



TECNICHE DI CONTROLLO: SISTEMI NONLINEARI

Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria

Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

Fax. +39 0532 974870

E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Tecniche di Controllo – Nonlineare



Indice



- Introduzione
- Metodi di analisi per sistemi nonlineari
- Metodi di progetto per il controllo nonlineare: panoramica
- Linearizzazione tramite feedback (*Feedback Linearization*) ed applicazioni
- Controllo robusto a struttura variabile (*Variable Structure o Sliding Mode Control*) ed applicazioni

Tecniche di Controllo – Nonlineare



Sistemi Dinamici: Lineari / Nonlineari

- **Sistema dinamico**: oggetto o fenomeno il cui comportamento (manifestato da *uscite* misurabili) evolve nel tempo in funzione degli stimoli esterni (*ingressi*) **presenti e passati** (a causa dello *stato*)

- Descrizione formale: **modello matematico** (eq. differenziali)

- **Modelli lineari**:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

- **Modelli nonlineari**:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\end{aligned}$$



Il problema di modellazione (di sistemi *fisici*)

- Base di partenza: conoscenza delle **leggi fisiche** (più spesso *nonlineari* che *lineari*)
- Possibili motivi che portano ad ottenere modelli lineari:
 - approssimazione di una funzione con i primi termini di una serie di Taylor
 - eliminazione dal modello di fenomeni trascurabili (es. variazione parametri per effetti termici)
 - ipotesi sulle condizioni di lavoro (es. ingressi variabili in intervalli piccoli)
- Anche se il modello lineare è ottenuto con ipotesi semplificative (es. $u \in [u_{min}, u_{max}]$), il sistema reale non sempre può essere vincolato in modo da soddisfarle

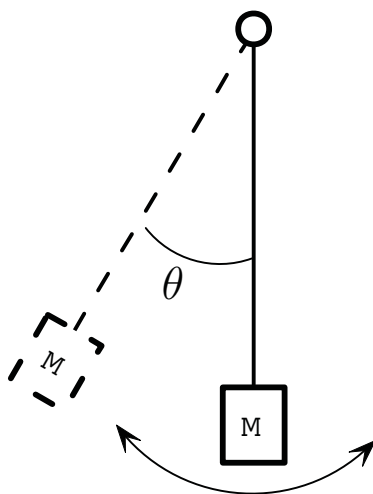


Progetto del controllo per sistemi dinamici

- **Controllo Lineare** (analisi e progetto basati su modelli lineari):
 - disciplina matura con basi teoriche ben assestate
 - innumerevoli applicazioni industriali (v. PID)
 - prestazioni soddisfacenti per *ampie (?)* condizioni di funzionamento
- **Controllo Nonlineare** (analisi e progetto basati su modelli nonlineari):
 - i modelli lineari sono sempre un'approssimazione della *realtà*, valida per *limitate (!)* condizioni di funzionamento
 - alcune nonlinearietà non sono approssimabili linearmente (es. discontinuità)
 - anche l'adattamento *on-line* di parametri del controllore è formalmente una nonlinearietà
 - il progetto richiede maggiore approfondimento delle leggi fisiche che determinano la dinamica del sistema (v. stabilità del pendolo)



Esempio: pendolo



- **Approccio lineare:** dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ (con $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta}]^T$), modello valido in un intorno del punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (es. ipotesi $\sin \theta \approx \theta$), verificare che gli autovalori di \mathbf{A} siano a parte reale negativa e/o trovare $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ che li renda tali
- **Approccio nonlineare:** dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, modello valido $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, verificare che $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sia un punto a minima energia (ogni traiettoria dello stato tende a dissipare l'energia del sistema, es. per attrito, fino a raggiungere tale minimo) e/o trovare $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ che renda il sistema *dissipativo* (\Rightarrow stabile)



Note sul lucido 6



Siano R la lunghezza del pendolo, M la massa appesa, g l'accelerazione di gravità, b il coefficiente di attrito viscoso alla cerniera e τ la coppia esercitata, ad esempio, da un motore elettrico connesso alla cerniera, il modello dinamico del pendolo è rappresentato dall'equazione:

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR \sin \theta = \tau$$

nella quale τ rappresenta l'ingresso di controllo. Considerando $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e $u = \tau$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R} \sin x_1 - \frac{b}{MR^2}x_2 + \frac{u}{MR^2}\end{aligned}$$

in forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ con $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ ed $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = [f_1(\mathbf{x}, u) \ f_2(\mathbf{x}, u)]^T$ nella quale chiaramente

$$f_1(\mathbf{x}, u) = x_2$$

$$f_2(\mathbf{x}, u) = -\frac{g}{R} \sin x_1 - \frac{b}{MR^2}x_2 + \frac{u}{MR^2}.$$

I punti di equilibrio ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$) sono dati dalle soluzioni della equazione $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, cioè:

$$x_2 = 0, \sin x_1 = 0$$



verificata dai punti di equilibrio $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ (nell'intervallo $x_1 \in [0, 2\pi[$). Un modello linearizzato del sistema si può ottenere per approssimazione di Taylor delle funzioni f_1 ed f_2 rispetto ai due punti di equilibrio. Intuitivamente, questo corrisponde a considerare $\sin x_1 \approx x_1$ se $x_1 \approx 0$ e $\sin x_1 \approx -x_1$ se $x_1 \approx \pi$, dalle quali si ottengono due differenti modelli di tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$:



$$\begin{aligned}\text{e} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} & -\frac{b}{MR^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{R} & -\frac{b}{MR^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Si noti che il sistema libero (cioè senza l'ingresso) risulta avere autovalori

$$\lambda_{1,2} = \frac{-bR^3 \pm \sqrt{-4gM^2R + b^2R^6}}{2MR},$$

nel primo caso, e

$$\lambda_{1,2} = \frac{-bR^{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{4gM^2 + b^2R^5}}{2M\sqrt{R}}$$

nel secondo caso. Si può facilmente verificare che tali autovalori sono sempre entrambi a parte reale negativa nel primo caso (punto di equilibrio stabile) ed entrambi a parte reale positiva nel secondo caso (punto di equilibrio instabile).



Caratteristiche (*buone*) dei modelli lineari

La teoria del *Controllo Lineare* si concentra sui sistemi **Lineari Tempo-Invarianti (LTI)** del tipo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, per i quali:

- esiste un **unico punto di equilibrio**, se \mathbf{A} è non singolare, ed esso è stabile *per ogni* $\mathbf{x}(t_0)$, se gli autovalori di \mathbf{A} hanno parte reale negativa
- la risposta del sistema è **determinabile analiticamente**
- noto l'andamento nel tempo di $\mathbf{u}(t)$, la risposta è data, per sovrapposizione degli effetti, da:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$



Caratterizzazione frequenziale di sistemi LTI

- Per un sistema stabile

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

ingressi sinusoidali danno luogo (dopo un certo transitorio) ad uscite sinusoidali della stessa frequenza

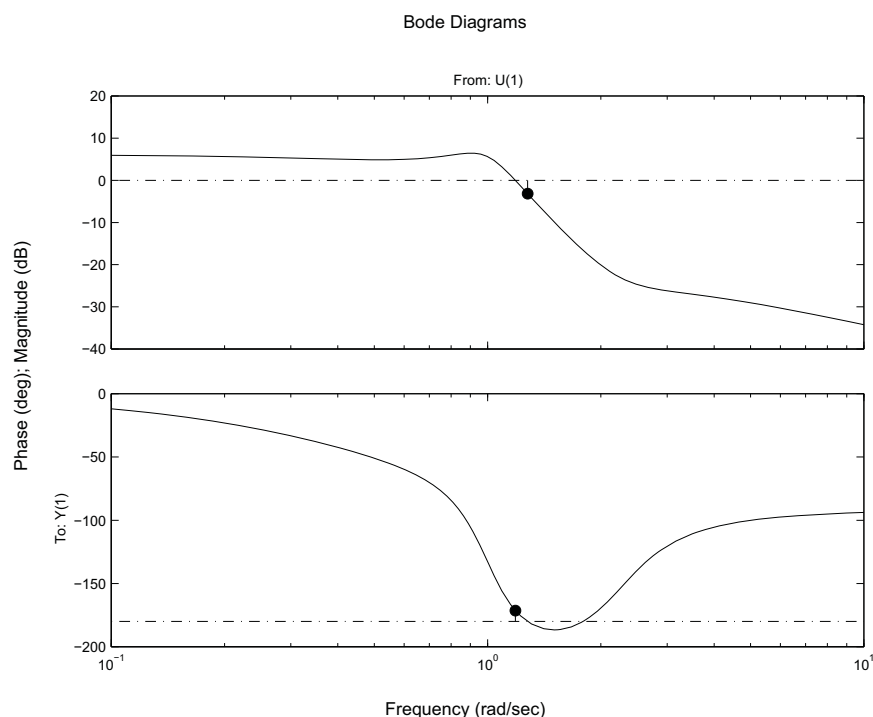
- Ampiezza e sfasamento delle sinusoidi in uscita dipendono dalla **matrice di trasferimento**:

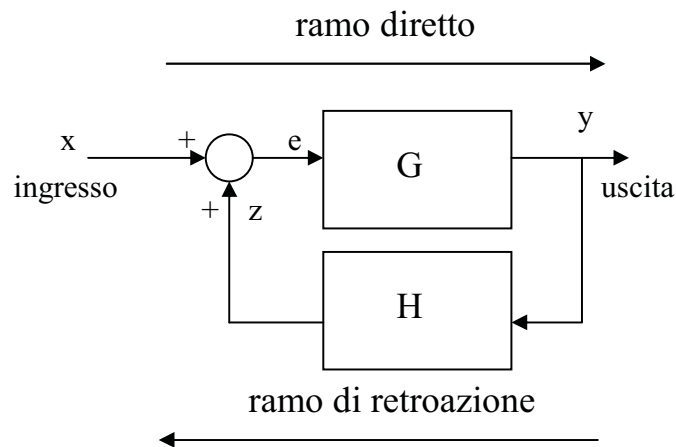
$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$



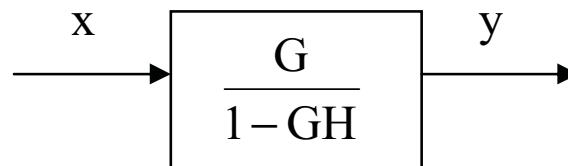
Analisi frequenziale di sistemi LTI SISO

- Nel caso **Single Input Single Output (SISO)** ($y(t), u(t) \in \mathbb{R}$) la matrice di trasferimento degenera in una **funzione di trasferimento** scalare, sempre di tipo razionale fratta (**poli-zero**)
- I metodi classici della teoria del controllo si basano sullo studio delle funzioni di trasferimento dei blocchi costitutivi del sistema (*plant, controllore, filtri, trasduttori* ecc.) e di quelle ottenute dalla loro composizione (es. funzione di trasferimento d'anello):
 - **diagrammi di Bode**
 - **diagrammi di Nyquist**
 - **luogo delle radici (mappa poli-zero)**
 - **progetto di reti correttrici e/o PID**





che equivale a:



Caratteristiche (*cattive*) dei modelli nonlineari



Nel caso più generale, la dinamica di un sistema è del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$:

- il sistema può avere **molteplici punti di equilibrio**, la cui stabilità può dipendere dalle condizioni iniziali
- anche la risposta libera del sistema può essere stabilmente oscillatoria (**cicli limite** con oscillazioni auto-sostenute)
- le caratteristiche dei punti di equilibrio possono cambiare drasticamente (stabile, instabile, ciclo limite) in relazione a variazioni di parametri (**biforcazioni**)
- piccole differenze nelle condizioni iniziali possono dare luogo a grandissime differenze nella risposta del sistema (**comportamento caotico**)



Esempio: oscillatore di Van der Pol

Tipico modello di un sistema caratterizzato da un ciclo limite, studiato da Balthasar Van der Pol negli anni '20:

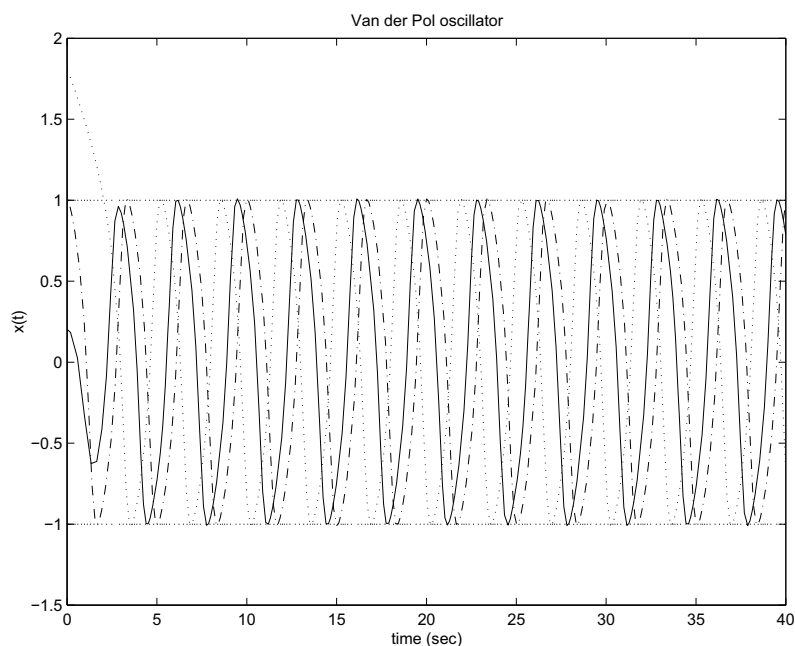
$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

che descrive sia circuiti elettrici RLC con resistenze variabili non-linearmente, che gruppi massa-molla-smorzatore con un coefficiente di smorzamento dipendente dalla posizione (**NOTA:** no input!).

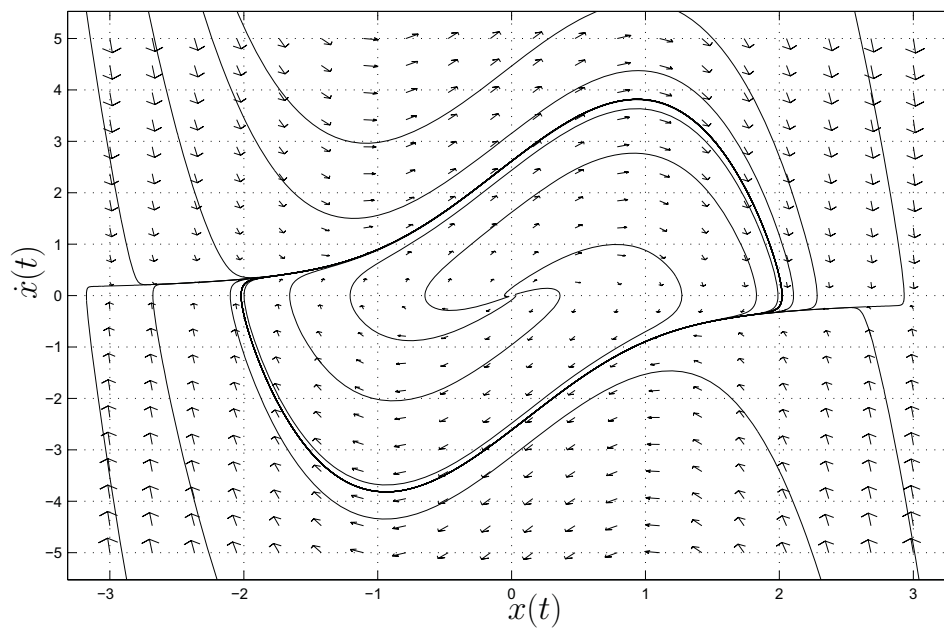
Il comportamento oscillatorio può essere spiegato considerando che se $x^2 > 1$ lo smorzatore ha coefficiente positivo e quindi *dissipa* energia, mentre se $x^2 < 1$ *fornisce* energia. Lo stato del sistema non può quindi nè convergere a 0, nè divergere all' ∞ .



Oscillatore di Van der Pol: risposta



Oscillatore di Van der Pol: *ciclo limite*



Perchè l'approccio nonlineare al controllo?

- L'esistenza di cicli limite, diversi punti di equilibrio, caoticità, etc. può essere rilevata solamente da modelli nonlineari e **non** da approssimazioni lineari
- Nota la presenza di cicli limite o comportamenti caotici, il controllo può essere progettato al fine di evitarne l'insorgenza (es. robotica e automazione) o di generarli/amplificarli (es. oscillatori elettronici)
- In passato, le applicazioni di controllo nonlineare sono state limitate dalle capacità dei sistemi di elaborazione, ma ora:
 - i microprocessori per il controllo sono sempre più potenti e meno costosi
 - velocità, precisione e robustezza richieste nelle moderne applicazioni robotiche o aeronautiche impongono analisi e progetto con modelli nonlineari



Analisi di sistemi nonlineari



- Analisi grafica con il **piano delle fasi**
- Analisi approssimata con **funzioni descrittive**
- Analisi con i metodi di **Lyapunov**



Analisi nel piano delle fasi



- Si cerca di tracciare le traiettorie dello stato del sistema su un grafico bi(tri)dimensionale, solitamente ottenuta via simulazione
- Ovviamente, possibile solo per sistemi del secondo (terzo) ordine
- Il tempo non compare esplicitamente nel piano delle fasi
- Permette comunque di determinare la presenza di punti di equilibrio/cicli limite e di studiarne le caratteristiche



Sistemi del secondo ordine

- Nella forma più generale:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

che per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ha una soluzione $\mathbf{x}(t)$, il cui tracciato nel piano (x_1, x_2) per $t \in [0, \infty)$ rappresenta una *traiettoria* del sistema.

- Una famiglia di traiettorie generate a partire da diverse condizioni iniziali costituisce una *mappa delle fasi*.



Tipica dinamica del secondo ordine

- Una classe tipica di sistemi del secondo ordine (massa-molla-smorzatore, circuiti RLC) è quella descrivibile da un'equazione differenziale del tipo:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

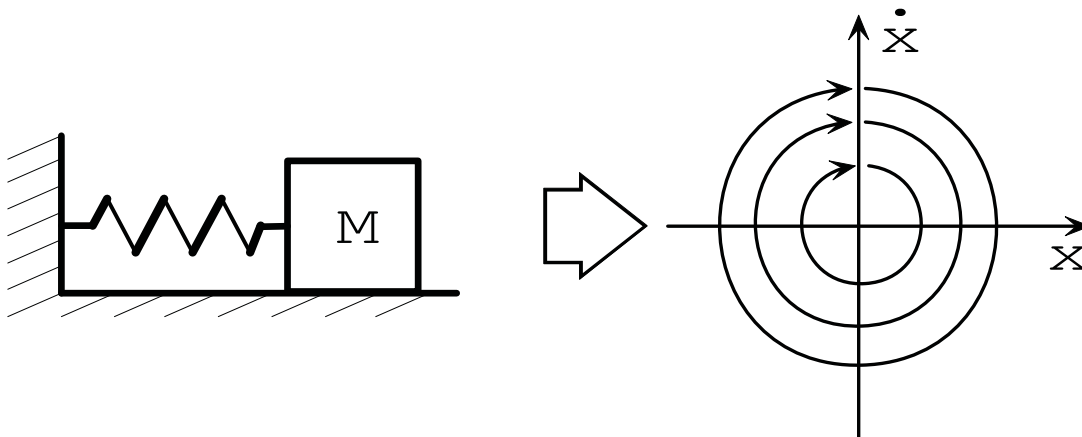
che può essere ricondotta a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

con $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$.



