$+$ $\times$

$-$ $\div$

Kurs I

Algebraische Grundlagen der Informatik

1. Mengen. Abbildungen. Relationen

1.1 Logische Grundlagen

- negation

Bsp

p	q	r	$p \land q$	$(p \land q) \land r$	$(q \land r)$	$p \land (q \land r)$	$(\Leftrightarrow)$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$(p \land q) \land r \Leftrightarrow p \land (q \land r) \Rightarrow 1$

1.2 Mengen

- analytische und synthetische Definition

$\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 4\}$

- die Reihenfolge der Elemente ist unerheblich : $\{1,2\} = \{2,1\}$
- Widerspruch : $R \in R$? $\Rightarrow x := R \Rightarrow x \in R \Rightarrow R \in R \Rightarrow R \notin R$

$R \notin R \Rightarrow R \in R$

↳ Wir schreiben $A = \{x \in U \mid P(x)\}$ und nicht $A = \{x \mid P(x)\}$ (Axiomatisierung)

- $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B \land A \neq B$

$A \subsetneq B$

- <u>Bsp</u> → Transitivität $\Rightarrow A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$p :=$ "$x \in A$" $\quad q :=$ "$x \in B$", $r :=$ "$x \in C$"

$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

→ $\emptyset \subseteq A$

$p :=$ "$x \in \emptyset$", $q :=$ "$x \in A$"

$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow p \Rightarrow q$

$\left.\begin{array}{l} \emptyset \subseteq A \Leftrightarrow p \Rightarrow q \\ p \text{ ist immer falsch} \end{array}\right\} \Rightarrow p \Rightarrow q$ ist immer wahr

Sei $\emptyset$ und $\emptyset'$ zwei Mengen die beide leer sind

$\overset{d)}{\Rightarrow} \Rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset'$

$\overset{d)}{\Rightarrow} \emptyset \subseteq A, \forall A \Leftrightarrow \emptyset' \subseteq \emptyset \Rightarrow \emptyset'$ ist leer

- de Morgan

$\{1,2\} = \{2,1\}$

$(1,2) \neq (2,1)$

$(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$

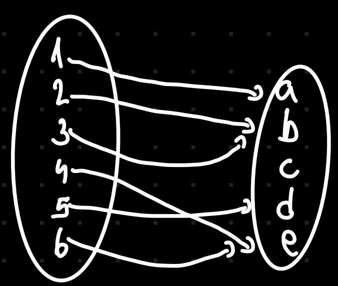
oder

$(a,b) := \{a, \{b\}\}$

$\{b\} \in \{a, \{b\}\}$

$b \notin \{a, \{b\}\}$

- Bsp $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$



10.10.2022

<u>Übung</u>

$f: A \to B$

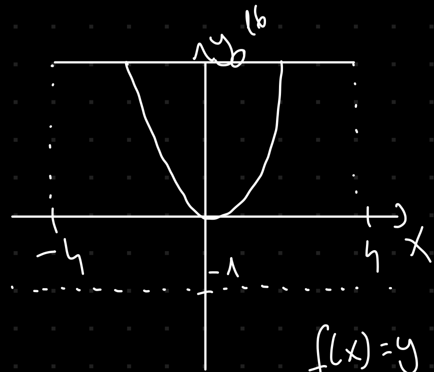
- injektiv $x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2 \to f_1(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- surjektiv $\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$
- bijektiv f ist inj und surj.

> in diesem Fall $\exists f^{-1} B \to A$ und $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow x$ ist die einzige Lösung der Gleichung $f(x) = y$

1.3.35

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \neq -4 \\ f(4) = 4^2 = 16 = f(-4) \end{array} \right\} f_1 \text{ ist nicht injektiv}$$



$f(x) = y$

$f_1(x) = x^2 \geq 0 \Rightarrow y = -1 \; \nexists x \in \mathbb{R} : f_1(x) = -1 \to f_1(x)$ ist nicht surjektiv

2) $f_2 [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$, f_2 nicht surjektiv (Hsfg)

$$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2 \in [0, \infty) \quad f_2(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2$$

f_2 ist inj

3) f_3 ist nicht injektiv (H.A)

$\forall y \in [0, \infty)$ $f_3(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$, $x = \pm\sqrt{y}$, $\exists \sqrt{y} \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ist surj.

4) Sei $y \in [0, \infty)$

$f_4(x) = y$

$x^2 = y$

$\Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow \exists \sqrt{y} \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{y} \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{y} \; (\text{f genau eine Lösung})$$

$f_4^{-1} : \underbrace{[0, \infty)}_{\text{Defbereich}} \to \underbrace{[0, \infty)}_{\text{Wertbereich}} \to \underbrace{f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}}_{\text{Regel}}$

derivab. și cont sunt locale, în jurul unui punct

1.3.36

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{falls } x\le 1 \\ x+2, & \text{falls } 1<x \end{cases}$

a) $x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1)=f(x_2)$

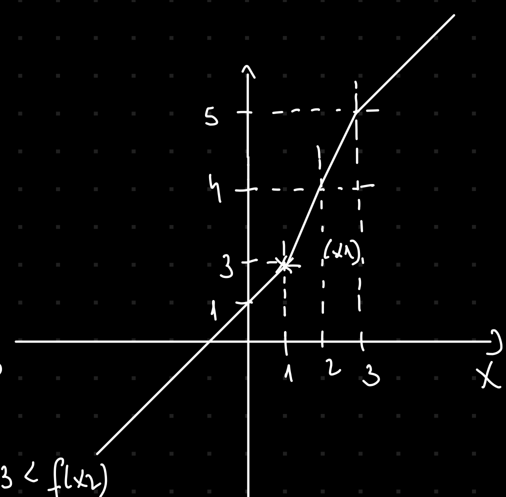
Fall I. $x_1, x_2 \le 1 \Rightarrow f(x_1) = 2x_1+1 = 2x_2+1 \mid -1$

$2x_1 = 2x_2 \mid :2$

$x_1 = x_2$

Fall II. $x_1 x_2 > 1 \quad x_1+2 = x_2+2 \mid -2$

$x_1 = x_2$



Fall III : $x_1 \le 1,\ x_2 > 1 \Rightarrow 2x+1 = x_2+2$

$x_1 \le 1 \Rightarrow f(x_1) = 2\cdot x_1 + 1 \le 2+1 = \underset{\overset{\|}{f(1)}}{3}$

$x_2 > 1 \Rightarrow f(x_2) = 1+2 < x_2+2 \Rightarrow 3 < f(x_2)$

Andere Methode

$V_2)$ Sei $y \in \mathbb{R}$

$f(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=y \\ x\le 1 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x+2=y \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ x \le 1 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x=y-2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} \le 1 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x=y-2 \\ y-2>1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ y \le 3 \end{cases}$ oder $\begin{cases} x=y-2 \\ y>3 \end{cases}$

Bem: $\forall y \in \mathbb{R} = (-\infty,3] \cup (3,\infty) \Leftrightarrow \exists!\, x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ d.h $f(x)=y \Rightarrow f$ ist bij.

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & y\le 3 \\ y-2, & y>3 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \not\Rightarrow f \text{ ist streng steigend} \Rightarrow f \text{ ist inj}$$

!FALSCH

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ x+2, & 0 < x \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+1 = y \\ x \leq 0 \end{cases} \,\|\, \begin{cases} x+2 \\ 0 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ x \leq 0 \end{cases} \,\|\, \begin{cases} x = y-2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} \leq 0 \end{cases} \,\|\, \begin{cases} x = y-2 \\ y-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ y \leq 1 \end{cases} \,\|$$

$$\begin{cases} x = y-2 \\ y > 2 \end{cases}$$

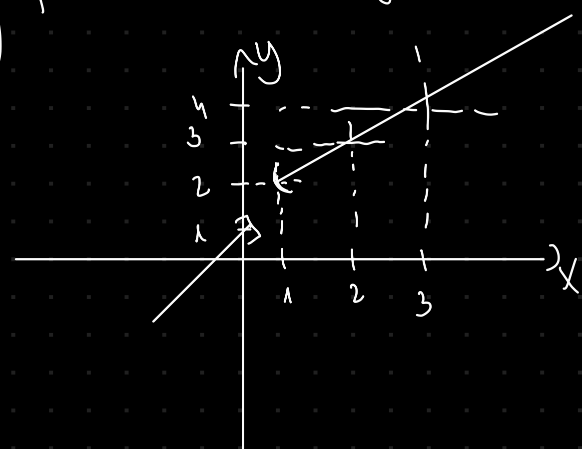
existiert eine einzige Lösung → unic

<u>Bem:</u> $y \in (-\infty, 1]$ $\exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

$y \in (2, \infty)$ $\exists! x \in \mathbb{R} ; f(x) = y$

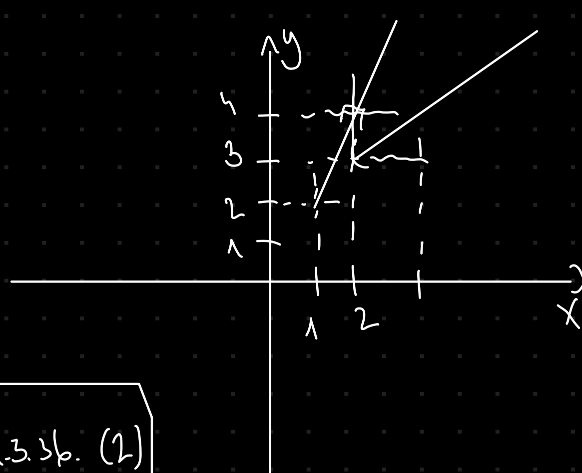
$y \in (1, 2]$ $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

f ist inj, aber nicht surj.



d) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ x+2, & x \geq 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2, & x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$



Hsfg 1.3.36. (2)

Zusammengesetzung

$f: A \to B,\ g: B \to C$

$\Rightarrow \exists\, g\circ f : A \to C$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in A$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] & & f(x) \arrow[dd] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] & \\ & C & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

<u>Bem!</u>

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \\ & \neq \\ & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$\exists\, f\circ g$

<u>Üb 1.3.37</u>

1) $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \le -1 \\ x-1, & x > -1 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 3 \\ x-2, & 3 \le x \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "\exists f\circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -f(x)+1, & f(x) < 3 \\ f(x)-2, & f(x) \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x^2-1)+1, & x^2-1<3,\ x \le -1 \\ -(x-1)+1, & x-1<3,\ x>-1 \\ (x^2-1)-2, & x^2-1 \ge 3,\ x \le -1 \\ (x-1)-2, & x-1 \ge 3,\ x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1<3 \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 < 4 \\ x \le -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2,2) \\ x \in (-\infty,-1] \end{cases} \Rightarrow x \in (-2,-1]$$

$$\begin{cases} x-1<3 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,4) \\ x\in(-1,\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,4)$$

$$\begin{cases} x^2-1\geq 3 \\ x\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geq 4 \\ x\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,2]\cup[2,\infty) \\ x\in(-\infty,-1] \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]$$

$$\begin{cases} x-1\geq 3 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 4 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[4,\infty)$$

$$\begin{cases} -x^2+2, & x\in(-4,-1] \\ -x+2, & x\in(-1,4) \\ x^2-3, & x\in(-\infty,-2] \\ x-3, & x\in[4,\infty) \end{cases}$$

$$(f\circ g)g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} [g(x)^2]-1, & g(x)\leq -1 \\ g(x)-1 & g(x)>-1 \end{cases} = \begin{cases} (-x+1)^2-1, & -x+1\leq -1, x<3 \\ (x-2)^2-1, & x-2\leq -1, x\geq 3 \\ (-x+1)-1, & -x+1>-1, x<3 \\ (x-2)-1, & x-2>-1, x\geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+1\leq -1 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x\leq -2 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in[2,3)$$

$$\begin{cases} x-2\leq -1 \\ x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} -x+1>-1 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x>-2 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)$$

$$\begin{cases} x-2>-1 \\ x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[3,\infty)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x, & x \in [2,3) \\ -x-2, & x \in (-\infty, 2) \\ x-3, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Bem: } f \circ g \neq g \circ f}$

(2)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & {[0,\infty)} \\ & \neq \\ & \mathbb{N}^* \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \nexists\, g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}^* \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "\exists f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ & (0,\infty) \end{tikzcd}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{N}^*$$

3)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "\exists g \circ f"'] & (0,\infty) \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[0,\infty)} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "\exists f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ & {[0,\infty)} \end{tikzcd}$$

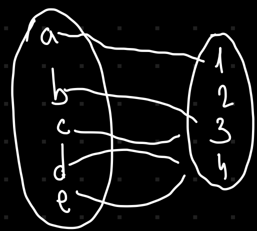
$g \circ f \neq f \circ g$ $\boxed{(H.A)}$

Amin T

KURS II

Bsp:

$f: A \to B$



$X = \{a, b\} \subseteq A$

$Y = \{3, 2\} \subseteq B$

$f(X) = \{1, 3\}$

$X' = \{a, b, c\}$

$f(X') = \{1, 3\}$

$f^{-1}(Y) = \{b, c\}$

$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

$$f(X) = \{ f(x) / x \in X \} = \{ y \in B / \exists x \in X : f(x) = y \}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & f(X) \arrow[d] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\exists g \circ f"'] \arrow[drr, dashed, bend right] & B \arrow[d, "g"] & \\
& C & g(f(X))
\end{tikzcd}$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

1.3.7

Beweis a)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] \arrow[rrr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[rrr, bend right=60, "h(g \circ f)"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

Def bereich

Wertsbereich

Sei $x \in A$

$$(h(g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$

d.h $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

b)

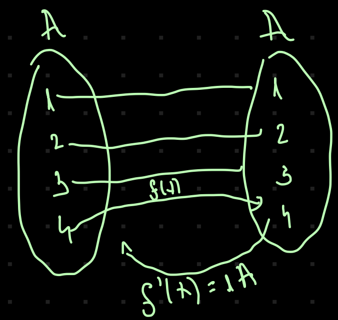
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "f\circ 1_A"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1_B\circ f"] & B \arrow[r, "1_B"] & B \end{tikzcd}$$

Sei $x\in A$: $(f\circ 1_A)(x) = f(1_A(x)) = f(x)$

$(1_B\circ f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x)$

<u>Bem:</u> $A \neq B$ dann $\nexists\, f\circ 1_B$

$\nexists\, 1_A\circ f$



$(f\circ 1_A)^x = f(1_A(x)) = f(x)$

$(1_A\circ f) = 1_A(f(x))$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "f\circ 1_A"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1_B\circ f"] & B \arrow[r, "1_B"] & B \end{tikzcd}$$

$(f\circ 1_A)(x) = f(1_A(x)) = f(x)$

$(1_B\circ f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x)$

$A \xrightarrow{f} B \neq A \xrightarrow{1_A} A$

<u>1.3.8</u>

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "f'\circ f"] & B \arrow[d, "f'"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_B"'] \arrow[dr, phantom, "f\circ f'"] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$f'\circ f = 1_A$

$f\circ f' = 1_B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "f'\circ f"] & B \arrow[d, "f'"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_B"'] \arrow[dr, phantom, "f\circ f'"] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

<u>1.3.9 Beweis</u> : Sei $f: A\to B$ umkehrbar und seien $f', f'': B\to A$ s.d. $f'\circ f = 1_A = f''\circ f$

$f\circ f' = 1_B = f\circ f''$

$B \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{1_A} A$: $f' = 1_A\circ f' = (f''\circ f)\circ f' = f''\circ(f\circ f') = f''\circ 1_B = f''$

$f^{-1} := f'$

$(f^{-1})^{-1} = f$ gilt dass die Eigenschaften die f^{-1} definieren sind symmetrisch in f und f^{-1}

Bem: $f^{-1} \circ f = 1_A$ & $f \circ f^{-1} = 1_B$

1.3.M Beweis

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & C \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left=50, "f^{-1} \circ g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Bem: $A \neq C \Rightarrow \nexists\, g^{-1} \circ f^{-1}$!!!

