano opportunamente stabilizzati sulla cifra decimale desiderata (compatibilmente con i costi del calcolo, che crescono esponenzialmente con il numero di cifre).

Il calcolo di m esponenti di Liapunov per $m > 2$ si ottiene con una semplice generalizzazione del procedimento visto per $m = 2$.

Siano $\overline{u}_0^1, \overline{u}_0^2, \dots, \overline{u}_0^m$ gli m vettori iniziali con origine in \mathcal{X}_0 , a due a due ortogonali e tutti di modulo d . Denotando con (\cdot, \cdot) il prodotto scalare e ricordato che $\|\overline{w}\| = \sqrt{(\overline{w}, \overline{w})}$, per $k = 1, \dots, K$ si ha:

$$\overline{v}_1^k = \Phi^H(\overline{u}_1^{(k-1)}), \quad \beta_1^k = \frac{\|\overline{v}_1^k\|}{d}, \quad \overline{u}_1^k = \frac{\overline{v}_1^k}{\beta_1^k};$$

e per $i = 2, \dots, m$:

$$\begin{cases} \overline{v}_i^k = \Phi^H(\overline{u}_i^{(k-1)}) - \sum_{j=1}^{i-1} (\overline{u}_j^k, \Phi^H(\overline{u}_i^{(k-1)})) \overline{u}_j^k, \\ \beta_i^k = \frac{\|\overline{v}_i^k\|}{d}, \quad \overline{u}_i^k = \frac{\overline{v}_i^k}{\beta_i^k}. \end{cases}$$

Ne consegue:

$$\lambda_i \simeq \frac{1}{KH} \sum_{h=1}^k \ln \beta_i^h, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

essendo K il numero di volte che viene ripetuto l'algoritmo, e di conseguenza KH il tempo totale in cui si sono fatti evolvere i vettori.

Osservazioni:

a) La rinormalizzazione dei vettori \overline{u}_i^k ad ogni intervallo di tempo H è necessaria per prevenire fenomeni di overflow dovuti a vettori che diventano troppo lunghi.

- b) La riortogonalizzazione degli stessi vettori è anch'essa necessaria per prevenire la possibilità che l'angolo tra due vettori diventi così piccolo da causare underflow.
- c) Solo l'esperienza di chi fa i calcoli è utile ai fini di una scelta ottimale del tempo H fra un riscaldamento e l'altro e del numero K (e quindi del tempo complessivo di calcolo).
- d) Un algoritmo per la stima degli esponenti λ_j positivi per una serie temporale è descritto nella referenza [12].

DIMENSIONE DI LIAPUNOV

Un problema rilevante è quello di assegnare una dimensione ad un attrattore strano [11]. Esistono più formule che cercano di risolvere il problema mettendo in relazione il concetto di dimensione con quello di esponenti di Liapunov. La più affidabile sembra essere la formula di Kaplan e Yorke che gli autori chiamano *dimensione di Liapunov*.

Se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ sono gli n esponenti di Liapunov di un flusso n -dimensionale, la dimensione è definita come segue:

$$D_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

dove j è il massimo intero per cui la somma $\lambda_1 + \dots + \lambda_j$ è positiva.

SPETTRI DI POTENZA

Un secondo strumento utile a definire l'esatta natura di un attrattore è costituito dall'*analisi spettrale* (o *di Fourier*).

Con questa analisi, infatti, si possono evidenziare le frequenze di una funzione $x(t)$. Se $x(t)$ è periodica di periodo T e frequenza $f = \frac{1}{T}$, lo spettro risulta discreto e i suoi picchi rappresentano in ordine decrescente $f, 2f, 3f, \dots$. Se invece $x(t)$ è quasiperiodica di frequenze f_1 ed f_2 , allora lo spettro contiene tutte le combinazioni intere delle due frequenze: $m_1 f_1 + m_2 f_2$, con $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$. Analogamente, se le frequenze sono tre, come accade per un toro T^3 , allora i picchi dello spettro corrispondono a tutte le loro combinazioni intere. Naturalmente, più sono le frequenze, più difficile risulta la "lettura" dello spettro. Già il riconoscere con certezza tre frequenze può risultare quasi impossibile.

In tutti i casi citati in precedenza lo spettro è discreto, e questo contraddistingue un attrattore non caotico da un attrattore strano, che potrebbe essere definito anche come *un attrattore il cui spettro è continuo*.

La trasformata di Fourier di una funzione $x(t)$ si esegue calcolando le somme

$$\hat{X}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i j k / N}, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

con i unità immaginaria e $x_k = x(k\Delta)$, essendo Δ un intervallo di tempo. I punti x_0, x_1, \dots, x_{N-1} costituiscono un campione di N punti e Δ l'intervallo di campionamento. I numeri $|\hat{X}_j|^2$, $j = 0, \dots, N-1$ forniscono lo *spettro di potenza* di $x(t)$.

NOTA: gli spettri qui mostrati furono ottenuti con $N=4096$.

Lo spettro di potenze che si ottiene con un campionamento del tipo proposto rappresenta lo spettro standard. Qualche volta, tuttavia, quando si ha a che fare con un toro o con un attrattore strano nato da un toro, può tornare utile assumere come sequenza $\{x_k\}$ i valori di una coordinata dei punti ottenuti come intersezioni successive con una sezione di Poincaré (pur risultandone un campionamento ad intervalli non costanti). Così si elimina una frequenza (quella longitudinale, cioè lungo il toro) e lo spettro può risultare più “leggibile”. Per distinguere i due tipi di spettro si può parlare di *spettro del flusso* nel caso standard e *spettro della sezione* nel secondo caso. Si veda [20].

Un fenomeno abbastanza scomodo che si può verificare è l'*aliasing*, cioè la riflessione della parte di spettro che eccede la frequenza $1/T$. Per ovviare a questo inconveniente, che talvolta rende difficile l'assegnazione a ciascun picco della giusta frequenza, si può procedere così : *a)* si adotta un tempo di campionamento T piccolo; *b)* si plotta solo una prima parte dello spettro.

Un secondo fenomeno negativo in cui si può incorrere è il *leakage*, che produce una dispersione delle componenti spettrali lontano dalle frequenze corrette. Esso è dovuto al fatto che il campionamento dei dati avviene su un intervallo finito. I suoi effetti possono essere ridotti facendo terminare con gradualità la sequenza $\{x_k\}$, ad esempio con una “finestra di Tuckey a campana”.

Infine, per garantirsi dell'affidabilità degli spettri prodotti, essi possono essere calcolati sia facendo la media dei risultati ottenuti da campioni differenti, sia come risultato di un singolo campione.

SPAZIO RICOSTRUITO

Mentre in uno studio al calcolatore di un sistema n -dimensionale si ha a disposizione un segnale $x(t)$ n -dimensionale, in un esperimento fisico, in generale, viene prodotta un'unica grandezza scalare $u(t)$ con cui descrivere la dinamica di un sistema che molto spesso ha infiniti gradi di libertà. Come si può sperare di capire il sistema analizzando $u(t)$? La cosa è meno problematica di quanto si potrebbe pensare; si procede nel modo seguente.