Esempio: massa-molla ideali ($m \ddot{x} + k x = 0$)



Note sul lucido 22



Costruzione della mappa delle fasi: metodi analitici

L'obiettivo è di ottenere una funzione:

$$g(x_1, x_2, c) = 0$$

con c = effetto delle condizioni iniziali (o dell'ingresso esterno), attraverso:

1. la soluzione delle equazioni differenziali della dinamica e l'eliminazione della variabile tempo t da $x_1(t) = g_1(t)$ e $x_2(t) = g_2(t)$
2. l'eliminazione diretta della variabile tempo t , integrando l'equazione:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Costruzione della mappa delle fasi: metodo delle isocline

Approccio: determinare i luoghi di punti nei quali le traiettorie dello stato hanno la medesima tangente (**curve isocline**). Poiché la tangente della traiettoria in un punto è:

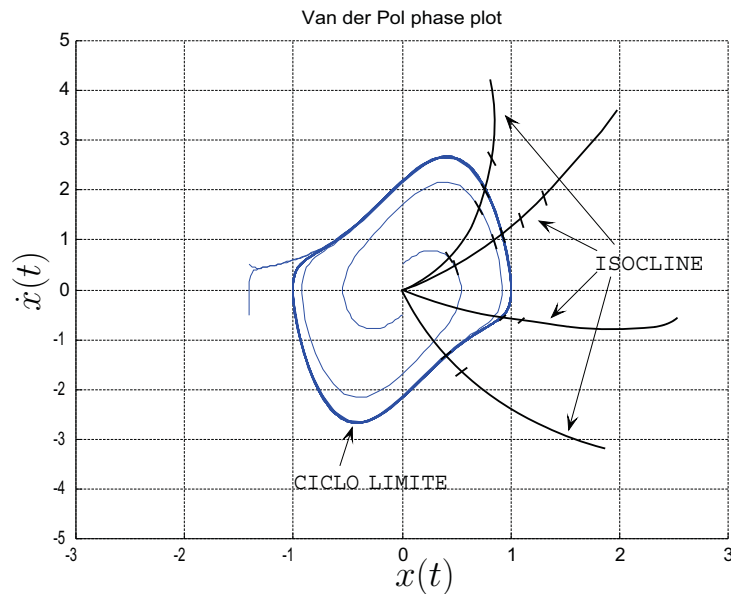
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$



tali curve sono determinate dalle equazioni $f_2(x_1, x_2) = \alpha f_1(x_1, x_2)$



Esempio: per il gruppo massa-molla $\Rightarrow \dot{x} + \alpha (k/m) x = 0$ cioè delle rette), per l'oscillatore di Van der Pol $\Rightarrow 2c(x^2 - 1)\dot{x} + x + \alpha\dot{x} = 0$. Le isocline dell'oscillatore di Van der Pol sono le seguenti:



Punti singolari nella mappa delle fasi



- In generale, l'analisi di un sistema serve per determinare le caratteristiche dei suoi **punti di equilibrio**, cioè i punti nei quali $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, condizione che per i sistemi analizzabili con il piano delle fasi (secondo ordine) diventa:

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \quad f_2(x_1, x_2) = 0$$

- I punti che soddisfano tale condizione sono detti anche **punti singolari**, perchè in tali punti la tangente delle traiettorie dello stato è indeterminata

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{0}{0}$$



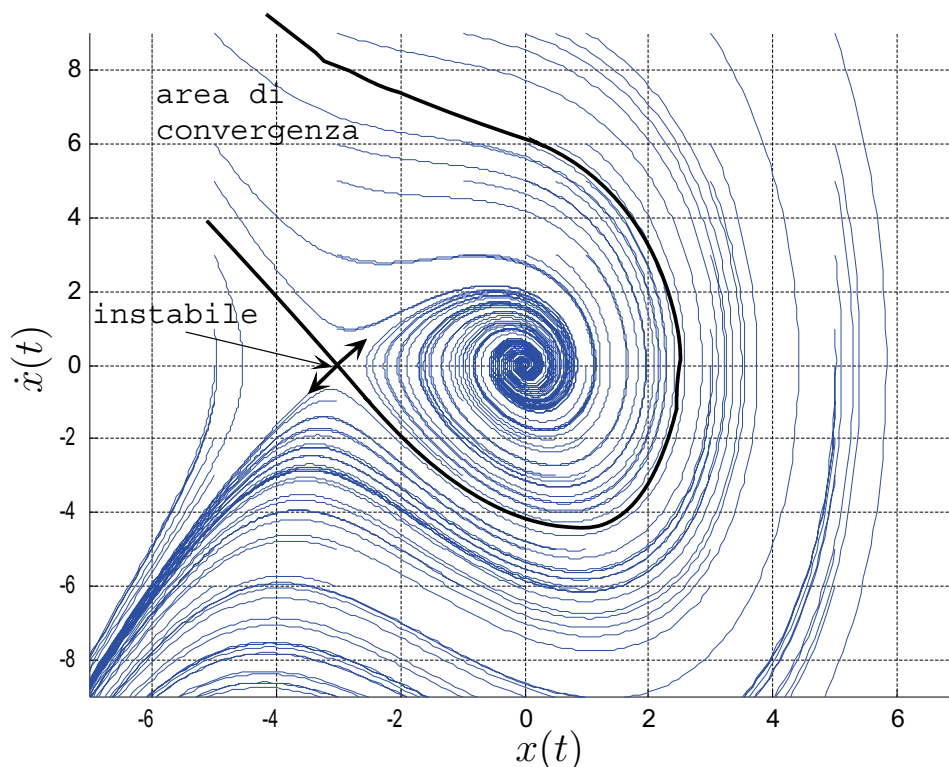
Esempio: generico sistema nonlineare

Per il sistema:

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

esistono due punti singolari: $(0, 0)$ e $(0, -3)$

Tuttavia, mentre il primo risulta un punto di convergenza di traiettorie la cui condizione iniziale appartenga ad una determinata area (*area di convergenza*), il secondo si dimostra un punto dal quale le traiettorie possono divergere (v. grafico successivo)



Tipologie di punti singolari

- **Nodi** stabili (instabili): punti di convergenza (divergenza) delle traiettorie, **senza** modi oscillatori
- **Fuochi** stabili (instabili): punti di convergenza (divergenza) delle traiettorie, **con** modi oscillatori
- **Punti di sella**: punti verso i quali convergono due sole traiettorie, corrispondenti a condizioni iniziali nelle quali i modi instabili sono nulli, mentre tutte le altre divergono
- **Punti di centro** di traiettorie chiuse ellittiche (v. gruppo massa-molla ideale)



Punti singolari per sistemi lineari

Per un sistema lineare del secondo ordine, la dinamica $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ diventa:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_3x_1 + a_4x_2\end{aligned}$$

che è possibile semplificare ricavando x_2 dalla prima equazione e sostituendola nella seconda:

$$\ddot{x}_1 = (a_1 + a_4)\dot{x}_1 + (a_3a_2 - a_1a_4)x_1$$

o, più in generale:

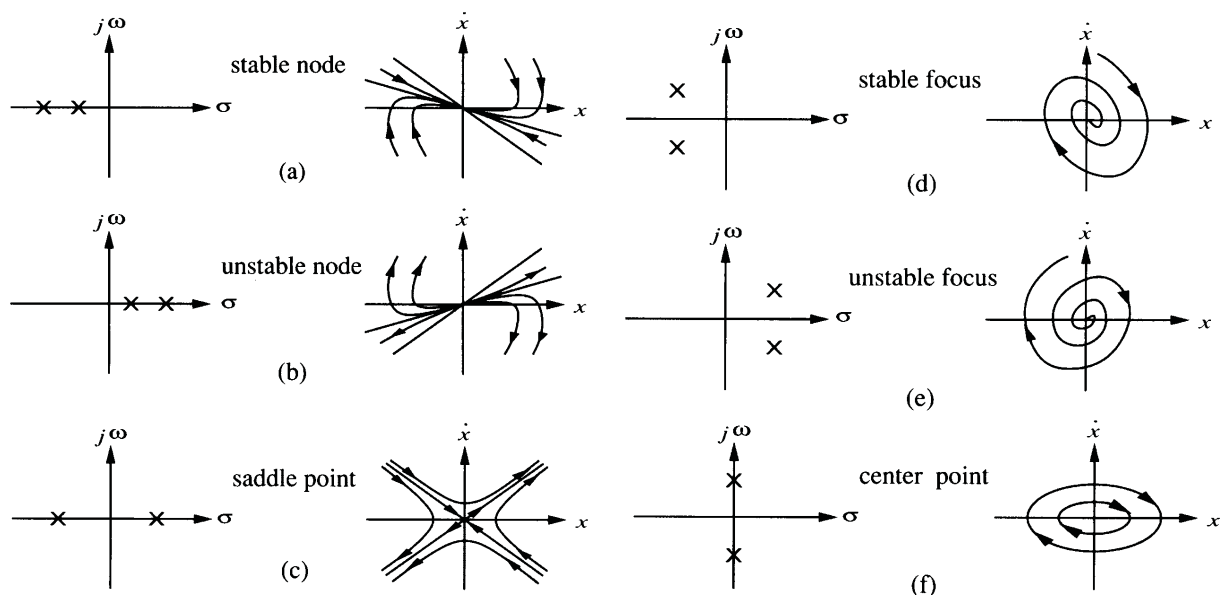
$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

le cui soluzioni sono univocamente caratterizzate dalle radici λ_1 e λ_2 del polinomio caratteristico:

$$s^2 + as + b = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = 0$$



In relazione alla "posizione" di λ_1 e λ_2 :



Equilibrio e cicli limite nei sistemi nonlineari

- Diversamente da un sistema lineare, un sistema nonlineare può avere **molteplici punti di equilibrio** (punti singolari)
- Tuttavia, un punto di equilibrio può essere studiato **localmente** considerando la **linearizzazione** del sistema in un intorno del punto stesso (v. **primo metodo di Lyapunov**), per scoprire se sia un nodo, un fuoco, etc.
- La presenza di **cicli limite**, possibile solamente nei sistemi nonlineari, e la loro **stabilità** o **instabilità** vanno studiate in modo specifico (es. teoremi di Poincare e Bendixson...)



Cicli limite: analisi con *funzioni descrittive*

- In molti casi pratici, i cicli limite insorgono in un sistema **ad anello chiuso** a causa di nonlinearità algebriche, cioè senza dinamica (es. saturazioni, giochi, etc.)
- In questi casi, è possibile studiare determinare l'esistenza del ciclo limite attraverso una descrizione **approssimata** delle nonlinearità, basato sulle **funzioni descrittive**
- Una *funzione descrittiva* è una "funzione di trasferimento" (f.d.t.) complessa, che lega le caratteristiche di una sinusoide all'ingresso a quelle di una sinusoide all'uscita nell'ipotesi **di regime oscillatorio persistente** (ciclo limite)
- Una f. descrittiva è f. dell'**ampiezza** della sinusoide d'ingresso (non della *pulsazione*), e determina il rapporto fra la *componente fondamentale* dell'oscillazione in uscita e la sinusoide d'ingresso.

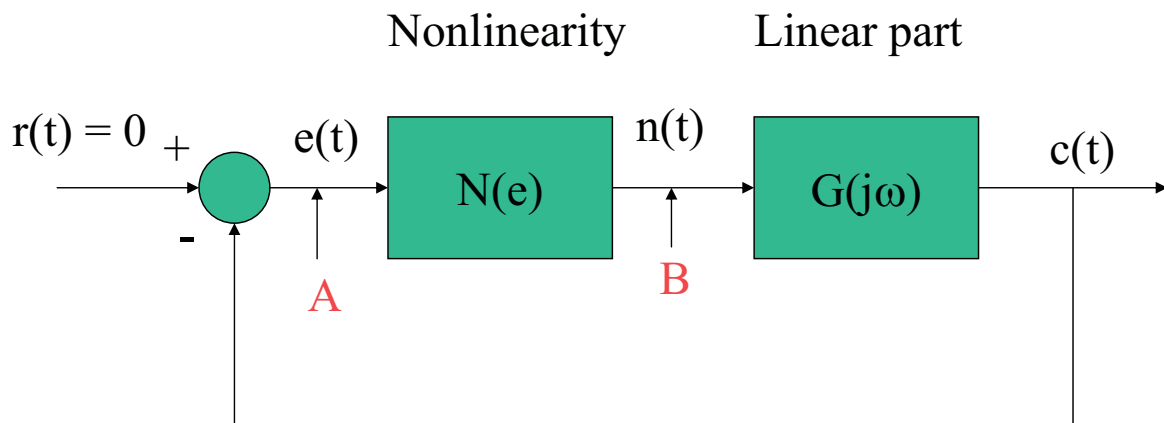


Ipotesi per l'analisi con funzioni descrittive

1. Sistema retroazionato, con ingresso di riferimento nullo ($r(t) = 0$ nello schema seguente)
2. La parte lineare ($G(j\omega)$ nello schema seguente) agisce come filtro passa-basso
3. Si può supporre che nel punto A dello schema seguente $e(t) = E \sin(\omega t)$ (dall'ipotesi 2)
4. La nonlinearità è puramente algebrica ed è simmetrica



Schema a blocchi di riferimento

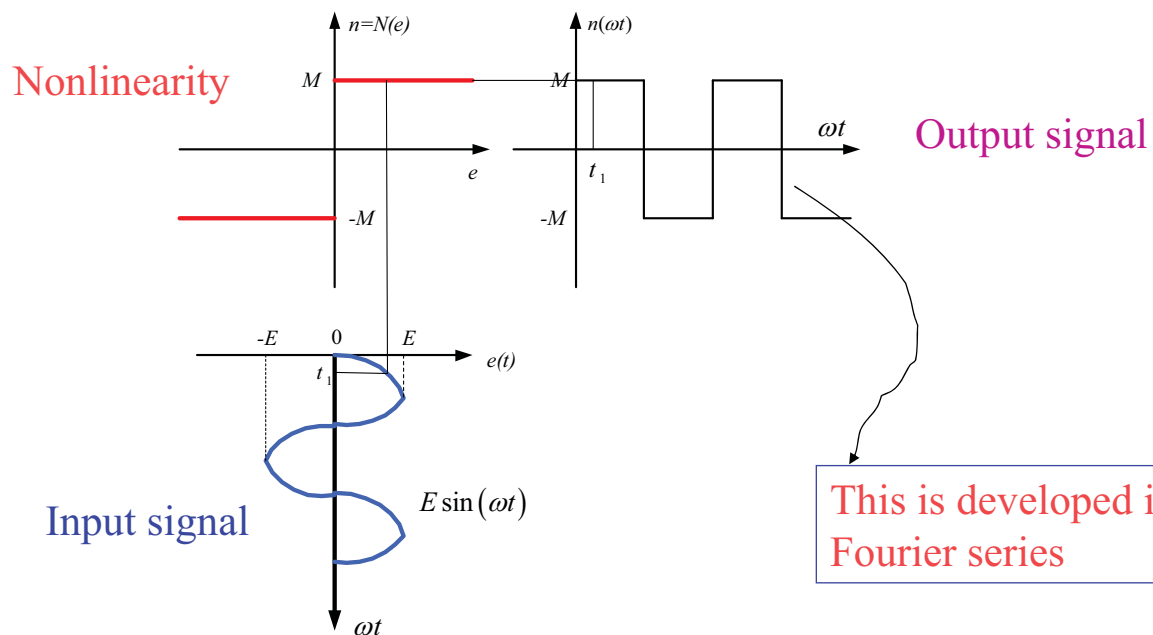


Calcolo della funzione descrittiva

1. Applicare al blocco nonlineare un ingresso sinusoidale di ampiezza A e pulsazione ω e determinare l'uscita
2. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier del segnale in uscita
3. Mantenere il solo termine alla pulsazione fondamentale ω della serie di Fourier
4. Determinare il rapporto fra l'ampiezza di tale termine e l'ampiezza A dell'ingresso



Esempio: relè ideale



Qualunque sia l'ampiezza E dell'ingresso sinusoidale, l'uscita è un'onda quadra con periodo pari a $2\pi/\omega$, compresa tra i valori $+M$ e $-M$.

Per tale segnale periodico lo sviluppo in serie di Fourier è il seguente:

$$n(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4M}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)\omega t)$$

la cui componente fondamentale, con pulsazione ω , ha ampiezza:

$$A_1 = \frac{4M}{\pi}$$

per cui la funzione descrittiva (**reale** in questo caso, in generale **complessa**) è:

$$N(E) = \frac{4M}{\pi E}$$



Determinazione dei cicli limite

- Il sistema mostrato in precedenza è sede di un'oscillazione persistente se

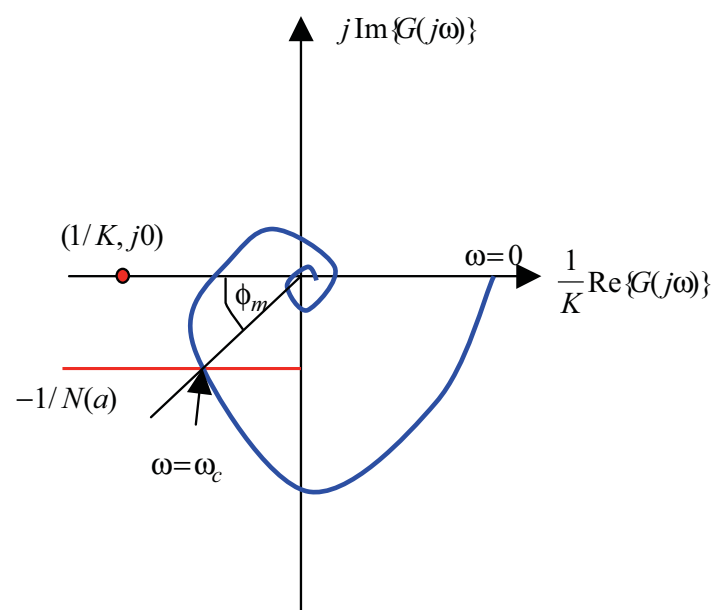
$$N(E)G(j\omega) = -1$$

con $N(e)$ funzione descrittiva della nonlinearietà, per il criterio di Nyquist)

- Questa condizione può essere determinata graficamente dall'analisi di un diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ sovrapposto alla rappresentazione di $-1/N(E)$ sullo stesso piano complesso (graduato in E anzichè in ω)
- Il punto d'incontro delle due curve permette di determinare ampiezza E (da $N(E)$) e pulsazione ω (da $G(j\omega)$) delle oscillazioni autosostenute



Diagramma di Nyquist con relè con soglia



NOTE sul metodo della funzione descrittiva

- Il metodo è approssimato, pertanto può verificarsi che:
 1. sia l'ampiezza che il periodo delle oscillazioni sono diverse da quelle rilevate sperimentalmente
 2. un ciclo limite previsto in realtà non esiste
 3. un ciclo limite esistente non è previsto



Analisi con i metodi di Lyapunov

- L'unico approccio rigoroso ed esaustivo per l'analisi dei sistemi nonlineari (**di qualsiasi tipo e ordine**) è quello basato sulla teoria sviluppata dal matematico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, pubblicata per la prima volta nel 1892, ma riconsiderata nel contesto dei controlli automatici solamente a partire dai primi anni '60
- La teoria di Lyapunov si basa su due metodi fondamentali:
 - il **metodo della linearizzazione** (o *primo metodo*), base teorica per la “giustificazione” (locale) del controllo lineare
 - il **metodo diretto** (o *secondo metodo*), grazie al quale considerazioni di tipo “energetico” (potenzialmente più intuitive) possono essere di ausilio nell'analisi di stabilità e nel progetto del controllo





Aleksandr Mikhailovich Lyapunov
(1857-1918)



Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

Nella teoria di Lyapunov, si intende **sistema dinamico** un sistema *libero* e *autonomo*, caratterizzato dall'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (se $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ è *libero*, ma *non autonomo*)

Definizione 1 Uno stato \mathbf{x}^* è detto stato di equilibrio (o punto di equilibrio) di un sistema dinamico, se dall'istante t al quale $\mathbf{x}(t)$ è uguale a \mathbf{x}^* , $\mathbf{x}(t)$ rimane uguale a \mathbf{x}^* per ogni istante successivo

Matematicamente, i punti di equilibrio sono ottenuti dalla soluzione della equazione:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$$



Note sul lucido 42



I concetti di stabilità descritti nel seguito fanno sempre riferimento allo *specifico* punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tuttavia, ciò non implica una perdita di generalità, in quanto per ogni punto di equilibrio $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ è possibile ricondurre lo studio di stabilità a quello dell'origine, effettuando il cambiamento di variabile:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$$

e studiando la stabilità di $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ per il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^*)$, in modo assolutamente equivalente.

In modo analogo, è possibile ricondurre lo studio della stabilità di una traiettoria **nominale** di un sistema dinamico, cioè una soluzione dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con condizione iniziale $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0$, in presenza di condizioni iniziali **perturbate**, allo studio di una **dinamica dell'errore** come segue:

1. Data $\mathbf{x}^*(t)$: soluzione di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0$
2. Si calcola $\mathbf{x}(t)$: soluzione di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$
3. Infine si analizza la traiettoria $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$ che ha una dinamica descritta da:
 $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \mathbf{e}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{g}(\mathbf{e}, t)$
 con punto di equilibrio in $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.