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \overset{?}{=} 1_A$ und $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \overset{?}{=} 1_C$

Daraus folgt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ 1_B \circ f = f^{-1} \circ f = 1_A$

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ 1_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = 1_C$

1.3.15. Beweis

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

a) Sei $x_1, x_2 \in A$ s.d.

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g \text{ inj.}}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ inj}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$

so $g \circ f$ ist inj.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Sei } z \in C \overset{g \text{ surj.}}{\Longrightarrow} \exists y \in B \Rightarrow g(y) = z \\ y \in B \overset{f \text{ surj.}}{\Longrightarrow} \exists x \in A \Rightarrow f(x) = y \end{array}\right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ ✓ $\Rightarrow g \circ f$ ist surj

d) Seien $x_1, x_2 \in A$ s.d. $f(x_1) = f(x_2)$ (in B) $\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \overset{(g \circ f) \text{ inj}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ ist inj.

e) Sei $z \in C \overset{(g\circ f)\text{ surj}}{\Longrightarrow} \exists x \in A : (g \circ f)(x) = z \Rightarrow x \in A \Rightarrow y = f(x) \in B$

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z \Rightarrow g \text{ ist surj}$$

Bem: $f : A \to B$ Funktion

$x_1, x_2 \in A \qquad x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ gilt immer

f ist inj $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Bem:

$a \neq 0 : \; a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$

1.3.16 Beweis $\to f : A \to B \quad A \neq \emptyset$

(i) f ist inj.

(ii) $\exists g : B \to A$ s.d. $g \circ f = 1A$

(iii) $A' \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \quad f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1A"'] \arrow[dr, dotted, "g\circ f"] & B \; f(x) \arrow[d, dashed, "g"] \\ & A \; g(f(x)) \end{tikzcd}$$

$1A : A \to A \quad 1A(x) = x, \; \forall x \in A$

ob ich g hätte dann $g \circ f = 1A$ ist äquiv. mit

$$(g \circ f)(x) = 1A(x), \forall x \in A \Leftrightarrow g(f(x)) = x, \; \forall x \in A$$

Das heißt ich definiere

$$y \in \operatorname{Im} f = f(A)$$

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{wobei } x \text{ ist die einzige Lösung der Gleichung } f(x) = y \text{ für } y \in \operatorname{Im} f \\ a, & \text{für } y \notin \operatorname{Im} f \end{cases}$$

$a \in A$ ist arbiträr (und a existiert da $A \neq \emptyset$)

Dann $g \circ f : A \longrightarrow A$ und $(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f}) = x$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$A' \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$$

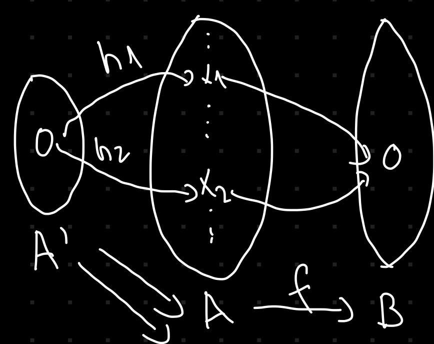
$\exists g: B \to A$ s.d. $g \circ f = 1_A$

$f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow g \circ (f \circ h_1) = g(f \circ h_2) \Rightarrow (g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2 \Rightarrow 1_A \circ h_1 = 1_A \cdot h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seien $x_1, x_2 \in A$ s.d. $f(x_1) = f(x_2)$

Sei $A' = \{0\}$ und $h_1, h_2 : A' \to A$, $h_1(0) = x_1$

$h_2(0) = x_2$



$$\left.\begin{array}{l} f \circ h_1, f \circ h_2 : A' \to B \\ (f \circ h_1)(0) = f(h_1(0)) = f(x_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \parallel \\ (f \circ h_2)(0) = f(h_2(0)) = f(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ h_1 = f \circ h_2 \overset{(iii)}{\Longrightarrow} h_1 = h_2 \Rightarrow x_1 = h_1(0) = h_2(0) = x_2 \ \boxtimes$$

f ist inj.

1.3.17 Beweis $g: B \to A$

(i) g ist surj.

(ii) $\exists f: A \to B$ s.d. $g \circ f = 1_A$

(iii) $B \xrightarrow{g} A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightrightarrows}} A'$ $\quad k_1 \circ g = k_2 \circ g \Rightarrow k_1 = k_2$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "1_A"'] \arrow[dr, dashed, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

ob ich f hätte dann $g \circ f = 1_A \Rightarrow g(f(x)) = x, \forall x \in A$

Sei $x \in A \overset{g}{\underset{\text{surj.}}{\Longrightarrow}} g^{-1}(\{x\}) = \{y \in B \mid g(y) = x\} \neq \emptyset$

Wir wählen eine Lösung der Gleichung $g(y) = x$

(ein Element im $g^{-1}(\{x\})$ sei y_x und wir setzen $f(x) = y_x$

$y_x \in g^{-1}(\{x\})$

Dann $g\circ f: A \to A$ $(g\circ f(x)) = g(f(x)) = g(y_x) = x$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightrightarrows}} A'$ $\quad k_1\circ g = k_2\circ g \Rightarrow (k_1\circ g)\circ f = (k_2\circ g)\circ f \Rightarrow k_1\circ(g\circ f) = k_2(g\circ f) \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1\circ 1_A = k_2\circ 1_A \Rightarrow k_1 = k_2$

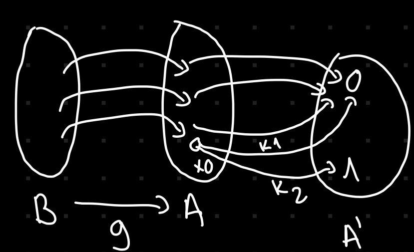
(iii) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(iii)

$g: B \to A$ ist nicht surj $\Rightarrow \exists x_0 \in A$ s.d. $g(y) \neq x_0, \forall y \in B$

sei $A' = \{0,1\}$, $k_1, k_2: A \to A'$, $k_1(x) = 0, \forall x \in A$

$$k_2(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ 1, & x = x_0 \end{cases}$$

$k_1 \neq k_2$



$$\left.\begin{array}{l} k_1\circ g,\ k_2\circ g: B \to A' \\ (k_1\circ g)(y) = k_1(g(y)) = 0 \\ (k_2\circ g)(y) = k_2(\underset{\neq x_0}{g(y)}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k_1\circ g = k_2\circ g}$$

$\neg$(iii)

- <u>Die Kardinalanzahl einer Menge</u>

1.3.9

$f: A \to B$ invertierbar

Kurs III

Korollar 1.3.25

Bew:

$ch: P(A) \to \{0,1\}^A$ ist eine Bij

Seien $X_1, X_2 \in P(A)$ s.d. $ch(X_1) = ch(X_2) \Rightarrow ch_{X_1} = ch_{X_2}$ Funktionen

$X_1, X_2 \subseteq A$ – Teilmengen

$ch_{X_1}: A \to \{0,1\}$

Sei $x \in A$

$ch_{X_2}: A \to \{0,1\}$

$x \in X_1 \Leftrightarrow$

$$ch_{X_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_1 \\ 0, & x \notin X_1 \end{cases} \qquad ch_{X_2}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_2 \\ 0, & x \notin X_2 \end{cases}$$

Sei $x \in A$

$x \in X_1 \Leftrightarrow ch_{X_1}(x) = 1 \Leftrightarrow ch_{X_2}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in X_2$; D.h. $X_1 = X_2$ so ist ch. inj.

Sei $f: A \to \{0,1\}$ und sei $X := \{x \in A \mid f(x) = 1\}$. Dann $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in X \Rightarrow ch_X(x) = 1 \Rightarrow f = ch_X = ch(X)$

$\boxed{\text{Bsp}}$

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$X = \{1,3,5,7,9\}$

$Y = \{1,2,3\}$

$\emptyset \subseteq A$

$f: ch_X: A \to \{0,1\}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ch_X(x) = f(x)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$ch_Y(x)$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$ch_\emptyset(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$ch_A(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$A=\emptyset \quad , B$

$\exists\, \theta : A=\emptyset \longrightarrow B$

$\underset{F}{x\in A=\emptyset} \Rightarrow \exists!\, y\in B:\ \theta(x)=y$ ✓

$B=\emptyset \qquad \cancel{\theta = 1_\theta} \qquad 1_\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ bij

$1_\emptyset^{-1} = 1_\emptyset$

$B\neq\emptyset \quad , \theta : \emptyset \to B$

$\nexists\, g : B \to \emptyset \qquad \exists\, y \in B.$

$\underset{A}{\forall}\, y\in B \Rightarrow \underbrace{\exists!\, x\in\emptyset \text{ a.i. } g(y)=x}_{F}$ Falsch

---

$A_1 \times A_2 = \{(a_1,a_2) \mid a_1\in A_1,\ a_2\in A_2\} \qquad (a_1,a_2) = \{a_1\{a_1,a_2\}\}$

$A_1\times A_2 \times A_3 = (A_1\times A_2)\times A_3$

$A_1\times A_2\times A_3\times A_4 = (A_1\times A_2\times A_3)\times A_4$ usw.

$\prod_{i\in I} A_i = ?$, I ist unendlich?

$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i\in A_i,\ \forall i\in I\}$

$(a_i)_{i\in I} = ?$

$A_1\times A_2 \times \ldots \times A_n$

$I=\{1,2,\ldots,n\}$

$(a_1,a_2,\ldots,a_n) \overset{1-1}{\underset{\varphi\,(\text{phi})}{\hookrightarrow}} f : \underset{\{1,2,\ldots,n\}}{\overset{\shortparallel}{I}} \longrightarrow \bigcup_{\substack{i\in I\\ i=1}}^{n} A_i,\ f(i)=a_i\in A_i \quad 1\leq i\leq n$

__Bem__: Was ist eine Reihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n\in\mathbb{R}$? $\Leftrightarrow$ eine Funktion $a:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R},\ a(n)=a_n$

Paar von Elem in A = eine Funktion $f:\{1,2\}\to A$

Triple von Elem in $A \overset{1-1}{\hookrightarrow}$ eine Funktion $f:\{1,2,3\}\to A$

Paar von Elem in $A_1\times A_2 \overset{1-1}{\hookrightarrow}$ eine Funktion $f:\{1,2\}\to A_1\cup A_2$ s.d. $f(1)\in A_1,\ f(2)\in A_2$

Tripel von Elem in $A_1\times A_2\times A_3 \overset{1-1}{\hookrightarrow}$ eine Funktion $f:\{1,2,3\}\to A_1\cup A_2\cup A_3$ s.d. $f(1)\in A_1,\ f(2)\in A_2,\ f(3)\in A_3$

$(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \overset{1-1}{\hookrightarrow}$ Funktion $a: I\to\bigcup_{i\in I} A_i$ s.d. $\underset{a_i}{\overset{\shortparallel}{a(i)}}\in A_i\ \forall i\in I$

- Operationen

Satz 1.3.31

Beweis Seien $e, e' \in A$ s.d. $e * a = a * e = a, \forall a \in A$ (1)

$$e' * a = a * e' = a, \forall a \in A \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{in (1)} \quad a := e' \Rightarrow e * e' = e' * e = e' \\ \text{in (2)} \quad a := e \Rightarrow e' * e = e * e' = e \end{array}\right\} \Rightarrow e' = e * e' = e \qquad \square$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1A"] \arrow[rr, bend right, "f \circ 1A"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1B \circ f"] & B \arrow[r, "1B"] & B \end{tikzcd}$$

$$f \circ 1A = 1B \circ f \not\Rightarrow 1A = 1B \,!$$

Satz 1.3.32

$A = \{e, a, b, c\}$

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	e	e
b	b	e	c	a
c	c	e	a	b

$\cancel{a^{-1} = b}$

$\cancel{a^{-1} = c}$

$a \cdot b = b \cdot a = e$

$a \cdot c = c \cdot a = e$ (nicht assoziativ)

Bew. 1.3.32

a) Sei $x', x'' \in A$ s.d. $x * x' = e = x' * x$

$$x * x'' = e = x'' * x$$

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

Die Gleichungen $x * x' = e = x' * x$ sind symmetrisch in x und x', d.h. $(x^{-1})^{-1} = x$

b) Sei $x, y \in A$ invertierbar $\Rightarrow \exists x^{-1} \in A, \exists y^{-1} \in A$ s.d. $x^{-1} * x = e = x * x^{-1}$

$y^{-1} * y = e = y * y^{-1}$

$x, y \in A$

$x^{-1} * y^{-1} \in A$

$y^{-1} * x^{-1} \in A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & C \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left, "f^{-1} \circ g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

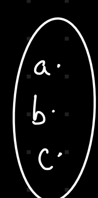
$$\left.\begin{aligned} (x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) &= x * (y * y^{-1}) * x^{-1} = x * e * x^{-1} = x * x^{-1} = e \\ (y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) &= y^{-1} * (x^{-1} * x) * y = y^{-1} * e * y = y^{-1} * y = e \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} \quad \square$$

1.4 Relation

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

$R = \{(1,a), (2,a), (3,b), (3,c)\} \subseteq A \times B \Rightarrow$ Relation



$1A = (A, A, \delta_A)$ die Gleichung

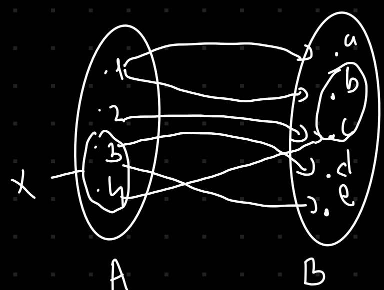
$\delta_A = \{(a,a), (b,b), (c,c)\} \underset{?}{=} A \times A$

Bsp)

$(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \leq) \Rightarrow \leq = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), \ldots, (0,n), \ldots, (1,1), (1,2), (1,3), \ldots (1,n), \ldots, (2,2), (2,3) \ldots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$x \leq y \Leftrightarrow (x, y) \in$ „$\leq$"

$(A, B, R) \to (B, A, R^{-1})$, $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