Dal segnale $u(t)$ si possono ottenere m segnali mediante *ritardi di tempo*. Scelto infatti un *tempo di ritardo* \mathcal{T} , si considerano le funzioni

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = u(t) \\ x_2(t) = u(t + \tau) \\ \\ x_m(t) = u(t + (m - 1)\tau). \end{array} \right.$$

Le funzioni $x_j(t)$ si dicono *coordinate con ritardo* e lo spazio m -dimensionale da esse definito è detto *spazio ricostruito*.

Per una buona ricostruzione dello spazio delle fasi sono decisive le scelte di m e di \mathcal{T} . In ogni caso occorre usare “abbastanza” variabili, *almeno il doppio della dimensione dell’attrattore che governa la dinamica*: così facendo le traiettorie risultano meglio definite e non si intersecano. Per quanto concerne poi \mathcal{T} , è ovvio che dovrà essere $\mathcal{T} = kH$, essendo H il passo di campionamento di $u(t)$. La scelta di k deve poi garantire che le traiettorie siano il più possibile separate (il che richiede ovviamente diversi esperimenti).

SEZIONI DI POINCARÉ E MAPPE DI RITORNO

Una *sezione di Poincaré* costituisce uno strumento molto utile nello studio dei flussi, in quanto ne riporta l’analisi a quella di una mappa. Essa risulta di particolare utilità nello studio delle orbite periodiche e dei tori.

Per poter fare una sezione di Poincaré occorre prima scegliere un iperpiano $(N-1)$ -dimensionale, preferibilmente fissando una coordinata, e stabilire un verso di “attraversamento” dello stesso. Considerata quindi un’orbita del flusso, e concesso un tempo di rilassamento sufficientemente lungo (in modo che l’orbita sia “sull’attrattore”), si considera *l’insieme dei punti intersezione* della curva soluzione con l’iperpiano. Tale insieme costituisce la sezione di Poincaré.

Sia N il numero dei punti sezione calcolati, con N opportunamente grande. In molti casi, solo guardando com'è fatta la "sezione", si sa immediatamente di che tipo è l'attrattore. Infatti, se la sezione è costituita da un solo punto o da un numero n di punti (molto) minore di N , l'attrattore è un'orbita periodica. Se invece la sezione "disegna" una curva chiusa, l'attrattore è un toro bidimensionale. Se poi la sezione mostra un insieme simile all'attrattore di Henon, o comunque una distribuzione di punti senza alcuna regolarità, molto probabilmente si tratta di un attrattore strano.

Una volta fatta una sezione di Poincaré, se l'attrattore è un toro T^2 , si può costruire una *mappa di ritorno*, che matematicamente rappresenta una mappa del cerchio in sé.

Sia γ la curva sezione del toro. Per costruire una mappa di ritorno occorre parametrizzare γ con una ascissa curvilinea s , $0 \leq s \leq 1$, e a ciascun s associare l'ascissa $M(s)$ in accordo con la mappa di Poincaré.

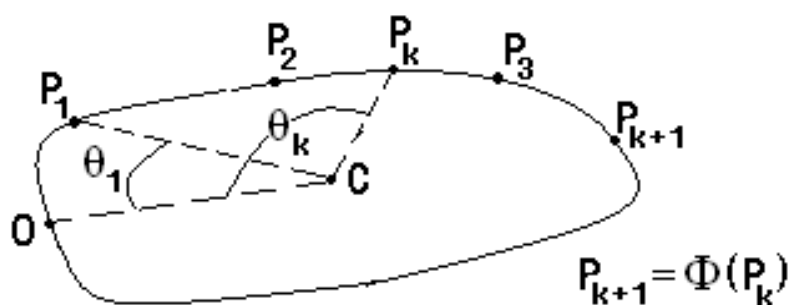
Finchè il toro esiste ed è regolare, la mappa di ritorno esiste ed è regolare. Se il toro in qualche modo si "rompe", la mappa di ritorno deve sviluppare un punto di flesso o una singolarità. Dunque, la mappa di ritorno ci dice quand'è che un toro cessa di essere tale.

Il problema della costruzione di una mappa di ritorno sta tutto nella parametrizzazione di una curva chiusa γ che è nota in un insieme di punti $\{P_k\}$, $k = 1, \dots, N$, che non sono ordinati rispetto ad un dato verso di percorrenza di γ , bensì secondo l'ordine indotto dalla mappa di Poincaré.

Algoritmo di ordinamento [21]:

Passo 1

A ciascun P_k associamo un angolo $\theta_k \in [0, 2\pi]$, considerando una proiezione piana di γ , la più “rotonda” possibile, ed un punto di riferimento interno ad essa. Ciò induce immediatamente un diverso ordine tra i punti: sia $\{Q_k\}$ la sequenza che si ottiene rinominando i punti, con Q_k che precede Q_{k+1} secondo il nuovo ordine.



Tuttavia questo ordinamento può essere non corretto. Ciò accade se la curva γ non è “rotonda”, ad esempio con cappi o ripiegamenti. In tal caso occorre correggere l'ordinamento con un secondo passo.

Passo 2

Sia θ_1 la coordinata angolare di Q_1 ed M un intero opportunamente scelto minore di N . Cerchiamo tra i punti Q_2, Q_3, \dots, Q_{M+1} quello che è più vicino a Q_1 . Se questo punto non è Q_2 , lo scambiamo con Q_2 . Consideriamo quindi i punti Q_3, Q_4, \dots, Q_{M+2} e facciamo sì che Q_3 diventi, se non lo è già, il punto avente distanza minima da Q_2 . E così via fino a completare il riordinamento.

Se la scelta di Q_1 è stata appropriata ed N è sufficientemente grande, questo algoritmo di ordinamento, basato sul criterio di minima distanza, funziona egregiamente e alla fine la sequenza $\{Q_k\}$ rappresenta i punti nel giusto ordine.

Passo 3

Indicata con d la distanza, ponendo $s_1 = 0$ e

$$s_i = s_{i-1} + d(Q_{i-1}, Q_i), \quad i = 2, \dots, N,$$

associamo a ciascun Q_i una coordinata curvilinea. Questa, previa normalizzazione, fornisce la parametrizzazione di γ cercata.

Posto $s(P_k) = s_i$ se $P_k \equiv Q_i$, la mappa di ritorno è quindi definita dalla relazione

$$M(s(P_k)) = s(P_{k+1}), \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Un'ultima importante nozione è quella di *numero di rotazione*, che indichiamo con w . Esso è approssimabile come segue:

$$w = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \Delta^k s,$$

con

$$\Delta^k s = \begin{cases} s(P_{k+1}) - s(P_k) & \text{se } s(P_{k+1}) > s(P_k) \\ s(P_{k+1}) - s(P_k) + 1 & \text{se } s(P_{k+1}) < s(P_k). \end{cases}$$

Quando w è un numero razionale, le due frequenze del toro sono razionalmente legate (*phase locking*) e l'attrattore è un'orbita chiusa dislocata sul toro. Se invece w è un numero irrazionale, le due frequenze sono incorrelate e il moto sul toro è quasiperiodico. Siccome al variare del parametro μ il numero di rotazione varia con continuità, si alternano fasi periodiche a fasi quasiperiodiche.