Punti di equilibrio e stabilità: definizioni - 2

Definizione 2 Il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ di un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è detto stabile se $\forall R > 0, \exists r > 0, t.c.$

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \forall t \geq 0, \|\mathbf{x}(t)\| < R.$$

Altrimenti, il punto di equilibrio viene detto instabile

Definizione 3 Il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ di un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è detto asintoticamente stabile se è stabile ed $\exists r > 0, t.c.$

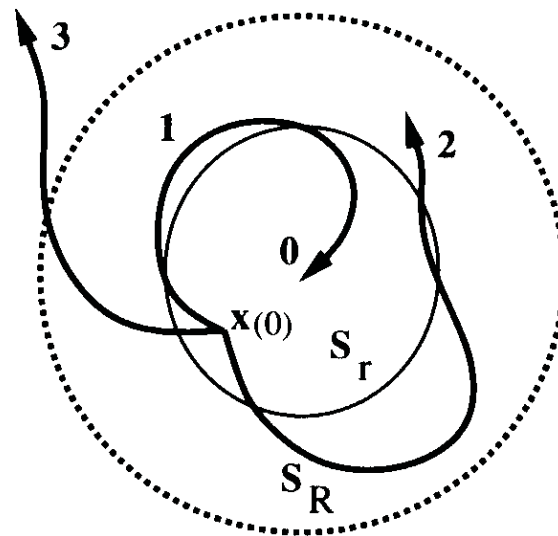
$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ per } t \rightarrow \infty.$$

Definizione 4 Il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ di un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è detto esponenzialmente stabile se è stabile ed $\exists r > 0, \exists \alpha > 0, \exists \lambda > 0, t.c.$

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \forall t > 0, \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}.$$



□□ Rappresentazione “grafica” della stabilità secondo Lyapunov (1 = asintoticamente stabile, 2 = marginalmente stabile, 3 = instabile): □□



Punti di equilibrio e stabilità: definizioni - 3

Definizione 5 Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è un punto di equilibrio asintoticamente (esponenzialmente) stabile, la regione $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ con r massimo, è detta dominio di attrazione.

Definizione 6 Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è un punto di equilibrio asintoticamente (esponenzialmente) stabile $\forall \mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$, il sistema si dice globalmente asintoticamente (esponenzialmente) stabile.

NOTA: la stabilità asintotica di un sistema LTI è sempre anche esponenziale e globale.



Primo metodo di Lyapunov: linearizzazione

Dato un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{0}$ punto di equilibrio ed \mathbf{f} differenziabile in modo continuo, è possibile scrivere:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x})$$

essendo $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (il pedice *h.o.t.* sta per *higher order terms*). Ponendo:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ è detto **approssimazione lineare** nel punto di equilibrio $\mathbf{0}$ del sistema nonlineare originale.



Primo metodo di Lyapunov: linearizzazione - 1

Analogamente, se $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ si può scrivere:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0})} \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0})} \mathbf{u} + \mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

approssimabile a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ con:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0})} \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0})}$$



Note sul lucido 47



Si noti che l'approssimazione lineare può essere fatta rispetto ad un qualunque altro punto di equilibrio \mathbf{x}^* diverso dall'origine, con ingresso costante pari a \mathbf{u}^* :

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

purchè sia sempre valida l'ipotesi $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$, nel qual caso possiamo definire come nuove variabili di stato e di ingresso le **variazioni** rispetto ai valori di equilibrio:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$$

cosicchè ponendo:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)} \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)}$$

si ottiene il sistema dinamico linearizzato rispetto alle variazioni $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}$.

Si noti che l'operazione di linearizzazione può essere fatta anche rispetto a un punto **non di equilibrio**, rispetto al quale la linearizzazione sarà del tipo $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ (con $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ costante).



Primo metodo di Lyapunov: teorema



Teorema 1 (Metodo di linearizzazione di Lyapunov)

- Se il sistema approssimato linearmente con $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ è strettamente stabile (equiv. tutti gli autovalori di \mathbf{A} sono a parte reale strettamente negativa), allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile per il sistema nonlineare originale
- Se il sistema approssimato linearmente con $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ è instabile (equiv. almeno un autovalore di \mathbf{A} ha parte reale strettamente positiva), allora il punto di equilibrio è instabile per il sistema nonlineare originale
- Se il sistema approssimato linearmente con $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ è marginalmente stabile (equiv. tutti gli autovalori di \mathbf{A} sono a parte reale negativa, ma almeno uno ha parte reale nulla), allora non è possibile concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio per il sistema nonlineare originale (può essere marginalmente stabile, asintoticamente stabile o instabile)



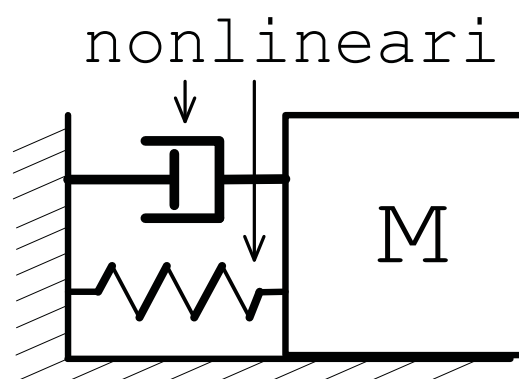
Secondo metodo di Lyapunov: metodo diretto

- I risultati del primo metodo di Lyapunov sono validi solo **localmente**, cioè fintanto che l'approssimazione è ragionevole
- Indipendentemente dal caso di stabilità marginale, la linearizzazione non permette di concludere nulla sulla stabilità in senso **globale**
- Il **secondo metodo di Lyapunov** (*metodo diretto*) si basa invece sulla seguente intuizione fondamentale di natura **fisico**, che permette di analizzare la stabilità sia in senso *locale* che *globale*:

“Se l'energia complessiva di un sistema è continuamente dissipata, il sistema (lineare o nonlineare che sia) si stabilizzerà prima o poi in una condizione di equilibrio (caratterizzata da energia minima)”



Esempio: massa-molla-smorzatore nonlineare



Sistema caratterizzato dal modello:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0$$



□ □ L'energia complessiva del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (associata alle forze elastiche): □ □

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4$$

dalla quale si evince che:

- nel punto di equilibrio ($x = 0, \dot{x} = 0$) il sistema ha energia nulla
- l'eventuale stabilità asintotica implica la convergenza a 0 dell'energia complessiva
- l'eventuale instabilità è riconducibile ad un incremento dell'energia complessiva



□ □ Per il sistema in esame, la variazione di energia lungo le traiettorie del sistema si può calcolare differenziando $V(\mathbf{x})$ e sostituendo nell'espressione ottenuta l'equazione della dinamica: □ □

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} \stackrel{(\ddot{x}=f(x,\dot{x}))}{=} \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3$$

che è negativa fintanto che $\dot{x} \neq 0$. Pertanto l'energia complessiva del sistema è continuamente dissipata a causa dello smorzatore (nonlineare) e la massa si assesterà nell'origine con energia nulla (velocità nulla e forze elastiche nulle), indipendentemente dalla posizione di partenza (stabilità globale).



Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni

Definizione 7 Una funzione scalare continua $V(\mathbf{x})$ è detta localmente definita positiva se $V(\mathbf{0}) = 0$ ed $\exists R > 0$ t.c.

$$\|\mathbf{x}\| < R, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0$$

Se la precedente condizione vale $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, allora $V(\mathbf{x})$ è detta globalmente definita positiva

Definizioni analoghe: semi-definita positiva ($V(\mathbf{x}) \geq 0$), definita negativa ($V(\mathbf{x}) < 0$), semi-definita negativa ($V(\mathbf{x}) \leq 0$)

Poichè in questo contesto \mathbf{x} rappresenta lo stato di un sistema dinamico, $V(\mathbf{x})$ è implicitamente funzione di t . Supponendo $V(\mathbf{x})$ differenziabile:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$



Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni - 1

Definizione 8 Se una funzione $V(\mathbf{x})$ è definita positiva, ha derivate parziali continue e la sua derivata rispetto al tempo lungo ogni traiettoria di un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è semi-definita negativa, allora $V(\mathbf{x})$ è detta una funzione di Lyapunov per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Teorema 2 (Stabilità locale)

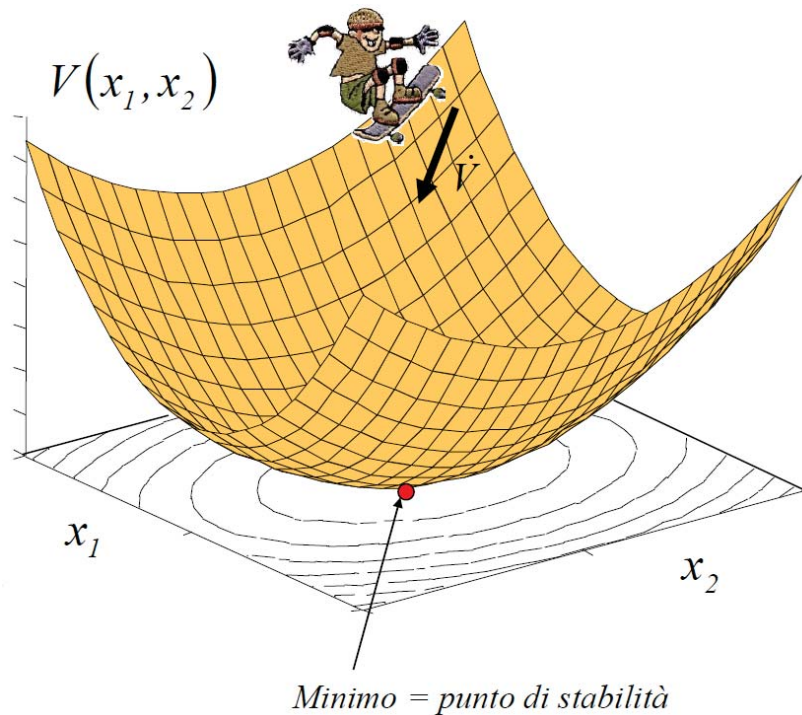
Il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è stabile se $\exists V(\mathbf{x})$ con derivate parziali prime continue t.c.

- $V(\mathbf{x})$ è localmente definita positiva
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ è localmente semi-definita negativa

Se la derivata $\dot{V}(\mathbf{x})$ è localmente definita negativa, la stabilità di $\mathbf{0}$ è asintotica.



Rappresentazione “umoristica” del Teorema di Lyapunov:



Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni - 2

Teorema 3 (Stabilità globale)

Il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è globalmente asintoticamente stabile se $\exists V(\mathbf{x})$ con derivate parziali prime continue t.c.

- $V(\mathbf{x})$ è globalmente definita positiva
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ è globalmente definita negativa
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$

NOTA 1: per un sistema possono esistere diverse funzioni di Lyapunov. Se scelta una di queste, essa si rivela con derivata *semi-definita negativa*, potrebbe in realtà esistere un'altra funzione di Lyapunov con derivata *definita negativa* che permette di dimostrare la stabilità asintotica, oltre a quella semplice. Inoltre, il fatto di non riuscire a trovare (ad intuito) una funzione di Lyapunov idonea, non prova che non ne esistano,



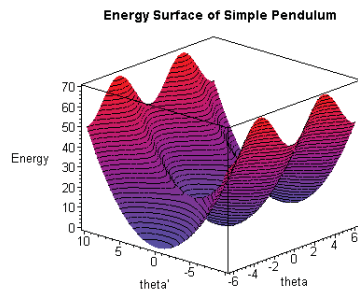
Note sul lucido 56



La scelta di una funzione di Lyapunov che dimostri la stabilità di un sistema è un procedimento sostanzialmente *trial-and-error*: si definisce una funzione quadratica “candidata”, si verifica l’andamento della sua derivata e se non ha le proprietà richieste la si modifica, eccetera. Tuttavia, il fatto che i teoremi sulla stabilità di Lyapunov siano la formalizzazione del concetto intuitivo “dissipazione di energia = stabilità”, permette in molti casi di interesse pratico (es. sistemi meccanici, circuiti elettrici, ecc.) di utilizzare come prima “candidata” a funzione di Lyapunov la descrizione energetica del sistema. Ad esempio, nel caso del pendolo analizzato nell’introduzione, la funzione

$$V_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}MR^2\dot{x}_2^2 + MRg(1 - \cos x_1)$$

dove $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$, è l’energia meccanica totale (cinetica + potenziale) ed è localmente definita positiva per il punto di equilibrio (0,0):



Tuttavia, la sua derivata rispetto al tempo è:



$$\dot{V}_1(\mathbf{x}) = MRg\dot{x}_1 \sin x_1 + MR^2x_2\dot{x}_2 = MRg\dot{x}_1 \sin x_1 + MR^2\dot{x}_1\ddot{x}_1 = -\frac{b}{MR^2}\dot{x}_1^2 = -\frac{b}{MR^2}x_2^2$$



ed è *semi-definita negativa*, il che permette di dimostrare “solo” la stabilità semplice di (0,0). Ponendo per semplicità $b/MR^2 = 1$ e $g/R = 1$ e scegliendo come funzione di Lyapunov la seguente

$$V_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + 2(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2$$

si può verificare che:

$$\dot{V}_2(\mathbf{x}) = -(x_2^2 + x_1 \sin x_1) \leq 0$$

è in effetti *localmente definita negativa*. Pertanto, con questo secondo tentativo di costruzione di una funzione di Lyapunov, aggiungendo all’energia effettiva un termine che non ha nessun significato fisico ben preciso, ma è un puro artificio matematico, è possibile dimostrare l’asintotica stabilità del punto (0,0).

Potrebbe quindi sembrare che il procedimento di Lyapunov per la dimostrazione della stabilità di un punto di equilibrio, soprattutto quella asintotica, sia lungo e difficoltoso (trovare la “giusta” f. di Lyapunov). In realtà, alcune proprietà di convergenza delle traiettorie di un sistema, compresa quindi la stabilità asintotica di un punto, possono essere dimostrate grazie ai **teoremi sugli insiemi invarianti**, dovuti a La Salle, enunciati nel seguito.



Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni - 3

Definizione 9 Un insieme $M \subseteq \mathbf{R}^n$ è un insieme invariante di un sistema dinamico se ogni traiettoria che parte da una condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in M$ rimane in M per ogni istante futuro

Teorema 4 (Invariante locale)

Dato un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con \mathbf{f} continua, e una funzione $V(\mathbf{x})$ con derivate parziali prime continue, se:

- $\exists l > 0$ t.c. la regione Ω_l definita da $V(\mathbf{x}) < l$ è limitata
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_l$
- $E \in \Omega_l$ t.c. $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ e M è il maggiore insieme invariante contenuto in E

allora ogni traiettoria $\dot{\mathbf{x}}(t)$ con condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in \Omega_l$ tende a M per $t \rightarrow \infty$



Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni - 4

Teorema 5 (Invariante globale)

Dato un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con \mathbf{f} continua, e una funzione $V(\mathbf{x})$ con derivate parziali prime continue, se:

- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$
- $E \in \Omega_l$ t.c. $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ e M è il maggiore insieme invariante contenuto in E

allora ogni traiettoria $\dot{\mathbf{x}}(t)$ con condizione iniziale $\mathbf{x}_0 \in \Omega_l$ tende in modo globalmente asintotico a M per $t \rightarrow \infty$



Rappresentazione “concettuale” del principio di invarianza di La Salle:



Note sul lucido 60

Grazie ai teoremi esposti precedentemente, che definiscono il cosiddetto **Principio di invarianza di La Salle**, è possibile dimostrare la stabilità asintotica dell'origine per il pendolo visto in precedenza, anche solo considerandone l'energia meccanica totale come funzione di Lyapunov. Infatti, considerando

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}MR^2\dot{x}_2^2 + MRg(1 - \cos x_1)$$

risulta

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{b}{MR^2}x_2^2 \leq 0$$

che è ovviamente limitata in qualsiasi intorno di $(0,0)$ e nulla, se $b \neq 0$, lungo tutto l'asse x_1 , perciò $\mathbf{E} = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$. Tuttavia, il maggiore insieme invariante \mathbf{M} contenuto in \mathbf{E} è rappresentato dal solo punto $(0,0)$, al quale quindi convergono tutte le traiettorie con condizione iniziale in un intorno del punto stesso. Infatti, la condizione $x_2 = \dot{\theta} = 0$ con $x_1 = \theta \neq 0$ non può essere invariante, perché se fosse $\dot{\theta} = 0 \forall t$ dovrebbe anche essere $\ddot{\theta} = 0 \forall t$, condizione che però implica (dall'equazione dinamica) anche $\sin \theta = 0$, cioè (**localmente**) $\theta = 0$.

Pertanto, il punto nel quale il pendolo è fermo con $\theta = 0$ è un punto asintoticamente stabile per qualsiasi valore diverso da 0 del coefficiente di attrito viscoso alla cerniera, come è ovvio anche da una osservazione intuitiva basata sui soli principi fisici.



Funzioni di Lyapunov e stabilità: il caso lineare

Definizione 10 Una matrice quadrata \mathbf{M} di dimensione $n \times n$ si dice definita positiva se

$$\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$$

NOTA: analoghe definizioni per definita negativa e semi-definita negativa/positiva

Teorema 6

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema LTI $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sia strettamente stabile è che $\forall \mathbf{Q}$ simmetrica definita positiva, la matrice \mathbf{P} , unica soluzione della equazione di Lyapunov:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

sia simmetrica e definita positiva.

Dimostrazione: basata sulla funzione di Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, la cui derivata è: $\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.



Estensioni ai sistemi tempo-varianti

- I teoremi di Lyapunov sulla stabilità *locale*, *asintotica*, *globale*, (ed *uniforme*) sono estendibili tramite funzioni di Lyapunov tempo-varianti e relative definizioni.
- Tale estensione è molto importante anche per i sistemi *Lineari Tempo-Varianti*, *LTV*, in quanto per essi i teoremi classici sullo studio degli autovalori **non sono applicabili**
- Ad esempio, si potrebbe supporre che un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ sia stabile se gli autovalori di $\mathbf{A}(t)$ rimangono a parte reale negativa $\forall t \geq 0$... **ma sfortunatamente non è così!**
- Per sistemi LTV bisogna applicare teoremi specifici, oppure risolvere l'equazione di Lyapunov $\mathbf{A}(t)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}(t) = -\mathbf{Q}$ trovando una \mathbf{P} **costante**, quindi valida $\forall t \geq 0$



Progetto del controllo nonlineare

- Importante distinzione:
 - **problemi di regolazione (o stabilizzazione)** di un punto di equilibrio
 - **problemi di inseguimento (o tracking)** di una traiettoria desiderata
- Questa distinzione, solitamente fatta anche nel controllo lineare, assume nel contesto dei sistemi nonlineari una connotazione molto più significativa
- Nel secondo caso gli effetti delle nonlinearità possono diventare determinanti soprattutto per **traiettorie con rapide variazioni**



Formulazione del problema di controllo

- **Regolazione:** dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ e \mathbf{x}_d costante, trovare una legge di controllo \mathbf{u} tale che $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_d$ per $t \rightarrow \infty$
- **Inseguimento:** dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, con uscita misurabile $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, ed una traiettoria $\mathbf{y}_d(t)$ desiderata, trovare una legge di controllo \mathbf{u} tale che l'errore di inseguimento (*tracking error*) $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t)$ tenda a zero, mentre \mathbf{x} rimane limitato

NOTA 1: se con opportune condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$ si riesce ad avere $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_d(t) \quad \forall t \geq 0$ allora si parla di **inseguimento perfetto** (*inseguimento asintotico* se la condizione di inseguimento perfetto è raggiunta in modo asintotico)

NOTA 2: L'inseguimento perfetto può essere ottenuto solamente se $\mathbf{y}_d(t)$ è nota a priori, comprese le sue derivate fino all'ordine pari a quello della dinamica del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.



Esempio: stabilizzazione del pendolo

Si consideri un pendolo senza attrito, attuato alla base dalla coppia τ :

$$MR^2\ddot{\theta} + MgR \sin \theta = \tau$$

Una legge di controllo che risolve il problema di regolazione in $\theta = 0$ potrebbe essere:

$$\tau = \underbrace{-K_p \theta - K_d \dot{\theta}}_{\text{PD}} + \underbrace{MgR \sin \theta}_{\text{compens. gravita'}}$$

grazie alla quale la dinamica diventa:

$$MR^2\ddot{\theta} + K_d \dot{\theta} + K_p \theta = 0$$

che risulta stabile $\forall K_p, K_d > 0$ (è identica a quella di un gruppo massa-molla-smorzatore lineare).