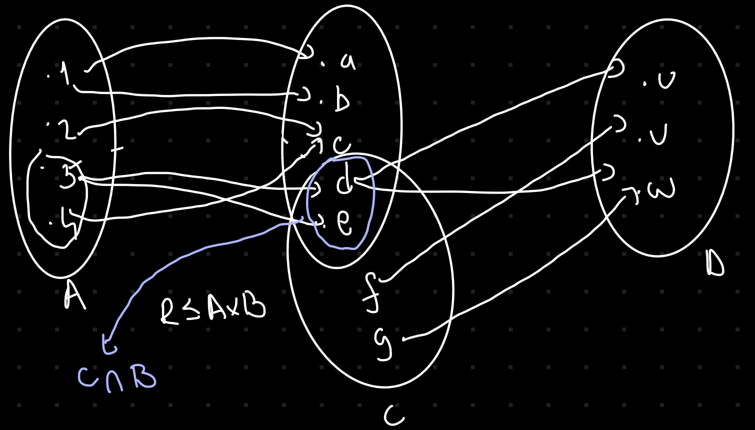


$r(X) = \{c, d, e\}$

$Y = \{b, c\} \subseteq B$

$r^{-1}(Y) = \{1, 2, 4\}$

$R \subseteq A \times B$



$S \circ R = \{(3,u),(3,w)\}$

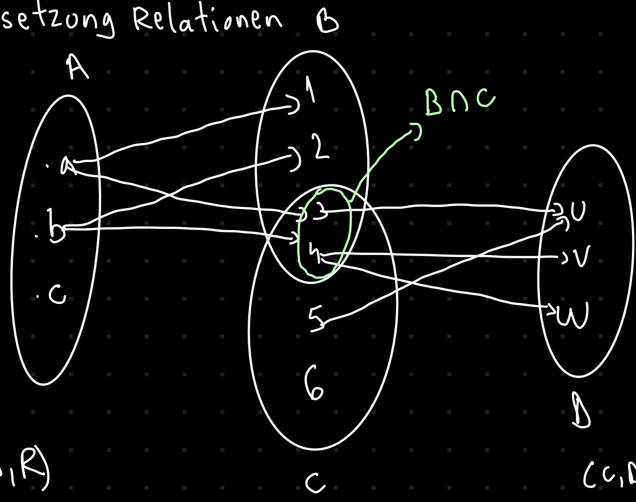
$R \circ S = \emptyset$

$d \circ A \cap D = \emptyset$

$(A, D, S \circ R)$

KURS IV

Zusammensetzung Relationen
(Beispiel)



(A, B, R)

(C, D, S)

$R = \{(a,1), (a,3), (b,2), (b,4) \subseteq A, B$

$S = \{(3,u), (4,v), (4,w), (5,u)\} \subseteq C, D$

$(A, D, S \circ R)$

$S \circ R = \{(a,u), (b,v), (b,w)$

(C, D, S), (A, B, R)

$(C, B, R \circ S)$

$D \cap A = \emptyset \Rightarrow R \circ S = \emptyset \subseteq C \times B$

Bsp:

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(a,1), (a,3), (b,2), (b,4)\} \subseteq A \times B$ (nicht homogen)

homogene $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$

$(A \cup B, A \cup B, R')$, $R' = \{(a,1), (a,3), (b,2), (b,4)\} = R$

x

(A, B, R)

$a \leq b$ und nicht $(a,b) \in$ „$\leq$"

A Menge

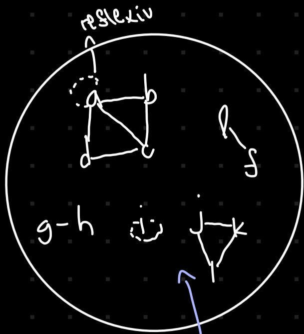
$\forall a \in A \Rightarrow a = a$

$\forall a, b \in A: a = b \Rightarrow b = a$

$\forall a, b, c \in A \Rightarrow a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Bem 1.4.16?

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$



$\{A, A, R\}$, $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a),$
$(b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c),$
$(e,e), (f,f), (e,f), (d,d),$

disjunkt!

$[a]_r = \{x \in A \mid a\,r\,x\} = \{a, b, c, d\}$ $\Rightarrow$ Äquivalenzklassen

$[b]_r = [c]_r = [d]_r = [a]_r$

$[e]_r = \{e, f\} = [f]_r$

$[g]_r = \{g, h\} = [h]_r$

$[i]_r = \{i\}$

$[j]_r = \{j, k, l\} = [k]_r = [l]_r$

ein Element erscheint nur ein mal

Faktormenge: $A/_r = \{[x]_r \mid x \in A\} = \{[a]_r, \cancel{[b]_r}, \cancel{[c]_r}, \cancel{[d]_r}, \cancel{[e]_r}, [f]_r, [g]_r, \cancel{[h]_r}, [i]_r, \cancel{[j]_r}, [k]_r, \cancel{[l]_r}\}$
$= \{[b]_r, [e]_r, [h]_r, [i]_r, [j]_r\} = \ldots$
$= \{[c]_r, [f]_r, [g]_r, [i]_r, [l]_r\} = \ldots$

Satz 1.4.17:

Bew:

a) Sei $a \in A \Rightarrow a \equiv a$ (durch Reflexivität) — kongruent

$\Rightarrow a \in \{x \in A \mid a \equiv x\} = [a]_\equiv$

b) $a, b \in A$ — Äquivklassen

„$\Rightarrow$" $[a]_\equiv\ [b]_\equiv$

Aus (a) folgt $b \in [b]_\equiv$ $\Rightarrow$ $b \in [a]_\equiv \Rightarrow a \equiv b$

„$\Leftarrow$" $a \equiv b \Rightarrow b \in [a]_\equiv$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sei } x \in [b]_\equiv \Rightarrow b \equiv x \\ a \equiv b \end{array}\right\} \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} a \equiv x \Rightarrow x \in [a]_\equiv. \text{ D.h } [b]_\equiv \subseteq [a]_\equiv$$

$a \equiv b \xRightarrow{\text{symmetrie}} b \equiv a$. Ähnlich $[a]_\equiv \subseteq [b]_\equiv$, d.h. $[a]_\equiv = [b]_\equiv$

c) $[a]_\equiv = [b]_\equiv \Rightarrow [a]_\equiv \cap [b]_\equiv = [a]_\equiv$ oder $[b]_\equiv \neq \emptyset$ aus (a)

$[a]_\equiv \cap [b]_\equiv \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in [a]_\equiv \cap [b]_\equiv \Rightarrow a \equiv c$ und $b \equiv c \xRightarrow{\text{Symmetrie}}$ $\left.\begin{array}{l} a \equiv c \\ c \equiv b \end{array}\right\} \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} a \equiv b \overset{\text{dh}}{\Downarrow} [a]_\equiv = [b]_\equiv$

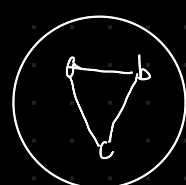
d)
$$\left.\begin{array}{l} x \in A \quad [x] \subseteq A \Rightarrow \bigcup_{x\in A} [x] \subseteq A \\ \text{Sei } a \in A \xRightarrow{(a)} a \in [a] \Rightarrow a \in \bigcup_{x \in A} [x] \end{array}\right\} \Rightarrow A = \bigcup_{x\in A} [x] \quad \square$$

__Bsp:__

A Menge

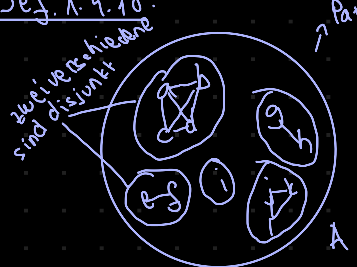
$U = \{A, A, A \times A\} \Rightarrow A \times A \subseteq A \times A$

$A = \{a, b, c\}$



$A / U = \{[a]_r\} = \{[b]_r\} = \{[c]_r\}$

__Def. 1.4.18:__



__Theorem 1.4.19__

__Beweis:__ (1) schon gezeigt

(2) $\Pi \subseteq P(A)$ Partition von A

> Reflexivität: Sei $a \in A = \bigcup_{X \in \Pi} X \Rightarrow \exists X \in \Pi$ s.d. $a \in X \Rightarrow a \equiv_\Pi a$

⊃ Transitivität: Sei $a,b,c \in A$, s.d. $a \equiv_\pi b$ und $b \equiv_\pi c$

$$\left.\begin{aligned} a \equiv_\pi b &\Rightarrow \exists X \in \pi : a,b \in X \\ b \equiv_\pi c &\Rightarrow \exists Y \in \pi : b,c \in Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow b \in X \cap Y \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X = Y$$

Es folgt $a, c \in X\ (=Y) \Rightarrow a \equiv_\pi c$

⊃ Symmetrie: Sei $a,b \in A$ s.d. $a \equiv_\pi b \Rightarrow \exists X \in \pi : a,b \in X \Rightarrow b \equiv_\pi a$

(3)

$$\{\underset{\text{Äquivr}}{\text{ÄR}} \text{ auf } A\} \xrightarrow{(1)} \{\text{Partition von } A\} \xrightarrow{(2)} \{\text{ÄR auf } A\}$$

$$(A, A, \equiv) \longmapsto \underset{\text{Faktormenge}}{A/_\equiv} \longrightarrow \equiv_{(A/\equiv)}$$

z.z: „$\equiv_{(A/\equiv)}$" = „$\equiv$" (A)

$$\{\text{Partitionen von } A\} \xrightarrow{(2)} \{\text{ÄR auf } A\} \xrightarrow{(1)} \{\text{Partition von } A\}$$

$$\pi \longmapsto \equiv_\pi \longmapsto A/_{\equiv_\pi}$$

z.z: $A/_{\equiv_\pi} = \pi$ (B)

Für (A): Seien $a,b \in A$:

$$a \equiv b \Rightarrow \underbrace{[a]}_{\substack{= \\ X \in \pi \\ \text{(Elem in der Part. } \pi)}} = [b] \in A/_\equiv \quad \text{und } a,b \in X \overset{(a)}{\Rightarrow} a \equiv_{(A/\equiv)} b$$

$$\left.\begin{aligned} a \equiv_{A/\equiv} b \Rightarrow \exists X \in A/_\equiv \text{ s.d. } a,b \in X \\ \Downarrow \\ \exists c \in A : X = [c] \end{aligned}\right\} \Rightarrow a,b \in [c] \Rightarrow \left.\begin{aligned} a \equiv c \\ b \equiv c \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Sym + Trans.}} a \equiv b$$

Für (B): Sei $X \in \mathcal{P}(A)$ d.h $\underset{\text{Teilmenge von } A}{X} \in A$

$$\left.\begin{aligned} X \in A/_{\equiv_\pi} \Rightarrow \exists a \in A \text{ s.d } X = [a]_{\equiv_\pi} \\ a \in A = \bigcup_{Y \in \pi} Y \Rightarrow \exists Y \in \pi \text{ s.d. } a \in Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Sei } y \in Y \Rightarrow a,y \in Y,\ Y \in \pi \Rightarrow a \equiv_\pi y \Rightarrow y \in [a]_{\equiv_\pi} = X$$

Sei $x \in X = [a]_{\equiv_\pi} \Rightarrow a \equiv_\pi x \Rightarrow \exists y' \in \pi$ s.d. $a,x \in y'$

Aber $a \in \underbrace{Y \cap Y'}_{\text{nicht disjunkt}} \Rightarrow Y \cap Y' \neq \emptyset \Rightarrow Y = Y' \Rightarrow x \in Y$. So folgt $X = Y \in \pi$

Sei $X \in \pi \Rightarrow X \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in X \qquad [a]_\pi \overset{?}{=} X$

$x \in [a]_{\equiv\pi} \Rightarrow a \equiv_\pi x \Rightarrow \exists X' \in \pi$, s.d. $a, x \in X'$

$a \in X \cap X' \neq \emptyset \Rightarrow X = X'$

$\Rightarrow x \in X$

$x \in X \Rightarrow a, x \in X,\ X \in \pi \Rightarrow a \equiv_\pi x \Rightarrow x \in [a]_{\equiv\pi}$. Dann $X = [a]_{\equiv\pi} \in A/_{\equiv\pi}$ $\square$

Ordnungsrelationen

Beispiel: $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \leq)$

$a \leq a,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Refl. $\rightarrow a \leq a,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Trans $\rightarrow a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

Asy. $\rightarrow a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b \quad (a, b \in \mathbb{R})$

= Bedingungen für Ordnungsrelation

$\preceq,\ \sqsubseteq,\ \subseteq$

X, Y, Z Mengen

$X \subseteq X$

$X \subseteq Y,\ Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

$X \subseteq Y,\ Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$

$X, Y, Z \subseteq A \Rightarrow (P(A), \overset{\leq?}{\subseteq})$ geordnete Menge

$(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \leq) \rightarrow 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \ldots \Rightarrow$ geordnete Relation

$A = \{a, b, c\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

$\{a\} \nsubseteq \{b\}$ und $\{b\} \nsubseteq \{a\}$

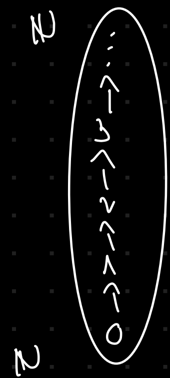
$\{a\} \nsubseteq \{b, c\},\ \{b, c\} \nsubseteq \{a\} \Rightarrow$ unvergleichbar

in $(\mathbb{R}, \leq)$ oder $(\mathbb{N}, \leq)$

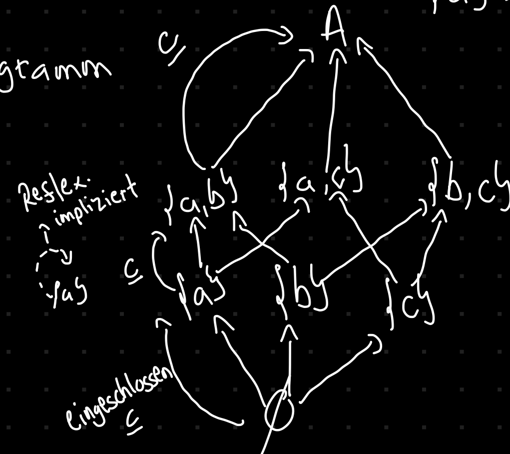
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{N}$): $x \leq y$ oder $y \leq x$

$(\mathbb{R},\le)$ statt $(\mathbb{R},\mathbb{R},\le)$; $(\mathbb{N},\le)$ statt $(\mathbb{N},\mathbb{N},\le)$, $(P(A),\le)$ statt $(P(A),P(A),\le)$

$\{a\}\le\{a\}$



Haase Diagramm

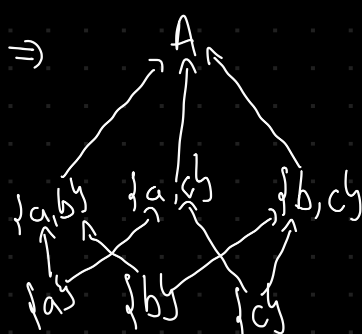


$A=\{a,b,c\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$

$(P(A),\le)$

$P^*(A)=P(A)\setminus\{\emptyset\} \Rightarrow$



$x\in P^*(A)$

$x\le\{a\}\Rightarrow x=\{a\}$

$\emptyset$ = das kleinste Element in $(P(A),\le)$

Keine Minimum, weil ei Minimum soll kleiner als alle Elemente

Minimale Elemente: $\{a\},\{b\},\{c\}$

KURS V

Ordnungsrelation

- in $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt: $\forall x,y \in \mathbb{R}: x \leq y$ oder $y \leq x$

Bsp:

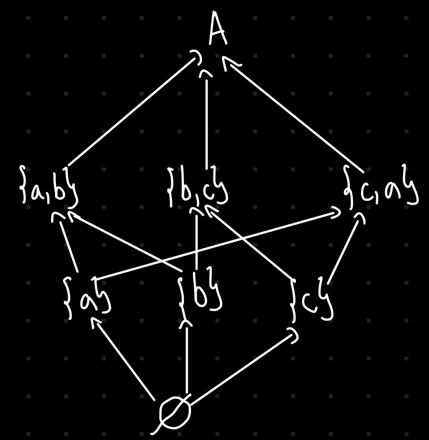
A Menge $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ g.o.