Spesso risulta difficile “vedere” i moti periodici in quanto circoscritti ad intervalli molto piccoli di μ . Non è raro, tuttavia, vederli; in questo caso, quanto più w è un razionale semplice, tanto più persiste il “blocco delle frequenze” e più a lungo il moto rimane periodico.

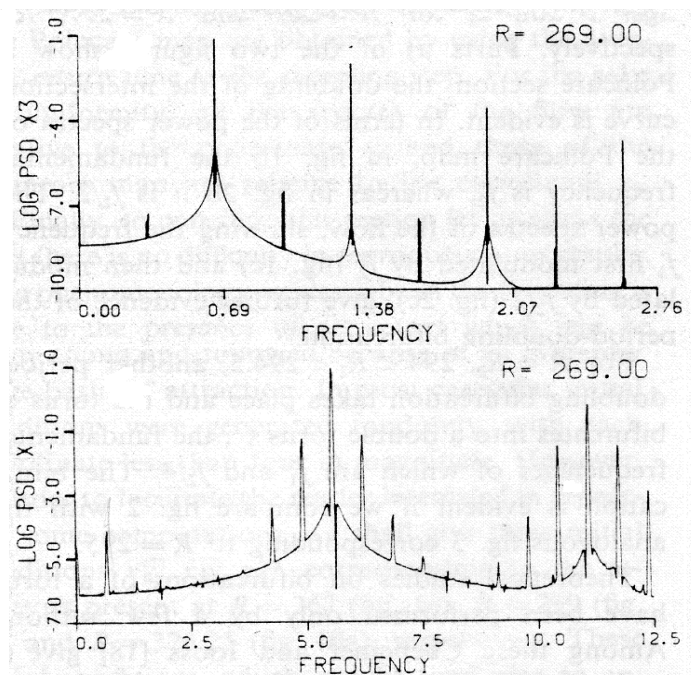
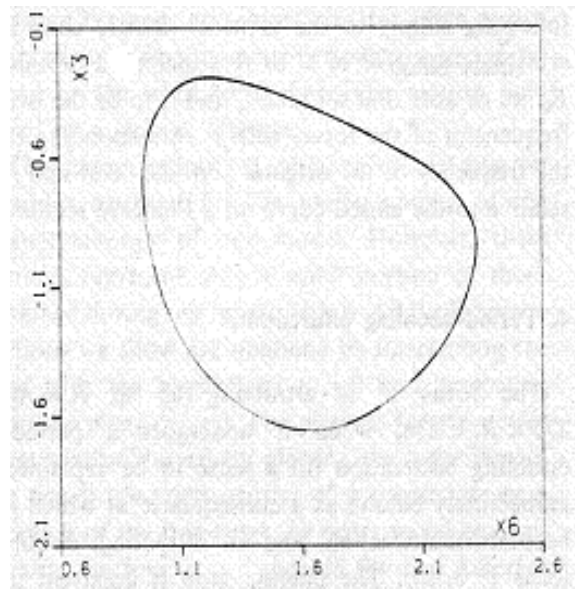
PERIOD-DOUBLING DI UN TORO, FORMAZIONE DI UN ATTRATTORE STRANO E SUA EVOLUZIONE

Anche i tori possono dar luogo a period-doubling. Ciò si manifesta con il “raddoppiamento” della curva sezione, ossia con il dimezzamento di una delle due frequenze. L’esempio che viene proposto mostra un toro T^2 che dà luogo a due period-doubling e quindi, “rompendosi”, evolve in un attrattore strano [20].

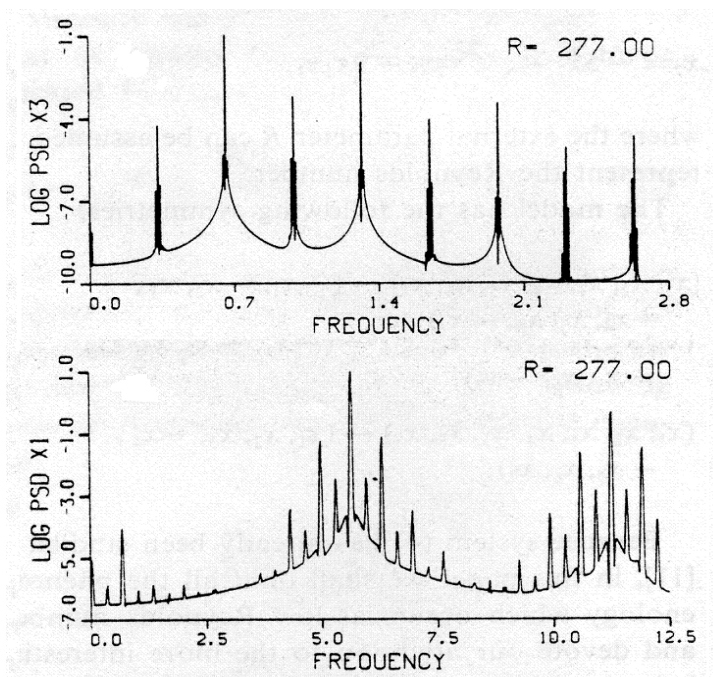
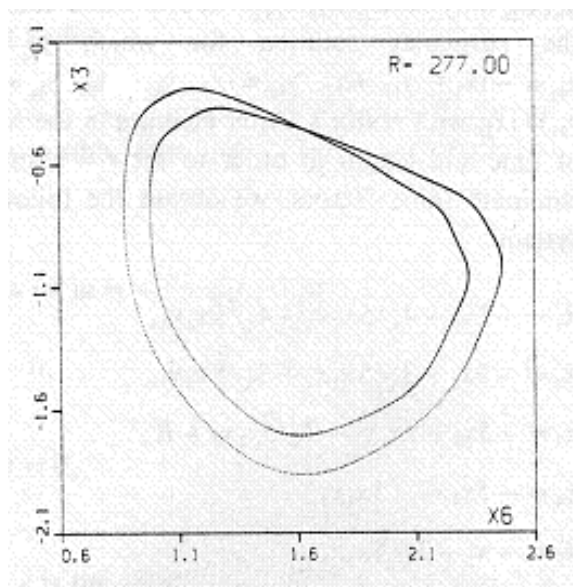
La sequenza di figure proposta nel seguito illustra prima il period-doubling, poi la transizione ad un attrattore caotico, e quindi l’evoluzione di questo attrattore. Quest’ultima è proposta in quanto molto interessante. Vedremo infatti che l’attrattore strano dapprima è soggetto a period-doubling al contrario, e poi si sviluppa conservando le frequenze di base e dando luogo a diversi fenomeni di *phase locking* (quando il rapporto fra le due frequenze è un numero razionale).

Lo studio della fenomenologia in oggetto si è basato molto sugli spettri di potenza, sia quelli relativi al flusso che quelli relativi alla sezione di Poincaré (cioè ottenuti utilizzando direttamente i punti della sezione). Questi ultimi, in particolare, eliminando dallo spettro la frequenza longitudinale, hanno reso più facile la lettura dello spettro. Nel seguito saranno proposti spettri di ambo i tipi.