Note sulla stabilizzazione del pendolo

- Il controllo è composto da un termine di feedback *lineare* e da un termine *nonlineare* il cui ruolo è quello di effettuare la cancellazione della nonlinearietà del sistema (f. solo di θ , non di $\dot{\theta}$, ma è trascurato l'attrito)
- Il feedback *lineare* include termini proporzionali a θ e a $\dot{\theta}$, che equivalgono ad **inserire una molla e uno smorzatore virtuale**, scelta giustificata dall'analisi di stabilità secondo Lyapunov già vista
- La cancellazione delle nonlinearietà, almeno di quelle dominanti (es. gravità), permette di determinare in modo più semplice la **stabilità** del sistema con il controllo, ma assume un ruolo determinante nei problemi di inseguimento (*tracking*)



Esempio: linearizzazione/tracking del pendolo

Modello con attrito nonlineare: $MR^2\ddot{\theta} + b(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + MgR\sin\theta = \tau$

“Trasformiamo” questa dinamica nonlineare in una lineare, con una legge di controllo che dipenda anche da un ulteriore ingresso “fittizio” v :

$$\tau = MR^2v + b(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + MgR\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = v$$

Ora, θ può essere forzata sulla traiettoria desiderata $\theta_d(t)$ dall’ “ingresso” v con un controllore PD + *feedforward* ($\theta_d(t)$):

$$v = \ddot{\theta}_d - K_p(\theta - \theta_d) - K_d(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d)$$

ponendo $e = \theta - \theta_d$, $K_p = \lambda^2$ e $K_d = 2\lambda$ ($\lambda > 0$), si ottiene che l’errore:

$$\ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2e = 0 \Rightarrow e \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty$$



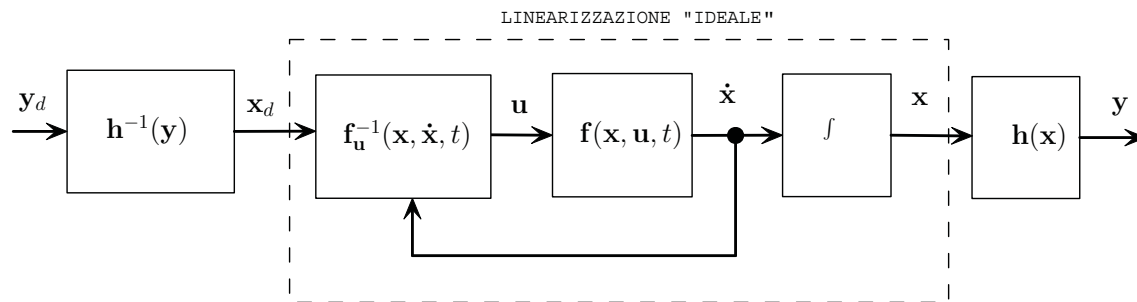
Note sulla linearizzazione del pendolo

- **Modello approssimativo = linearizzazione approssimativa**
 - **incertezze parametriche** (es. M ed R non noti con precisione)
 - **incertezze non parametriche** (es. elasticità del braccio non trascurabile)
- Tipico metodo per rendere il sistema **robusto** rispetto alle incertezze, così come ai disturbi, è quello di aumentare il guadagno della parte di feedback (PD)
- Spingendo al limite questa tecnica, si introducono azioni di controllo che **commutano** tra valori positivi e negativi ($\pm M$) a seconda dell’errore di inseguimento **e delle sue derivate** (v. Sliding Mode)
- Un tale termine “switching” equivale ad un’azione di feedback con guadagno ∞ , ma **valore assoluto limitato**



Linearizzazione analitica: *idealmente*

Date $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ e $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, trovare $\mathbf{u} = \mathbf{f}_u^{-1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ e $\mathbf{x} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})$:



così $\mathbf{y} = \mathbf{y}_d$!!

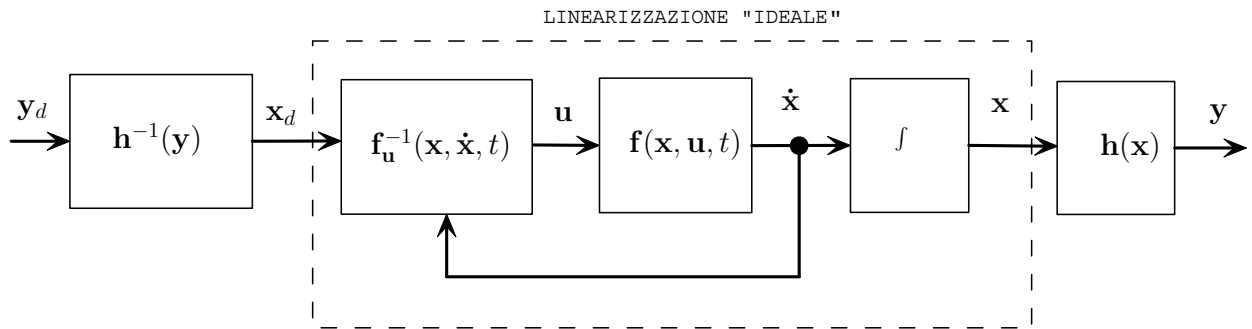


Linearizzazione “pratica” (non analitica)

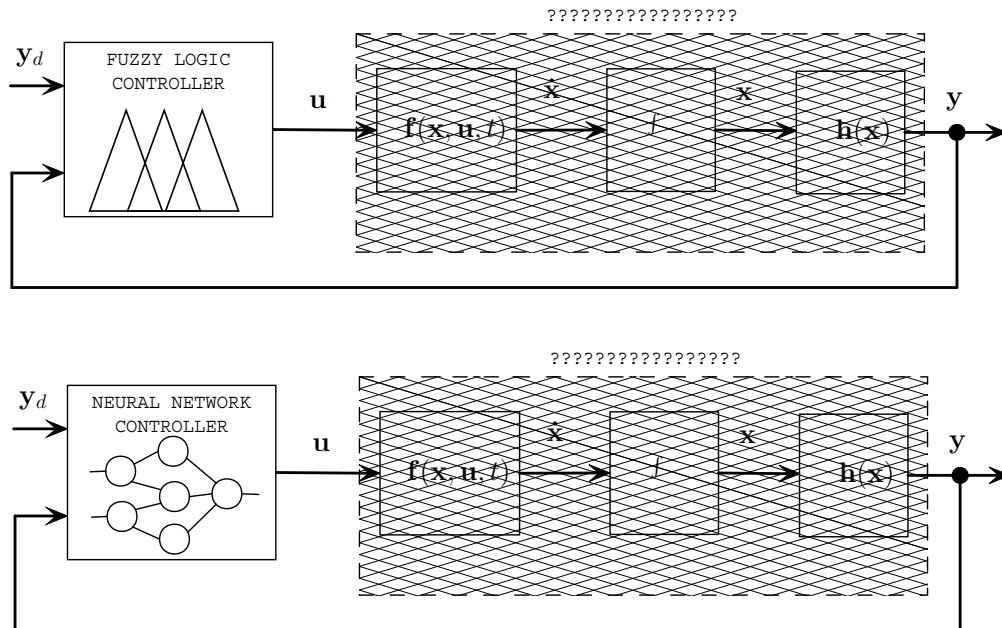
- La soluzione ideale mostrata prima è, **per un caso generale, difficile** (se non *impossibile*) da trovare **analiticamente**
- Teoricamente, con anche $\dot{\mathbf{x}}_d$ noto, **non c'è bisogno di feedback**
- In molte applicazioni pratiche, il modello nonlineare **non è noto** e il **controllo lineare non fornisce prestazioni adeguate**
- Allora, si cercano soluzioni **non analitiche** per fare svolgere il ruolo di \mathbf{h}^{-1} e \mathbf{f}_u^{-1} da, ad esempio:
 - Reti Neurali
 - Logica Fuzzy
 - Tabelle di punti e interpolazione (Look-up table)



Dallo schema ideale...



... a ...

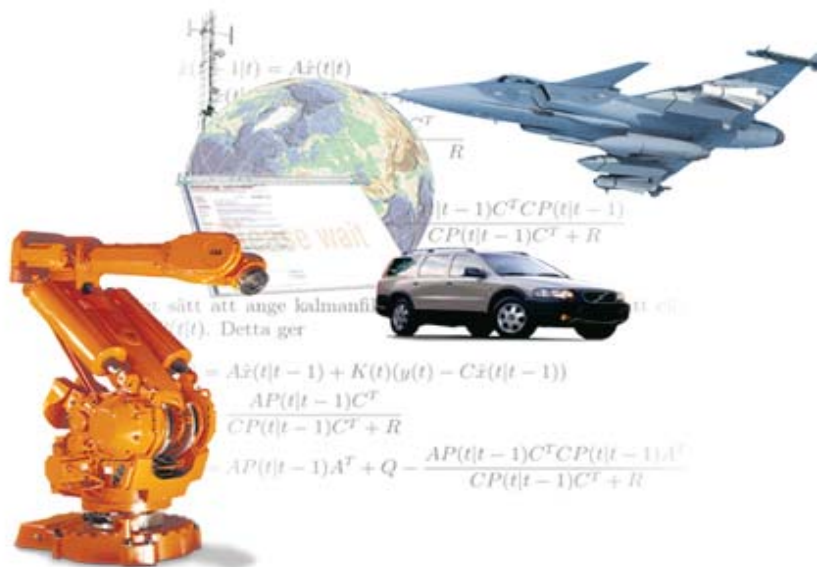


Tecniche *analitiche* per il controllo nonlineare

- **Gain scheduling:** approssimazione lineare del sistema in diversi *punti operativi* e progetto di *diversi* controllori lineari per ciascun punto
- **Feedback linearization:** *formalizzazione* del concetto intuitivo “cancellare le nonlinearità con il controllo” (tipico in robotica)
- **Sliding mode control:** *formalizzazione* di stabilità ed invarianza della condizione di inseguimento perfetto nei confronti di incertezze e disturbi



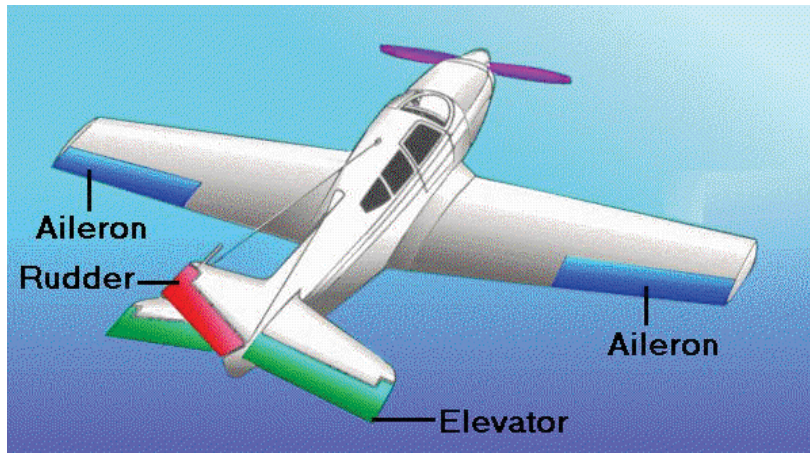
Applicazioni *reali* delle tecniche analitiche



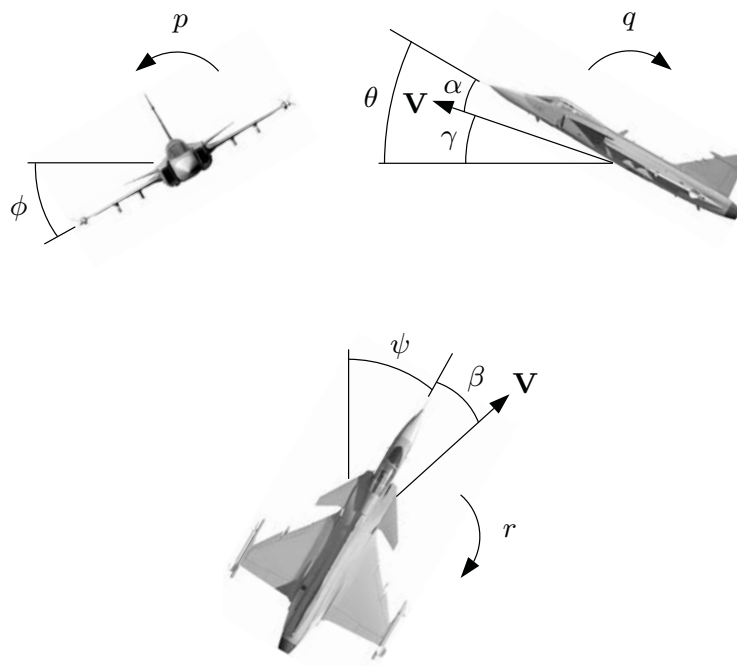
Campo d'applicazione: controllo velivoli



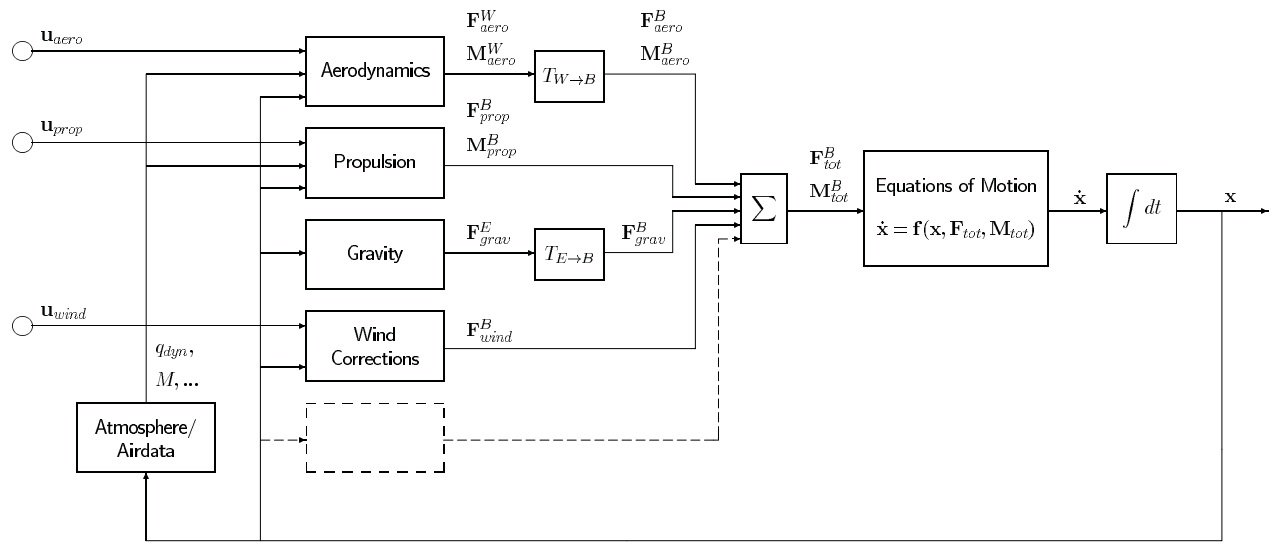
Ingressi (controllo): superfici di volo e spinta (elica o turbina)



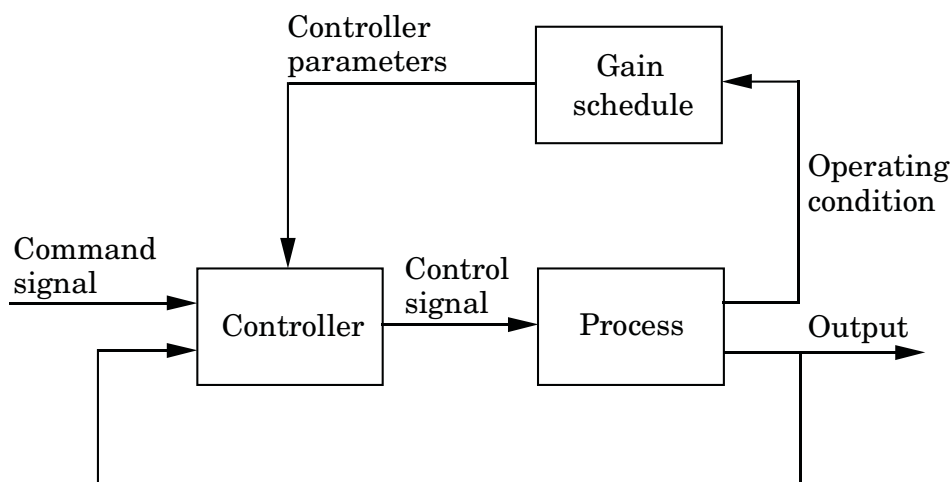
Uscite (misure): velocità, quota, assetto, ...



Modello velivolo: fortemente nonlineare



Controllo *gain scheduling*: in generale



Metodo di progetto per *gain scheduling*

1. Determinare una *famiglia* di punti di equilibrio per il sistema, se possibile espressa come funzione continua di un parametro σ , altrimenti come insieme discreto di punti $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$
2. Calcolare l'approssimazione lineare del sistema rispetto alla *famiglia* di punti di equilibrio:

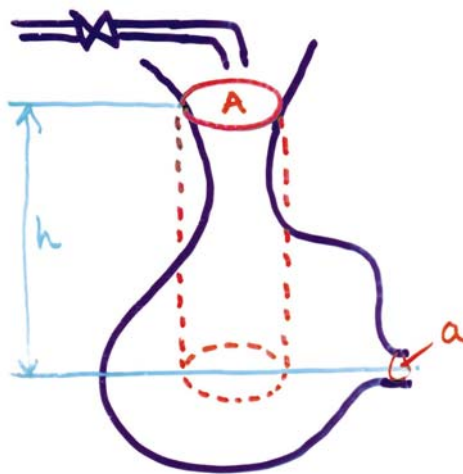
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\sigma(t) &= \mathbf{A}(\sigma) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\sigma) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_\sigma(t) &= \mathbf{C}(\sigma) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\sigma) \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad \text{oppure} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{u}(t) \end{aligned}, \quad r = 1, \dots, k$$

3. Progettare un controllore lineare con parametri $f(\sigma)$, oppure k controllori lineari con parametri fissati, con riferimento al sistema approssimato
4. Se si sono ottenuti k controllori diversi, trovare un metodo per selezionarli in base alle **condizioni operative** (es. interpolazione)



Esempio analitico di controllo *gain scheduling*

Serbatoio con area sezione (A) variabile:



$$V = \int_0^h A(\tau) d\tau$$

$$\dot{V} = A(h) \dot{h} = q_i - a\sqrt{2gh}$$

$$\dot{h} = \frac{q_i - a\sqrt{2gh}}{A(h)} = f(h, q_i)$$

con h = variabile d'uscita misurata,
 q_i variabile d'ingresso (volume liquido in entrata), a sezione (costante) del tubo di uscita liquido e $A(h)$ sezione del tank



Linearizzando il modello nonlineare rispetto ad un punto operativo fissato da h^0 e $q_i^0 = a\sqrt{2gh^0}$, nel quale si considera $A(h^0)$ costante e $h = h^0 + \delta h$, si può ricavare un'equazione differenziale del primo ordine rispetto alla nuova variabile di stato δh e al nuovo ingresso δq_i :

$$\delta \dot{h} = \frac{\delta q_i}{A(h^0)} - \frac{a\sqrt{2gh^0}}{2A(h^0)h^0} \delta h$$

dalla quale si può ricavare la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\beta}{s + \alpha}$$

con:

$$\beta = \frac{1}{A(h^0)} \quad \alpha = \frac{a\sqrt{2gh^0}}{2A(h^0)h^0} = \frac{q_i^0}{2A(h^0)h^0}$$



Per tale funzione di trasferimento del *plant*, è possibile progettare un controllore PI, considerando $e = (h^0 - h) = -\delta h$:

$$\delta q_i = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int e d\tau \right)$$

Ad esempio, imponendo che il sistema chiuso in retroazione abbia una f.d.t del secondo ordine con pulsazione naturale ω e smorzamento ζ , si possono calcolare:

$$K = \frac{2\zeta\omega - \alpha}{\beta} \quad T_i = \frac{2\zeta\omega - \alpha}{\omega^2}$$

calcolabili in linea in base al punto di lavoro (*gain scheduling*):

$$K(h^0) = 2\zeta\omega A(h^0) - \frac{a\sqrt{2gh^0}}{2h^0} \quad T_i(h^0) = \frac{2\zeta}{\omega} - \frac{a\sqrt{2gh^0}}{2A(h^0)h^0\omega^2}$$