$X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ (oder äq. $X, Y, Z \subseteq A$)

(R) $X \subseteq X$ ✓

(T) $X \subseteq Y,\ Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$ ✓

(A) $X \subseteq Y$ & $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$ ✓



$\emptyset \subseteq$ alle Menge !

M Menge

$\emptyset \subseteq M \Leftrightarrow (x \in \emptyset \Rightarrow x \in M)$

- Def 1.4.22:

$(A, \leq)$ geordnete Menge (Lemma 1.4.24 / Korollar 1.4.25)

$a \in A$: A das kleinste Element

z.z. a ist minimal

$a' \in A$ ist minimal $\Rightarrow a = a'$

Beweis:

- Sei $x \in A$ s.d. $x \leq a$ (Def 1.4.22), a ist das kleinste: $a \leq x$ $\Big\}$ $\Rightarrow a = x \Rightarrow a$ ist minimal

- Sei $a' \in A$ minimal, a ist der kleinste Element in A $\Big\}$ $\Rightarrow a \leq a'$, a' minimal $\Big\}$ $\Rightarrow a = a'$

- Bemerkung:

$(A, A, \leq)$ Ordnungsrelation $\Rightarrow (A, A, \leq^{-1}) \overset{\text{Hsg!?}}{=} (A, A, \geq)$ ist auch eine Ordnungsrelation $\Rightarrow \boxed{x \leq y \Leftrightarrow y \geq x}$

$M = \{\emptyset\}$

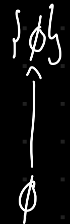
$P(M) = \{\emptyset, M\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$!(\mathbb{N}, \leq)$

$\Rightarrow$ es gibt nicht ein größtes Element

$P(M) \rightarrow$



$M' = \{a\}$

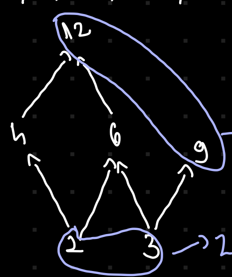
$P(M') = \{\emptyset, \{a\}\}$

$R = \{(a,a)\} \subseteq M' \times M'$

<u>Bsp Teilbarkeit:</u>

$A = \{2,3,4,6,9,12\}$ $\quad 2 \nmid 3$

$3 \nmid 2$



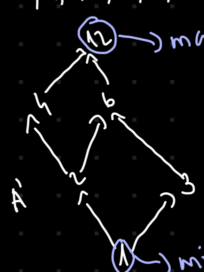
$\rightarrow$ maximale Elemente

$\rightarrow$ zwei minimale Elemente

$12 \nmid 7$

$7 \nmid 12$

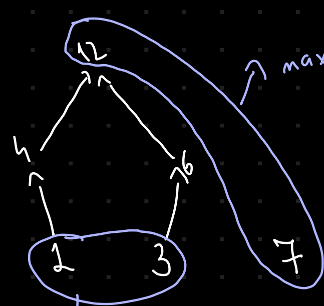
$A' = \{1,2,3,4,6, \quad 12\}$



$\rightarrow$ maximale, größte, eindeutig

$\rightarrow$ minimal, kleinste, eindeutig bestimmt

A''



$\nearrow$ maximale

$\downarrow$ minimale

<u>1.4.26</u>

$\supset A = \mathbb{N}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$

(iii) (a) $\Rightarrow a \in B \Leftrightarrow P(0)$

(iii)(b) $\Rightarrow n \in \mathbb{N}$ $\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\} \subseteq B \Rightarrow n \in B$

„$P(x), \forall x < n \Rightarrow P(n)$"

$\Rightarrow B = \mathbb{N}$ $(P(n), \forall n \in \mathbb{N})$

(i) $\Rightarrow$ (iii).

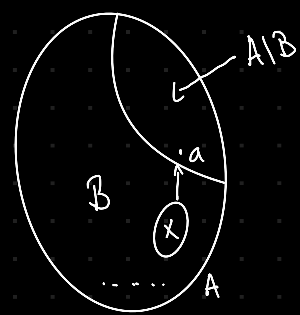
Sei $B \subseteq A$ s.d (a) und (b) beide wahr sind. Wir betrachten $A \setminus B \subseteq A$.

ist $A \setminus B \neq \emptyset$? $\overset{(i)}{\Longrightarrow} \exists\, a \in A \setminus B$ minimal in $A \setminus B$

a ist nicht minimal in A da B alle Minimalelement aus A enthält $\Rightarrow \{x \in A \mid x < a\} \neq \emptyset$

$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \in A \;\; x < a \\ a \in A \setminus B \text{ minimal in } A \setminus B\end{array}\right\} \Rightarrow x \notin A \setminus B \Rightarrow x \in B$

$\{x \in A \mid x < a\} \subseteq B \overset{(iii)}{\Longrightarrow} a \in B$ ↯ Wiederspruch



Es bleibt $A \setminus B = \emptyset$, dass heißt $B = A$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots\; a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$
$(= \dots = \dots)$

Sei $B = \{ b \in A \mid$ jede Kette $b = a_0 \geq a_1 \geq \dots$ ist endlich$\}$

- Sei $a \in A$ minimal

  ist $a = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ eine (fallende) kette? $\Rightarrow a = a_0 = a_1 = a_2 = \dots \Rightarrow a \in B \Rightarrow$ (iii a) gilt für B.

- Sei $a \in A$ s.d $\{x \in A \mid x < a\} \in B$

  Wir betrachten eine kette $a = a_0 \geq a_1 \geq \dots$

  Wenn $a = a_0 = a_1 = a_2 = \dots$ dann ist die Kette endlich

  Wenn $\exists\, m \in \mathbb{N}$ s.d. $a_m > a_{m+1} \Rightarrow a = a_0 > a_{m+1} \Rightarrow \underset{a_{m+1} < a}{a_{m+1}} \in \{x \in A \mid x < a\} \subseteq B$

  $a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots$ ist ein kette $\Rightarrow \exists\, n \geq m+1$ s.d $a_n = a_{n+1} = \dots \Rightarrow$ die ganze Kette ist auch endlich $\Rightarrow a \in B \Rightarrow$

  (iii b) gibt für R.

  Es folgt $B = A \Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $\emptyset \neq C \subseteq A$ s.d. c kein minimales Element besitzt

$C \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_0 \in C \xRightarrow[\text{nicht minimal}]{a_0 \text{ ist}} \exists a_1 \in C \quad a_0 > a_1$

$a_1 \in C$, a_1 ist nicht minimal $\Rightarrow \exists a_2 \in C \quad a_1 > a_2$, u.s.w.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in C$ ist nicht minimal $\Rightarrow \exists a_{n+1} \in C$ s.d. $a_n > a_{n+1}$ $\Rightarrow$ Wir haben eine nicht endliche fallende Kette gebildet $\lightning$

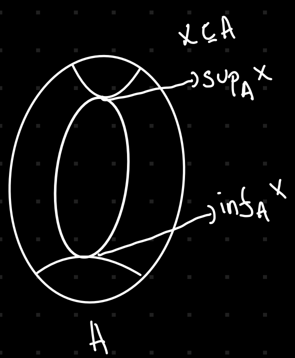
Def 1.4.27

$(\hat{\mathbb{R}}, \leq)$ $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$-\infty$ = das kleinste El

$+\infty$ = das größte El

$(A, \leq)$



$\{y \in A \mid y \leq x, \forall x \in X\}$

Bem 1.4.28

$a = \inf_A X \in X \Rightarrow a \leq x, \forall x \in X \Rightarrow a$ ist das kleinste El in X

Bsp 1.4.29

(3) $\emptyset \subseteq A$ $\quad a \geq x$

$a \in A, x \in \emptyset \Rightarrow a \leq x$ ✓

$a \in A, x \in \emptyset \Rightarrow x \leq a$ ✓ $\quad x \leq a$

Def 1.4.30

Bsp: $\cdot (\mathbb{R}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq)$ sind Verbände

$x, y \in \mathbb{Q}\ (\mathbb{R}) \Rightarrow x \leq y$ oder $y \leq x$

$x \leq y \Rightarrow \inf(\{x, y\}) = x, \ \sup\{x, y\} = y$

$y \leq x \Rightarrow \inf\{y, x\} = y, \ \sup\{y, x\} = x$

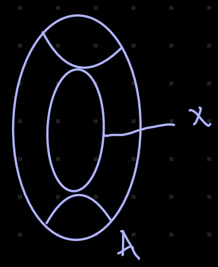
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$

$(\overline{\mathbb{Q}}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind nicht vollständige Verbände

$\nexists \sup_{\mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ $\nexists \inf_{\mathbb{R}} (-\infty, 0)$, $\exists \sup_{\mathbb{R}} (0, \infty)$ usw.

$(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ ist ein vollständiges Verband

> Satz 1.4.32



Bew: Wenn L ein voll Verband ist dann für jede $X \subseteq L$ $\exists \inf X, \exists \sup X$

Umgekehrt wenn für jede $X \subseteq L$ $\exists \inf X$ dann sei $X \subseteq L$ befestigt

$X' = \{y \in L \mid x \leq y, \forall x \in X\} \subseteq L \Rightarrow \exists a = \inf X' \in L$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sei } x \in X \Rightarrow x \leq y, \forall y \in X' \Rightarrow x \leq a \Rightarrow a \in X' \\ \text{Wenn } a' \in L, x \leq a', \forall x \in X \Rightarrow a' \in X' \end{array}\right\} \Rightarrow a' \leq a$$

$\boxtimes$

Üb 1.4.53

$(\mathbb{N}, \leq)$ ist ein Verband

$\forall x, y \in \mathbb{N}: x \leq y$ oder $y \leq x$

$x \leq y \Rightarrow \inf\{x,y\} = x$ und $\sup\{x,y\} = y$

$y \leq x \Rightarrow \inf\{x,y\} = y$ und $\sup\{x,y\} = x$

$(\mathbb{N}, \leq)$ ist kein vollständiges Verband

$\nexists \sup 2\mathbb{N}$ $\nexists \sup \mathbb{N}$, $\nexists \sup(2\mathbb{N}+1)$

$\nexists \inf_{\mathbb{N}} \emptyset = \underset{\nexists}{\sup_{\mathbb{N}} \mathbb{N}}$

$(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$

$\exists \inf \emptyset = \infty = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} (\overline{\mathbb{R}})$

KURS VI

- 2.1. Gruppen

0^{-1} = nu există, mulțimile trebuie să fie *

> Satz 2.1.5

$M^{\times} = \{x \in M \mid x \text{ ist invertierbar in } M\}$

$= \{x \in M \mid \exists x^{-1} \in M \text{ so dass } xx^{-1} = 1 = x^{-1}x\}$

$\cdot : M \times M \longrightarrow M$

$N \subseteq M$ (z.B. $N = M^{\times}$)

$x, y \in N \subseteq M \to \exists x\, y \in M$

? $x \cdot y \in N$ (N ist stabiler Teil)

$\cdot : N \times N \longrightarrow N$ (wohl definiert)

Wenn $\cdot : M \times M \to M$ ist assoziativ, dann $\forall x, y, z \in N \subseteq M$

$(xy)z = x(zy)$ gilt in M auch als in N

Beweis:

$x, y \in M^{\times} \to \exists x^{-1} y^{-1} \in M$ mit $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

$y \cdot y^{-1} = 1 = y^{-1} \cdot y$

Aus 1.2.32 $(x \cdot y)(y^{-1} \cdot x^{-1}) = 1 = (y^{-1} \cdot x^{-1})(x \cdot y) \Rightarrow (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} \Rightarrow x \cdot y \in M^{\times}$

- Assoziativität gilt in M so sie gilt in $M^{\times}$ auch
- $1 \in M$ und $1^{-1} = 1$ da $1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 \in M^{\times}$
- sei $x \in M^{\times} \Rightarrow \exists x^{-1} \in M$ s.d. $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x \Rightarrow \underset{\text{invertierbar}}{x^{-1}} \in M^{\times}$

$\Rightarrow (M^{\times}, \cdot)$ – Gruppe

Bsp:

$(M, \cdot) = (\mathbb{R}, \cdot)$ Monoid

$M^{\times} = \mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R}^{*} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to 0$ nu este inversabil

$\mathbb{R}^{*} \subset$ mai mic decât $\mathbb{R}$

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ Monoid

$\mathbb{Q}^{\times} = \mathbb{Q}^{*}$

$(\mathbb{C}, \cdot)$ Monoid $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C}^{*}$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ Monoid $\mathbb{Z}^{\times} = \{1, -1\} \neq \mathbb{Z}^{*} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\Downarrow$

$\left(2 ; 2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\right)$!!!