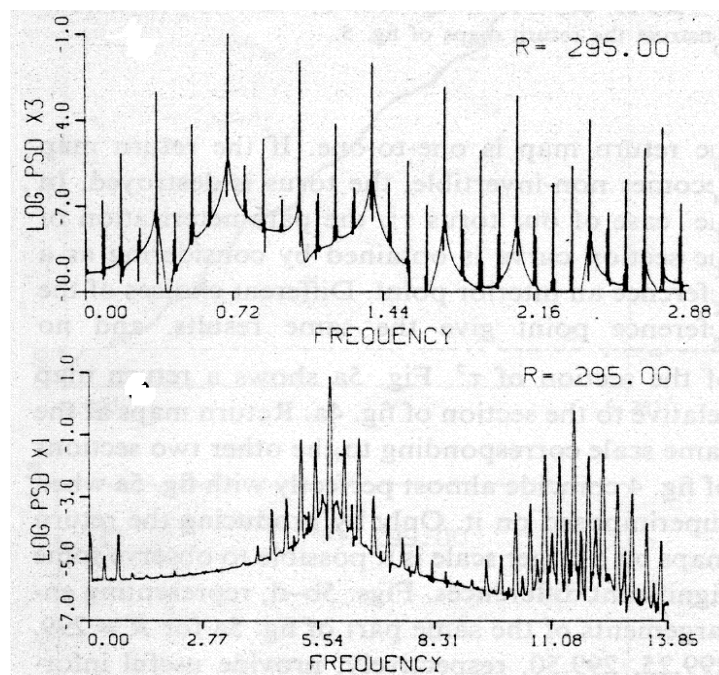
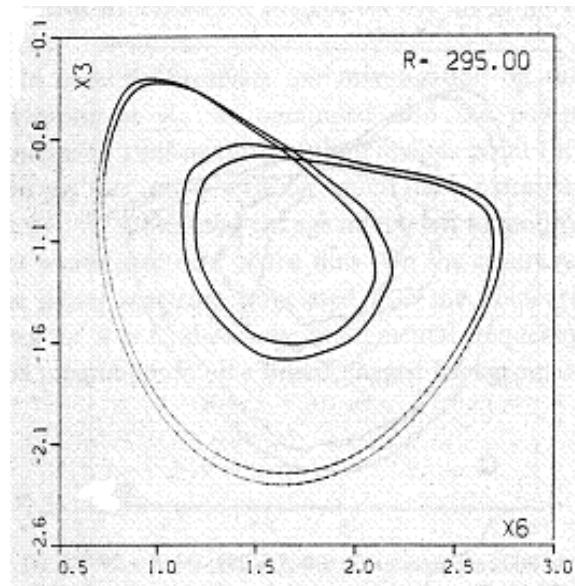
SEZIONE DI POINCARÉ E SPETTRI DEL TORO CHE ORIGINA LA FENOMENOLOGIA



SEZIONE DI POINCARÉ E SPETTRI DEL TORO DOPO IL PRIMO PERIOD-DOUBLING

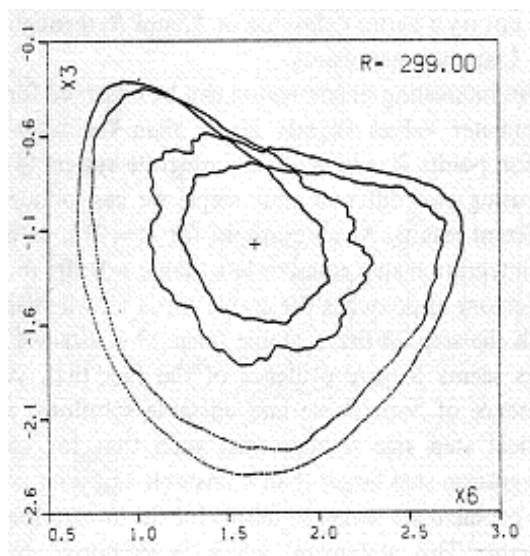


SEZIONE DI POINCARÉ E SPETTRI DEL TORO DOPO IL SECONDO PERIOD-DOUBLING

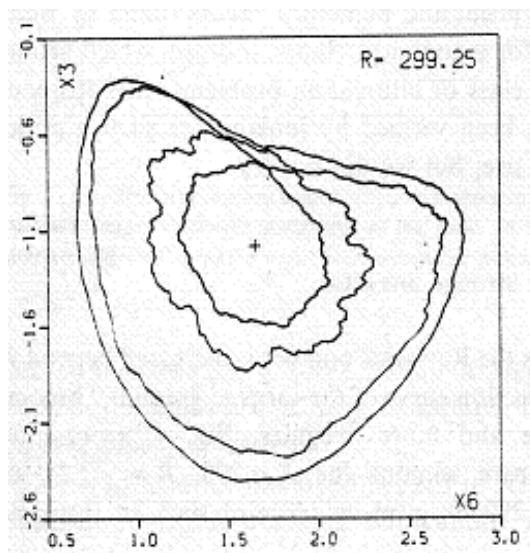


FORMAZIONE DI UN ATTRATTORE STRANO MEDIANTE ROTTURA DEL TORO

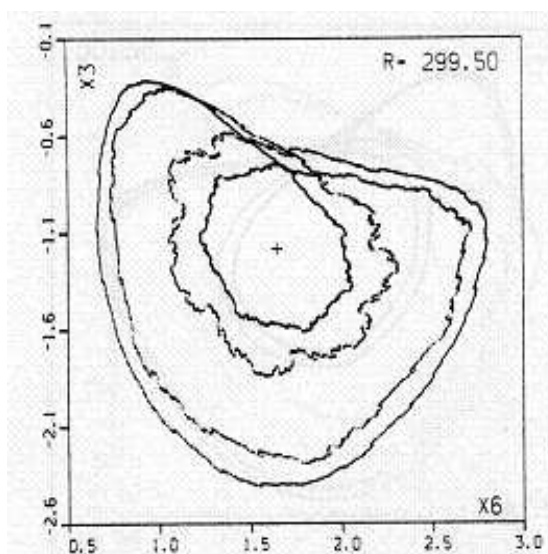
sezione di Poincaré:
ingrandimenti e mappa
di ritorno mostrano che
l'attrattore è ancora un
toro.



