+ ×

− ÷

Seminar III

1.3.15

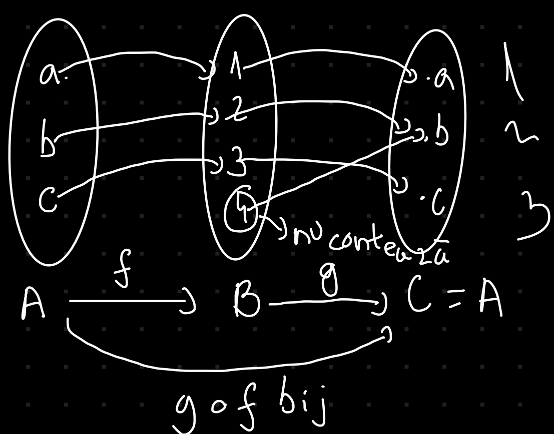
Zu zeigen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

a) $g \circ f$ inj $\not\Rightarrow g$ inj

b) $g \circ f$ surj $\not\Rightarrow f$. surj

c) $g \circ f$ bij $\not\Rightarrow g$ inj

$g \circ f \not\Rightarrow f$. surj.



$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$

$(g \circ f)(a) = a$

$(g \circ f)(b) = b \quad \Rightarrow (g \circ f) = 1_A$

$(g \circ f)(c) = c$

Gegenbsp für c) und für a) und b) auch

$f(x) \neq 4, \forall x \in A \Rightarrow f$ ist nicht surj

$g(2) = b = g(4) \Rightarrow g$ ist nicht inj

Bem:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_B"'] \arrow[dr, bend left, "f \circ g"] & C = A \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

y	1	2	3	4
$f \circ g(y)$	1	2	3	2

$f \circ g \neq 1_B \Rightarrow$ nicht invertierbar

Man bilde ein Bsp. von einer Funktion $f: A \to B$:

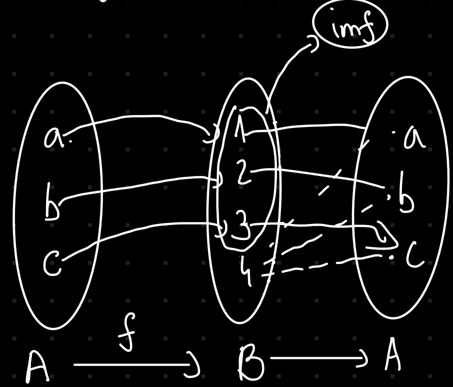
a) f hat genau zwei Linksinverse

b) f hat unendliche viele Linksinverse

c) f ist nicht bij. aber sie hat genau eine Linv.

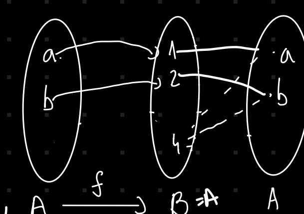
d) f ist surj. aber sie hat keine Linv.

a)



$\exists$ drei L.inv.

für zwei Linv.

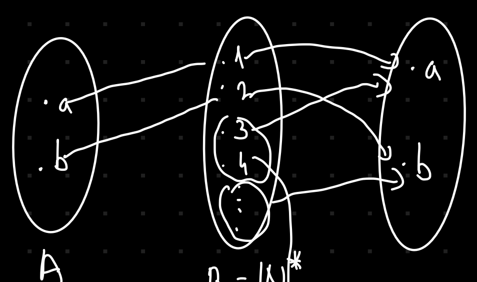


y	1	2	4
$g_1(y)$	a	b	a
$g_2(y)$	a	b	b

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "g \circ f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$(g \circ f) = 1_A \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 1_A(x), \forall x \in A \Leftrightarrow g(f(x)) = x_1, \forall y \in A$

b)



$g \circ f = 1_A \Leftrightarrow$

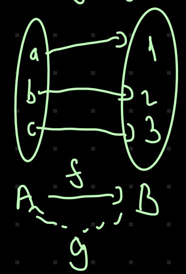
$g(f(a)) = a, \; g(f(b)) = b$

$\forall S \subseteq \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$

$g_S: \mathbb{N}^* \to A \quad g_S(x) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ b, & x = 2 \\ a, & x \in S \\ b, & x \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}) \setminus S \end{cases}$

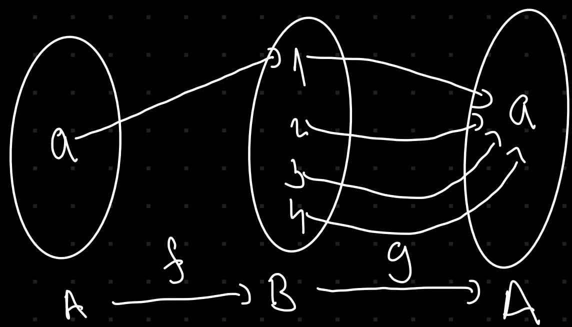
c) · Bem:

Wenn f bij. ist



$\exists!\, g: B \to A$ s.d. $g \circ f = 1_A$

$(g = f^{-1})$



$(g \circ f)(a) = a$

$(g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A$

$g \circ f = 1_A$

$A = \{a\}, \ \exists!\, g: B \to A, \ g(y) = a, \ \forall y \in B$

$f \circ g: B \to B$

$(f \circ g)(2) = f(a) = 1$

$(f \circ g)(3) = 1$

$(f \circ g)(4) = 1$

d) $A = \emptyset$ unbedingt

B Menge

$\theta: A = \emptyset \to B$

$\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Falsch}}}{x \in \emptyset} \Rightarrow \exists!\, y \in B$ s.d $\theta(x) = y$ ✓

$B^A = \{ f: A \to B \mid f \text{ Funktion} \}$

z.z. $|B^A| = |B|^{|A|}$

$A = \emptyset \quad |A| = 0$

$m^0 = 1$

$|B| = m$

Fall I. $B = \emptyset$

$\theta: \emptyset \to \emptyset \quad \theta = 1_\emptyset$ bij. $, \ \exists\, \theta^{-1} = 1_\emptyset$

Fall II $B \neq \emptyset$

$\Theta : A^{=\emptyset} \to B$ Funktion

$x_1, x_2 \in \emptyset = A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Theta(x_1) \neq \Theta(x_2)$ ✓

Θ inj.

$\nexists g : B \to \emptyset = A$

$B \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in B$

Wäre $g : B \to A$ eine Funktion $\Rightarrow \exists g(y) \in A = \emptyset$ unmöglich

F3 ist gut als Bsp für d.