Beweis

(1) $A^{A} = \{ f : A \to A \mid f \text{ Funktion} \}$ $(A^{A}, \circ)$ Monoid

„$\circ$" ist assoziativ und $1A : A \to A$, $1A(x) = x$ ist das neutrales Element

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1A"] \arrow[r, bend right, "f \circ 1A"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1A \circ f"] & A \arrow[r, "1A"] & A \end{tikzcd}$$

$f \circ 1A = f = 1A \circ f$

$1A$ in A ein neutrales Element

$(A^{A})^{\times} = \{ f : A^{A} \mid f \text{ umkehrbar ist} \}$

$= \{ f : A \to A \mid f \text{ ist bij} \}$

$\overset{\text{ist}}{\Longrightarrow} S(A)$

Bemerkung $A = \{1, 2, \dots, n\}$ $n!$

$S(A) = \{ \sigma : A \longrightarrow A \mid \sigma \text{ bij} \}$

σ Permutation

$|A| \geq 3 \Rightarrow \exists\, a, b, c \in A$, $a \neq b \neq c \neq a$

$$J_{ab} : A \to A, \quad J_{ab}(x) = \begin{cases} b, & x = a \\ a, & x = b \\ x, & x \in A \setminus \{a, b\} \end{cases}$$

$$J_{b,c} : A \to A \quad J_{bc}(x) = \begin{cases} c, & x = b \\ b, & x = c \\ x, & x \in A \setminus \{b, c\} \end{cases}$$

$$J_{ab} = \begin{pmatrix} a & b & c & \dots x \dots \\ b & a & c & \dots x \dots \end{pmatrix}$$

$$J_{bc} = \begin{pmatrix} a & b & c & \dots x \dots \\ a & c & b & \dots x \dots \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Compunere}}$

$J_{a,b}(J_{b,c}(x))$

$$\left.\begin{aligned} J_{a,b} \cdot J_{b,c} &= \begin{pmatrix} a & b & c & \dots x \dots \\ b & c & a & \dots x \dots \end{pmatrix} \\ J_{bc} \cdot J_{ab} &= \begin{pmatrix} a & b & c & \dots x \dots \\ c & a & b & \dots x \dots \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow J_{a,b} \cdot J_{b,c} \neq J_{bc} \cdot J_{ab}$$

(2) b)

$(M_{n\times n}(k), \cdot)$ Monoid

Die Multiplikation der Matrizen ist assoziativ

$$- I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ ist neutrales Element

$$M_{n\times n}(k)^{\times} = \{A \in M_{n\times n}(k) \mid \exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A\}$$

$$= \{A \in M_{n\times n}(k) \mid \det A \neq \emptyset\}$$

$$\overset{def}{=} GL_n(k) = \text{Gen Linear Grap}$$

$1 = 1 \quad M_{1\times 1}(k) = k$ kommutativ

$n > 1$ (dh. $n \geq 2$) $\Rightarrow$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' \cdot B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq B' \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A' = \underset{0}{\cancel{1}} = \det B' \Rightarrow A'B' \in Gl_2(k)$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(k)$$

$$B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

- Untergruppen

- <u>Satz 1.1.9 Beweis</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii) offenbar

(ii) $\Rightarrow$ (i) da die Assoziativität ist erfüllt

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $1 \in M$ erscheint schon in (ii)

$$x, y \in M \xRightarrow{(iic)} x, y^{-1} \in H \xRightarrow{(iib)} x \cdot y^{-1} \in M$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $1 \in H$ erscheint schon in (iii)

Sei $x \in H$

$$1 \in H,\ x \in H \xRightarrow{(iiib)} 1 x^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$$

Seien $x, y \in M \xRightarrow{(iib)} x, y^{-1} \in H \xRightarrow{(iii)b} x(y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$ $\square$

<u>1.1.10</u> Beweis

Seien $H_i \leq G,\ i \in I$

sei $H = \bigcap_{i \in I} H_i \subseteq G$

- $1 \in H_i, \forall i \in I \Rightarrow 1 \in \bigcap_{i\in I} H_i = H$

- $x, y \in H = \bigcap_{i\in I} H_i \Longrightarrow x, y \in H_i, \forall i \in I \Rightarrow x y \in H, \forall i \in I \Rightarrow xy \in \bigcap_{i\in I} H_i = H$

- $x \in H = \bigcap_{i\in I} H_i \Rightarrow x \in H_i, \forall i \in I \Rightarrow x^{-1} \in H, \forall i \in I = x \in \bigcap_{i\in I} H_i = H$

Es folgt $H \leq G$ $\boxtimes$

$(\mathbb{Z}, +)$

$U_4 = \{1, i, -1, -i\}$ $(U_4, \cdot)$ - grup

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	1	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	$-i$	-1

$S(U_4) = \{ \underset{H_0}{\{1\}}, \underset{H_1}{\{1, -1\}}, \underset{U_4 = H_2}{\{1, i, -1, -i\}} \}$

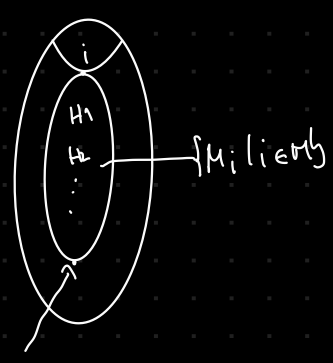
$\langle 1 \rangle = H_0 \cap H_1 \cap H_2 = \{1\}$

$\langle -1 \rangle = H_1 \cap H_2 = \{1, -1\} = H_1$

$\langle 1, -1 \rangle =$ — " — H_1

$\langle i \rangle = H_2$

$\langle i, -1 \rangle = H_2$



$\bigcap_{i\in I} M_i$ $(S(G), \leq)$

Satz 2.1.14

$H = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X \cup X^{-1}\}$

$$\langle X \rangle = H \iff \begin{cases} X \leq G \ (1) \\ X \subseteq H \ (2) \\ K \leq G, X \subseteq K \Rightarrow H \subseteq K \end{cases}$$

Für (1):

$n=0 \Rightarrow 1 \in H$

$x, y \in H \Rightarrow x = x_1, x_2, \dots, x_n \;,\; x_1 \dots x_n \in X \cup X^{-1}$
$y = y_1, y_2, \dots, y_m \;,\; y_1 \dots y_m \in X \cup X^{-1}$
$\Rightarrow x \cdot y = x_1 \dots x_n \cdot y_1 \dots y_m \in H$

$x \in H \Rightarrow x = x_1, x_2, \dots x_n, \; x_1, \dots, x_n \in X \cup X^{-1} \Rightarrow x^{-1} = x_n^{-1} \dots x_2^{-1} \cdot x_1^{-1} \in H$

(2): $x \in X \Rightarrow x = x_1 \; (n=1)$

$x_1 \in X$

$\Rightarrow x \in H$

(3): $K \leq G, \; X \subseteq K \Rightarrow X^{-1} \subseteq K$

$x \in H \Rightarrow x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots x_n \;,\; x_1 \dots, x_n \in X \cup X^{-1}$

$x_1, \dots, x_n \in K$
$K \leq G$
$\Rightarrow x \in K$ $\boxtimes$

Korollar 2.1.16

$X = \{x\}$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{x, x^{-1}\}$

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$\langle 2 \rangle = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{ \dots \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots \}$

$\langle i \rangle = \{i^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, i, -1, i\}$

· Gruppnhomomorphismen

$1_G : G \to G$ (isomorphismus)

G, H, zwei Gruppen

$e : G \to H$, $e(x) = 1$ Homomorphismus

$e(x \cdot y) = 1 = 1 \cdot 1 = e(x) \cdot e(y), \; \forall x, y \in G$

$G \leq H$

$i: G \to H, \; i(x) = x, \; \forall x \in G$

<u>Lemma 2.1.19</u>

(a) $f(1) = 1$

$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \; | \; f(1)^{-1} \Rightarrow 1 = f(1)$

$f(1) \in H \Rightarrow \exists f(1)^{-1} \in H$

<u>Bew:</u> f ist nicht unbedingt bij $\Rightarrow f^{-1}$ existiert nicht unbedingt

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)^{-1} = [f(x)]^{-1} \\ f^{-1}(x) \; \cancel{=} \end{array}}$$

(b) $x \in G \qquad x^{-1} \cdot x = 1 = x \cdot x^{-1}$

$$f(x^{-1} \cdot x) = f(1) = f(x \cdot x^{-1})$$
$$\text{ll(a)}$$
$$f(x^{-1}) \cdot f(x) = 1 = f(x)(f x^{-1})$$
$$f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \quad \boxtimes$$

<u>Lemma 2.1.20</u>

(a)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & H \arrow[d, "g"] \\ & K \end{tikzcd}$$

$x, y \in G: (g \circ f)(xy) = g(f(xy)) \underset{\text{Hom.}}{\overset{f}{=}} g(f(x)) \cdot g(f(y)) = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y) \Rightarrow g \circ f$ ist ein Gruppen Homo

(b) f ist isomo $\Rightarrow f$ ist bij $\Rightarrow \exists f^{-1}: H \to G$

Sei $u, v \in H$; $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v) \in G \Rightarrow u = f(x)$, $v = f(y)$

$f^{-1}(u,v) = f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \xRightarrow[\text{Homo}]{f} f^{-1}(f(x \cdot y)) = x \cdot y = f^{-1}(u) \cdot f^{-1}(v) \Rightarrow f^{-1}$ ist ein isomo

KURS VII

- Satz 2.1.12

  - Beweis:

(a) · neutrales Elem (Untergruppe) $\to$ $1 \in G$ $\quad \underset{\downarrow}{\overset{G}{f(1)}} = \underset{\downarrow}{\overset{H}{1}} \Rightarrow 1 \in \mathrm{Ker} f$

· stabiler Teil $\to$ $x, y \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(x) = 1,\ f(y) = 1 \Rightarrow f(xy) = f(x) f(y) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow xy \in \mathrm{Ker} f$

· inverse/kehrwert? $\Rightarrow$ $x \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker} f$

(b) !

(c)

„$\Rightarrow$" $x \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(x) = 1 = f(1) \xRightarrow{f \text{ inj}} x = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{1\}$

„$\Leftarrow$" $x, y \in G$ $f(x) = f(y) \mid f(y)^{-1} \Rightarrow f(x) f(y)^{-1} = 1 \xRightarrow{\text{Gruppenhomo}} f(x) f(y^{-1}) = 1 \Rightarrow f(xy^{-1}) = 1 \Rightarrow xy^{-1} \in \mathrm{Ker} f$

$\left.\begin{array}{l} xy^{-1} \in \mathrm{Ker} f \\ \mathrm{Ker} f = \{1\} \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot y^{-1} = 1 \mid \cdot y \Rightarrow$

$x = y$, d.h f ist inj.

Zyklische Gruppen und die Ordnung eines Elementes

- $(\mathbb{Z}, +) \Rightarrow \mathrm{ord}(0) = 1$ (0 = neut Element)

$\boxed{\text{Cartea M}}$ din Bibliografie

- $(G, \cdot)$ n.E: $1 \in G$

$x \in G$ $\quad x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = 1$?

$x^n = 1$

- $(G, +)$ $\overset{\text{n.E}}{0} \in G$

$x \in G$ $\quad x + x + \ldots + x = 0$?

$nx = 0$

- $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ $\quad x^n = 1$

$x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$x^n = r^n[\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)]$

$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$\Rightarrow$ $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$

$\cos(n\alpha) = \cos(0) = 1$

$\sin(n\alpha) = \sin(0) = 0$ (*)

(*) $\Rightarrow n\alpha = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}$

$\vdots$

Hg: Zu zeigen $U_n = \{x\in\mathbb{C}^* \mid x^n = 1\}$

$U_n \leq \mathbb{C}^*$ und U_n ist zyklisch

$U_4 = \{1, i, -1, -i\} = \langle i \rangle$

› <u>Satz 2.1.26</u>

· <u>Beweis</u>:

„$\Rightarrow$" $\mathrm{ord}(x) = n \Rightarrow x^n = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sei } m\in\mathbb{Z} \text{ s.d. } x^m = 1\\ m = n\cdot q + r,\quad q, r\in\mathbb{Z},\ 0\leq r < n\end{array}\right\} \Rightarrow x^{nq+r} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x^n)^q \cdot x^r = 1\\ x^n = 1 \Rightarrow (x^n)^q = 1\end{array}\right\} \Rightarrow x^r = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}x^r = 1\\ 0\leq r < n\\ n = \text{die kleinste in } \mathbb{N}^* \text{ mit der Eigenschaft } x^n = 1\end{array}\right\} r = 0$$

$m = n\cdot q \Rightarrow n \mid m$

„$\Leftarrow$" $x^n = 1,\ n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \mathrm{ord}(x) < \infty$ (endlich);

Sei $m = \mathrm{ord}(x) \in \mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x^m = 1 \Rightarrow n\mid m\\ n, m\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow n\leq m\\ m = \mathrm{ord}(x) \Rightarrow m \text{ ist die kleinste in } \mathbb{N}^* \text{ mit } x^m = 1 \Rightarrow m\leq n\end{array}\right\} \Rightarrow n = m$$

› <u>Satz 2.1.27</u>

$$\begin{cases}\mathrm{ord}(x) = n\in\mathbb{N}^* & \langle x\rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}\ ! \text{ und dann}\\ \mathrm{ord}(x) = \infty & \Rightarrow m\neq n \Rightarrow x^m \neq x^n\end{cases}$$

$\langle x \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$

$\langle 2 \rangle = \{\dots \underset{2^{-2}}{\frac{1}{4}}, \underset{2^{-1}}{\frac{1}{2}}, \underset{2^0}{1}, \dots\} \rightarrow$ ciclu infinit

$\boxed{\text{Beweis}}$ $\langle x \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

I. $\operatorname{ord}(x) = \infty$

$m, n \in \mathbb{Z}$ s.d. $x^m = x^n \Rightarrow x^{m-n} = 1 \Rightarrow x^{|m-n|} = 1$

$|m-n| \in \mathbb{N}$

$\operatorname{ord}(x) = \infty \Rightarrow x^k \neq 1, \ \forall k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow |m-n| = 0 \Rightarrow m-n = 0 \Rightarrow m = n$

Umgekehrt $m \neq n \Rightarrow x^m \neq x^n$

$\langle x \rangle = \underbrace{\{\dots x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, \dots\}}_{\text{alle sind verschieden}} \Rightarrow |\langle x \rangle| = \infty = \operatorname{ord}(x)$

II. $\operatorname{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$

$\langle x \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Für $k \in \mathbb{Z}$ $k = n \cdot q + r$, $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $q \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $x = i \in \mathbb{C}^*$

$i^7 = i^3 = -i$

$x^k = x^{n \cdot q + r} = (\underset{1}{\underset{\|}{x^n}})^q \cdot x^r = 1^q \cdot x^r = x^r \in \{\underset{1}{\underset{\|}{x^0}}, \underset{x}{\underset{\|}{x^1}}, \dots, x^{n-1}\}$

Für $m, t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ $x^m = x^t \Rightarrow x^{m-t} = 1 \Rightarrow x^{m-t} = 1 \Rightarrow n \mid m-t$

$m-t \in \{-n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1\}$

vielfacher von n?