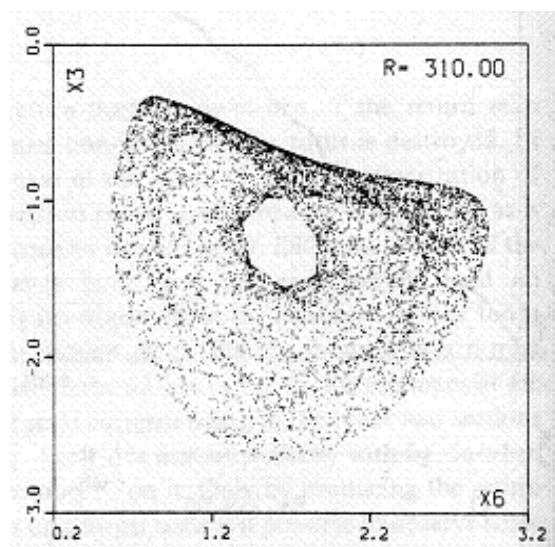
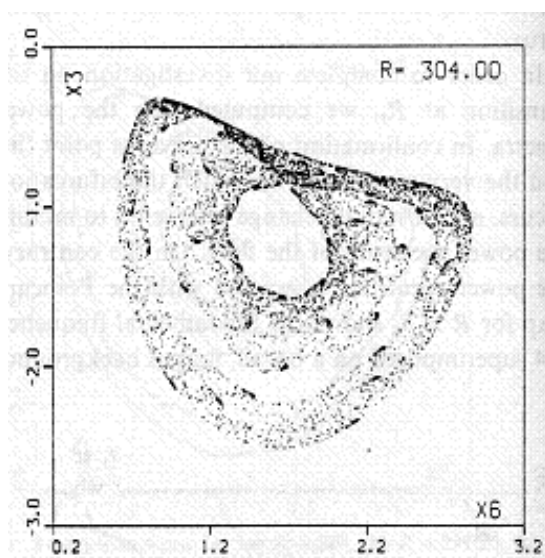
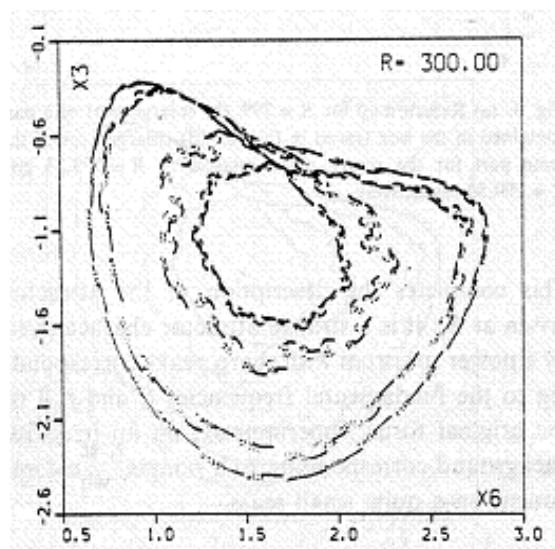
sezione di Poincaré:
per questo valore di R
ingrandimenti e mappa
di ritorno mostrano che
l'attrattore è già un
attrattore strano.



sezione di Poincaré:
è evidente, senza bisogno
di ingrandimenti, che i
punti sezione non
disegnano più una curva.
Si tratta quindi di
un attrattore strano.



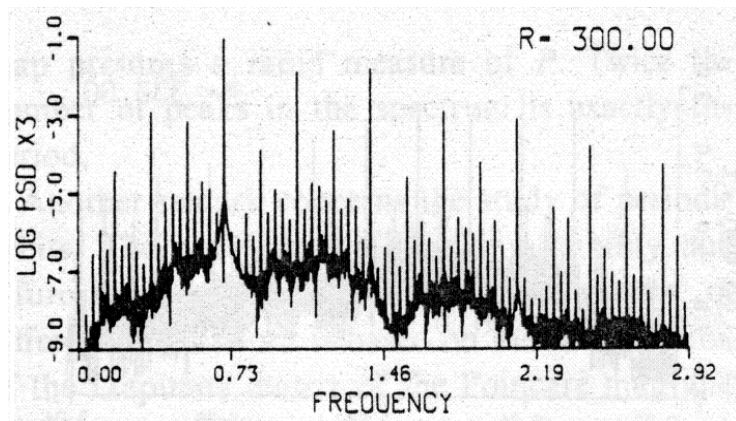
SEZIONI DI POINCARÉ DELL'ATTRATTORE STRANO
(per tre diversi valori del parametro)



PERIOD-DOUBLING INVERSO DELL'ATTRATORE STRANO

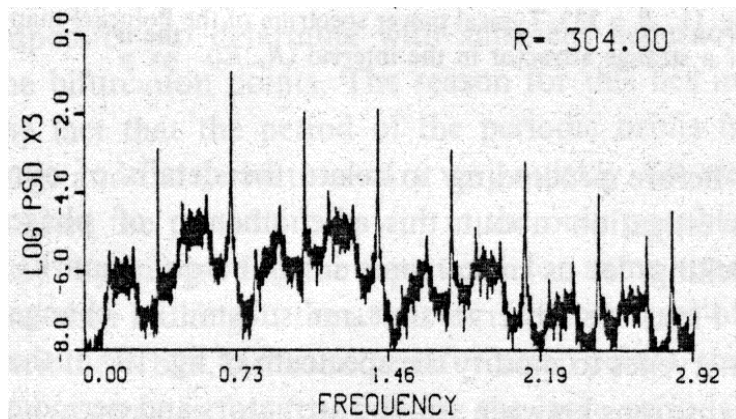
spettro sezione:

i picchi più rilevanti, che corrispondono alle frequenze principali, coincidono con quelle del toro dopo due period-doublings.



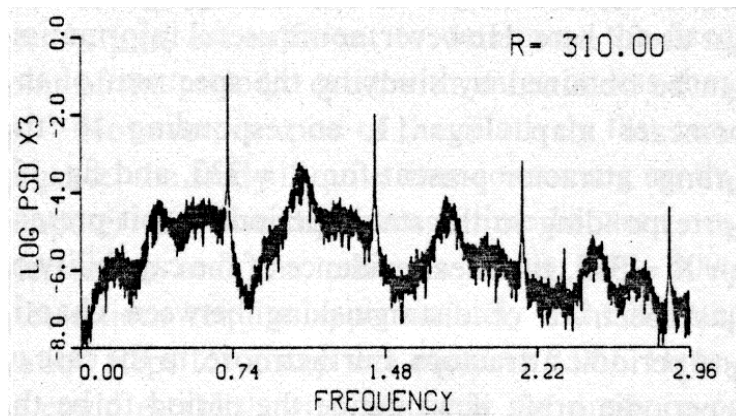
spettro sezione:

in questo spettro, semplificato rispetto al precedente, le frequenze coincidono con quelle del toro dopo un period-doubling.



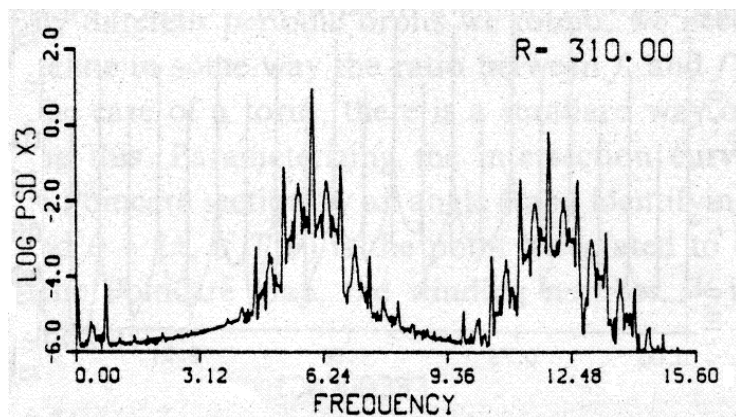
spettro sezione:

qui è rimasta solo la frequenza fondamentale, esattamente come nel toro prima del primo period-doubling.