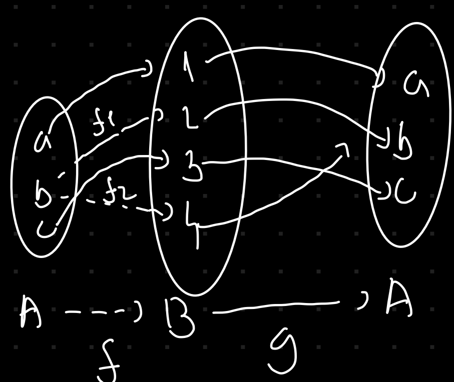
Man bilde ein Bsp. von einer Funktion $g : B \to A$:

a) g hat genau zwei Rechtsinv.

b) g hat unendliche viele Rechtsinverse

4. Sei $g : B \to A$ eine Funktion s.d. g hat genau eine R.i. Man zeige, dass g. bij ist

a)



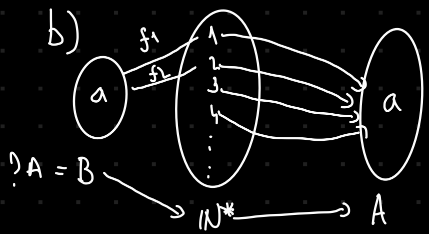
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "f\text{ nicht gegeben}"] \arrow[dr, "1A"'] \arrow[dr, dashed, bend left, "g\circ f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

x	a	b	c
$f_1(x)$	1	2	3
$f_2(x)$	1	4	3

$g \circ f = 1A \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 1A(x),\ \forall x \in A \Leftrightarrow$

$g(f(x)) = x,\ \forall x \in A$

b)



$\exists f_n : A \to \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(a) = n$

$g \circ f_n = 1A$

$(g \circ f_n)(a) = g$

$g \circ f = 1A$

g ist L.i für f   f ist R.i. für g

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{1} A$

$\left.\begin{array}{l} g \circ f = 1A \\ f \circ g = 1B \end{array}\right\} \Rightarrow g = f^{-1}$

$a \neq 0 \quad \cdot a^{(-1)} \, | \, a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$

$g \circ f = 1A \,|\, \circ f^{1} \Rightarrow g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1}$

f bij $\Rightarrow \exists f^{-1}$ $g = f^{-1}$

4. $g : B \to A \quad \exists f : A \to B$ a.i. $g \circ f = 1A \overset{g.\text{ surj}}{\Leftarrow}$ hat R.i. $\Rightarrow$ g surj

Wir nehmen an dass g nicht bij ist $\Rightarrow$ g ist nicht inj.

$\exists y_1, y_2 \Leftrightarrow y_1 \neq y_2 \Rightarrow g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow x_2 \in A$

$+$ $\times$

$-$ $\div$

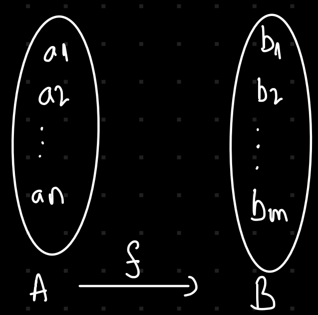
Seminar 4

1.3.48

<u>Lösung:</u>

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$



$B^A = \{f : A \to B \mid f \text{: Funktion}\}$

$f(a_1) \in B = \{m \dots | m\}$ alle m Möglichkeiten aus B

$f(a_2) \in B =$ — " —

$f(a_3) \in B =$ — " —

$f(a_n) \in B =$ — " —

$$|B^A| = \underbrace{m \cdot m \cdot \dots m}_{n \text{ mal}} = m^n$$

<u>1.3.49</u>

$\text{Inj}(A, B) = \{f \in B^A \mid f \text{ inj}\}$

$|\text{Inj}(A, B)| = ?$

$f(a_1) \in B \longrightarrow m$ Möglichkeiten

$f(a_2) \in B \setminus \{a_1\} \longrightarrow n-1$ Möglichkeiten

$f(a_3) \in B \setminus \{a_1, a_2\} \longrightarrow n-2$ Möglichkeiten

$f(a_n) \in B \setminus \{f(a_1) \dots, f(a_{n-1})\} \longrightarrow m-(n-1) = m-n+1$ Möglichkeiten

$$|\text{inj}(A, B)| = m(m-1)\dots(m-n+1) = \begin{cases} \frac{n!}{(m-n)!}, & n \le m \\ 0, & m > n \end{cases} = V_m^n$$

→ aranjamente/Variationen

Bem:

Funktionen in B^A

x	a_1	a_2	....	a_n
$f_1(x)$	$(b_1$	b_2	......	$b_1)$
$f_2(x)$	$(b_1$	b_1	.....	$b_2)$
$f_{m^n}(x)$	b_n	b_n	.....	b_n

Partikularfall

$A = \{a_1, a_2\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$

x	a_1	a_2
$f_1(x)$	$(b_1$	$b_2)$
$f_2(x)$	b_1	b_3
$f_3(x)$	$\cancel{b_1}$	$\cancel{b_1}$
$f_4(x)$	b_2	b_1
$f_5(x)$	$\cancel{b_2}$	$\cancel{b_2}$
$f_6(x)$	b_2	b_3
$f_7(x)$	b_3	b_1
$f_8(x)$	b_3	b_2
$f_9(x)$	$\cancel{b_3}$	$\cancel{b_3}$

$B \times B$

$$B^A \xrightarrow{1-1} \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n\text{-mal}} = B^n$$

für inj(A, B)

$$V_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$$

Variationen – geordnete Teilmenge

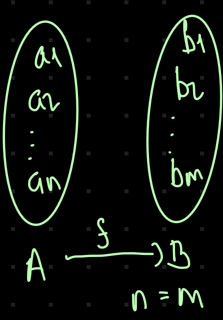
1.3.50

Seien A, B Mengen

$f(A) = n$, $f(B) = m$

$Bij(a, b) = \{ f: A \to B \mid f \text{ bij} \}$ $|Bij(A,B)| = ?$

Bem:



f inj(x) f bij

Lösung:

$$\mathrm{Bij}(A,B) = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \frac{n!}{(m-n)!} = \underset{\overset{\shortparallel}{m!}}{n!} & \boxed{n=m} \end{cases}$$

1.3.51

$$K_m^n = C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{V_m^n}{n!}$$

Bsp $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ $\quad 4^3 = 64$

$$V_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

X	a_1	a_2	a_3	
$f_1(x)$	b_1	b_2	b_3	
$f_2(x)$	b_1	b_3	b_2	
$f_3(x)$	b_2	b_1	b_3	$6 = 3!$
$f_4(x)$	b_2	b_3	b_1	
$f_5(x)$	b_3	b_1	b_2	
$f_6(x)$	b_3	b_2	b_1	
$f_7(x)$	b_1	b_2	b_1	nicht inj
$f_8(x)$	b_1	b_2	b_4	

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!} & \text{für } n \leq m \\ 0 & \text{für } n > m \end{cases}$$

1.3.51/52?

$$2^m = (1+1)^m = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i} \cdot \underbrace{1^{n-1} \cdot 1^i}_{1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{m}{i} \quad \square$$