$\Rightarrow m-t = 0 \Rightarrow m = t$

$\langle x \rangle = \underbrace{\{\underset{x^0}{1}, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}\}}_{\text{alle sind verschieden}}$

> Korollar 2.1.34 (Der Satz von Lagrange)

Beweis:

(a) $H \leq G$

homög. Ordrel

$(G, G, \equiv_H)$ $\quad x \equiv_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$

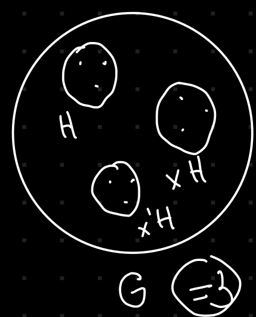
(Refl) $x \in G$ $\quad x \equiv_H x \Leftrightarrow x^{-1} \cdot x \in H \Leftrightarrow 1 \in H$ „W"

(Trans) $x, y, z \in G$ $\quad x \equiv_H y,\ y \equiv_H z \Rightarrow x^{-1} y \in H,\ y^{-1} \cdot z \in H \xRightarrow[\text{Teil}]{H\text{-stabiler}} x^{-1} \cdot y \cdot y^{-1} \cdot z \in H \Rightarrow x^{-1} \cdot z \in H \Rightarrow x \equiv_H z$

(Symm) $x, y \in G$, $\quad x \equiv_H y \Rightarrow x^{-1} \cdot y \in H \Rightarrow (x^{-1} y)^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \cdot x \in H \Rightarrow y \equiv_H x$

$x \in G$ $\quad [x]_{\equiv_H} = \{y \in H \mid x \equiv_H y\} = \{y \in H \mid x^{-1} \cdot y \in H\} = \{y \in H \mid y \in x \cdot H\} = x \cdot H = \{x \cdot h \mid h \in H\}$

$[1]_{\equiv_H} = 1 \cdot H = H$



Die Funktion $f_x : H \to xH$, $f_x(h) = xh$ ist eine Bijektion $\forall x \in G$

- f ist surj durch die Definition von $xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$
- für $h_1, h_2 \in H$ s.d. $f_x(h_1) = f_x(h_2) \Rightarrow_{x^{-1}} x \cdot h_1 = x \cdot h_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow f_x$ ist injektiv

Anzahl aller Klassen

Wir schreiben $|G : H| = |G/\equiv_H|$

$$G = \bigcup_{x \in G} [x]_{\equiv_H} = \bigcup_{x \in G} xH$$

$$|G| = |H| \cdot |G : H| \quad \boxtimes$$

> Symmetrische Gruppe

A Menge $\quad A^A = \{f : A \to A \mid f \text{ Funktion}\}$

$(A^A, \cdot)$ Monoid

$S(A) = (A^A, \circ)^\times = \{\sigma : A \to A \mid \sigma \text{ bij}\}$

nicht kommutativ

Wenn $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Hsfg: $S(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) \cong S(\{1, 2 \dots n\})$

- Theorem 2.1.43

Beweis: Sei $(G, \cdot)^{0}$ eine Gruppe. Wir betrachten $S(G) = \{\sigma : G \to G \mid \sigma \text{ bij.}\}$. Wir definieren $t : G \to S(A)$,

$t(x) = \sigma_x$, wobei $\sigma_x : G \to G$, $\sigma_x(g) = xg$

- $g_1, g_2 \in G$ $\quad \sigma_x(g_1) = \sigma_x(g_2) \underset{x^{-1}}{\Rightarrow} | x \cdot g_1 = x \cdot g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow \sigma_x$ inj
- $y \in G$ caut $g \in G$ a.î. $\sigma_x(g) = y \underset{x^{-1}}{\Rightarrow} | x \cdot g = y \Rightarrow g = x^{-1} \cdot y \in G$ şi $\sigma_x(g) = \sigma_x(x^{-1} y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma$ surj

- $x_1, x_2 \in G$ $\quad t(x_1) = t(x_2) \Rightarrow \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} \Rightarrow \sigma_{x_1}(1) = \sigma_{x_2}(1) \Rightarrow x_1 \cdot 1 = x_2 \cdot 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow t$ injektiv
- $x, y \in G$ $\quad t(x \cdot y) = \sigma_{xy}$

$t(x) \cdot t(y) = \sigma_x \circ \sigma_y$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma_y"] \arrow[dr, "\sigma_x \cdot \sigma_y"] \arrow[dr, bend right, "\sigma_{xy}"'] & G \arrow[d, "\sigma_x"] \\ & G \end{tikzcd}$$

sigma

$(\sigma_x \cdot \sigma_y)(g) = \sigma_x(\sigma_y(g)) = \sigma_x(yg) = x(yg) = (xy) \cdot g = \sigma_{xy}(g)$

$\Rightarrow G \cong \operatorname{Im} t \leq S(G)$

$(6) = e$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 7 & 1 & 6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,9\,2\,5)(4\,7\,8)(6) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Amin T

KURS X

- ALGEBRĂ LINIARĂ -

- $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p\}$ - p Primzahl (Körper) $(K, +, \cdot)$ → Körper
- Vektorraum: $(V, +)$ abelsche Gruppe

  - $\cdot : K \times V \to V$

  $(a, x) \longmapsto a x$, so dass $\forall x, y \in V$, $\forall a, b \in K$:

  (VR1) $a(x+y) = ax + ay$

  (VR2) $(a+b)x = ax + bx$ → Skalaren → Vektoren

  (VR3) $a(bx) = \underbrace{(ab) \cdot x}_{\text{Skalar} \cdot \text{Vektor}}$

  (VR4) $1 \cdot x = x$

- Beispiele: (1) $V = \{0\}$, $0 + 0 = 0$ abelsche Gruppe

  $K \times \{0\} \to \{0\}$ $\quad a \cdot 0 = 0$

(2) $V = K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in K\}$ $\quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K^n$ $\quad a \in K$

$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$a \cdot x = a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$ (Multiplikation - Skalaren)

(3) $V = M_{n \times m}(K) = K^{n \times m}$ $\quad x = (x_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$, $y = (y_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \in M_{n \times m}(K)$

$a \in K$

$x + y = (x_{ij} + y_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ $\quad \underbrace{ax}_{\text{Skalar} \cdot \text{Matrix}} = (\underbrace{a x_{ij}}_{\text{Skalar} \cdot \text{reelle Zahlen}})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \in M_{n \times m}(K)$

$m = 1 \Rightarrow V = M_{n \times 1}(K) = K^{n \times 1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K\} = K^n$

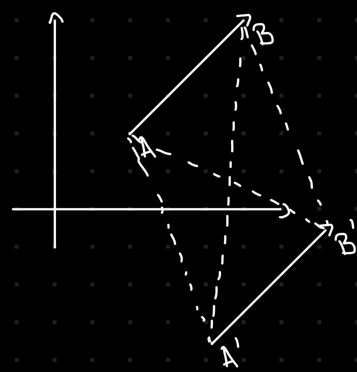
$n=1 \Rightarrow V = K^{1\times m} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, \dots, x_m \in K \right\}$

(4) $\mathbb{R}^2$ = die Ebene

$A, B \in \mathbb{R}^2$

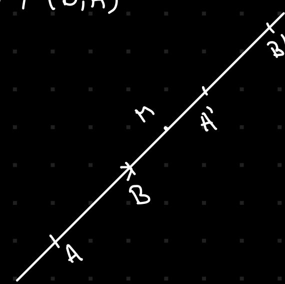
$A(x_1, y_1)$, $B = (y_1, y_2)$

$\overline{AB} = (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$



$\overline{AB} \neq \overline{BA}$

$(A,B) \neq (B,A)$



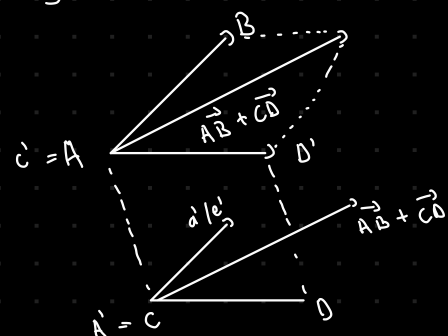
$\overline{AB} \sim \overline{A'B'} \Leftrightarrow [AB']$ und $[A'B]$ haben denselben Mittelpunkt

Zu zeigen: $\sim$ ist eine Äquivrelation auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 /_\sim = \{ \overrightarrow{AB} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \}$

$\overrightarrow{AB} = \{ \overline{XY} \mid \overline{AB} \sim \overline{XY} \}$

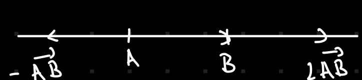
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$:



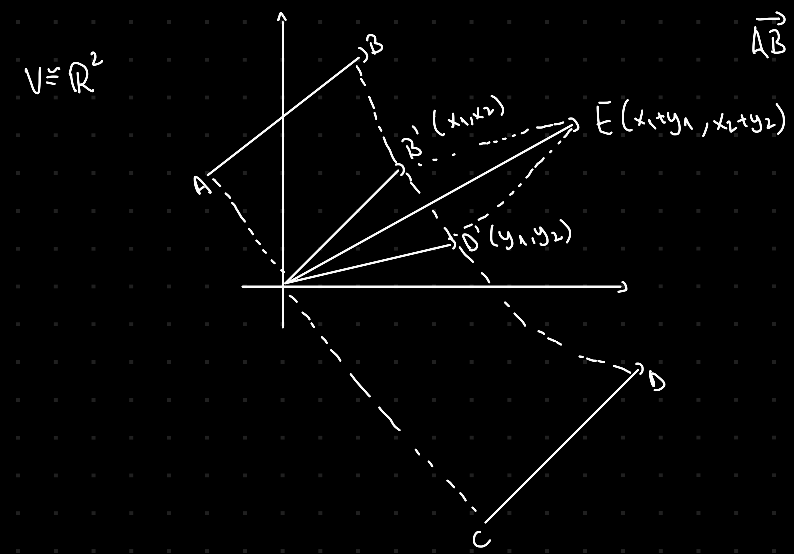
$a \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} \in V$

$a = 0 \Rightarrow 0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$a = 2$



$a\overrightarrow{AB}$ hat dieselbe Richtung als $\overrightarrow{AB}$, denselben Sinn für $a>0$, umgekehrten Sinn für $a<0$; die Länge $|\overrightarrow{AB}|$ wird mit $|a|$ multipliziert



Satz 3.1.3: V ist ein K-Vektorraum

$x, y \in V$ - Vektoren

$a, b \in K$ - Skalaren

(a) $a \cdot \overset{\text{Nullvektor}}{0} = 0 = \underset{}{0}x$ → Nullskalar ($\in K$)

(b) $a(-x) = \overset{\in V}{-}\underbrace{ax}_{\text{Vektor}} = \overset{\text{Skalar}\cdot\text{Vektor}}{(-a)x}$

(c) $a(x-y) = ax - ay$; $(a-b)x = a \cdot x - bx$

(d) $ax = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $x = 0$

Beweis:

(a) $0 = 0 + 0 \overset{\text{in}(V,+)}{\Rightarrow} a \cdot 0 = a(0+0) \overset{VR1}{=\!=} a0 + a0 \mid -a0 \Rightarrow 0 = a0$; $a0 \in V \Rightarrow \exists -a0 \in V$

in $(K,+)$: $0 = 0 + 0$

$0x = (0+0)x \overset{VR2}{=\!=} 0x + 0x \mid -0x \Rightarrow 0 = 0x$

$0x \in V \Rightarrow -0x \in V$

(b) in $(V,+)$ $x + (-x) = 0$

$a(x + (-x)) = a \cdot 0 \overset{(a)}{=} 0$

$\overset{(VR1)}{\Longrightarrow}$ $ax + a(-x) = 0 \Rightarrow a(-x) = -ax$ in $(V,+)$

in $(K,+)$: $a + (-a) = 0$

$$(a+(-a))\,x = 0\cdot x \overset{(a)}{=} 0$$

$$\xRightarrow{(VR2)} \quad a\cdot x + (-a)\,x = 0 \Rightarrow (-a)\,x = -ax \quad \text{in } (U,+)$$

(c) $a(x-y) = a(x+(-y)) \overset{VR1}{=\!=} a\cdot x + a(-y) \overset{(b)}{=\!=} ax - ay$

$(a-b)x = (a+(-b))x \overset{VR2}{=\!=} ax + (-b)x \overset{(b)}{=\!=} ax - bx$

(d) $ax = 0$

Wenn $a=0$ dann ist es ok

Wenn $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in K$ (K ist ein Körper)

$a^{-1} \mid ax = 0 \Rightarrow \underbrace{a^{-1}(ax)}_{\text{Skalar}\cdot\text{Vektor}} = a^{-1}\cdot 0 \overset{(a)}{=\!=} 0 \xRightarrow{(VR3)} (a^{-1}\cdot a)\cdot x = 0$

$1\cdot x = 0 \overset{(VR4)}{\Rightarrow} x = 0$ $\boxtimes$

Untervektorräume

> **Def:** V ist ein K-VR und $U \subseteq V$
>
> $U \leq_K V$ (d.h. U ist ein K-Untervektorraum von V) wenn die Addition auf V und die Skalarmultiplikation induzieren wohldefinierten Operationen auf U (d.h. $x,y \in U \subseteq V \Rightarrow x+y \in U$; $a \in K$, $x \in U \subseteq V \Rightarrow a\cdot x \in U$) und mit diesen Operationen U ist ein K-Vektorraum

> **Satz 3.1.6**: V ist ein K-VR. $U \subseteq V$
>
> Die folgende Aussagen sind äquivalent:
>
> (i) $U \leq_K V$
>
> (ii) (a) $0 \in U$
>
> (b) $x,y \in U \Rightarrow x+y \in U$
>
> (c) $a \in K, x \in U \Rightarrow a\cdot x \in U$
>
> (iii) (a) $0 \in U$
>
> (b) $a,b \in K$, $x,y \in U \Rightarrow ax+by \in U$

Bemerkung: $ax+by$ ist eine lineare Kombination von $x,y \in V$ mit Skalaren $a,b \in K$

$\boxed{\text{Beweis}}$:

(i) $\Rightarrow$ (ii) klar

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 0 \in U \\ \cdot\ x,y \in U \Rightarrow x+y \in U \text{ (stabiler Teil)} \\ \cdot\ x \in U \Rightarrow -x = -(1\cdot x) = (-1)\cdot x \in U \end{array}\right\} \Rightarrow U \text{ ist eine Untergruppe von } (V,+)$$

$(U,+)$ ist eine abelsche Gruppe

$$\begin{array}{l} K \times U \to V \\ (a,x) \longmapsto ax \end{array} \quad \text{ist wohl definiert}$$

(VR1) – (VR4) sind automatisch erfüllt $\Rightarrow U$ ist ein K-Vektorraum

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $0 \in U$ aus der Voraussetzung

$$a,b \in K,\ x,y \in U \xRightarrow{(iic)} ax,\ by \in U \xRightarrow{(iib)} ax+by \in U$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $0 \in U$ (Voraussetzung)

$$x,y \in U \Rightarrow x+y = \underset{\underset{a}{\parallel}}{1}x + \underset{\underset{b}{\parallel}}{1}\cdot y \in U \text{ (nach iii b)}$$

$$a \in K,\ x \in U \Rightarrow ax = a\cdot x + \underset{\underset{b}{\parallel}}{0}\cdot \underset{\underset{y}{\parallel}}{x} \in U \text{ —— '' ——} \qquad \boxtimes$$

$\boxed{\text{Beispiele von Unterräumen}}$:

$(V,+)$ ist K-Vektorraum

$0 = \{0\} \leq_K V$

$V \leq_K V$

$V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$

$U = \{(x_1,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

$0 = (0,0) \in U$ ✓

$x = (x_1,0),\ y = (y_1,0) \in U \Rightarrow x+y = (x_1+y_1,\ 0+0) \in U$ ✓

$x = (x_1, 0) \in U,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot x = (ax_1, \overset{a\cdot 0}{\uparrow}0) \in U$ ✓