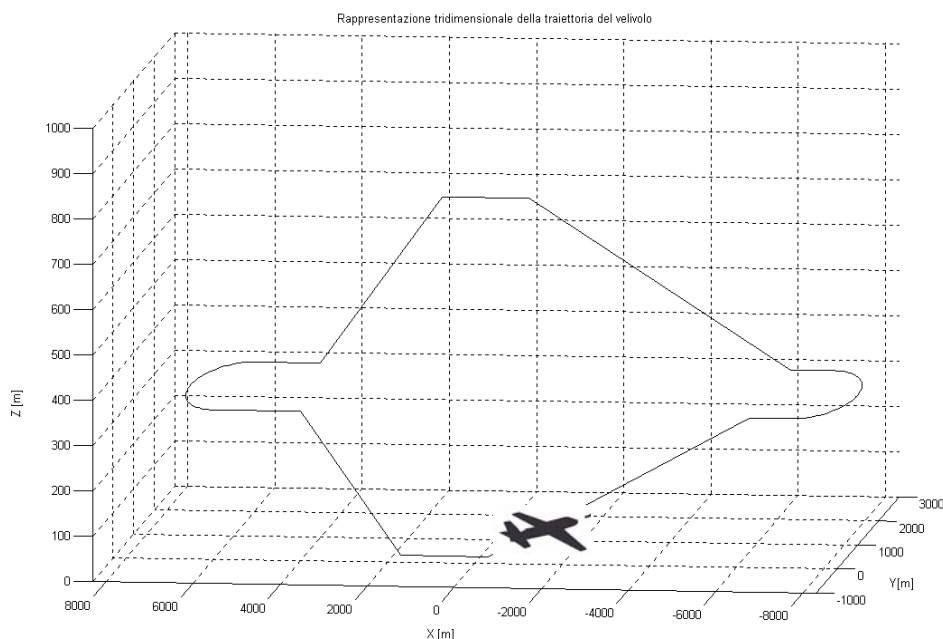


Gain scheduling per controllo di velivoli

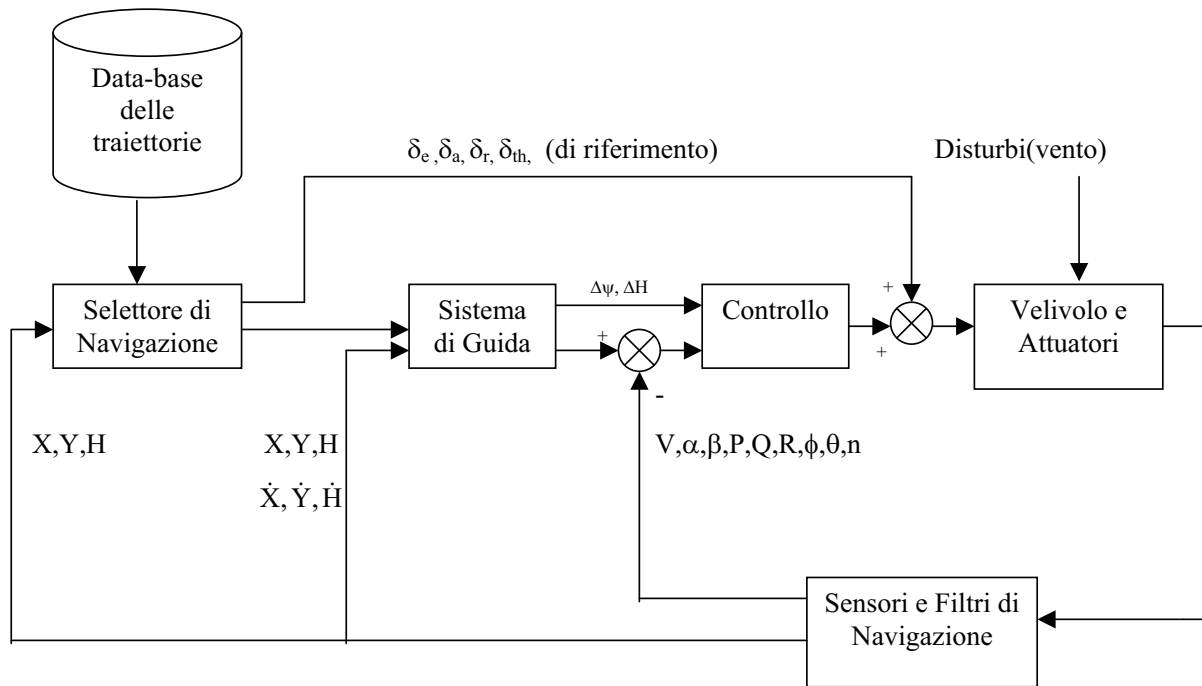
- Storicamente, il progetto di sistemi di pilotaggio automatico per velivoli prevede il calcolo di modelli linearizzati del sistema o di una sua sottoparte (es. **assetto 3D**, **assetto laterale**, **assetto longitudinale**, ecc.) modelli lineari che risultano, tipicamente, essere parametrizzati da variabili come **altitudine**, **velocità** (*true airspeed* e/o *Mach number*), ecc.
- Le variabili che parametrizzano il modello e, di conseguenza, i controllori, sono anche **variabili di stato** del modello completo e sono considerate tali da controllori più **esterni** (es. controllo di altitudine) o dal sistema che fornisce i **referimenti di navigazione**



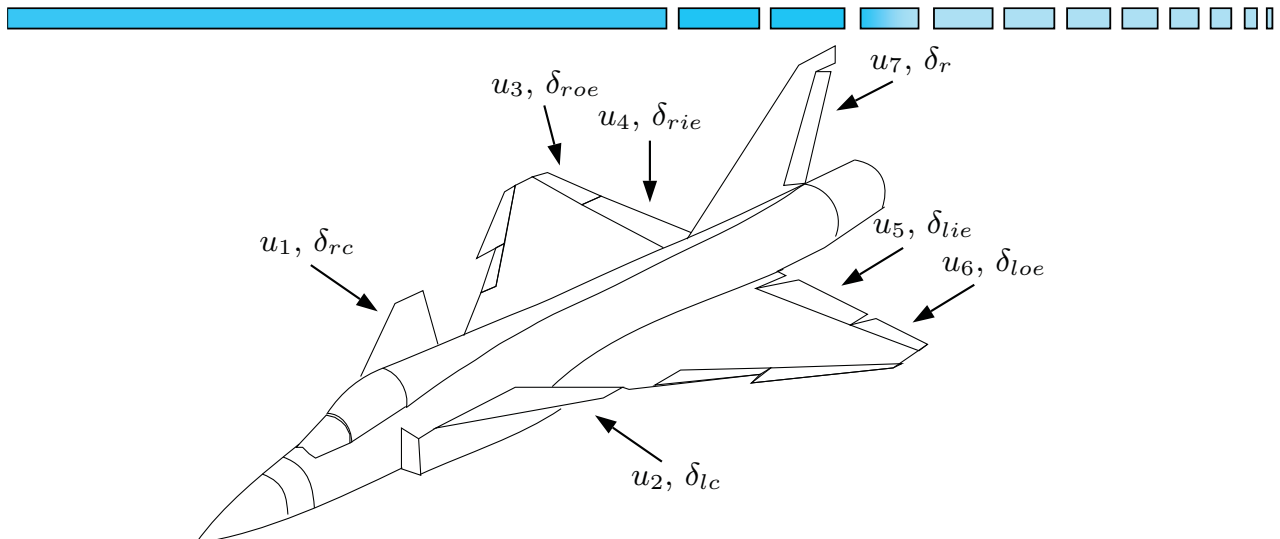
Condizioni di volo:



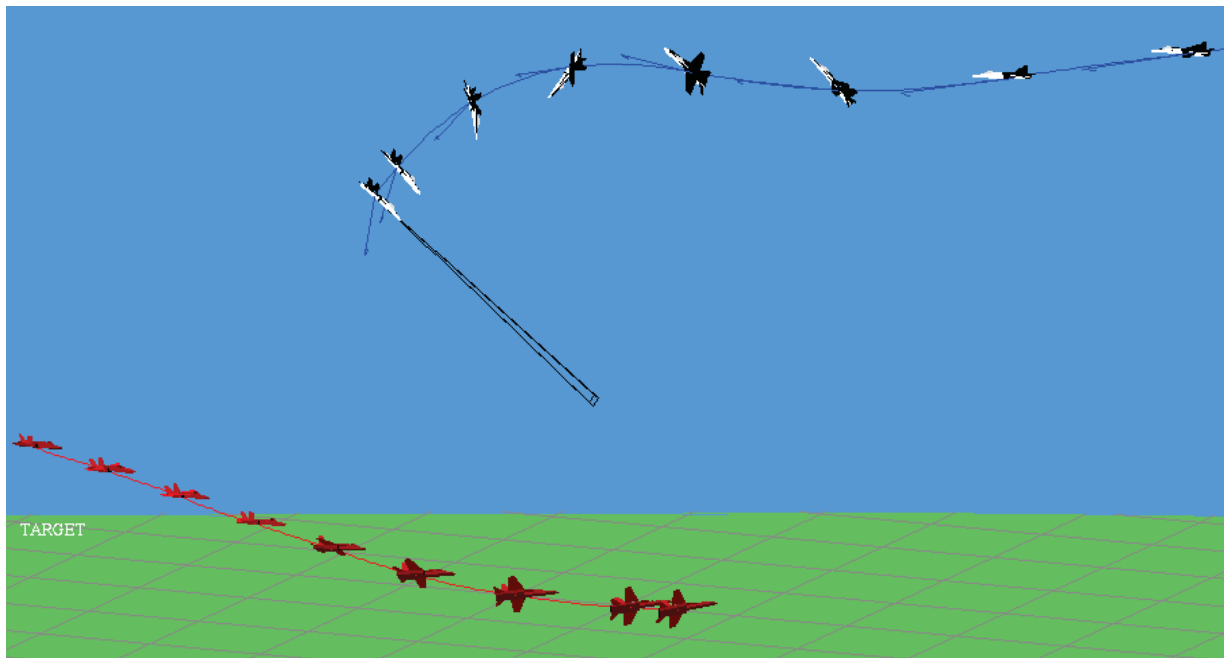
Schema completo del sistema di navigazione:



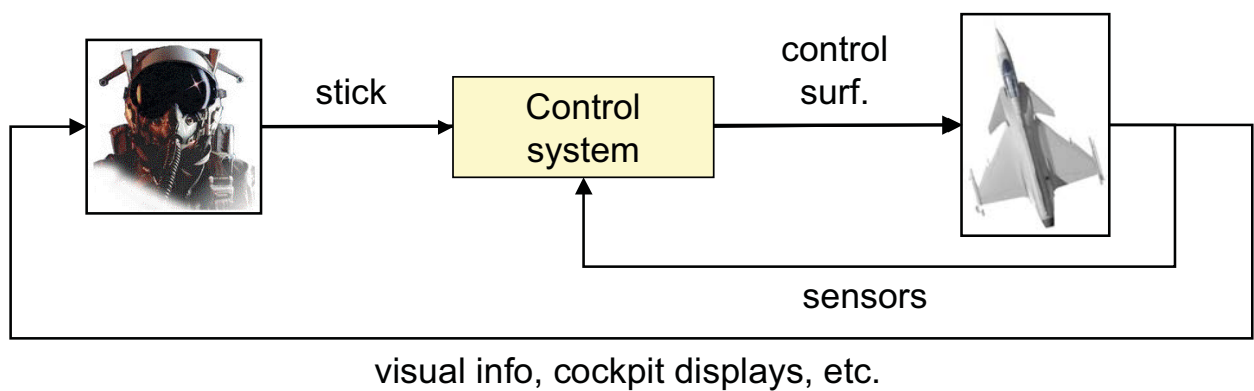
Controllo di aerei militari



Esigenze più “spinte”: condizioni di volo con transizioni più rapide ed elevati angoli aerodinamici



Soluzione: controllo tramite approccio **Feedback linearization**, allo scopo di agevolare le manovre del pilota rendendo stabile o almeno “linearizzata” la risposta del velivolo per qualunque assetto e con qualunque variazione dinamica:



Campo d'applicazione: robotica (manipolatori)



Controllo di robot manipolatori



- Modello dinamico (\mathbf{q} posizione giunti, τ coppia attuatori):

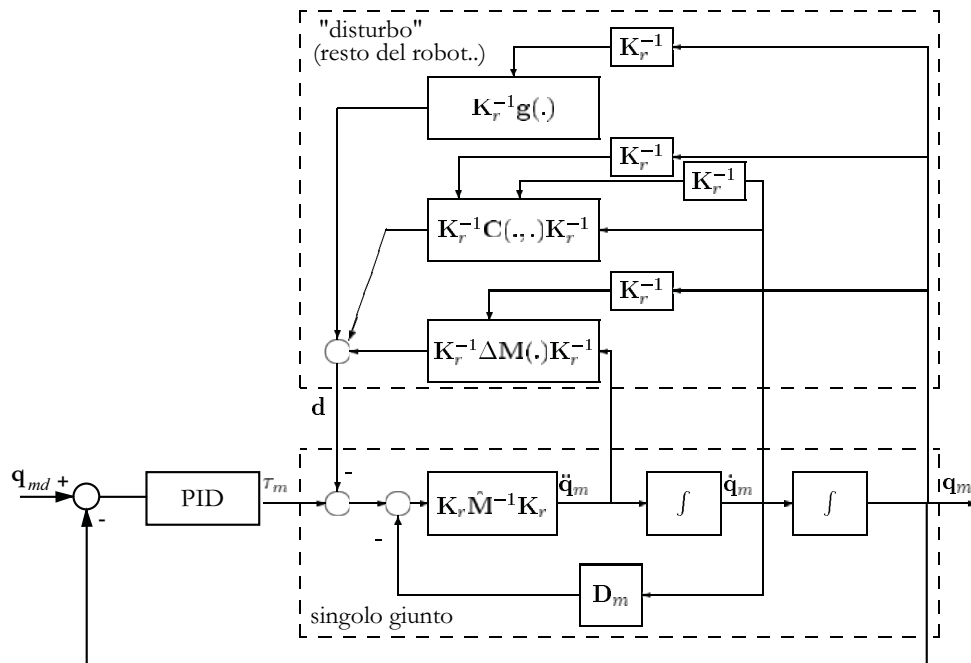
$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F}_a$$

nel quale le matrici $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ (inerzie) e $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ (legata alle forze di Coriolis e centripete), la gravità ($\mathbf{g}(\mathbf{q})$) e delle forze di interazione con l'ambiente (\mathbf{F}_a) introducono notevoli nonlineari

- **Controllo decentralizzato:** ogni giunto viene controllato in modo indipendente, l'effetto delle nonlineari è considerato un *disturbo* (approccio "storico", ma semplicistico)
- **Controllo centralizzato:** si considera il modello dinamico completo per l'analisi di stabilità e il progetto di leggi di controllo opportune (compensazione gravità, coppia precalcolata, dinamica inversa, etc.)



□□
 Approccio decentralizzato ($M(q) = \hat{M} + \Delta M(q)$, K_r rapporti di riduzione):
 □□

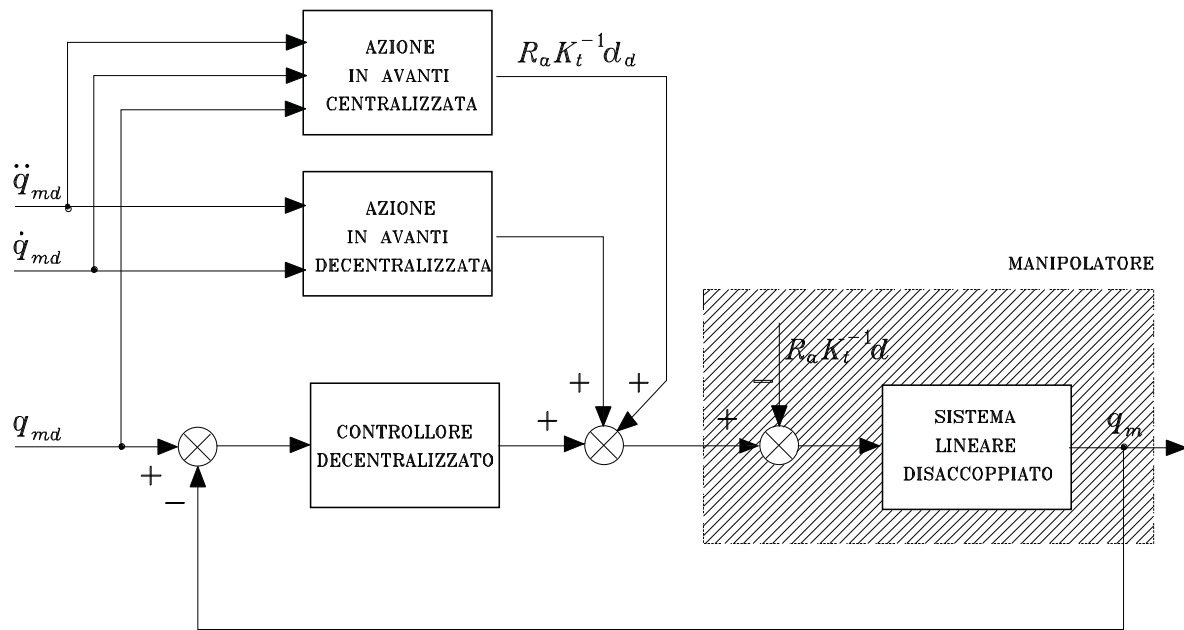


Controllo centralizzato di robot manipolatori

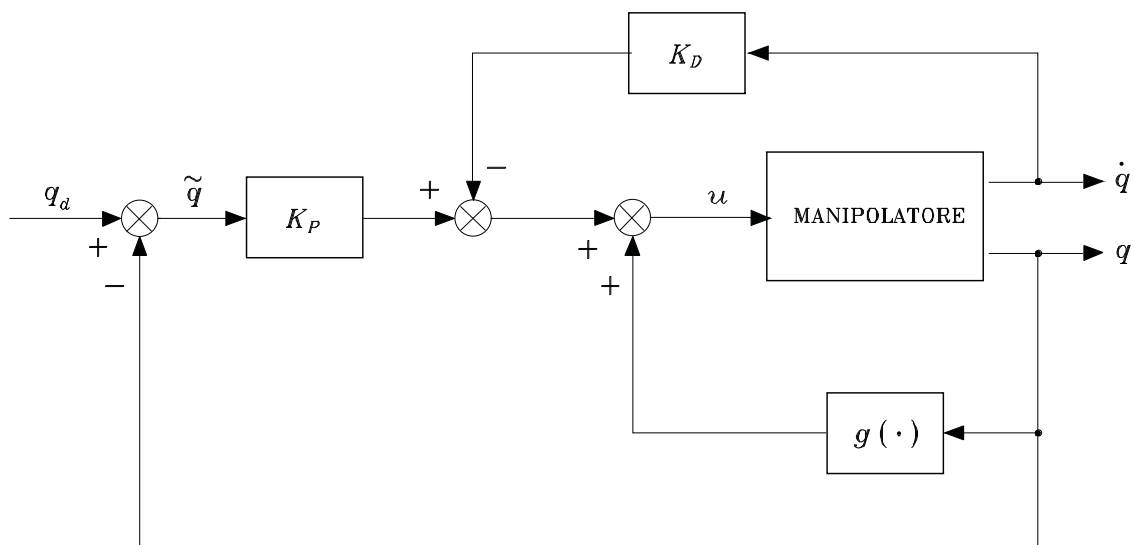
- Con l'approccio decentralizzato si progettano regolatori standard PID e si cerca di compensare il "disturbo" d nell'inseguimento di traiettorie con azioni in avanti (*feedforward* prop. a \ddot{q}_d e \dot{q}_d)
- Ovviamente, il "disturbo" della dinamica del robot è calcolabile (off-line per traiettorie ripetitive) grazie ad un buon modello matematico \Rightarrow **Compensazione in avanti a coppia precalcolata**
- Ancora meglio, utilizzando una legge di retroazione nonlineare è possibile cancellare le nonlinearità \Rightarrow **Controllo a dinamica inversa** (*Feedback linearization*)
- Incertezze di modellazione si possono compensare con feedback a guadagno elevato \Rightarrow **Controllo robusto** (*Sliding mode*)



Compensazione in avanti a coppia precalcolata:



Controllo (centralizzato) PD + compensazione di gravità:



Note sul lucido 94



Come noto, le leggi di controllo più diffuse nelle applicazioni industriali sono quelle con struttura **PID** (Proporzionale-Integrale-Derivativa). Considerando l'estensione di tale struttura a sistemi MIMO (*Multi-Input-Multi-Output*), si ottiene il seguente regolatore per stabilizzare un robot manipolatore in un punto di equilibrio \mathbf{q}_d :

$$\tau = -\mathbf{K}_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_i \int_0^t (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) d\tau$$

dove \mathbf{K}_p , \mathbf{K}_d e \mathbf{K}_i sono matrici costanti definite positive. Considerando legge di controllo unicamente PD ($\mathbf{K}_i = \mathbf{0}$), dalla dinamica del robot vista in precedenza si può determinare la dinamica dell'errore (ponendo $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$, $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{q}}$ e trascurando attriti ed interazioni con l'ambiente):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{e}})\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

Si noti che l'insieme dei punti di equilibrio (**insieme invariante**) per questa dinamica del secondo ordine (variabili di stato $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$) è costituito da:

$$S = \{(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) : \mathbf{K}_p\mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{e} + \mathbf{q}_d) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}\}$$

L'analisi di stabilità può essere condotta con l'approccio di Lyapunov, considerando la funzione:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p\mathbf{e} + U(\mathbf{q}) + U_0$$

nella quale compaiono l'energia cinetica, quella potenziale dovuta alla gravità ($U(\mathbf{q})$) ed alle molle "virtuali" introdotte dal regolatore, più una costante opportuna U_0 per soddisfare i requisiti di Lyapunov ($V(\mathbf{0}) = 0$ anche se $\mathbf{q}_d \neq \mathbf{0}$).