Methode II:

$$\binom{m}{i} = \left|\{A \subseteq B \mid |A| = i\}\right| \qquad 0 \le i \le m$$

$$2^m = |P(B)|$$

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = \text{die Anzahl von aller Teilmenge von } B \quad \Big\} \quad 2^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}$$

$$P(B) = \{x \mid x \subseteq B\}$$

1.3.54:

$$\operatorname{surj}(A,B) = \{f \in B^A \mid f \text{ surj}\}$$

$$|\operatorname{surj}(A,B)| = ?$$

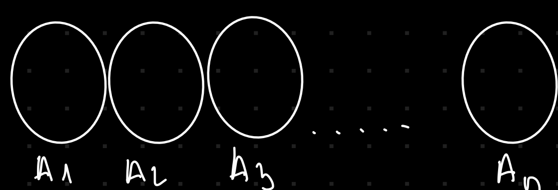
$|A| = n$, $|B| = m$

1.3.53

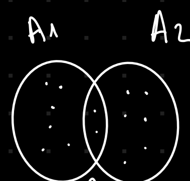
$n=1$

$|A_1| = |A_1|$

disjuncte



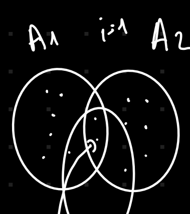
$$i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$



$A_1 \cap A_2$

$n=2$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$n=3$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \overbrace{|A_1| + |A_2| + |A_3|}^{n=3} - \overbrace{|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| -}^{3=\binom{3}{2}} |A_2 \cap A_3|$$

(se iau de două ori așa că se scad pentru a rămâne odată)

$$+ \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{\binom{3}{3}=1}$$

Induktion nach n

Wir nehmen an, dass $|A_1 \cup \ldots A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \ldots A_n|$

für alle n Menge $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Wir betrachten $n+1$ Mengen $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$

$$|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \ldots A_n) \cup A_{n+1}| \overset{n=2}{=} |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

$$= |A_1 \cup \ldots \cup A_1| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = (*)$$

$$(*) = \left[\left| \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n| \right] + |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \right.$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| + \ldots (-1)^{n-1} \left[|(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n} |A_1 \cap \ldots \cap A_n| + |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n} |A_1 \cap A_{n+1}| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \ldots$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap \ldots A_n \cap A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_1 \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}| \quad \square$$

- <u>Bemerkung:</u> Sei A eine endliche Menge $\cap A \neq \emptyset$. Z.z. $|A| = 1$

<u>Bew:</u> Man schreibt $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Wir zeigen durch Induktion nach n dass $a_1 = a_2 \ldots = a_n$

$n=1$ $A = \{a_1\}$, $a_1 \in n$

Wir nehmen an dass wenn $A = \{a_1, a_2 \dots, a_n\}$ dann $a_1 = \dots = a_n$ (Induktionsvoraussetzung)

Wir betrachten Induktion einer Menge $A = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$

$$A = A' \cup A'' = \{a_1, \dots a_k\} \cup \{a_2, \dots, a_{k+1}\}$$

$\boxed{\text{falsch?}}$

$$\left.\begin{array}{l} A' = \{a_1, \dots, a_k\} \xRightarrow{S.V} a_1 = \dots = a_k \\ A'' = \{a_2, \dots a_{k+1}\} \xRightarrow{i.v} a_2 = \dots = a_{k+1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{k+1}$$

$\square$

$$n = 2, \quad A = \{a_1, a_2\} = \underbrace{\{a_1\}}_{A'} \cup \underbrace{\{a_2\}}_{A''}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A' = \{a_1\} & a_1 = a_1 \\ A'' = \{a_2\} & a_2 = a_2 \end{array}\right\} \not\Rightarrow a_1 = a_2$$

1.3.54:

$$\text{surj}(A, B) = \{f \in B^A \mid f \text{ surj}\}$$

$$|\text{surj}(A, B)| = ?$$

$|A| = n, \ |B| = m$

Lösung:

$$\text{Nicht surj}(A, B) = \{f \in B^A \mid f \text{ sind nicht surj}\}$$

$$|\text{Surj}(A, B) = |B^A| - |N\text{surj}(A, B)| = |B|^{|A|} - |N\text{surj}(A, B)|$$

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}, \ B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$N_1 = \{f \in B^A \mid b_1 \in \text{im} f\}$$

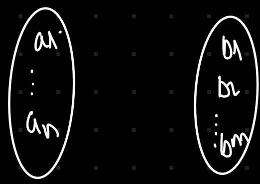
$$N_2 = \{f \in B^A \mid b_2 \notin \text{im} f\}$$

$\vdots$

$$N_m = \{f \in B^A \mid b_m \notin \text{im} f\}$$

$$N\text{surj}(A, B) = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$$

$|N_1| = (m-1)^n = |N_2| = \ldots |N_m|$



$(N_1 \cap N_2) = (m-2)^n$ usw.

SEMINAR $\underline{V}$

Ü 1.4

$A = \{a, b, c\}$

$(A, A, \equiv)$

$\equiv \subseteq A \times A$

Partitionen auf A

$\Pi_i \subseteq \mathcal{P}(A), i = 1, 2, \ldots$

$\Pi_1 = \{a\}, \{b\}, \{c\}$

$\Pi_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\Pi_3 = \{\{a, c\}, \{b\}\}$

$\Pi_4 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$

$\Pi_5 = \{\{a, b, c\}\}$

$\cancel{\Pi_6 = \emptyset}$

$\forall x, y \in A : x \equiv y \Rightarrow \exists X \in \Pi : x, y \in X$

$\equiv_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

$\equiv_2 = \{(a,b), (b,a), (a,a), (b,b), (c,c)\}$

$\equiv_3 = \{(a,a), (a,c), (c,c), (b,b)\}$

$\equiv_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$

$\equiv_5 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (c,a), (c,b)\} = A \times A$

$\boxed{\text{Bem} \quad A/_{\equiv_i} = \Pi_i}$

<u>Üb 1.4.42</u>

$a, b \in \mathbb{Z} \quad a | b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$

a) $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv_n)$

$x \equiv_n y \Rightarrow n | (x - y)$

R^{efl} Sei $x \in \mathbb{Z}$

$x \equiv_n y \Leftrightarrow n \mid (x-x) \Leftrightarrow n \mid 0$ w

b) Trans.

Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv_n y \Leftrightarrow n / (x-y) \\ y \equiv_n z \Leftrightarrow n / (y-z) \end{array}\right\} \Rightarrow n / (x-y)+(y-z) \Rightarrow n(x-z) \Rightarrow x \equiv_n z$$

c) Symm.

$$x_n = y \Leftrightarrow n/(x-y) \Leftrightarrow n/(-1)(x-y) \Leftrightarrow n/(y-x) \Rightarrow y \equiv_n x$$

b) $\mathbb{Z}/_{\equiv_i} = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$[a]_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \equiv_n x\}$

Partikularfall: $n=3$

$[0]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_n 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3/x\} = 3\mathbb{Z} = \{\ldots -3, 0, 3, 6, 9 \ldots\}$

$[1]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_n 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3/x-1\} \Rightarrow \{\ldots -5, -2, 1, 4, 7, 10\} = 3\mathbb{Z}+1$

$[2]_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_n 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid x-2\} \Rightarrow \{\ldots -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\} = 3\mathbb{Z}+2$

$[3]_3 = [0]_3$, $[4]_3 = 1$ usw.

dupā se repetā

$\mathbb{Z}/_{\equiv_3} = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\} = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$

$\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\} = \{[-3]_3, [4]_3, [-1]_3\} = \ldots = \mathbb{Z}_3 \Rightarrow$ Restklassen

Bem:

Ähnlich

$[0]_n = n\mathbb{Z} = [n] = [-n] = \ldots$

$[1]_n = n\mathbb{Z}+1 = [n+1]_n = [-n+1]_n = \ldots$

$[n-1]_n = n\mathbb{Z}+(n-1) = [2n-1]_n = [-1]_n = \ldots$

$\mathbb{Z}/_{\equiv_n} = \{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}n+1, \ldots, (n-1)\, n\mathbb{Z}\}$

$= \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$

$= \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\} = \mathbb{Z}_n$ $\boxtimes$

1) $n=1$

$x \equiv_1 y \Rightarrow 1 \mid (x-y) \Rightarrow \equiv_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/\equiv_1 = \{\mathbb{Z}\}$

2) $n=0$

$x \equiv_0 y \Rightarrow 0 \mid (x-y) \Rightarrow X \quad \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y \Rightarrow \mathbb{Z}/\equiv_0 = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Z}\}$

$a \mid b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$

3) $x \equiv_n y \Leftrightarrow$ x und y haben den selben Rest in der Division mit n $(n \neq 0)$

H.A.

$x \equiv_n y \Rightarrow x \% n = y \% n$ den selben Rest

1.4.39

$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \sim)$

1) Refl.

Sei $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(a,b) \sim (a,b) \Rightarrow ab = ba$ „W"

2) T. Seien $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = cb \mid \cdot f$

$(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow cf = ed$

$a\cancel{d}f = cbf = cf \cdot b = e\cancel{d} \cdot b \Rightarrow d \neq 0$

$af = eb \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

3) Symm

Sei $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = cb \Leftrightarrow cb = ad \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim = ?$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim = \{[(a,b)] \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$

$$[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (a,b) \sim (x,y)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid ay = x \cdot b\}$$

Partikularfall:

$$[(1,2)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid y = 2x\} =$$
$$= \{(1,2), (2,4), (3,6), \ldots, (-1,-2), (-2,-4), \ldots\} = \frac{1}{2}$$
$$= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{Z}^*\}$$

$$[(2,3)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 2y = 3x\} = \{(2,3), (4,6), (6,9), (-2,-3), (-4,-6), \ldots\} = \frac{2}{3}$$

$$[(0,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 0y = x\} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}^*\}$$
$$= \{(0,1), (0,2) \ldots (0,-1), (0,-2) \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_\sim = \{\tfrac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\} = \mathbb{R}$$

1.4.40

$h(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow h$ ist nicht wohl definiert

$k(0) = \frac{1}{0}$ ist nicht definiert

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+1}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\quad \parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \neq$

$f\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{2+1}{4^2} = \frac{3}{16}$

$\Uparrow$ sollen die selbe Ergebniss haben

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \in \mathbb{Q}$ (nicht wohldefiniert!)

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ \ \gcd(a,b) = 1,\ b > 0\}$

$\gcd = $ ggT

(2) $g\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a+3b}{b} = 2\left(\frac{a}{b}\right) + 3\left(\frac{b}{b}\right) = 2\left(\frac{a}{b}\right) + 3$

Unabhängigkeit von Repräsentanten

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow g\left(\frac{a}{b}\right) = g\left(\frac{a'}{b'}\right) \\ \not\Downarrow \\ f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a'}{b'}\right) \end{array}}$$

für g $\quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow ab' = a'b$

$$g\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a+3b}{b} \qquad g\left(\frac{a'}{b'}\right) = \frac{2a'+3b'}{b'} \qquad \Rightarrow (2a+3b)\cdot b' = 2a\cdot b' + 3bb' = 2a'b + 3bb' = (2a'+3b')\cdot 3$$

<u>1.4.41 & 1.4.42(3):</u>

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \\[2em] \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'd'}{b'd'} \\[1em] \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'} \end{array} \quad , a,b,c,d,a',b',c',d' \in \mathbb{Z}$$

$a, c, a', c' \in \mathbb{Z}$

$b, d, b', d' \in \mathbb{Z}^*$

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in \mathbb{Z},\ x'y' \in \mathbb{Z} \\ [x]_n = [x']_n \\ [y]_n = [y']_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} [x+y]_n = [x'+y']_n \\ [x\cdot y]_n = [x'\cdot y']_n \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow ab' = a'b \\ \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow cd' = c'd \end{array}\right\} \Rightarrow (ad+bc)\cdot b'd' = adb'd' + bcd'b' = a'bdd' + bb'c'd = (a'd'+b'c')\,bd$$

$$\left.\begin{array}{l} [x]_n = [x']_n \Rightarrow n \mid x - x' \\ [y]_n = [y']_n \Rightarrow n \mid y - y' \end{array}\right\} \Rightarrow n\mid ((x-x') + (y-y')) \Rightarrow n \mid [(x+y) - (x'+y')] \Rightarrow [x+y]_n = [x'+y']_n$$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| =$$

$$= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|$$

$$= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)|$$

$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - \Big[|A_1 \cap A_3| +$$

$$+ |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_3| \Big]$$

$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3|$$

$$- |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

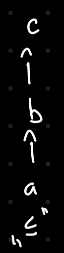
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3|$$

$$- |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

SEMINAR VI

1. $A = \{a, b, c\}$. Alle O.R. auf A?

Lösung

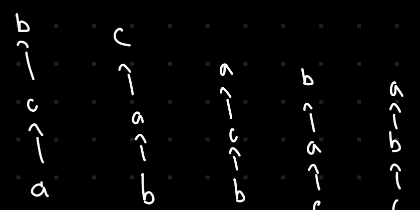


(alphabetische)

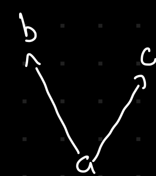
„$\le$"