> $\boxed{3.1.7}$: V ist ein K-Vektorraum. $U_i \leq_K V,\ i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \leq_K V$

$\boxed{\text{Beweis}}$: $U = \bigcap_{i \in I} U_i$

- $0 \in U_i,\ \forall i \in I \Rightarrow 0 \in \bigcap_{i \in I} U_i = U$

- $a, b \in K,\ x, y \in U = \bigcap_{i \in I} U_i \Rightarrow x, y \in U_i,\ \forall i \in I \xRightarrow{U_i \leq_K V} ax + by \in U_i,\ \forall i \in I$

$\Rightarrow ax + by \in \bigcap_{i \in I} U_i = U \Rightarrow U \leq_K V$ $\boxtimes$

- $\boxed{\text{Bem}}$: Die Vereinigung zweier oder mehrere Unterräumen ist nicht unbedingt ein Unterraum

> $\boxed{\text{Def}}$: V ist K-Vektorraum $X \subseteq V$ (X-Teilmenge von V)

$$\langle X \rangle_K \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{U \leq_K V \\ X \subseteq U}} U = \cap \{ U \leq_K V \mid X \subseteq U \}$$

> $\boxed{3.1.10}$: V ist ein K-Vektorraum $X \subseteq V$

(a) $\langle X \rangle_K \leq_K V$

(b) $X \subseteq \langle X \rangle_K$ und $X = \langle X \rangle_K$ gdw. $X \leq_K V$

(c) $\langle X \rangle_K$ ist der kleinste Unterraum der X enthält, d.h. $U = \langle X \rangle_K \Leftrightarrow \begin{cases} U \leq_K V \\ X \subseteq U \\ W \leq_K V \text{ s.d. } X \subseteq W \Rightarrow U \leq_K W \end{cases}$

(d) $X \subseteq Y \subseteq V \Rightarrow \langle X \rangle_K \leq \langle Y \rangle_K \leq V$

> $\boxed{3.1.11}$: V ist ein K-Vektorraum $X \subseteq V$ z.zeigen $\langle X \rangle_K = \{ \underbrace{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}_{} \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in K,\ x_i \in K,\ i = \overline{1,n} \}$

lineare Kombination von $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit Skalaren $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$

$\boxed{\text{Beweis}}$: $U = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K, x_i \in X, i = \overline{1,n}\}$

$U = \langle X \rangle_K \iff \begin{cases} U \leq_K V & (1) \\ X \subseteq U & (2) \\ W \leq_K V, X \subseteq W \Rightarrow U \leq_K W & (3) \end{cases}$

Für (1): $0 \in U$ (für $n=0$) ✓

· Seien $a, b \in K$, $x, y \in U \Rightarrow x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ $a_i \in K, x_i \in K, i = \overline{1,n}$

$y = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$ $b_j \in K, y_j \in K$ $j = \overline{1,m}$

$ax + by = a(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + b(b_1y_1 + \ldots + b_my_m) = (aa_1)x_1 + \ldots + (aa_n)x_n + (bb_1)y_1 + \ldots +$

$(bb_m)y_m \in U \Rightarrow U \leq_K V$

Für (2): Sei $x \in X \Rightarrow x = 1 \cdot x \in U$ $(n = 1, a_1 = 1, x_1 = x \in X) \Rightarrow X \subseteq U$

Für (3): Sei $W \leq_K V$ s.d. $X \subseteq W$

Sei $x \in U \Rightarrow x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, $a_i \in K, x_i \in K$, $i = \overline{1,n}$

$\left.\begin{array}{l} x_i \in X \\ X \subseteq W \end{array}\right\} \Rightarrow x_i \in W$, $i = \overline{1,n} \xRightarrow{W \leq_K V} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \in W \Rightarrow$

$x \in W \Rightarrow U \subseteq W \Rightarrow U \leq_K W$ $\boxtimes$

→ $\boxed{\text{Korollar 3.1.14}}$: V ist ein K-Vektorraum. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ $n \in \mathbb{N}^*$

(a) $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \mid a_i \in K\}$

(b) $\langle x_1, x_2 \rangle = \{a_1x_1 + a_2x_2 \mid a_1, a_2 \in K\}$

(c) $\langle x_1 \rangle = \{a_1x_1 \mid a_1 \in K\}$

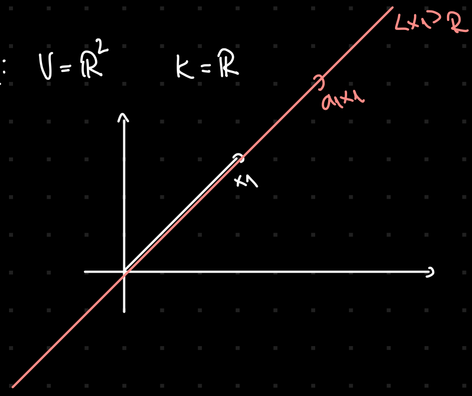
(d) $\langle \emptyset \rangle = 0$

$a_1x_1 + a_2x_2 = a_1x_1 + a_2x_2 + \underset{a_3}{\underset{\parallel}{0}} \cdot x_3 + \ldots + \underset{a_n}{\underset{\parallel}{0}} \cdot x_n$

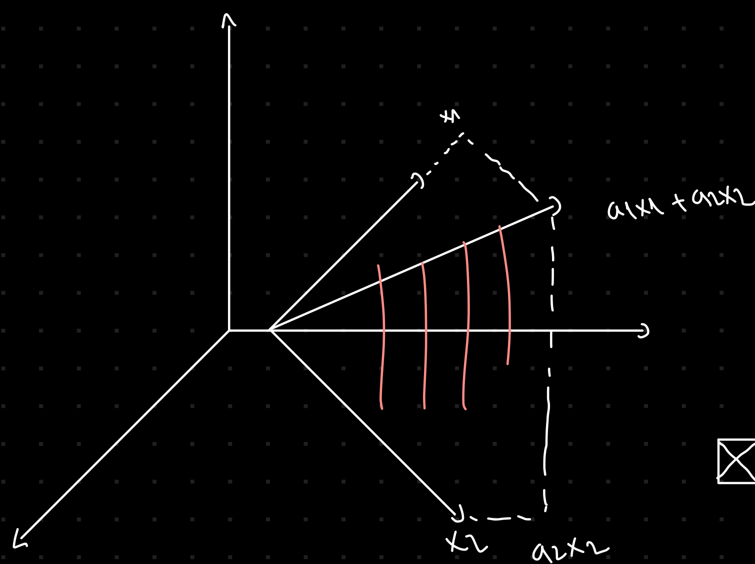
$e \notin c$?

$0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0x_n$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2 \quad K = \mathbb{R}$



$V = \mathbb{R}^3, \; K = \mathbb{R}$



$\boxtimes$

Amin + # KURS XI

13.12.2022

Satz. 3.1.16: V K-VektorR $S, T \leq_K V$

$$S+T = \{x+y \mid x \in S, y \in T\} \subseteq V$$

$$S+T = \langle S \cup T \rangle_K \iff \begin{cases} S+T \leq_K V & (1) \\ S \cup T \subseteq S+T & (2) \\ W \leq_K V,\ S \cup T \subseteq W \Rightarrow S+T \leq_K W & (3) \end{cases}$$

· Für (1): $0+0=0 \in S+T$

$a, b \in K,\ v, v' \in S+T \Rightarrow v = x+y,\ v' = x'+y',\ x, x' \in S,\ y, y' \in T$

$$av + bv' \iff a(x+y) + b(x'+y') = ax + ay + bx' + by' = \underbrace{ax+bx'}_{\in S} + \underbrace{ay+by'}_{\in T}$$

$\boxed{S+T \leq_K V \text{ (Unterraum)}}$

· Für (2): Sei $x \in S \Rightarrow x = \underset{S}{x} + \underset{T}{0} \in S+T \Rightarrow S \subseteq S+T$

$y \in T \Rightarrow y = \overset{S}{0} + \overset{T}{y} \in S+T \Rightarrow T \subseteq S+T$

$\Rightarrow \boxed{S \cup T \subseteq S+T}$

· Für (3): Sei $W \leq_K V$ s.d. $S \cup T \subseteq W$

Sei $v \in S+T \Rightarrow v = x+y,\ x \in S, y \in T$

$\left.\begin{array}{l} x \in S \subseteq S \cup T \subseteq W \\ y \in T \subseteq S \cup T \subseteq W \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \in W$

$W \leq_K V$

$\Rightarrow v \in W \Rightarrow S+T \subseteq W$

$\Downarrow$

$S+T \leq_K W$

· $\boxed{\text{Satz. 3.1.18}}$: V K-VektorR. $S, T \leq_K V$ (Unterräume)

Zu zeigen: $S \cap T \iff (\forall v \in S+T,\ v = x+y = s+t,\ x, s \in S,\ y, t \in T \Rightarrow x = s, y = t)$

Beweis:

„$\Rightarrow$" sei $v \in S+T \Rightarrow v = x+y,\ x \in S, y \in T$

Wir nehmen an dass $v = s+t,\ s \in S,\ t \in T$ } $\Rightarrow x+y = s+t$

$\underbrace{x-s}_{S} = \underbrace{t-y}_{T} \Rightarrow x-s = t-y \in S \cap T$, $S \cap T = 0 = \{0\}$ } $\Rightarrow x-s = 0 = t-y$

$\Downarrow$

$x = s,\ t = y$

„$\Leftarrow$" $0 = \{0\} \leq S,\ 0 = \{0\} \leq T \Rightarrow 0 \leq S \cap T$

Sei $v \in S \cap T \Rightarrow v = \underset{S}{\underset{\Uparrow}{v}} + \underset{T}{\underset{\Uparrow}{0}} = \underset{S}{\underset{\Uparrow}{0}} + \underset{T}{\underset{\Uparrow}{v}} \xrightarrow[\text{ist eindeutig}]{\text{die Schreibung}} v = 0 \Longrightarrow S \cap T \subseteq \{0\}$

Dann $S \cap T = \{0\}$

- $\boxed{\text{Bemerkung 3.1.19}}$: $S, T \leq_K V$

$$V = S \oplus T \Leftrightarrow \begin{cases} V = S+T \\ S \cap T = \{0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V \subseteq S+T \\ S \cap T \subseteq \{0\} \end{cases}$$ da sicher $S+T \leq_K V$ (immer wahr) und $\{0\} \subseteq S \cap T$ (immer wahr)

Lineare Abbildungen

- Beispiel: V, W sind K-VektorR.

lineare Abbildungen:

$0: V \to W \quad 0(x) = 0,\ \forall x \in V$

$1V: V \to V \quad 1V(x) = x,\ \forall x \in V \quad \leftarrow$ Isomorphismus

$V \leq_K W \quad i: V \to W \quad i(x) = x,\ \forall x \in V$

- $\boxed{\text{Satz 3.1.25}}$: V, W sind K-V.R. $\quad f: V \to W$

Zu zeigen $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ($\nearrow$ linear) $\Leftrightarrow \forall x, y \in V,\ \forall \alpha, \beta \in K: f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Beweis:

- „$\Rightarrow$" Seien $x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K$

$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

- „$\Leftarrow$" Seien $x,y \in V$, $\alpha \in K$

$$f(x+y) = f(\overset{\alpha}{\hat{1}}\cdot x + \overset{\beta}{\hat{1}}\cdot y) = 1\cdot f(x) + 1\cdot f(y) = f(x)+f(y)$$

$$f(\alpha x) = f(\alpha x + 0\cdot x) = \alpha f(x) + 0\cdot f(x) = \alpha f(x)$$

$\boxtimes$

- $\boxed{\text{Lemma 3.1.27}}$

Beweis:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & W \arrow[d] \\ & U \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{aligned} f &\in Hom_K(V,W) \\ g &\in Hom_K(W,U) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g\circ f \in Hom_K(V,U)$$

Seien $\alpha,\beta \in K$, $x,y \in V$

$$(g\circ f)(\alpha x+\beta y) = g(f(\alpha x+\beta y)) \overset{f \text{ linear}}{=\!=} g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \overset{g \text{ linear}}{=\!=} \alpha\, g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha (g\circ f)(x) + \beta (g\circ f)(y)$$

$\Longrightarrow g\circ f \in Hom_K(V,U) \Rightarrow$ lineare Abbildung

Seien $V \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} W$ $\quad f, f' \in Hom_K(V,W)$ $\quad \lambda \in K$

$f+f' : V \longrightarrow W$ $\quad (f+f')(x) \overset{def}{=} f(x) + f'(x)$. zu zeigen $f+f' \in Hom_K(V,W)$

$\lambda\cdot f : V \longrightarrow W$ $\quad (\lambda f)(x) \overset{def}{=} \lambda\cdot f(x)$. zu zeigen $\lambda f \in Hom_K(V,W)$

Seien $\alpha,\beta \in K$, $x,y \in V$

- $(f+f')(\alpha x+\beta y) = f(\alpha x+\beta y) + f'(\alpha x+\beta y) \underset{\text{linear}}{\overset{f,f'}{=\!=}} \alpha f(x) + \beta f(y) + \alpha f'(x) + \beta f'(y) = \alpha(f(x)+f'(x)) + \beta(f(y)+f'(y)) = \alpha(f+f')(x) + \beta(f+f')(y) \Longrightarrow f+f'$ ist linear

- $(\lambda f)(\alpha x+\beta y) = \lambda f(\alpha x+\beta y) \underset{\text{linear}}{\overset{f}{=\!=}} \lambda(\alpha f(x) + \beta f(y)) \underset{\text{Setzung}}{\overset{\text{Voraus-}}{=\!=}} (\lambda\alpha) f(x) + (\lambda\beta) f(y) \overset{K \text{ komm.}}{=\!=} \alpha \lambda f(x) + \beta \lambda f(y) = \alpha(\lambda f)(x) + \beta(\lambda f)(y) = \lambda f \in Hom_K(V,W)$

- $f \in Hom_K(V,W)$ $\quad f$ ist ein Izomorphismus (= linear + bijektiv)

Zu zeigen $f^{-1}: W \to W$ ist ein Izomorphismus

f bij $\Rightarrow \exists f^{-1}: W \to V$ s.d. $f^{-1} \circ f = 1_V$, $f \circ f^{-1} = 1_W$ und $(f^{-1})^{-1} = f \Rightarrow f$ ist bijektiv

- Seien $\alpha, \beta \in K$, $w, t \in W$ $f^{-1}(\alpha w + \beta t) = ?$

Seien $x = f^{-1}(w) \in V$, $y = f^{-1}(t) \in V$ und $f(x) = w$, $f(y) = t$

$$f^{-1}(\alpha w + \beta t) = f^{-1}(\alpha f(x) + \beta f(y)) \overset{f \text{ linear}}{=\!=} f^{-1}(f(\alpha x + \beta y)) = \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{= 1_V}(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha f^{-1}(w) + \beta f^{-1}(t) \Rightarrow f^{-1} \text{ ist linear}$$