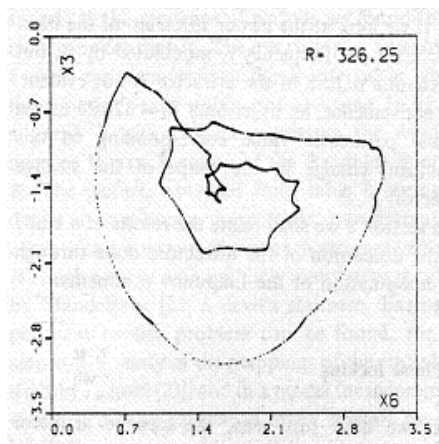
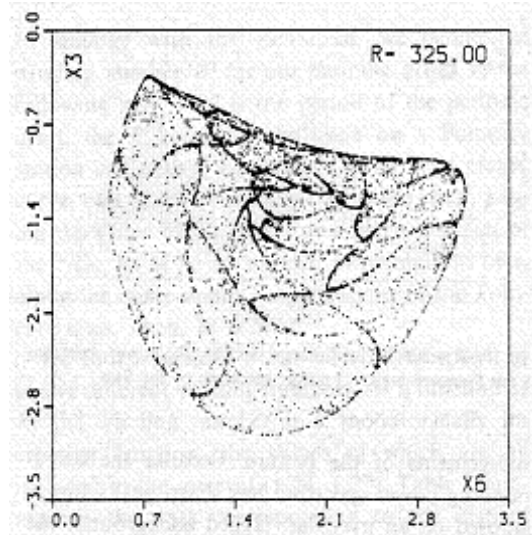
spettro del flusso:

questo spettro contiene le due frequenze fondamentali del toro di partenza. Si noti che ora lo spettro è più frastagliato rispetto a quello del toro, come deve essere nel caso di un attrattore strano.



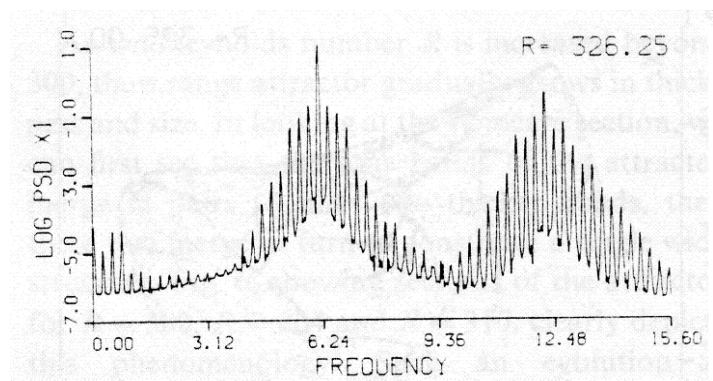
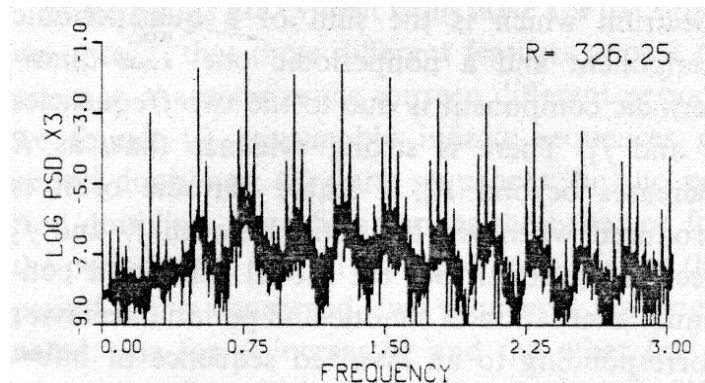
sezione di Poincarè:

l'attrattore strano per un valore più elevato di R , quando è ancora pieno.



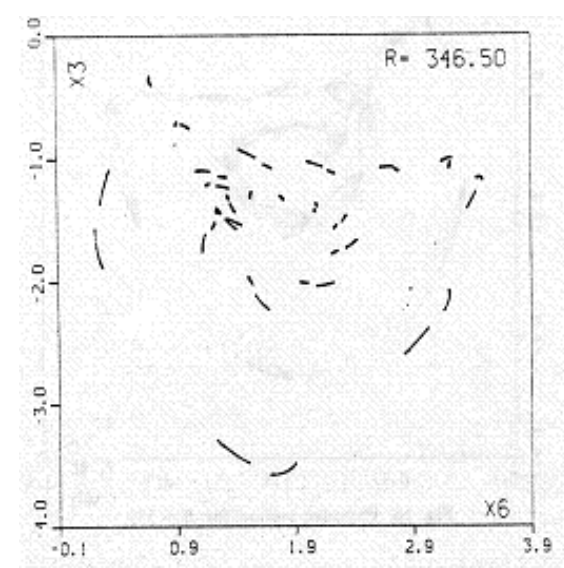
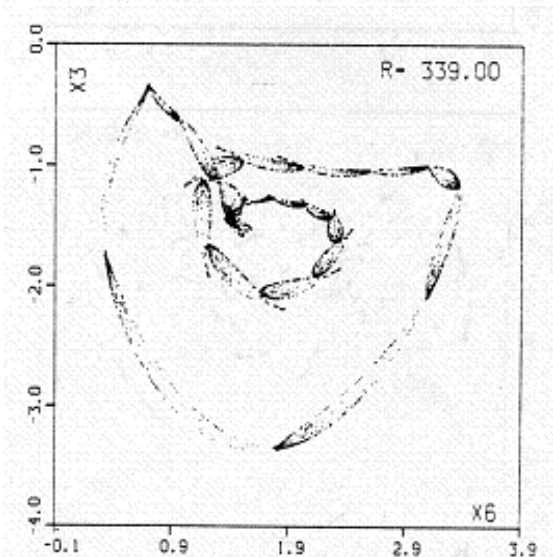
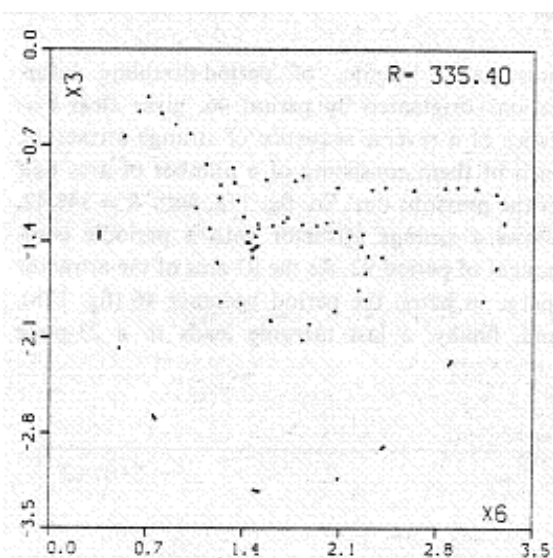
sezione di Poincarè e spettri di potenza:

l'attrattore strano per un R di poco più grande.



C'è un radicale cambiamento dell'attrattore rispetto ad $R=325$. Ora la sezione ci appare unidimensionale, con tre giri, ed è caratterizzata da pieghe (osservabili solo con ingrandimenti della figura). Lo spettro della sezione, mostrando picchi aguzzi su un fondo frastagliato e irregolare, indica chiaramente caos. Al contrario quello del flusso, pur mostrando una frequenza f_1 modulata da una seconda frequenza f_2' , nulla dice sulla natura della dinamica. Nota che i picchi sul primo spettro corrispondono a $f_2' \simeq f_2/3$, essendo f_2 la corrispondente frequenza del toro di partenza.