$(A, A, \le_i)$ $i = 1, 2, \dots$

$\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$

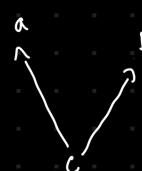


$\le_2$ $\le_3$ $\le_4$ $\le_5$ $\le_6$

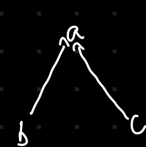


$\le_7 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c)\}$

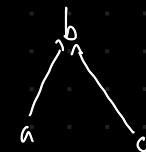
Bem: „$\le^{-1}$" = „$\ge_i$" = $\le_6$



$\le_9 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,\ ), (a,c)\}$



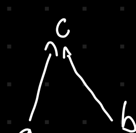
$\le_{10} = \{(a,a), (b,b)$



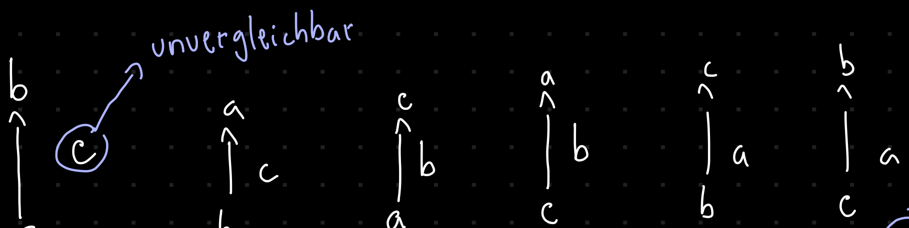
$\le_{11}$

a b c

$\le_{13} = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$



$\le_{12}$



$\le_{14}$ $\le_{15}$ $\le_{16}$ $\le_{17}$ $\le_{18}$ $\le_{19}$ → 19 verschiedene Relationen

$\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b)\}$

OR $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$

2. Man zeige, dass:

a) die Teilbarkeit auf $\mathbb{Z}$ eine Präordnung ist, aber sie keine Ordnung und auch keine Äquivrel. ist.
(reflexiv, transitiv) (nicht antysimm) (nicht symm)

b) die Teilbarkeit auf $\mathbb{N}$ eine Ordnung ist

$a, b \in \mathbb{Z} \quad a|b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) : a \cdot x = b$

1) Refl: $a \in \mathbb{Z}$

$a|a$ „W" da $\exists 1 \in \mathbb{Z} : a \cdot 1 = a$

2) Trans: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $(\mathbb{N})$

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \,|\, (\mathbb{N}) : a \cdot x = b \\ b|c \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z} \,|\, (\mathbb{N}) : b \cdot y = c \end{array}\right\} a(\underbrace{x \cdot y}_{\in \mathbb{Z}\ (\mathbb{N})}) = c \Rightarrow a|c$$

3) ist nicht sym $a, b \in \mathbb{Z}$ $a|b \not\Rightarrow b|a$

$1|2$ aber $2 \nmid 1$

4) ist nicht antisym: $a, b \in \mathbb{Z}$, $a|b$ und $b|a \not\Rightarrow a = b$

$-2|2$ und $2|-2$ aber $2 \neq -2$

b) (Antisym) $a, b \in \mathbb{N}$ s.d

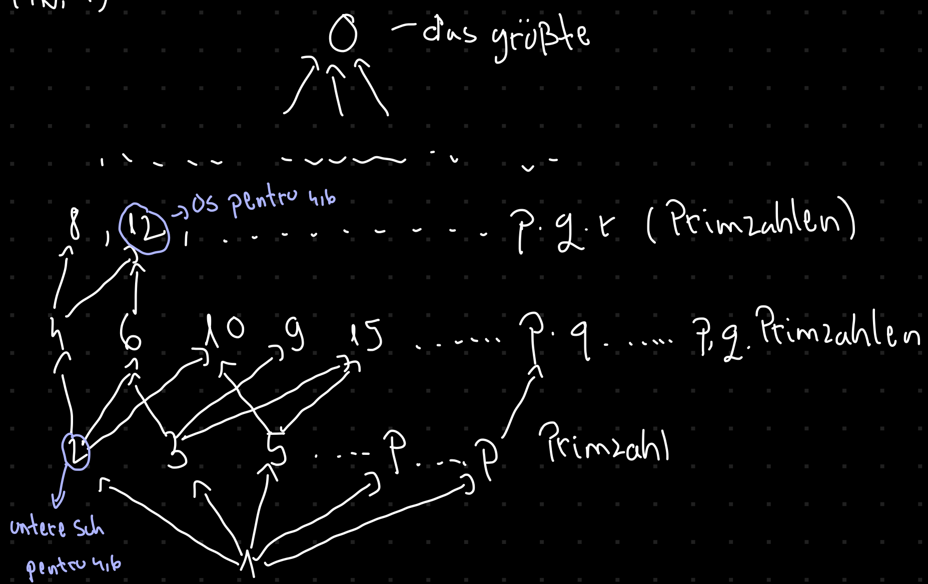
$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N} : a \cdot x = b \\ b|a \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N} : b \cdot y = a \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot xy = a$$

$a \neq 0 \Rightarrow x \cdot y = 1 \xRightarrow{x, y \in \mathbb{N}} x = y = 1 \Rightarrow \underline{a = b}$

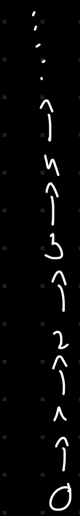
$a = 0 \Rightarrow b = a \cdot x = 0 \Rightarrow \underline{a = b}$

$(\mathbb{N}, |) \rightarrow$ g. Menge

$(\mathbb{N}, |)$



$(\mathbb{N}, \leq)$



3. $(A, \leq)$ Kette (g.M. s.d. $\forall x, y \in A$ gilt
$x \leq y$ oder $y \leq x$)

$a \in A$ minimal $\Rightarrow a$ ist das kleinste Element

Lösung: $a \in A$ minimal

sei $x \in A \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x \leq a \Rightarrow x = a \Rightarrow \underline{a \leq x} \\ \text{oder} \\ \underline{a \leq x} \end{array}\right\} \Rightarrow a$ ist das kleinste

4. Man finde ein Beispiel für eine g.M $(A, \leq)$, s.d A ein einziges maximales (minimales) Element aber kein größtes (kleinste) Element

$A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{3\}$ $(A, |)$

3 – maximal
∄ das größtes

$(A, \vdots)$

$b \vdots a \Rightarrow a | b$

3 – minimal
∄ das kleinste

5. $(\mathbb{N}, |)$ ist ein Verband

ist $(\mathbb{N}, |)$ ein vollständiges Verband?

<u>Bemerkung</u> $(\mathbb{R}, \leq)$ ist ein Verband

$x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x \leq y$ oder $y \leq x$

$x \leq y \Rightarrow \inf(x,y) = x \quad \inf\{x,y\} = y$

$y \leq x \overset{?}{(y)} \Rightarrow \inf\{x,y\} = y \quad \sup\{x,y\} = x$

$\mathbb{R}$ ist kein vollständiger Verband

$\nexists \sup(0, \infty) \quad \nexists \inf(-\infty, 0)$

$\nexists \sup \mathbb{R}$ etc.