La derivata rispetto al tempo di V lungo le traiettorie della dinamica dell'errore diventa:



$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \left(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{e}}) \right) \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \dot{\mathbf{e}}^T \left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) \|\dot{\mathbf{e}}\|^2$$



dove $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d)$ è il minimo autovalore di \mathbf{K}_d . Per ottenere la disuguaglianza finale, si sfruttano le seguenti considerazioni:

- una proprietà notevole del modello dinamico dei robot manipolatori afferma che è sempre possibile porre la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in forma tale da rendere la matrice $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ anti-simmetrica (per cui $\mathbf{z}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{z} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$)
- $\left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{g}(\mathbf{q})$

L'analisi di stabilità ci conferma quindi che il controllo PD è in effetti stabilizzante, come si era dimostrato anche per il caso del pendolo (un manipolatore con un unico link). Grazie al principio di invarianza di La Salle si dimostra inoltre che tutte le traiettorie del robot tendono asintoticamente all'insieme invariante S visto in precedenza. Tuttavia, se non si introducono azioni per la compensazione della gravità, questo insieme invariante contiene tutte le posizioni per le quali si ha un errore a regime dato dall'equilibrio tra le forze elastiche virtuali (introdotte da \mathbf{K}_p) e gli effetti della gravità. Tale errore può essere ridotto incrementando arbitrariamente la norma di \mathbf{K}_p , ma ovviamente questa scelta non è consigliabile nella pratica se si vogliono evitare sollecitazioni eccessive della struttura robotica.

L'errore a regime dovuto agli effetti della gravità può essere eliminato introducendo una azione integrale nel regolatore ($\mathbf{K}_i \neq \mathbf{0}$), anche se è possibile dimostrare che questa soluzione non garantisce che i transitori durante movimenti **point-to-point** abbiano prestazioni indipendenti dalla configurazione di



partenza del manipolatore. Più spesso, si preferisce introdurre un termine di compensazione della gravità (ed eventualmente dell'attrito), in modo analogo a quello visto per il pendolo. Con questa tecnica, la legge di controllo diventa:

$$\tau = -\mathbf{K}_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

L'analisi di stabilità, tramite la funzione di Lyapunov:

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}$$

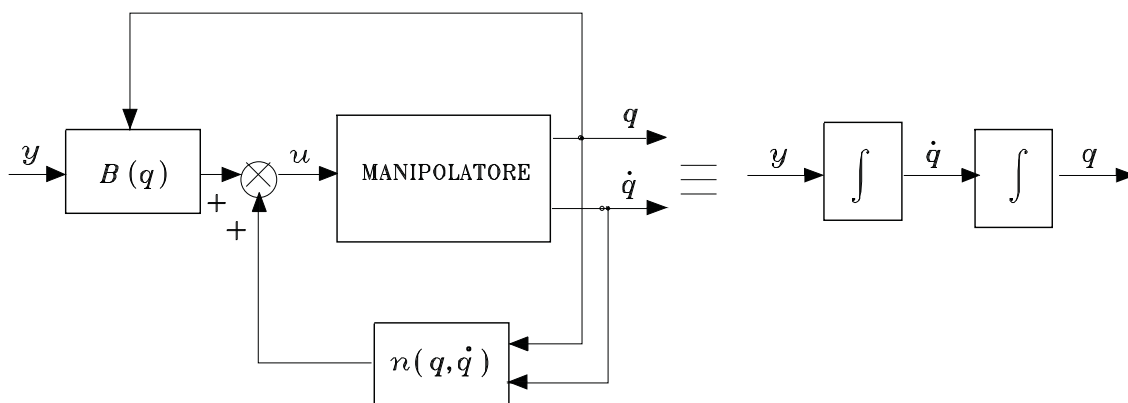
$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) \|\dot{\mathbf{e}}\|^2$$

permette di affermare grazie al principio di invarianza di La Salle che il maggiore insieme invariante S al quale convergono asintoticamente le traiettorie del robot è:

$$S = \{(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) : \mathbf{e} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}\} \Rightarrow \text{NO ERRORE A REGIME!}$$



Controllo a dinamica inversa (linearizzazione):



NOTA: $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ = matrice di inerzia, $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ = attriti + forze di Coriolis/centripete



Note sul lucido 97

Dato il modello dinamico di un manipolatore:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau$$

si può pensare di trasformare tale dinamica nonlineare tramite una legge di controllo unicamente basata sulla cancellazione dei termini nonlineari:

$$\tau = M(q)y + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)$$

nella quale y rappresenta il "nuovo" ingresso per il sistema trasformato. Ipotizzando la perfetta cancellazione di tutti i termini, rimane l'equazione dinamica:

$$M(q)\ddot{q} = M(q)y$$

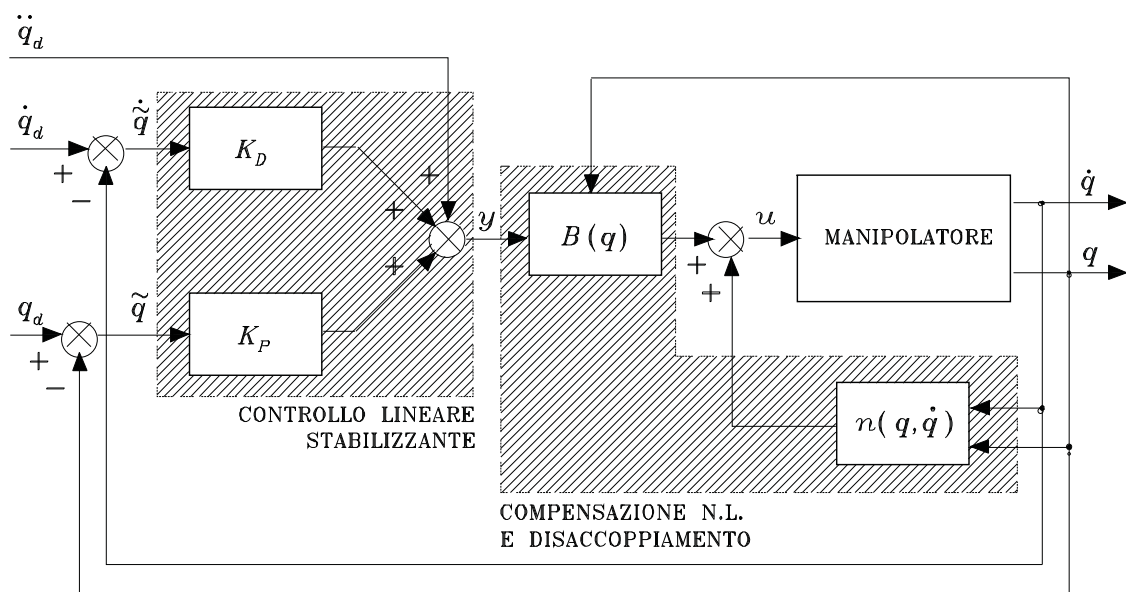
Moltiplicando tutti i termini per $M^{-1}(q)$, il sistema retroazionato con la legge di controllo descritta si riduce ad un doppio integratore:

$$\ddot{q} = y$$

NOTA BENE: l'operazione di moltiplicazione per $M^{-1}(q)$ è sempre possibile poichè $M(q)$ è **sempre invertibile** (proprietà notevole del modello dinamico dei robot manipolatori)!



Controllo a dinamica inversa ed inseguimento:



NOTA: $B(q)$ = matrice di inerzia, $n(q, \dot{q})$ = attriti, Coriolis, ecc.



Note sul lucido 98

L'operazione di linearizzazione tramite feedback vista in precedenza (controllo a dinamica inversa) permette ovviamente di risolvere in modo molto più agevole il problema di inseguimento delle traiettorie, tipicamente pianificate a priori per l'esecuzione di determinati compiti operativi da parte del robot. Infatti, ponendo:

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d)$$

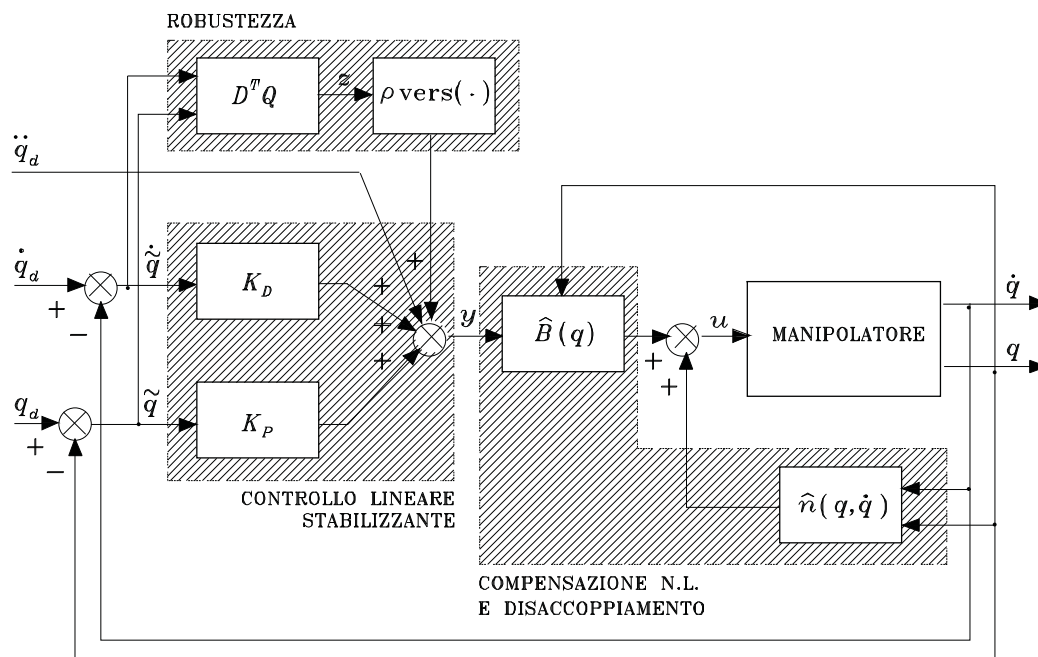
con \mathbf{K}_p e \mathbf{K}_d definite positive (una tipica scelta è $\mathbf{K}_p = \lambda^2 \mathbf{I}$ e $\mathbf{K}_d = 2\lambda \mathbf{I}$ con $\lambda > 0$), si ottiene la dinamica dell'errore:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

perciò l'errore di inseguimento converge a zero esponenzialmente.



Controllo robusto:



Note sul lucido 99



Se il modello dinamico non è noto con precisione, la compensazione a dinamica inversa deve essere fatta con la migliore stima possibile, cioè

$$\tau = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

con errori di incertezza $\widetilde{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}$ e $\widetilde{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}$. In questo modo, la dinamica risultante sarà:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}$$

dove $\boldsymbol{\eta}$ è un termine che dipende dagli errori di incertezza $\widetilde{\mathbf{M}}$ e $\widetilde{\mathbf{n}}$. Assumendo come in precedenza una legge di controllo per il sistema linearizzato di tipo PD + azione anticipativa:

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d - 2\lambda(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \lambda^2(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d)$$

la dinamica dell'errore sarà:

$$\ddot{\mathbf{e}} + 2\lambda\dot{\mathbf{e}} + \lambda^2\mathbf{e} = \boldsymbol{\eta}$$

nella quale la struttura del solo primo membro non garantisce l'asintotica convergenza a zero dell'errore di inseguimento. Per garantire la **robustezza** dell'inseguimento nei confronti dell'incertezza $\boldsymbol{\eta}$, è necessario trasformare la legge di controllo come segue:

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d - 2\lambda(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \lambda^2(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d) + \mathbf{w}$$



nella quale il termine \mathbf{w} è costituito da:



$$\mathbf{w} = \frac{\rho}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z} \quad \rho > 0, \quad \mathbf{z} = \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$



per il quale ρ e \mathbf{Q} sono calcolati in modo opportuno (in base alla teoria del controllo *Sliding mode* che verrà trattata più avanti), in modo da rendere la condizione $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ asintoticamente stabile (inseguimento perfetto). In particolare, dovrà essere $\rho \geq \|\boldsymbol{\eta}\|$ per ogni $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_d$ e \mathbf{Q} tale che $V(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\zeta}$ sia una funzione di Lyapunov per la dinamica di $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \widetilde{\mathbf{H}} \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{w}), \quad \widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d \end{bmatrix}$$

Si noti che in figura il contributo di "robustezza" è indicato come proporzionale alla funzione *vers()*, che rappresenta il vettore di modulo unitario diretto come \mathbf{z} (il *versore* di \mathbf{z}). Tale contributo è discontinuo rispetto al sottospazio $\mathbf{z} = \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$, il quale è attrattivo per tutte le traiettorie del robot. Una volta raggiunto tale sottospazio, definito **sottospazio (o superficie) di scivolamento** (*sliding surface*), l'ampiezza della componente \mathbf{w} commuta con frequenza idealmente infinita tra $\pm \rho$.



Feedback Linearization

- La tecnica di **cancellazione delle nonlinearità** di un sistema attraverso il controllo, al fine di ottenere una dinamica lineare rispetto ad un ingresso fittizio, è utilizzata con un approccio *intuitivo* in robotica
- Tali tecniche intuitive sono formalizzate dalla teoria recente dei controlli automatici, con l'obiettivo di estenderne l'applicabilità a problemi diversi (regolazione, inseguimento, disaccoppiamento dei disturbi, osservazione) e a sistemi con caratteristiche dinamiche più generiche



Linearizzazione per sistemi in *forma canonica*

Un sistema (SISO) è detto in **forma canonica di controllabilità** (o *forma "companion"*) se:

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u$$

oppure, con rappresentazione nello spazio degli stati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix}$$



Per un sistema in forma companion la legge di controllo nonlineare:

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x})}[v - f(\mathbf{x})]$$

trasforma la dinamica in una serie di n integratori:

$$x^{(n)} = v$$

per la quale è sempre possibile imporre una dinamica esponenzialmente stabile, sia per problemi di regolazione che per problemi di inseguimento di una traiettoria $x_d(t)$, con una legge di controllo del tipo (scelti opportuni K_i):

$$v = x_d^{(n)} - K_0 e - K_1 \dot{e} - \dots - K_{n-1} e^{(n-1)}$$

NOTA: devono essere disponibili tutte le derivate necessarie di $x_d(t)$



Note sul lucido 103

L'estensione ad un sistema MIMO (come un robot manipolatore) richiede ovviamente che la dinamica sia espressa in modo vettoriale:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

linearizzabile tramite la legge di controllo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{x})]$$

Tuttavia, in questo caso la linearizzazione è possibile solamente se la matrice $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ è invertibile $\forall \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Nelle applicazioni di robotica, come si è visto, ciò è garantito dalle proprietà strutturali meccaniche (matrice di inerzia) dei manipolatori.



Linearizzazione ingresso-stato

Si cerca una funzione di controllo nonlineare $u = u(\mathbf{x}, v)$ per l'ingresso scalare del **generico** sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

t.c. la dinamica nonlineare sia trasformata, attraverso un opportuno cambiamento di variabili $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, nella dinamica lineare:

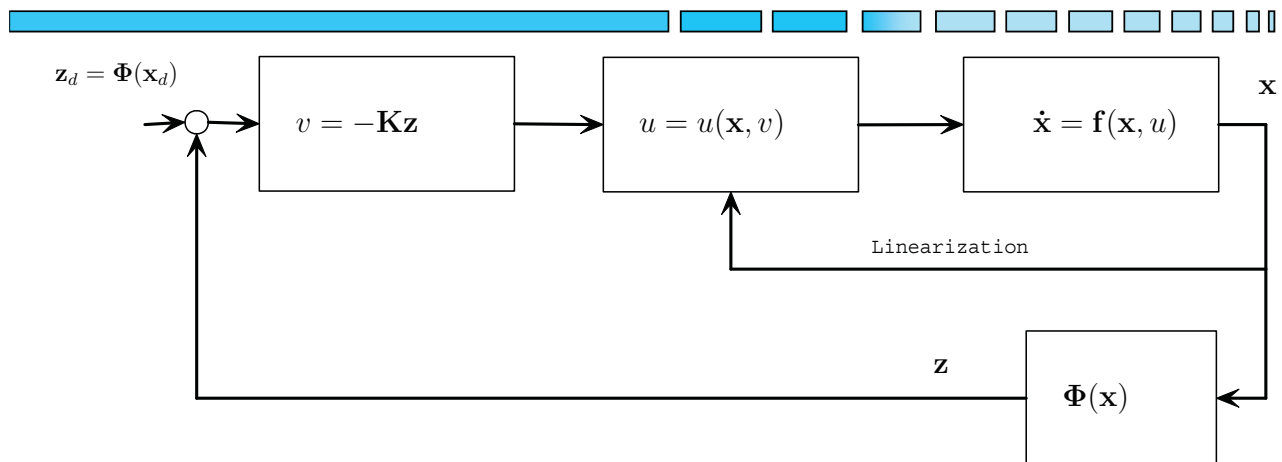
$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$$

sulla quale è possibile progettare un controllore con le tecniche classiche del controllo lineare

NOTA: analogo se prima $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ e poi $u = u(\mathbf{z}, v)$



Schematicamente...



Note sul lucido 105



Si consideri ad esempio il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1\end{aligned}$$

nel quale la nonlinearità nella prima equazione non può essere cancellata direttamente attraverso il controllo u . Tuttavia, considerando la seguente trasformazione dello stato:

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 + \sin x_1\end{aligned}$$

si ottiene la dinamica:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_2 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + u \cos 2z_1\end{aligned}$$

la quale è ora invece linearizzabile tramite il controllo:

$$u = \frac{1}{\cos 2z_1} (v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1)$$



che permette di ottenere il sistema lineare:



$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= v\end{aligned}$$



Tale sistema risulta essere controllabile ($\text{rank}([b|Ab]) = 2$), pertanto è possibile assegnarne arbitrariamente gli autovalori con una retroazione del tipo $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$.



Linearizzazione ingresso-uscita

In modo analogo, per un sistema generico con una certa uscita di interesse:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

si desidera ottenere una dinamica lineare dell'uscita rispetto ad un certo ingresso di controllo fittizio v , **mantenendo limitato lo stato \mathbf{x}** .

Per risolvere il problema di linearizzazione, occorre prima di tutto “scoprire” la relazione dinamica tra uscita e ingresso (derivando rispetto al tempo la $y = h(\mathbf{x})$):

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

NOTA: potrebbero essere necessarie più derivate successive della $y = h(\mathbf{x})$



Note sul lucido 107



Ad esempio, si consideri il sistema del terzo ordine:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

In questo caso, derivando l'uscita si ottiene:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3$$

nella quale **non compare** l'ingresso u . Occorre quindi derivare l'uscita una seconda volta:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 x_3 + (x_2 + 1)\dot{x}_3 = (x_2 + 1)u + f_1(\mathbf{x})$$

nella quale $f_1(\mathbf{x})$ contiene tutti gli altri termini non legati all'ingresso. Chiaramente, questa dinamica può essere trasformata in quella di un doppio integratore $\ddot{y} = v$ con il controllo:

$$u = \frac{1}{x_2 + 1} [v - f_1(\mathbf{x})]$$



In generale, il numero di volte che occorre derivare l'uscita di un sistema per "scoprire" la relazione ingresso-uscita viene detto **grado relativo del sistema**. Nel caso in esame, il sistema ha grado relativo pari a 2. Il concetto di grado relativo si traduce per un sistema lineare, la cui relazione ingresso-uscita è data dalla funzione di trasferimento, se SISO, o matrice di trasferimento, se MIMO, nella differenza tra il numero di poli ed il numero di zeri della f.d.t. (m.d.t.).

La linearizzazione ingresso-uscita ottenuta per il caso in esame va ulteriormente analizzata per verificare se lo stato x rimane effettivamente limitato durante l'inseguimento di una traiettoria. Ciò non è in effetti garantito dalla soluzione del problema di inseguimento asintotico, in quanto la dinamica ingresso-uscita linearizzata è di ordine 2, mentre lo stato del sistema completo è di ordine 3. Risolvendo come visto in precedenza il problema di inseguimento, cioè ponendo:

$$v = \ddot{y}_d - K_p e - K_d \dot{e}$$

si può pensare di semplificare lo studio della limitatezza dello stato ponendo come "nuove" variabili di stato y, \dot{y} e x_3 . La limitatezza delle prime due è infatti garantita dall'inseguimento asintotico, mentre per la terza occorre determinarne la dinamica e studiarla in relazione all'andamento di v o, equivalentemente, y_d (es. ipotesi di limitatezza delle derivate, ecc.).

Per un generico sistema di ordine n di grado relativo r , le $n - r$ variabili di stato la cui dinamica non può essere imposta dall'inseguimento asintotico costituiscono la **dinamica interna**. Una dinamica interna instabile rende inutile la soluzione del problema di inseguimento, in quanto si traduce in pratica in saturazioni e danneggiamenti degli attuatori e/o dei componenti fisici del sistema.