TRE SEZIONI DI POINCARÉ CHE MOSTRANO
 ALCUNE ‘‘SEMPLICI’’ FORME
 CHE L’ATTRATTORE STRANO PUO’ ASSUMERE



PHASE LOCKING SULL'ATTRATTORE STRANO

Come abbiamo visto, lo spettro dell'attrattore strano è la somma di una componente quasiperiodica, dovuta alle frequenze f_1 e f'_2 , e di una caotica (che si manifesta solo sullo spettro sezione). Ebbene, quando R cresce oltre 325, ogni volta che il rapporto fra le due frequenze diventa razionale, l'attrattore diventa periodico. Questo fenomeno, tipico dei moti quasiperiodici, è noto, come *phase (o frequency) locking* o, più semplicemente, come *risonanza*.

Conseguenza del fenomeno è che c'è un continuo alternarsi fra comportamento caotico e comportamento periodico, alternarsi che si protrae oltre $R=346$. Ogni risonanza appare evidente su una sezione di Poincarè: in questo caso, infatti, in virtù della periodicità, i punti sezione sono "pochi". Più precisamente, se il numero di rotazione \mathcal{W} , che è uguale al rapporto fra f_1 e f'_2 , vale

$$\mathcal{W} = \frac{m}{n},$$

allora i punti sezione sono esattamente n . Si noti che questo numero è esattamente il doppio del numero di picchi nello spettro sezione, come nello spettro alla pagina seguente, dove $n=46$ e i picchi sono 23. Questo spettro poi, confrontato con quello per $R=333$, permette di rimarcare di nuovo la capacità di uno spettro di sezione di distinguere tra caos e comportamento periodico.

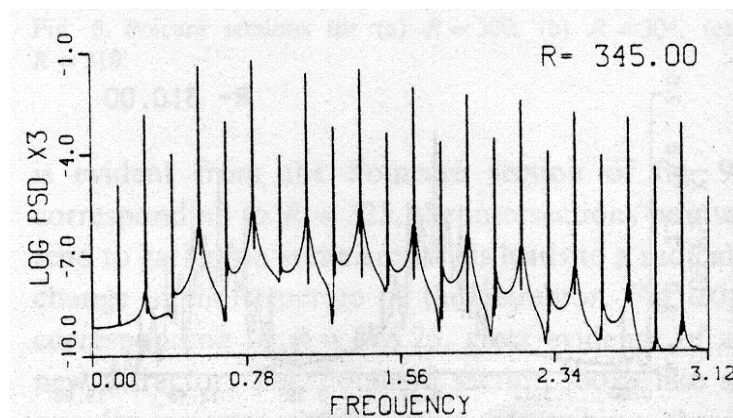
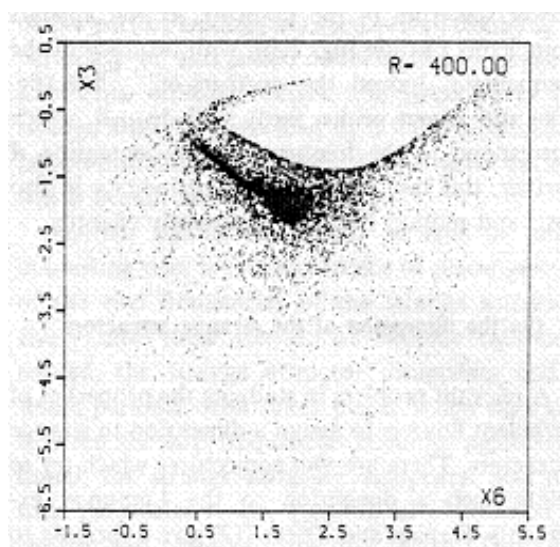
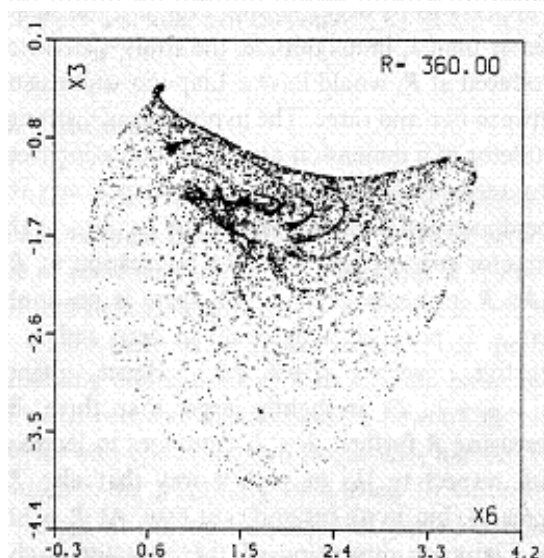
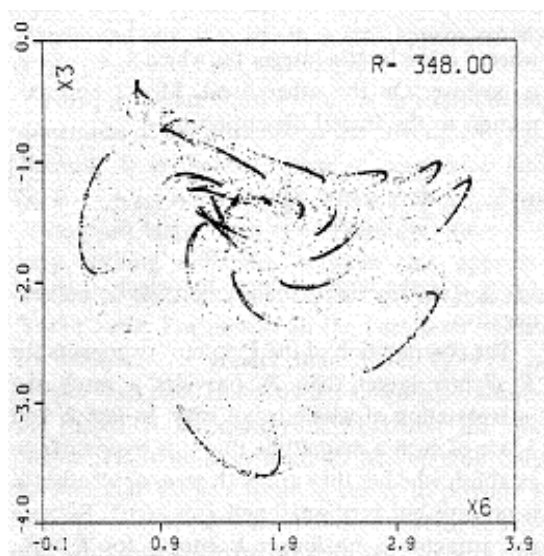


TABELLA CON LE RISONANZE PRINCIPALI

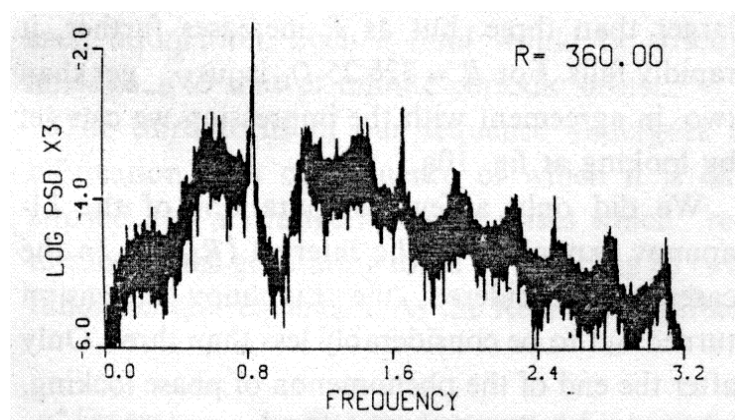
W	r_1	r_2	$\{P_i\}$
6/143	326.310	326.313	286→572→1144
5/119	326.45	326.76	119→238→119
4/95	326.97	327.50	95
3/71	328.10	328.98	71→142→71
2/47	330.80	332.61	47→94→47
7/164	333.25	333.43	164→328→164
5/117	333.965	334.10	936→468→234→117
3/70	334.56	335.30	210→420→210
3/70	335.495	335.500	70
4/93	335.883	335.960	93→186→372→744
5/116	336.65	336.70	116
1/23	339.55	346.362	46→92→184→368→736

Dalla tabella si può notare come il fenomeno del period-doubling sia molto comune, sia all'avanti che all'indietro, anche per le orbite dovute a risonanza. Va anche detto che lo studio delle biforcazioni di tali orbite col metodo di Newton risulta problematico.