$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \to (\widetilde{\mathbb{R}}, \leq)$ ist ein vollständiger Verband $\Longrightarrow$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$ $\exists \inf X \ \exists \sup X \in \widetilde{\mathbb{R}}, \forall X \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$

$(\mathbb{Q} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$ ist kein vollständiger Verband

$(\mathbb{Q}, \leq)$ ist ein Verband

5. Seien $a, b \in \mathbb{N}$

$d = \inf_{(\mathbb{N}, |)}\{a, b\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \overset{\text{untereschränk}}{d | a \text{ und } d | b} \\ d' \in \mathbb{N}, d' | a, d' | b \Rightarrow d' | d \end{cases} \Rightarrow \overset{\text{greatest comm div}}{GCD} \Rightarrow d = ggT(a,b)$ cel mai mare div comun

$m = \sup_{(\mathbb{N}, |)}\{a, b\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a | m \text{ und } b | m \\ m' \in \mathbb{N} \quad a | m', b | m' \end{matrix}\right\} \Rightarrow m | m' \Rightarrow m = kgV(a,b) \Rightarrow (\mathbb{N}, |)$ ist ein Verband

$(\mathbb{N}, \leq)$ ist ein Verband, aber kein vollst. Verband

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ ist ein voll. Verband

ist $(\mathbb{N}, |)$ ein vollständiges Verband?

Sei $X \subseteq \mathbb{N}$

1. Wenn $X = \emptyset$ $\sup \emptyset = \inf \mathbb{N} = 1$

Wenn $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$

$\sup X = \overset{\text{commo}}{kgV}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Wenn X ist unendlich

Sei $m \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke d.h $a | m$, $\forall a \in X$

Wir nehmen an dass $m \neq 0$

$a | m \Rightarrow a \leq m \Rightarrow a \in \{1, 2, \dots, m\} \Rightarrow X \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ unmöglich da X unendlich ist

Es bleibt $m = 0 \Rightarrow \sup X = 0$

$\Rightarrow (\mathbb{N}, |)$ ist ein vollständiger Verband $\boxtimes$

SEMINAR VII

- Beispiele von Gruppen

> $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{C}$

zz: $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ Monoid (assoziativ, neutrales Element) (mit der Multiplikation in $\mathbb{C}$)

$(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^\times = ?$

Lösung:

- $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ ist ein stabiler Teil

$\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{array}{l} x=a+ib \\ y=c+id \end{array}, \ a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

$x\cdot y=(a+ib)(c+id)=\underbrace{(ac-bd)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{Z}}\ i\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ (wohl definiert)

1. $1=1+i\cdot 0\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ ist das neutrales Element d.h. $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ ist ein Monoid (die Assoziativität gilt in $\mathbb{C}$ immer d.h. in $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ auch)

2. $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^\times=\{x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \mid \exists x'\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}: x\cdot x'=1\}$

$0\neq x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $x=a+ib$, $a,b\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x\neq 0 \\ a^2+b^2\neq 0\end{array}}$

$x^{-1}=\frac{1}{x}=\frac{1^{a-ib}}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a-ib)(a+ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{ib}{a^2+b^2}\in\mathbb{C}$

Die Frage ist ob $x^{-1}\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

Bemerkung: $x^{-1}=\frac{1}{|x|^2}\cdot\bar{x}$ $\quad |x|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{x}=a-ib$

$(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^\times \overset{?}{=} \{x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \mid |x|=1\}$

„$\supseteq$" $|x|=1 \Rightarrow |x|^2=1 \Rightarrow x^{-1}=\bar{x}\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

„$\subseteq$" $|xx'| = |1| = 1 \Rightarrow |x|\cdot|x'| = 1 \Rightarrow |x|^2 \cdot |x'|^2 = 1$, $|x|^2, |x'|^2 \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow |x^2| = 1 \Rightarrow |x| = 1$

<u>Lösung</u>: $x = a+ib$

$$|x| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ a,b \in \mathbb{Z} \end{cases} \xrightarrow{H.A.} a = \pm 1, b = 0 \text{ oder } a = 0, b = \pm 1$$

$(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^\times = \{1,-1,i,-i\} = U_4$

$(U_4)_i$ ist eine Gruppe (abelsch oder kommutativ)

$Sub(U_4) = \{\{1\}, \{1,-1\}, \{1,-1,i,-i\}\}$

$Sub(U_4) = \{H \subseteq U_4 \mid H \leq U_4\}$ (Untergruppen)

$H_0 = \{1\}$! die Gruppe mit neutrales Elemment existiert immer

$H_1 = \{1,-1\} = \langle -1 \rangle$

$H_2 = \{1,-i, i^2 \Rightarrow -1, -i\} = \langle i \rangle = \langle -i \rangle = \langle 1, i, \overset{-i}{1} \rangle = \langle -i, i \rangle = ..$

$\boxed{\underline{\text{Bem}}: \langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}}$

2. Sei E die Ebene (die eine Menge von Punkte ist)

$S(E) = \{\alpha : E \to E \mid \alpha \text{ bij}\}$ $(S(E), \cdot)$ Gruppe

a) $Bew(E) = \{\alpha \in S(E) \mid \alpha \text{ ist eine Bewegung}\} \subseteq S(E)$ alle Bewegung sind bij

isommetrye

$\alpha \in S(E)$ ist eine Bewegung g.d.w. $\forall x,y \in E \ |\alpha(x)\,\alpha(y)| = |xy|$ → reiese de aici

nu se pune condiția că e bij la mișcare

Zz. $Bew(E) \leq S(E)$

<u>Lösung</u>

- neutrales Element: $1_E : E \to E$ $1_E(x) = x, \forall x \in E$ $\Longrightarrow |1_E(x)\,1_E(y)| \Rightarrow 1_E \in Bew(E)$

stabiler Teil

- $\alpha, \beta \in Bew(E) \Rightarrow \alpha\cdot\beta : E \to E$ ist bij

Seien $x,y \in E$ $|(\alpha\cdot\beta)(x)(\alpha\cdot\beta)(y)| = |\alpha(\beta(x))\ \alpha(\beta)(y))| \overset{\alpha \text{ Bew}}{=\!=} |\beta(x)\,\beta(y)| \overset{\beta \text{ Bew}}{=\!=} |xy| \Rightarrow \alpha\cdot\beta \in Bew(E)$

$\uparrow \alpha^{-1} \Rightarrow$ inversa

- $\alpha \in Bew(E) \Rightarrow \exists\, \alpha^{-1}: E \to E$ bij

$x' = \alpha^{-1}(x)$, $y' = \alpha^{-1}(y) \in E$

Seien $x, y \in E$ $|\alpha^{-1}(x)\alpha^{-1}(y)| = |\alpha^{-1}(\alpha(x')), \alpha^{-1}(\alpha(y'))| =$

$\alpha(x') = x$, $\alpha(y') = y$

$$= |1_E(x')\, 1_E(y')| = |x'y'| \underset{\alpha\,Bew}{=} |\alpha(x')\alpha(y')| = |xy|$$