Formalizzazione del problema di linearizzazione

- Nel caso di interesse pratico più comune, la linearizzazione ingresso-uscita, la procedura richiede di:
 1. *derivare l'uscita fino a rivelare la relazione con l'ingresso*
 2. *trovare una trasformazione dello stato e una legge di controllo nonlineare che renda la relazione ingresso-uscita lineare*
 3. *studiare la stabilità della dinamica interna*
- La formalizzazione di questo problema e della sua soluzione consiste nel determinare le caratteristiche che il sistema deve avere perchè il problema abbia soluzione ed una procedura sistematica per progettare la trasformazione dello stato ed il controllo



Strumenti matematici: geometria differenziale

Definizione 11 Il vettore colonna i cui componenti sono funzioni scalari *smooth* ($f_i \in C^\infty$) di $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{n-1}(\mathbf{x}) \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

si definisce **campo vettoriale** $\in C^\infty$ (*smooth vector field*)

dove C^∞ è lo spazio delle funzioni continue con derivate parziali di ogni ordine continue.

Un campo vettoriale *smooth* definisce ovviamente una mappa $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, per la quale i componenti delle matrici Jacobiane sono continue per ogni ordine di derivazione.



Definizione 12 Dato un campo vettoriale *smooth* $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ed una funzione *smooth* $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, si definisce **derivata di Lie** di h rispetto ad \mathbf{f} la funzione scalare:

$$L_{\mathbf{f}} h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$$

In sostanza, la derivata di Lie rappresenta la derivata “direzionale” di h lungo la direzione in \mathbf{R}^n del vettore \mathbf{f} .

Ricorsivamente, si può definire la derivata di Lie di ogni ordine come segue:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}^0 h &= h \\ L_{\mathbf{f}}^i h &= L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-1} h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Analogamente, se \mathbf{g} è un altro campo vettoriale *smooth*, vale la:

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = \frac{\partial L_{\mathbf{f}} h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}$$



Note sul lucido 111



Si noti che dato un sistema dinamico il cui modello matematico sia:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

le derivate rispetto al tempo dell'uscita (scalare) corrispondono a:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = L_{\mathbf{f}} h \\ \ddot{y} &= \frac{\partial(L_{\mathbf{f}} h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = L_{\mathbf{f}}^2 h \\ &\dots\end{aligned}$$

Inoltre, se V è una funzione di Lyapunov (*smooth*) per il sistema, la sua derivata rispetto al tempo \dot{V} corrisponde a $L_{\mathbf{f}} V$.



Definizione 13 *Un campo vettoriale smooth $\Phi = \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ definito in una regione $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ è chiamato **diffeomorfismo** se la sua inversa Φ^{-1} esiste ed è smooth*



NOTA 1: un diffeomorfismo permette di effettuare una trasformazione “coerente” delle variabili di stato di un sistema nonlineare. Il fatto che sia invertibile garantisce sempre l'esistenza di una mappa fra stati equivalenti, mentre il fatto che sia *smooth* preserva tale proprietà anche per i campi vettoriali che caratterizzano l'equazione dinamica del sistema.

NOTA 2: ponendo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u$ e trasformando lo stato con il diffeomorfismo $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, si ottiene che:

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u)$$

per cui gli elementi di $\dot{\mathbf{z}}$ hanno la forma $L_{\mathbf{f}}\Phi_i + L_{\mathbf{b}}\Phi_i u$



Linearizzazione ingresso-uscita: grado relativo



Per un sistema nonlineare SISO la soluzione del problema di linearizzazione ingresso-uscita impone innanzitutto di determinare il **grado relativo** del sistema e, soprattutto, **se questo sia definito**.

Definizione 14 *Il sistema SISO del tipo (forma affine):*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

con \mathbf{f} e \mathbf{b} smooth, **ha grado relativo** r in una regione $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ se $\forall \mathbf{x} \in \Omega$

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^i h &= 0 & 0 \leq i < r - 1 \\ L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h &\neq 0\end{aligned}$$



NOTA: il sistema potrebbe **non avere grado relativo** definito, cioè potrebbe essere $L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h \neq 0$ nell'intorno di un punto \mathbf{x}_0 , punto nel quale tale funzione si annulla



Si supponga che il sistema nella forma precedente abbia grado relativo 1 in una certa regione Ω . Questo significa che derivando rispetto al tempo l'uscita:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f} + \mathbf{b}u) = L_{\mathbf{f}} h + L_{\mathbf{b}} h u$$

Poichè per definizione $L_{\mathbf{b}} h \neq 0$ in Ω , in questa regione è possibile, imponendo la legge di controllo:

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{b}}} (v - L_{\mathbf{f}} h)$$

ottenere la relazione ingresso-uscita lineare $\dot{y} = v$.



Se il sistema dovesse avere grado relativo $r > 1$ in Ω , sarebbe necessario derivare r l'uscita per ottenere la relazione con l'ingresso. Questo significa che:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= L_f h + L_b h u \\ \ddot{y} &= L_f^2 h + L_b L_f h u \\ &\dots \\ y^{(r)} &= L_f^r h + L_b L_f^{r-1} h u\end{aligned}$$

Definendo una legge di controllo:

$$u = \frac{1}{L_b L_f^{r-1} h} (v - L_f^r h)$$

si ottiene $y^{(r)} = v$



Supponendo ora di definire un **diffeomorfismo** avente la seguente struttura:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = [h \quad L_f h \quad L_f^2 h \quad \dots \quad L_f^{r-1} h \quad \Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_n(\mathbf{x})]$$

si ottiene il sistema trasformato:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= L_f h &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h &= z_3 \\ &\dots & \\ \dot{z}_{r-1} &= L_f^{r-1} h &= z_r \\ \dot{z}_r &= L_f^r h + L_b L_f^{r-1} h u\end{aligned}$$

con uscita $y = z_1$, linearizzabile con la legge di controllo descritta in precedenza.



NOTA: Per le rimanenti $n - r$ variabili di stato, si può dimostrare che se r è strettamente minore di n è sempre possibile trovare una forma per i rimanenti elementi del diffeomorfismo non assegnati esplicitamente in precedenza:

$$\Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_n(\mathbf{x})$$

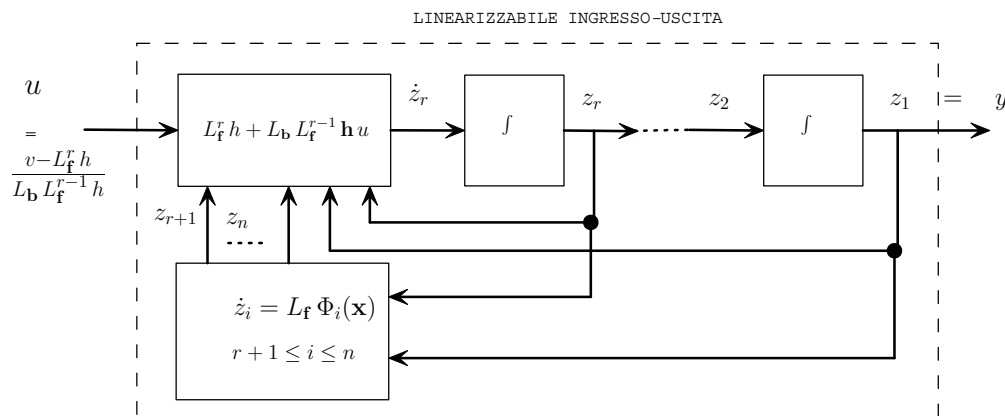
in modo tale che sia $L_b \Phi_i(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $r + 1 \leq i \leq n$. In base a questa proprietà:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= L_f \Phi_{r+1} + L_b \Phi_{r+1} u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f \Phi_n + L_b \Phi_n u \end{aligned}$$

Le $n - r$ nuove variabili di stato ottenute con questa trasformazione costituiscono quindi la **dinamica interna** del sistema linearizzato, dalla cui stabilità dipende l'effettiva utilità pratica della linearizzazione.



Per concludere, è possibile ottenere la *linearizzazione ingresso-uscita* in Ω del sistema tramite $u = (v - L_f^r h) / L_b L_f^{r-1} h$, ottenendo che $y^{(r)} = v$ e, nel contempo, una *linearizzazione parziale ingresso-stato*:



Note conclusive sulla *feedback linearization*

- Se $r = n$, cioè il grado relativo è pari all'ordine del sistema, la linearizzazione ingresso-stato è **completa**!
- Se l'obiettivo è proprio la linearizzazione ingresso-stato completa, ma non è possibile ottenerla tramite l'uscita "naturale" (i.e. misurabile) del sistema, la formalizzazione matematica del problema prevede di definire una uscita "fittizia", rispetto alla quale il sistema abbia grado relativo $r = n$.
- Ovviamente, l'effettiva possibilità di definire tale uscita fittizia dipende dal fatto che il modello nonlineare abbia determinate proprietà matematiche, basate sulla teoria della geometria differenziale e dell'algebra di Lie (qui non considerate).



Esempio: robot con giunto flessibile



$$I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau(= u)$$

con M massa del link, L distanza del baricentro dall'asse di giunto, I inerzia del link rispetto all'asse di giunto e J inerzia del rotore del motore



Le equazioni dinamiche sono riconducibili alla forma affine $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{b}u$ se poniamo $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^T$ e:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \begin{bmatrix} x_2 & -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) & x_4 & \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Ipotizzando di considerare come uscita $y = x_1 = q_1$, cioè la posizione angolare del link, otteniamo che:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ y^{(3)} &= -\frac{MgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - \underbrace{x_4}_{\text{N.B.}}) \\ y^{(4)} &= \cdots + \frac{k}{I} \dot{x}_4 = a(\mathbf{x}) + \frac{k}{IJ} u\end{aligned}$$



Il sistema ha quindi grado relativo **ben definito** ($k/(IJ) \neq 0$ sempre!), pari a 4, cioè all'ordine del sistema, che è quindi **linearizzabile completamente** attraverso la legge di controllo:

$$u = \frac{IJ}{k} [v - a(\mathbf{x})]$$

nella quale (ahinoi):

$$a(\mathbf{x}) = \frac{MgL}{I} \sin x_1 \left(x_2^2 + \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I} \right) + \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \left(\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I} \cos x_1 \right)$$



Estensione ai sistemi MIMO

Per un sistema del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

nel quale \mathbf{B} è una matrice $n \times m$ le cui colonne sono campi vettoriali *smooth*, il grado relativo, se definito, non è uno scalare, ma un vettore (r_1, r_2, \dots, r_m) , per il quale la sommatoria $r = r_1 + r_2 + \dots + r_m$ è detto *grado relativo totale*.

Il problema di linearizzazione si risolve nel caso MIMO in modo analogo a quanto visto per il caso SISO, con la ovvia differenza che per ogni componente dell'uscita y_i saranno necessarie r_i derivazioni successive rispetto al tempo (fino a ottenere la relazione con \mathbf{u}) e la determinazione delle opportune trasformazioni di stato.



Procedendo con le derivazioni, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \dots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

con $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ matrice $m \times m$ definita in termini delle $L_{\mathbf{b}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i$ (i indice dell'uscita, j indice dell'ingresso) e chiamata **matrice di disaccoppiamento**

Se il sistema ha grado relativo definito in un certo $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, la matrice $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ è invertibile in Ω , quindi il sistema è linearizzabile.

NOTA: questa proprietà è sempre verificata, come visto in precedenza, per una ampia classe di sistemi meccanici che include tutti i robot manipolatori seriali!



Controllo in Sliding Mode

- La teoria del controllo in **Sliding Mode** ha come obiettivo la **robustezza** del controllore nei confronti di disturbi e/o incertezze di modellazione del sistema controllato
- Si cerca di raggiungere l'obiettivo forzando il sistema in retroazione a raggiungere un regime di **Sliding Mode**, tipico dei **sistemi a struttura variabile** (*Variable Structure Systems, VSS*)
- Teoricamente, una volta raggiunto lo Sliding Mode, il sistema rimarrà **sempre** in tali condizioni (anche con disturbi o errori di modellazione entro limiti ipotizzati) \Rightarrow il regime di Sliding Mode è caratterizzato da un **insieme invariante** per la dinamica del sistema
- Tali condizioni ideali sono mantenute introducendo nell'azione di controllo una componente in **commutazione a frequenza infinita!**



Sistemi a Struttura Variabile (VSS)

In generale, un sistema con:

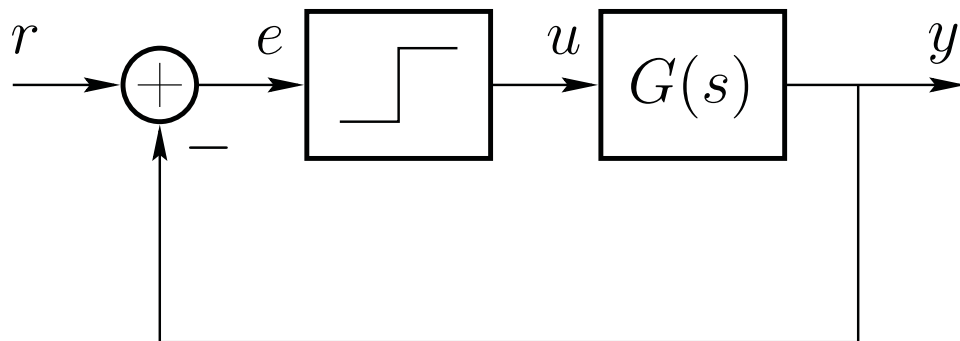
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ \mathbf{u} &= [u_1(\mathbf{x}, t) \quad u_2(\mathbf{x}, t) \quad \dots \quad u_m(\mathbf{x}, t)]^T \\ u_i &= \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}, t) & \text{se } s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}, t) & \text{se } s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) &= [s_1(\mathbf{x}) \quad s_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad s_m(\mathbf{x})]^T\end{aligned}$$

è un VSS la cui struttura varia in modo discontinuo in corrispondenza di m superfici ($s_i(\mathbf{x}) = 0$) nello spazio degli stati.



Semplice VSS: controllo ON/OFF

Comune nei controlli di temperatura, di livello, ecc.



Altro esempio di VSS interessante (rappr. grafica nel piano delle fasi):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + a\dot{x} + bx &= u \\ u &= -K|x|sign(s) \\ s &= cx + \dot{x}\end{aligned}$$

Le traiettorie nel piano delle fasi si ottengono componendo quelle di due sistemi lineari (con $u = Kx$ e con $u = -Kx$), commutando fra uno e l'altro in corrispondenza della retta $s = 0$ ($sign(s) = \pm 1$ se $s \gtrless 0$) e dell'asse x :

\Rightarrow



Quando le traiettorie raggiungono la retta $s = 0$, la dinamica è unicamente governata dall'equazione $cx + \dot{x} = 0$: lo stato del sistema tende all'origine, **scivolando** sulla “**superficie**” $s = 0$ (*sliding surface*). Se K è sufficientemente grande, la condizione di Sliding Mode è insensibile ai disturbi $\Rightarrow s = 0$ è un **insieme invariante**

In generale:



Note sullo Sliding Mode

- Il controllo in Sliding Mode (con VSS) è una estensione del tradizionale controllo **on/off** (relè) o **bang-bang**
- In Sliding Mode, la componente discontinua del controllo ha una uscita di valore finito, in relazione ad un ingresso s (quasi) nullo \Rightarrow **guadagno elevato** (teoricamente ∞)
- In Sliding Mode, le traiettorie sono caratterizzate da una dinamica di *ordine inferiore* a quella del sistema completo \Rightarrow **semplificazione del problema di inseguimento**
- Dal punto di vista tecnologico, vi sono alcuni campi di applicazione “naturale”: azionamenti elettrici (convertitori di potenza intrinsecamente **switching**), iniezione carburante (feedback “binario” da sonda λ), ecc.



Progetto di controllo in Sliding Mode

Si consideri il sistema SISO in forma canonica di controllabilità (*companion*):

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u + d(t)$$

con $f(\mathbf{x}, t)$ e $b(\mathbf{x}, t)$ non note con precisione e $d(t)$ un disturbo limitato.

NOTA: la dinamica è tipica di applicazioni industriali di **motion control**, con x posizione di un cinematismo, u coppia di un motore e $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \dots x^{(n-1)}]^T$ vettore di stato.

Si desidera risolvere il problema di inseguimento della traiettoria $\mathbf{x}_d(t) = [x_d \ \dot{x}_d \ \dots x_d^{(n-1)}]^T$ in modo **robusto** rispetto al disturbo d ed all'incertezza sul modello di f e b .

Ponendo $e = x - x_d$ (errore di posizione) ed $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [e \ \dot{e} \ \dots e^{(n-1)}]^T$ vettore "errore di inseguimento", il problema di tracking si può ricondurre a quello di stabilizzazione di una superficie di sliding



Si definisce la superficie tempo-variante $S(t) \in \mathbf{R}^n$ attraverso la seguente equazione scalare:

$$s(\mathbf{e}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e = 0$$

con $\lambda > 0$. Ad esempio, se $n = 2$ (caso tipico):

$$s = \dot{e} + \lambda e$$

mentre se $n = 3$:

$$s = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e$$

Il problema n-dimensionale di inseguimento di $\mathbf{x}_d(t)$ diventa quindi il problema monodimensionale di **rendere invariante** $S(t)$, definita da $s(\mathbf{e}, t) = 0$



Note sulla superficie $S(t)$

- La funzione scalare $s(e, t)$ esprime una misura dell'errore di inseguimento, per cui mantenendo limitata questa si mantiene limitato l'errore sulla "uscita" (x) e su tutte le sue derivate:

$$|s| \leq \phi \quad \Rightarrow \quad |e^{(i)}| \leq 2^i \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}}$$

- La distanza di uno stato \mathbf{x} dalla superficie S è misurata da s^2
- L'obiettivo del controllo è rendere S invariante ed attrattiva, cioè t.c. che s^2 sia decrescente lungo tutte le traiettorie del sistema
- Una volta su S , le traiettorie del sistema sono definite dalla stessa equazione $s = 0$, per cui l'errore di inseguimento tende esponenzialmente a 0 con costante di tempo $(n-1)/\lambda$



Ipotesi di robustezza

Si desidera progettare la legge di controllo in modo che sia verificata la seguente:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$$

In questo modo, con condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{x}_d(t_0)$, la superficie S è raggiunta in un tempo finito inferiore a $|s(t_0)|/\eta$

Per garantire la robustezza nei confronti di disturbi e incertezze, l'azione di controllo deve essere ad *alto guadagno*, cioè discontinua rispetto a S (proporzionale a $\text{sign}(s)$)

Il coefficiente moltiplicativo del termine discontinuo deve essere t.c. la disuguaglianza precedente sia verificata con disturbi e incertezze **limitate superiormente** (entro limiti fissati per ipotesi)



Si consideri ad esempio, la dinamica del secondo ordine ($n = 2$):

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + u$$

con f non nota con precisione, ma stimata da una funzione \hat{f} . L'errore di stima è per ipotesi limitato da una funzione nota $F(x, \dot{x}, t)$:

$$|\hat{f} - f| \leq F$$

Data la traiettoria di riferimento $x_d(t)$, si definisce la superficie di sliding:

$$s = \dot{e} + \lambda e = 0$$

che deve essere resa invariante risolvendo rispetto a u l'equazione $\dot{s} = 0$:

$$\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = 0$$



Poichè f non è nota in modo preciso, la migliore approssimazione disponibile del controllo "ideale" è:

$$\hat{u} = \ddot{x}_d - \hat{f} - \lambda \dot{e}$$

Inoltre, per imporre che il sistema sia in Sliding Mode su $s = 0$, occorre aggiungere a \hat{u} un termine discontinuo:

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sign}(s)$$

con $k = k(x, \dot{x}, t)$ tale da garantire l'attrattività di $s = 0$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = \dot{s} \cdot s = [f - \hat{f} - k \operatorname{sign}(s)] \cdot s = (f - \hat{f})s - k|s| \leq -\eta|s|$$

perciò $k \geq F + \eta$



Note sul lucido 136



Si noti che per la dinamica dell'errore, la funzione:

$$V = \frac{1}{2} s^2$$

rappresenta anche una funzione di Lyapunov grazie quale è possibile dimostrare la stabilità di $s = 0$ e, soprattutto, la robustezza di tale stabilità. Infatti, la derivata di V rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{s} \cdot s$$

deve essere definita negativa $\forall s \neq 0$. Questo significa che quando $s > 0$ deve essere $\dot{s} < 0$ e viceversa. Pertanto, poichè la \dot{s} dipende in modo diretto dalla legge di controllo u , è necessario che questa sia discontinua rispetto a $s = 0$, cioè proporzionale a $\text{sign}(s)$. Per la robustezza, il coefficiente di proporzionalità va progettato, come si è visto, in relazione all'ipotesi peggiore sull'errore di modellazione della dinamica del sistema.



Estensioni delle considerazioni di robustezza



Se la dinamica del sistema è affetta da un disturbo $d(t)$, limitato per ipotesi da:

$$|d(t)| \leq D$$

con D costante, per avere Sliding Mode robusto rispetto a d è sufficiente scegliere:

$$k \geq F + D + \eta$$

con F determinato come visto in precedenza.