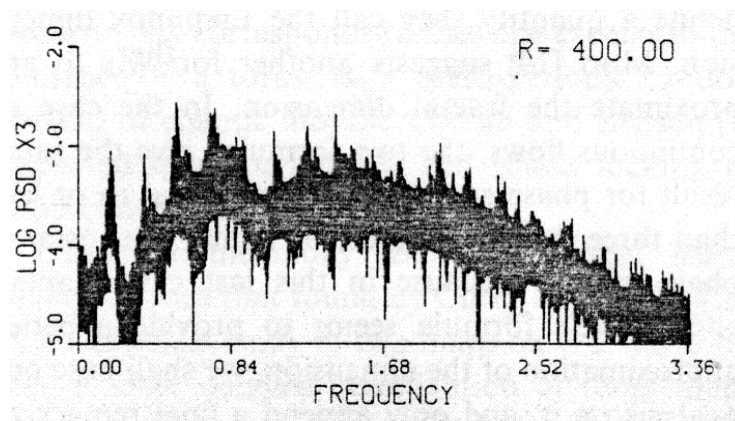
TRE SEZIONI DI POINCARÉ DELL'ATTRATTORE STRANO
CHE MOSTRANO COME DIVENTI MOLTO PIÙ CAOTICO



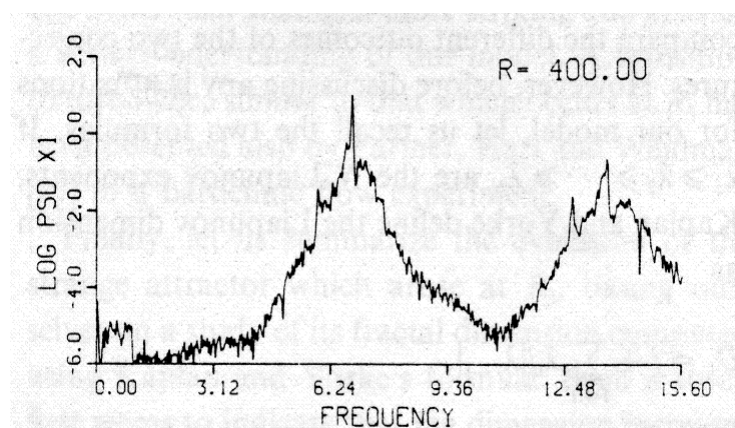
spettro
sezione



spettro
sezione



spettro
flusso



BIBLIOGRAFIA

- [1] J. GLEICK, *Caos*, CDE spa (Rizzoli), Milano, 1989.
- [2] P. BERGÉ, Y. POMEAU, Ch. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Hermann, 1988.
- [3] E. N. LORENZ, *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmos. Sci., Vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [4] D. RUELLE, F. TAKENS, *On the nature of turbulence*, Commun. Math. Phys., Vol. 20, pp. 167-192, 1971.
- [5] M. HÉNON, *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*, Commun. Math. Phys., Vol. 50, pp. 69-77, 1976.
- [6] M. FEIGENBAUM, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys., Vol. 19, pp. 25-52, 1978.
- [7] J.-P. ECKMANN, *Roads to turbulence in dissipative dynamical systems*, Review of Modern Physics, Vol. 53, No. 4, pp. 643-654, 1981.
- [8] J.-P. ECKMANN, D. RUELLE, *Ergodic theory of chaos and Strange Attractors*, Review of Modern Physics, Vol. 57, No. 3, pp. 617-656, 1985.
- [9] Y. POMEAU, P. MANNEVILLE, *Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems*, J. Stat. Phys., Vol. 21, pp. 707-726, 1979.
- [10] O. E. RÖSSLER, *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett., Vol. A57, pp. 397-398, 1976.

- [11] J. D. FARMER, E. OTT, J. A. YORKE, *The dimension of chaotic attractors*, Physica, Vol. 7D, pp. 153-180, 1983.
- [12] A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY, J. A. VASTANO, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica, Vol. 16D, pp. 285-317, 1985.
- [13] D. FARMER, *Spectral Broadening of Period-Doubling Bifurcation Sequences*, Phys. Rev. Lett., Vol. 47, pp. 179-182, 1981.
- [14] C. SPARROW, *The Lorenz equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer Verlag, 1982.
- [15] C. BOLDRIGHINI, V. FRANCESCHINI, *A Five-Mode Truncation of the Plane Incompressible Navier-Stokes Equations*, Commun. Math. Phys., Vol. 64, pp. 159-170, 1979.
- [16] V. FRANCESCHINI, C. TEBALDI, *Sequences of Infinite Bifurcations and Turbulence in a Five-Mode Truncation of the Navier-Stokes Equations*, J. Stat. Phys., Vol. 21, pp. 707-726, 1979.
- [17] V. FRANCESCHINI, *A Feigenbaum Sequence of Bifurcations in the Lorenz Model*, J. Stat. Phys., Vol. 22, pp. 397-406, 1980.
- [18] V. FRANCESCHINI, C. TEBALDI, *A seven-mode truncation of the plane incompressible Navier-Stokes Equations*, J. Stat. Phys., Vol. 25, pp. 397-417, 1981.
- [19] V. FRANCESCHINI, *Two models of truncated Navier-Stokes equations on a two-dimensional torus*, Phys. Fluids, Vol. 26, pp. 433-447, 1983.

- [20] V. FRANCESCHINI, *Bifurcations of tori and Phase Locking in a Dissipative System of Differential Equations*, Physica, Vol. 6D, pp. 285-304, 1983.
- [21] V. FRANCESCHINI, C. TEBALDI, *Breaking and disappearance of Tori*, Commun. Math. Phys., Vol. 94, pp. 317-329, 1984.
- [22] V. FRANCESCHINI, C. TEBALDI, *Truncations to 12, 14 and 18 Modes of the Navier-Stokes Equations on a Two-Dimensional Torus*, Meccanica, Vol. 20, pp. 207-230, 1985.
- [23] V. FRANCESCHINI, R. ZANASI, *Three-dimensional Navier-Stokes equations truncated on a torus*, Nonlinearity, Vol. 4, pp. 189-209, 1992.
- [24] V. FRANCESCHINI, *Numerical methods for studying periodic and quasiperiodic orbits in dissipative differential equations*, in *Applications of Mathematics in Technology*, Proceedings of the German-Italian Symposium held in Rom, March 1984, B.G.Teubner.
- [25] J. M. T. THOMPSON, H. B. STEWART, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley, 1986.