$|x'y'| = \alpha(x') \Rightarrow \alpha^{-1} \in Bew(E)$

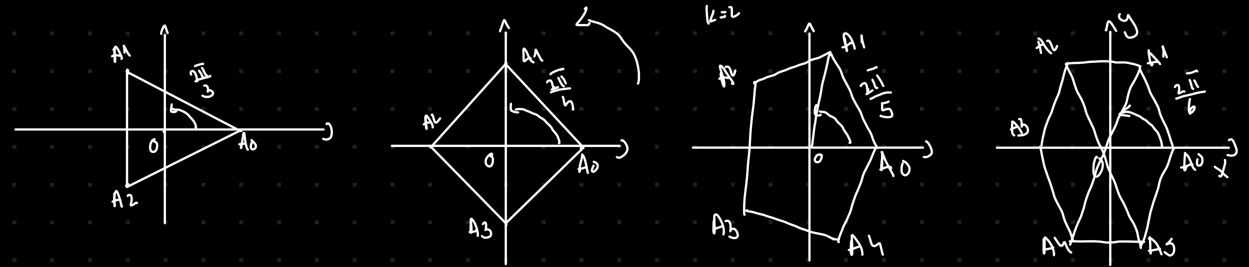
b) Wir betrachten eine regelmäßige Polygon $P = A_0A_1 \dots A_n$ (mit n Seiten)

Sei o das Zentrum von P

$D_n = \{\alpha \in Bew(E) \mid \alpha(P) = P\}$ $n \geq 3$

(P ist eine Menge von Punkten d.h. $P \subseteq E$)

<u>Lösung:</u> n=3 n=4 n=5 n=6



ZZ: $D_n \leq Bew(E)$

c) $|D_n| = 2n$

d) Die Tafel der Operation für $D_3, D_4, \dots$ und Sub (D_3), Sub$(D_4) = ?\dots$ (untergruppe)

<u>Bemerkung:</u> $\alpha \in Bew(E)$ $\alpha(P) = \{\alpha(x)' \mid x \in P\}$

- neutrales Elem : $1_E: E \to E$, $1_E(x) = x$, $\forall x \in E$

$$1_E(P) = P \Rightarrow 1_E \in D_n$$

- stabiler Teil : $\alpha, \beta \in D_n \Rightarrow (\alpha \cdot \beta)(P) = \alpha(\beta(P)) \overset{\beta \in D_n}{=\!=} \alpha(P) \overset{\alpha \in D_n}{=\!=} P \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in D_n$

- $\alpha \in D_n \Rightarrow \alpha^{-1} \in Bew(E)$

$$\alpha^{-1}(P) = \alpha^{-1}(\alpha(P)) = 1_P(P) = P \Rightarrow \alpha^{-1} \in D_4$$

$k=2$

c) $\alpha \in D_n$ d.h. $\alpha(P)=P \Rightarrow \alpha(0)=0 \Rightarrow \alpha(A_0) \in P \Rightarrow \alpha(A_0) \in \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$

Sei $A_k = \alpha(A_0) \Rightarrow \alpha(A_1) \in \{A_{k+1}, A_{k-1}\}$

Fall I: $\alpha(A_1) = A_{k+1} \Rightarrow \alpha(A_2) = A_{k+2}$

$\alpha(A_i) = A_{k+i \pmod n}$ (Alle Additionen sind modulo n genommen)

$d =$ die Drehung von 0 mit $\frac{2\pi}{n}$

in Fall I. $\alpha = d^k$

<u>Fall II</u> $\alpha(A_1) = A_{k-1}$

$s =$ die Spiegelung bezüglich Ox

$\alpha = d^k s$

$D_n = \{1, d, d^2, \dots, d^{n-1}, s, ds, d^2s, d^{n-1}s\}$

$\langle s, d = d^n = 1 = s^2,\ sd = d^{n-1}s \rangle$

$n=3$ $D_3 = \{1, d, d^2, s, ds, d^2s\} = \langle s, d \mid d^3 = 1 = s^2, sd = d^2 s\rangle$

	1	d	d^2	s	ds	d^2s
1	1	d	d^2	s	ds	d^2s
d	d	d^2	1	ds	d^2s	s
d^2	d^2	1	d	d^2s	s	ds
s	s	d^2s	ds	1	d^2	d
ds	ds	s	d^2s	d	1	d^2
d^2s	d^2s	ds	s	d^2	d	1

$sd^2 = (sd)d = d^2(sd) = d^2 d^2 s = ds$

$sds = d^2 ss = d^2$

H.A. Man zeige dass in D_n gilt $sd^i = d^{n-i}s$, $i \geq 0$

d) $Sub(D_3) = \{H \subseteq D_3 \mid H \leq D_3\}$

$H_0 = \{1\}$; $H_1 = \{1, d, d^2\} = \langle d \rangle = \langle d^2 \rangle$

$$H_2 = \{1, s\} = \langle s \rangle$$

$$H_3 = \{1, ds\} = \langle ds \rangle$$

$$H_4 = \{1, d^2 s\} = \langle d^2 s \rangle$$

$$H_5 = \{1, d, s, d^2, ds, d^2 s\} = \overset{\langle s, d\rangle}{\overset{\shortparallel}{D_n}} = \langle d, ds \rangle = \ldots$$

SEMINAR X

- Ring $(R,+,\cdot)$ s.d. $(R,+)$ abelsche Gruppe
  $(R,\cdot)$ ist Monoid / Halbgruppe
  - ist distributiv bezüglich + d.h. $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$
- Beispiele $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $\underbrace{(\mathbb{R},+,\cdot), (\mathbb{R},+,\cdot), (\mathbb{C},+,\cdot)}_{\text{Körper}}$

- Def: $(K,+,\cdot)$ Körper wenn $(K,+,\cdot)$ ist ein kommutatives Ring mit 1 und $\forall x \in K^* = K\setminus\{0\}$ $\exists x^{-1} \in K$

- Andere Bsp:
  - $M_{n\times n}(R,+,\cdot)$ wobei $(R,+,\cdot)$ ist ein komm. Ring und nicht mehr komm.
    Ring

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(R) \text{ neutrales Element in } M_{n\times n}(R)$$

- $2\mathbb{Z} = \{2x / x \in \mathbb{Z}\} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ ist eine Unterring in $(\mathbb{Z},+,\cdot)$
  $1 \notin 2\mathbb{Z}$ $\nexists$ neutrales Element in $(2\mathbb{Z},\cdot)$ → kein Monoid, nur assoziativ

- $n \neq m$ ist $(M_{n\times m}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ ein Ring?
  $n \neq m$ $A,B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\nexists A\cdot B$ - die Multiplikation ist nicht wohl definiert

- $(R,+,\cdot)$ Ring $S \subseteq R$

$S \leq R$ (Unterring) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \in S \; [1 \in S \text{ (für unitä Unterringe]} \\ x,y \in S \Rightarrow x-y \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \in S \\ -x \in S \end{cases} \\ x,y \in S \Rightarrow x\cdot y \in S \end{cases}$

Übungen

1. $(R,+,\cdot)$ ist ein komm Ring mit 1. A ist eine Menge

$\mathbb{R}^A = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ Funktion} \}$

z.z.: $(\mathbb{R}^A, +, \cdot)$ ein kommutativ Ring und 1 ist, wobei

<u>Lösung:</u> $f+g : A \to \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad\quad$ $(f \cdot g)(x) = f(x) g(x), \ \forall x \in A$