Estensioni delle considerazioni di robustezza - 1

Se il controllo entra nella dinamica moltiplicato per una funzione incerta $b(\mathbf{x}, t)$ è necessario ipotizzarne i limiti:

$$0 < b_{min} \leq b \leq b_{max}$$

La migliore stima di b è la *media geometrica* $\hat{b} = \sqrt{b_{min} b_{max}}$, per cui la legge di controllo diventa:

$$u = \hat{b}^{-1}[\hat{u} - k \operatorname{sign}(s)]$$

con:

$$k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1)|\hat{u}|$$

$$\text{e } \beta = \sqrt{\frac{b_{max}}{b_{min}}} \text{ chiamato } \textit{margine di guadagno} \text{ } (\beta^{-1} \leq \hat{b}/b \leq \beta)$$



Note sul lucido 138



Per un sistema in forma canonica di controllabilità:

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u$$

è evidente che la legge di controllo ideale per ottenere inseguimento perfetto e, di conseguenza, $s(t) = 0 \forall t$, sarebbe quella basata sulla inversione dinamica (**precisa**):

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x})}[\ddot{x}_d - f(\mathbf{x}_d)]$$

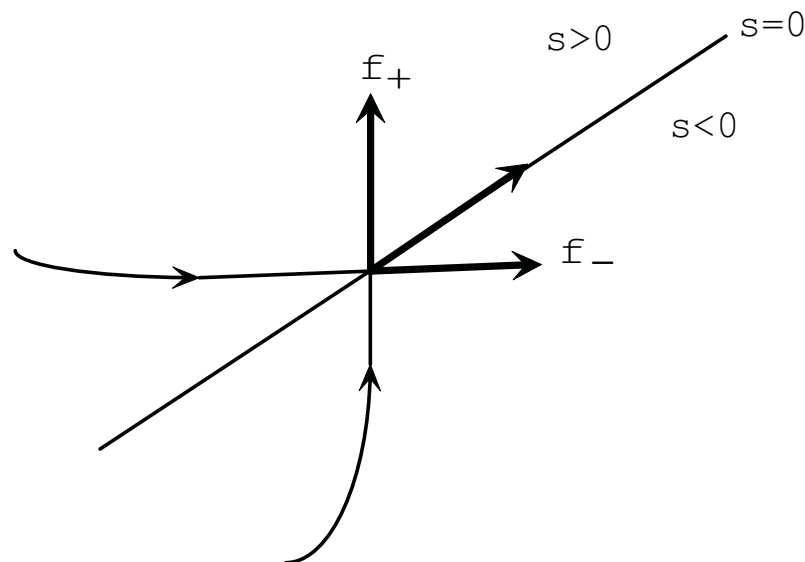
Poichè tale controllo non è realizzabile direttamente a causa dei disturbi e delle incertezze su f e b , essa viene ottenuta attraverso una sequenza di commutazioni a frequenza infinita tra le traiettorie di due differenti dinamiche (*strutture*) dello stato, traiettorie tangenti ai vettori (in \mathbf{R}^2):

$$\mathbf{f}_+ = [\dot{x} \quad f + b u_+]^T$$

$$\mathbf{f}_- = [\dot{x} \quad f + b u_-]^T$$

come rappresentato graficamente nella figura seguente.



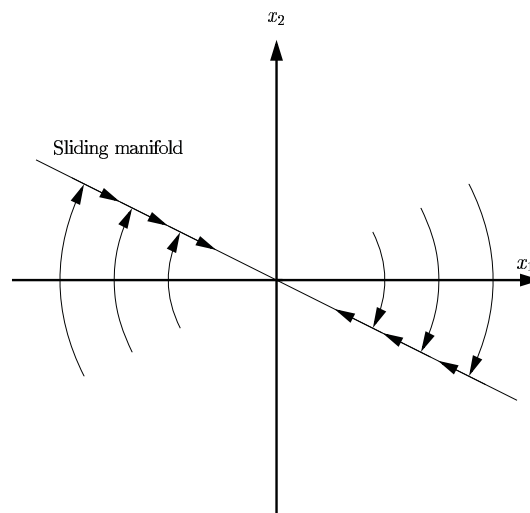


Mediamente, il comportamento a regime ottenuto con il controllo in Sliding Mode e quello ottenuto con la perfetta inversione dinamica sono identici. D'altra parte, anche la possibilità di ottenere commutazione infinita è una ipotesi non fisicamente realizzabile. Ciò nonostante, il progetto di controllo in Sliding Mode permette di tenere in considerazione in modo esplicito la presenza di disturbi e incertezze di modellazione, un aspetto che con altre tecniche (v. Feedback Linearization) non può essere trattato direttamente.

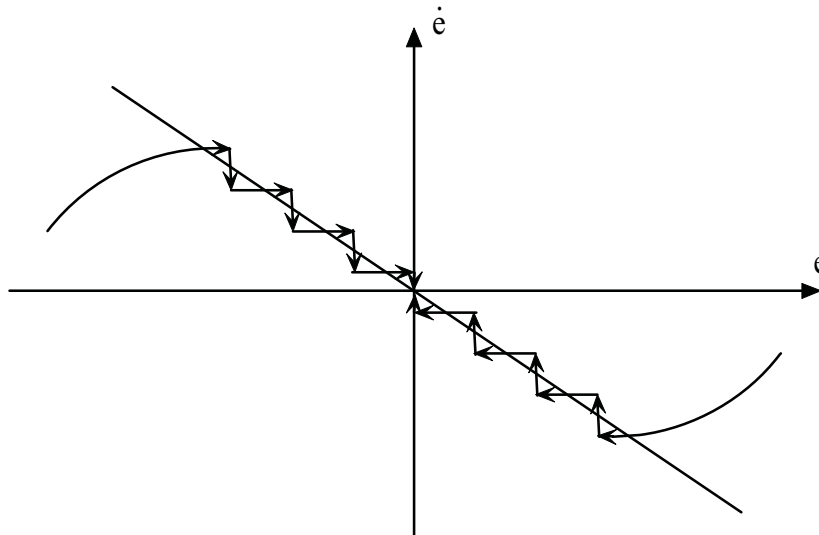


Il problema di *chattering*

Con il controllo in Sliding Mode, le traiettorie del sistema sono sempre caratterizzate da un tratto di *raggiungimento* della superficie S e da un tratto di *scivolamento* verso $e = 0$ ($x_1 = e$ e $x_2 = \dot{e}$ in figura):



La condizione di scivolamento è mantenuta a patto di poter commutare istantaneamente il controllo attraversando S . Se, come accade forzatamente nella pratica, la commutazione non è istantanea, insorge un fenomeno di **chattering**:



Cause e soluzioni del chattering

- **Cause:**

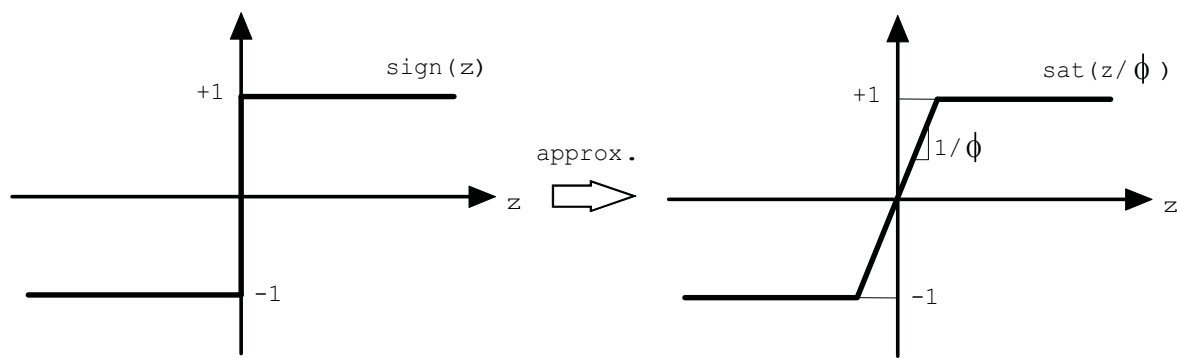
- Ritardo implicito nella realizzazione digitale (risolvibile con progetto direttamente nel dominio tempo discreto)
- Dinamiche “parassite” non trascurabili nell’attuatore o nei trasduttori

- Chiaramente, il chattering è da evitare nelle realizzazioni pratiche (es. eccessiva sollecitazione strutture meccaniche) \Rightarrow **Soluzioni:**

1. **introduzione di un Boundary Layer:** approssimazione del guadagno infinito in prossimità di S con guadagno finito ($\text{sat}(s/\phi)$ al posto di $\text{sign}(s)$)
2. **utilizzo di osservatori asintotici dello stato** come anello di by-pass delle dinamiche parassite



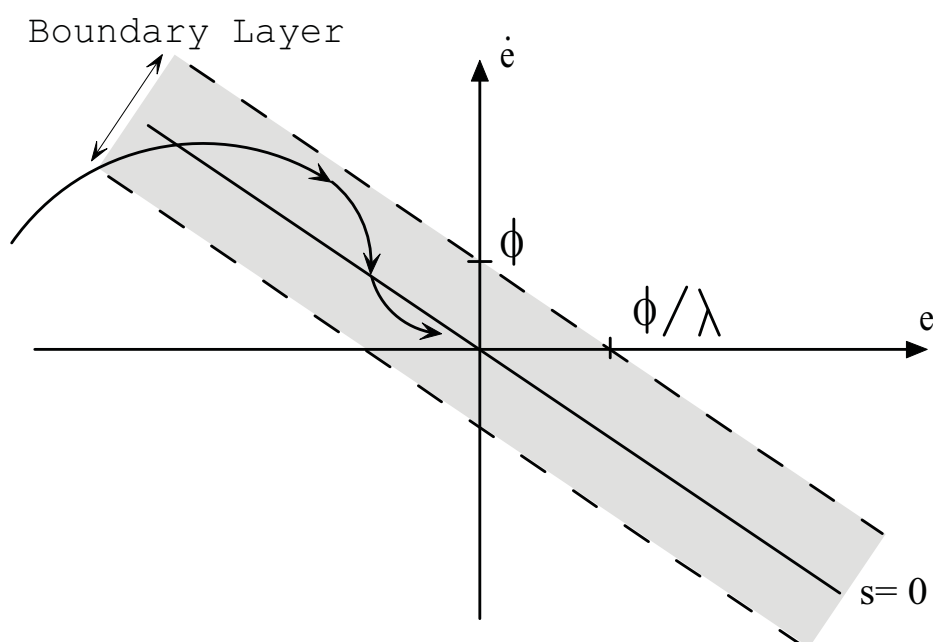
Boundary Layer: *smoothing* del controllo



In questo modo, la condizione $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$ garantisce "solo" $|s| \leq \phi$



Traiettorie all'interno del Boundary Layer



Note sul Boundary Layer

- Considerando $s = \dot{e} + \lambda e$, l'introduzione del Boundary Layer equivale a trasformare la componente switching del controllo in un termine di feedback lineare PD ad elevato guadagno ($K_d = 1/\phi$ e $K_p = \lambda/\phi$) con saturazione.
- Il feedback può essere di tipo PID se si considera come variabile di interesse $\int_0^t e(\tau) d\tau$ anzichè e (**controllo integrale**). In tal caso (ponendo $n = 3$ nella determinazione dell'espressione di S):

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \left(\int_0^t e(\tau) d\tau \right) = \dot{e} + 2\lambda e + \lambda^2 \int_0^t e(\tau) d\tau$$

- **Parametri di progetto:** η = “*margin di robustezza*”, λ = “*banda passante*” della dinamica su S , ϕ = “*compromesso*” tra sliding ideale ed eliminazione del chattering



Esempio: stabilizzazione robusta del pendolo

Si consideri il modello del pendolo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R} \sin x_1 - \frac{B}{MR^2} x_2 + \frac{u}{MR^2}\end{aligned}$$

con $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e $u = \tau$ coppia attuata alla base. Il modello è in forma canonica di controllabilità $\ddot{x}_1 = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}) u$, ponendo:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{R} \sin x_1 - \frac{B}{MR^2} x_2 \\ b(\mathbf{x}) &= \frac{1}{MR^2}\end{aligned}$$

Se supponiamo che i parametri siano noti con scarsa precisione:

$$R_{min} \leq R \leq R_{max} \quad M_{min} \leq M \leq M_{max} \quad B_{min} \leq B \leq B_{max}$$



□□ e che siano ipotizzati i valori nominali \hat{R} , \hat{M} e \hat{B} , si avrà: □□

$$\hat{f} = -\frac{g}{\hat{R}} \sin x_1 - \frac{\hat{B}}{\hat{M}\hat{R}^2} x_2$$

e

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{1}{M_{max}R_{max}^2} \frac{1}{M_{min}R_{min}^2}}$$

Supponendo per semplicità che almeno la lunghezza del pendolo sia misurabile precisamente, si può ottenere il limite sull'errore di stima di f come:

$$|\hat{f} - f| \leq \left(\frac{B_{max}}{M_{min}R^2} - \frac{\hat{B}}{\hat{M}R^2} \right) |x_2| = k_1 |x_2| = F$$



□□ Inoltre, anche per la componente del controllo \hat{u} si può inoltre ipotizzare un funzione limite, considerando che: □□

$$\hat{u} = \ddot{x}_d - \hat{f} - \lambda \dot{e}$$

in questo caso diventa:

$$\hat{u} = \frac{g}{\hat{R}} \sin x_1 + \frac{\hat{B}}{\hat{M}\hat{R}^2} x_2 - \lambda x_2$$

per cui:

$$|\hat{u}| \leq \frac{g}{\hat{R}} + \left(\frac{\hat{B}}{\hat{M}\hat{R}^2} + \lambda \right) |x_2| = k_2 + k_3 |x_2|$$





Concludendo, si può progettare la legge di controllo:



$$u = \hat{b}^{-1}[\hat{u} - k \operatorname{sign}(s)]$$

con $s = x_1 + \lambda x_2$ e:

$$k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1)|\hat{u}|$$

$$\beta = \sqrt{\frac{M_{\max} R_{\max}^2}{M_{\min} R_{\min}^2}}$$

che in questo caso diventa:

$$k \geq \beta(k_1|x_2| + \eta) + (\beta - 1)(k_2 + k_3|x_2|) = k'_1 + k'_2|x_2|$$



Esempio: problema di inseguimento



Si consideri il generico sistema:

$$\ddot{x} = -a(t) \dot{x}^2 \cos 3x + u$$

nel quale $a(t)$ è una funzione incerta che però verifica $1 \leq a(t) \leq 2$. In questo caso si ha:

$$\hat{f} = -1.5 \dot{x}^2 \cos 3x$$

$$|\hat{f} - f| \leq 0.5 \dot{x}^2 |\cos 3x| \leq 0.5 \dot{x}^2 = F$$

Ponendo $s = \dot{e} + \lambda e$ (con $e = x - x_d$) si ottiene che:

$$\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = -a(t) \dot{x}^2 \cos 3x + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}$$





per cui la legge di controllo deve essere:



$$u = \hat{u} - k \operatorname{sign}(s)$$

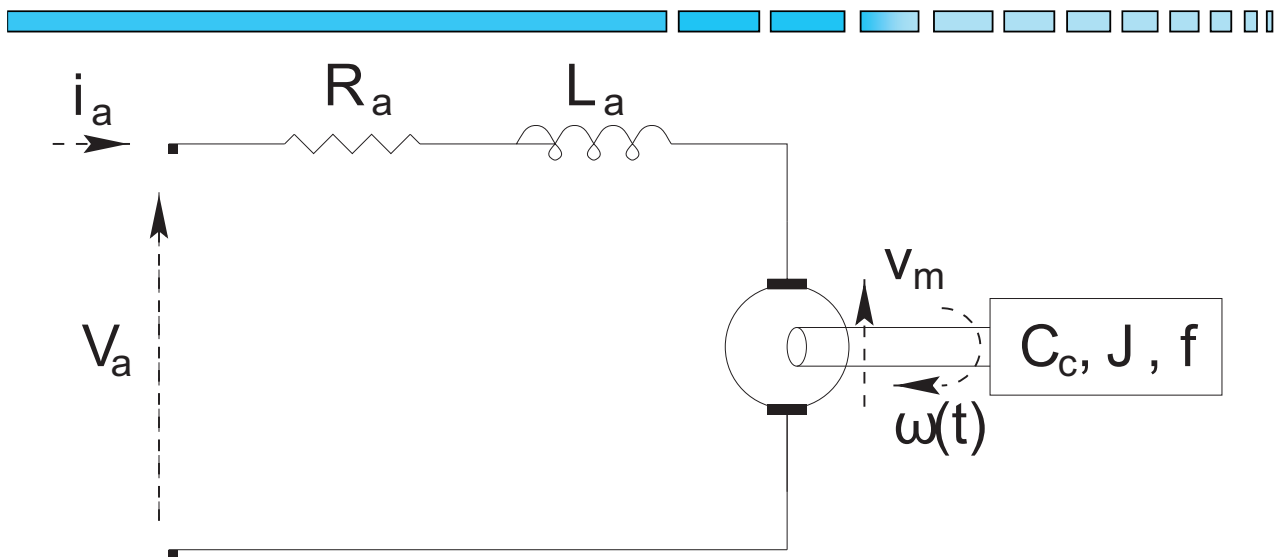
con

$$\hat{u} = \ddot{x}_d - \hat{f} - \lambda \dot{e} = \ddot{x}_d + 1.5 \dot{x}^2 \cos 3x - \lambda \dot{e}$$

$$k = F + \eta = 0.5 \dot{x}^2 + \eta$$



Esempio: controllo di motori elettrici DC



Modellazione motore DC

Date le equazioni:

$$\begin{aligned} L_a \frac{di_a}{dt} &= -i_a R_a - k_m \omega + V_a \\ J \frac{d\omega}{dt} &= k_m i_a - C_c \end{aligned}$$

considerando come ingresso $u = V_a$ e come variabili di stato $x_1 = \omega$ ed $x_2 = \dot{\omega}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_m^2}{L_a} x_1 - \frac{R_a}{L_a} x_2 - \left(\frac{R_a}{J L_a} C_c + \frac{\dot{C}_c}{J} \right) + \frac{k_m}{J L_a} u \end{aligned}$$

Considerando una traiettoria di riferimento $\omega_0(t)$ e l'errore di inseguimento $e = \omega_0 - \omega$, si può definire la superficie di sliding $s = \dot{e} + \lambda e$.



Per ottenere la condizione di Sliding Mode, si può imporre al motore la tensione discontinua:

$$u = V_0 \operatorname{sign}(s)$$

nella quale V_0 è una costante sufficientemente grande, determinata da:

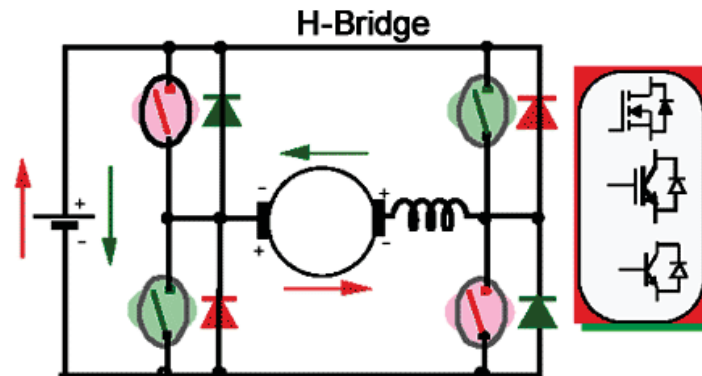
$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{\omega}_0 - \ddot{x}_1 + \lambda \dot{\omega}_0 - \lambda \dot{x}_1 \\ &= \ddot{\omega}_0 + \lambda \dot{\omega}_0 - \lambda \dot{x}_1 + \frac{k_m^2}{L_a} x_1 + \frac{R_a}{L_a} x_2 + \left(\frac{R_a}{J L_a} C_c + \frac{\dot{C}_c}{J} \right) - \frac{k_m}{J L_a} V_0 \operatorname{sign}(s) \end{aligned}$$

Per rendere s ed \dot{s} sempre di segno opposto, è necessario che sia sempre:

$$\frac{k_m}{J L_a} V_0 \geq \left| \ddot{\omega}_0 + \lambda \dot{\omega}_0 - \lambda \dot{x}_1 + \frac{k_m^2}{L_a} x_1 + \frac{R_a}{L_a} x_2 + \left(\frac{R_a}{J L_a} C_c + \frac{\dot{C}_c}{J} \right) \right|$$



Tipicamente, un motore elettrico DC può essere controllato con tensione discontinua, tramite convertitori di potenza a commutazione (H-Bridge) del tipo:



Il progetto di controllo in Sliding Mode permette quindi di determinare la tensione del ponte necessaria per avere perfetto inseguimento di velocità.

NOTA: Per raggiungere tale condizione ideale è necessario misurare l'accelerazione del motore, ottenibile solo per via indiretta (corrente) o con osservatori!