$\boxtimes$

- $\boxed{\text{Theorem 3.1.28}}$:

$+: Hom_K(V, W) \times Hom_K(V, W) \longrightarrow Hom_K(V, W)$

$\cdot: K \times Hom_K(V, W) \longrightarrow Hom_K(V, W)$

sind beide wohl definiert

Zu zeigen: $(Hom_K(V, W), +)$ eine abelsche Gruppe

+ (VR1), (VR2), (VR3), (VR4)

<u>Beweis:</u>

$f, g, h : V \to W$, $f, g, h \in Hom_K(V, W)$

$(f+g)+h$, $f+(g+h) : V \to W$

$\forall x \in V$ $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \longleftarrow$ Assoziativität in $(W, +)$

$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$

$0: V \to W$, $0(x) = 0$ ist neutrales Element in $(Hom_K(V, W), +)$

$f \in Hom_K(V, W)$ $-f: V \to W$, $(-f)(x) = -f(x)$

$f, g \in Hom_K(V, W)$, $\alpha, \beta \in K$

(VR1) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ (VR3) $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$

(VR2) $(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$ (VR4) $1 \cdot f = f$

$\alpha(f+g): V \longrightarrow W$

$\alpha f + \alpha g: V \longrightarrow W$

$\forall x \in V: (\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x) + g(x))$

$\parallel \quad \leftarrow$ VR in W

$(\alpha f + \alpha g)(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$

· $\boxed{\text{Satz 3.1.30}}$: $f \in Hom_K(V, W)$

$\ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0\} \leq V$

$\operatorname{Im} f = \{y \in W \mid \exists x \in V: f(x) = y\} = \{f(x) / x \in V\}$

<u>Beweis:</u>

a) · $0 \in V \quad f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \ker f$

· $\alpha, \beta \in K,\ x, x' \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 = f(x')$

$f(\alpha x + \beta x') = \alpha f(x) + \beta f(x') = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta x' \in \ker f$

$\Rightarrow \ker f \leq_K V \rightarrow \ker f$ Unter-VektorR

b) · $0 \in W,\ f(0) = 0 \in \operatorname{Im} f$

· $\alpha, \beta \in K,\ y, y' \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists x, x' \in V: f(x) = y,\ f(x') = y'$

$\alpha y + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(x') \overset{f \text{ linear}}{=\!=} f(\underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in V}) \in \operatorname{Im} f$. d.h. $\operatorname{Im} f \leq_K W$ - UnterVektR

c) f inj $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

„$\Rightarrow$" $\{0\} \subseteq \ker f$ (immer, weil $\ker f \leq_K V$)

Sei $x \in \operatorname{Im} f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0) \xRightarrow{f \text{ injektiv}} x = 0$

$\Rightarrow \ker f = \{0\}$

„$\Leftarrow$" Seien $x, y \in V$ s. d. $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \xRightarrow{f \text{ linear}} f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \ker f$

$\ker f = \{0\}$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ $\boxtimes$

3.2 Baza unui spațiu vectorial

Liniare Unabhängigkeit

$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in V^{n\times 1}$; $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$

$K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

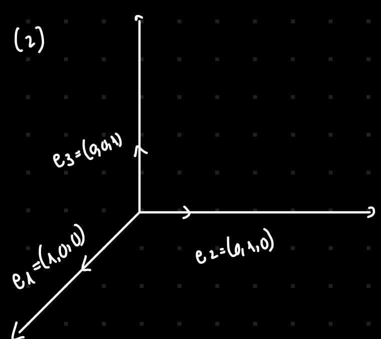
$1 \cdot \boxed{n = n} \; 1 \longrightarrow (1 \cdot 1)$

Ist es möglich so schreiben : $(v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \dots + v_n\alpha_n$

- **Bemerkung**: $A, B \quad \exists A \cdot B \quad (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

- **Beispiel 3.2.3**:

(2)



$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ s.d $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$

$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$

$(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$

$\Downarrow$

$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

H.A: K^n die liste $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ ist linear unabhängig

$e_1 = (1, 0, \dots, n)$

$e_2 = (0, 1, \dots, n)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \dots 1)$

20.12.2022

KURS XII

$\boxed{\text{Lineare Unabhängigkeit}}$

$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \alpha v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n$ $\quad \Big| \stackrel{(*)}{\longrightarrow} (v_1 \ v_2 \dots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \dots v_n\alpha_n \stackrel{\text{komm.}}{=} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$1 \times \boxed{n \quad n} \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$

· Def: $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$ ist eine Unterliste von $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ genau dann wenn $\exists i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ s.d. $w = \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix}$

> $\boxed{\text{Satz 3.2.4}}$: w ist eine lineare Unterliste von v

w ist linear unabhängig $\Rightarrow v$ ist linear abhängig (oder äq: v ist linear unabhängig $\Rightarrow w$ ist linear unabhängig)

Beweis: Sei $w = \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix}$ für einige $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, \dots, m\}$, wobei $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. Wir nehmen an, dass w linear abhängig ist $\Rightarrow \exists\ \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ nicht alle null so dass $\alpha_{i_1} v_{i_1} + \alpha_{i_2} v_{i_2} + \dots + \alpha_{i_m} v_{i_m} = 0$

Für $\alpha_j = 0$, $\forall j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ $(1 \le j \le n)$. Wir haben $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow v$ ist linear abhängig $\boxtimes$

> $\boxed{\text{Satz 3.2.6}}$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in V^{n \times 1}$

Beweis: Wenn $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ so dass v_i ist eine lineare Kombination von $v^{\setminus i}$ d.h. $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \alpha_j v_j \Rightarrow -\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \alpha_j v_j + v_i = 0 \Rightarrow (-\alpha_1) v_1 + \dots + \overset{\overset{0}{\#}}{1} \cdot v_i + \dots + (-\alpha_n) v_n = 0 \Rightarrow v$ ist linear abhängig

Umgekehrt wenn v ist linear abhängig $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nicht alle null s.d. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ mit der Eigenschaft $\alpha_i \ne 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_i^{-1} \in K$ $\quad \alpha^{-1} / \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\alpha_1^{-1} \alpha_j)\, v_j = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_i = 1 \cdot v_i = (\alpha_i^{-1} \alpha_i) v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} (-\alpha_i^{-1} \alpha_j) v_j \in \langle v^{\setminus i} \rangle$ $\boxtimes$

> **Bemerkung:** Der Satz 3.1.6 sagt, dass v ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\}$ s.d. $v_i \in \langle v^{\setminus i} \rangle$

> **Korollar 3.2.7:** $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ist eine Liste von Vektoren ; v ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists\ i \in \{1,\dots,n\}$ s.d. $\langle v \rangle = \langle v^{\setminus i} \rangle$

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" v ist linear abhängig $\Rightarrow \exists\ i \in \{1,\dots,n\}$ s.d. $v_i \in \langle v^{\setminus i} \rangle$; $j \neq i$ $v_j \in \langle v^{\setminus i} \rangle \Rightarrow \langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle \subseteq \langle v^{\setminus i} \rangle$ (1)

Umgekehrt $j \neq i$ $v_i \in \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \langle v^{\setminus i} \rangle \subseteq \langle v \rangle$ (2) ; (1),(2) $\Rightarrow$ die beide sind gleich

„$\Leftarrow$" $\langle v \rangle = \langle v^{\setminus i} \rangle$

$v_i \in \langle v \rangle$

Basen und Koordinaten

Die kanonische Basis ist eigentlich eine Basis

$$K^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K,\ i = \overline{1,m}\}$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots 0),\ e_n = (0, 0, \dots, 1) \in K^n \qquad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Linear unabhängigkeit: Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ s.d. $a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n = 0$

$$a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Das Erzeugniss: Sei $x \in K^n \Rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_i \in K$ $1 \le i \le n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \in \langle e \rangle$, d.h. $K^n \subseteq \langle e \rangle$. Umgekehrt

> **Satz 3.2.12:** $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ Liste von Vektoren

<u>Beweis:</u>

(i)$\Rightarrow$(iii) b ist linear unabhängig und der Voraussetzung $\langle b \rangle \subseteq V$

Sei $x \in V \Rightarrow b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ x \end{bmatrix}$ ist linear abhängig $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \in K$ nicht alle null, $\alpha_1 b_1 + \dots \alpha_n b_n + \alpha x = 0$

ist $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nicht alle null $\Rightarrow b$ ist linear abhängig $\lightning$ Widerspruch

Es bleibt $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in K \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha_1) b_1 + \ldots + (\alpha^{-1}\alpha_n) b_n + x = 0$

$$x = -\left[(\alpha^{-1}\alpha_1) b_1 + \ldots + (\alpha^{-1}\alpha_n) b_n\right] \in \langle b \rangle \Rightarrow V \subseteq \langle b \rangle \Rightarrow V = \langle b \rangle$$

Es folgt b ist eine Basis

(iii) $\Rightarrow$ (i) b Basis $\Rightarrow$ b linear unabhängig

$$\left.\begin{array}{r} \text{Sei } x \in V \\ b \text{ Basis} \Rightarrow V = \langle b \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle b \rangle \xRightarrow{3.2.6} b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ x \end{bmatrix} \text{ linear abhängig}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\langle b \rangle = V$ (aus der Voraussetzung)

$$\left.\begin{array}{r} \text{Wäre } b \text{ linear abhängig} \Rightarrow \exists\, i \in \{1,\ldots,n\} \text{ s.d. } \langle b^{\hat{i}} \rangle = \langle b \rangle \\ \text{Aber } \langle b \rangle = V \end{array}\right\} \Rightarrow \langle b^{\hat{i}} \rangle = V \text{ ↯ Widerspruch}$$

Es bleibt b ist linear unabhängig so ist b eine Basis

(iii) $\Rightarrow$ (i) b ist eine Basis $\Rightarrow \langle b \rangle = V$

Sei $i \in \{1,\ldots,n\}$; da b linear unabhängig ist $\xRightarrow{3.2.7} \langle b^{\hat{i}} \rangle \neq \langle b \rangle = V \Rightarrow b$ ist minimal mit dem Eigenschaft $\langle b \rangle = V$ $\boxtimes$

› Korollar 3.2.14 :

<u>Beweis:</u> $K = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, mit $b_1, \ldots, b_n \in K$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in V^{n \times 1}$$

A. ist b linear unabhängig $\Rightarrow b$ ist eine Basis, und wir sind fertig.

Ist b nicht linear unabhängig $\Rightarrow b$ ist nicht minimal mit der Eigenschaft $\langle b \rangle = V \Rightarrow \exists\, i \in \{1,\ldots,n\}$ s.d. $\langle b^{\hat{i}} \rangle = V$

Wir ersetzen b mit $b^{\hat{i}}$ und wir gehen zu $\boxed{A}$ zurück. Da b endlich ist, nach am meisten Schritten erhalten wir eine Basis $\boxtimes$

> $\boxed{\text{Bemerkung}}$: $\emptyset$ ist eine Basis für den Nullvektorraum $\{0\}$

> $\boxed{\text{Def 3.2.17}}$: $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in V^{n\times 1}$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\left.\begin{array}{l}\text{Sei } x \in V \\ \langle b \rangle = V\end{array}\right\} \Rightarrow x \in \langle b \rangle = x$ ist eine lineare Kombination von Vektoren in $b \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K: \ x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \\ \text{Seien } \alpha_1', \dots, \alpha_n' \in K \text{ s.d. } x = \alpha' b_1 + \dots + \alpha_n' b_n\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \alpha_1' b_1 + \dots + \alpha_n' b_n$

$\alpha_1 b_1 - \alpha_1' b_1 + \dots + \alpha_n b_n - \alpha_n' b_n = 0$

$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1 - \alpha_1') b_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha_n') b_n = 0 \\ b \text{ ist linear unabhängig}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_1' = \dots = \alpha_n - \alpha_n'$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\alpha_1 = \alpha_1' \ \dots \ \alpha_n = \alpha_n'$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\left.\begin{array}{l}\text{Sicher } \langle b \rangle \subseteq V \\ \text{Für } x \in V \Rightarrow \exists\, \alpha_{x_1}, \dots, \alpha_n \in K \text{ s.d. } x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_1^{(n)} b_n \in \langle b \rangle \Rightarrow V \subseteq \langle b \rangle\end{array}\right\} \Rightarrow V = \langle b \rangle$

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ s.d. $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = 0 = 0 \cdot b_1 + \dots + 0 \cdot b_n \xRightarrow[\text{ist eindeutig}]{\text{die Schreibung}} \alpha_n = 0, \dots, \alpha_n = 0$. So folgt b ist linear unabhängig d.h. b ist ein Basis

• $\boxed{\text{Die Dimension eines Vektorräumes}}$

> $\boxed{\text{Lemma 3.2.18 (Lemma von Steinitz)}}$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in V^{n\times 1}$ lineare unabhängig

$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in V^{m\times 1} \quad \langle w \rangle = V$

Dann $n \leq m$ und $\langle v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots w_m \rangle = V$

<u>Beweis:</u> Induktion nach n

ist $n = 0$ dann haben wir nicht zu beweisen

Wir nehmen an das die Schlussfolgerung der Lemma ist wahr für jede Liste v mit n Vektoren, $n \geq 0$

Sei $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$ eine linear unabhängige Liste mit $n+1$ Vektoren $\Rightarrow v' = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ist eine Unterliste von v mit n

Vektoren ; v' ist linear unabhängig

Die induktionsvoraussetzung für v' sagt uns, dass $n \leq m$ und (nach einer Nummerierung) $\langle v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_n \rangle = V$

Wir nehmen an, dass $n = m \Rightarrow V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
$v_{n+1} \in V = \langle v_1 \dots v_n \rangle$ $\Bigg\} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$ ist linear abhängig ↯ Widerspruch

Es bleibt $n < m \Rightarrow n+1 \leq m$

$$v_{n+1} \in V = \langle v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m \rangle \Rightarrow v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} w_{n+1} + \dots + \alpha_m w_m$$

Wären alle $\alpha_{n+1} = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow$ v ist linear abhängig ↯ Widerspruch

Das heißt $\exists i \in \{n+1, \dots, m\}$ s.d. $\alpha_i \neq 0$

Nach eine Nummerierung wir können sagen $\alpha_{n+1} \neq 0$

$$\langle v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, w_m \rangle \subseteq V$$

$$\alpha_{n+1}^{-1} \mid v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} w_{n+1} + \dots + \alpha_m w_m \quad \exists\, \alpha_{n+1}^{-1} \in K$$

$$\alpha_{n+1}^{-1} v_{n+1} = (\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_n) v_n + w_{n+1} + \dots + (\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_m) w_m$$

$$w_{n+1} = -(\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_1) v_1 - \dots - (\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_n) v_n + \alpha_{n+1}^{-1} \cdot v_{n+1} + \dots - (\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_m) w_m$$

$$w_{n+1} \in \langle v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, w_m \rangle \Rightarrow V = \langle v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, w_n \rangle \subseteq V$$

$\Rightarrow$ die Gleichung $\boxtimes$