$(\mathbb{R}^A, +)$ abelsche Gruppe

$f, g, h \in \mathbb{R}^A \quad (f+g)+h \overset{?}{=} f + (g+h)$

$(f+g)+h : A \to \mathbb{R} \quad\quad f + (g+h) : A \to \mathbb{R}$

$\forall x \in A: \ [(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \leftarrow$ assoziativ in $(\mathbb{R},+)$ $(\mathbb{R},\cdot)$

$[f + (g+h)](x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$

Distributivität $\quad f, g, h : A \to \mathbb{R} \quad f(g+h) \overset{?}{=} fg + fh$

$\forall x \in A \quad [f(g+h)](x) = f(x) \cdot (g+h)(x) = f(x) \cdot (g(x) + h(x))$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \leftarrow$ dist in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(fg + fh)(x) = (fg)(x) + (fh)(x) = f(x) \cdot g(x) + f(x) h(x)$

- neutrales Element für: $+ \to 0 : A \to \mathbb{R} \quad 0(x) = 0, \ \forall x \in A$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \to e : A \to \mathbb{R} \quad e(x) = 1, \ \forall x \in A$

$(f \cdot e)(x) = f(x) \cdot e(x) = f(x) \cdot 1 = f(x), \ \forall x \in A$

$(e \cdot f)(x) = \ldots\ldots\ldots = f(x), \ \forall x \in A$

$\vdots$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Integritätsbereich wenn $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein kommutatives Ring mit 1 $\ x, y \in \mathbb{R} \ \ x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Identitätsringe

z.B.: $x^2 - 3x + 2 = 0$ in $\mathbb{R}$

$(x-1)(x-2) = 0 \xRightarrow{\text{i.R.}} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

oder

$x - 2 \Rightarrow x = 2$

$(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ist kein I.B. $\Rightarrow \hat{3} \cdot \hat{4} = 0$ aber $\hat{3} \neq \hat{0}, \hat{4} \neq \hat{0}$

$x^2 - \hat{7}x + \hat{12} = \hat{0}$

$x^2 - \hat{7}x = 0 \Rightarrow x = \hat{0} \qquad x = \hat{3}$

$x = \hat{7} \qquad x = \hat{4}$

$x(x-\hat{7}) = (x-\hat{3})(x-\hat{4})$

2. Frage: ist $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ ein i.B.?

$(\mathbb{R}, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, $A = \mathbb{R}$ (oder $A = [0,1]$, oder $A \subseteq \mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ Funktion} \}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein i.B. a.k $x \cdot y = 0$ in $\mathbb{R} \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$

<u>Lösung:</u>

$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ ist kein i.B.

Zum. Bsp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ $\qquad f(1) = 1 \neq 0$, $f \neq 0$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ $\qquad g(-1) = -1 \neq 0$, $g \neq 0$

Aber $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f \cdot g)(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

3. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ist ein Ring bezüglich der Addition und der Multiplikation in $(M_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$

Man zeige das R ist isomorph zu einem Unterring in $\mathbb{C}$

<u>Lösung:</u> Sind die Operationen wohl definiert auf R? JA!

$x, y \in R \Rightarrow x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$x + y = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in R$ da $a+c, b+d \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac+bd \end{pmatrix} \in R \text{ da } \begin{matrix} ac-bd \in \mathbb{Z} \\ ad+bc \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in R \text{ da } 0 \in \mathbb{Z} \ (a=b=0)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R \quad (a=1 \in \mathbb{Z},\ b=0 \in \mathbb{Z})$$

$$x \in R \Rightarrow x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad -x = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \in R \text{ da } \begin{matrix} -a \in \mathbb{Z} \\ -b \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

d.h. R ist ein Unterring in $(M_{2\times2}(\mathbb{Z}),+,\cdot) \Rightarrow R$ ist ein Ring mit + und · aus $M_{2\times2}(\mathbb{Z})$

b) Wir brauchen ein injektiver Ringhomomorphismus $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in R \qquad a,b \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = f\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a+ib \in \mathbb{C} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in R \quad (a,b,c,d \in \mathbb{Z})$$

$$\text{inj} \begin{cases} f(x+y) \overset{?}{=} f(x)+f(y) \\ f(x\cdot y) = f(x\cdot y) \\ f(x) = f(y) \overset{?}{\Longrightarrow} x=y \end{cases}$$

$$f(x+y) = f\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} = a+c+i(b+d)$$

✓

$$f(x)+f(y) = f\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = a+ib+c+id$$

$$f(x\cdot y) = f\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

✓

$$f(x)\cdot f(y) = f\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix} = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix} \Rightarrow a+id = c+id \Rightarrow \begin{matrix} a=c \\ b=d \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix} \Rightarrow x=y \checkmark$$

$$f: R \to \mathbb{C} \Rightarrow R \cong \operatorname{Im} f. \quad \operatorname{Im} f \overset{\text{Unterring}}{\leq} \mathbb{C} \qquad \boxtimes$$

· <u>Bem:</u> $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in R\} = \{f\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}\} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

4. Man zeige, dass die Ringen nicht isomorph sind:

a) $(\mathbb{Z},+,\cdot) \not\cong (\mathbb{Q},+,\cdot)$

b) $(\mathbb{R},+,\cdot) \not\cong (\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\cdot)$

c) $(\mathbb{R},+,\cdot) \not\cong (\mathbb{C},+,\cdot)$

d) $(\mathbb{R},+,\cdot) \not\cong (M_{2\times 2}(\mathbb{R}),+,\cdot)$

<u>Lösung:</u>

d) $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} \text{ ist komm.} \\ M_{2\times2}(\mathbb{R}) \text{ ist nicht komm} \end{array}\right\} \Rightarrow \not\cong$

a) $\left.\begin{array}{l} (\mathbb{R},+,\cdot) \text{ ist ein Körper} \\ (\mathbb{Z},+,\cdot) \text{ ist ein Körper} \end{array}\right\} \Rightarrow \not\cong$

b) $\left.\begin{array}{l} (\mathbb{R},+,\cdot) \text{ ist ein i.B.} \\ (\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\cdot) \text{ ist kein i.B.} \end{array}\right\} \Rightarrow \not\cong$

c) Wenn $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ein Isomorphismus $\Rightarrow f(0)=0,\ f(1)=1$

$f(-1) = -f(1) = -1$

$a = f(i) \in \mathbb{R} \qquad a^2 = f(i)\cdot f(i) = f(i^2) = f(-1) = -1$

$a^2 = -1$ ist unmöglich in $(\mathbb{R},+,\cdot)$ $\qquad \boxtimes$

SEMINAR XIII

19.12.2022

- Üb - Lineare Abbildungen

V, W sind k- VR. $\operatorname{Hom}_k(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ linear}\}$

$f: V \to W$ ist linear $\xrightarrow{\text{def}} \begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y), \ \forall x,y \in V \\ f(\alpha x) = \alpha f(x), \ \forall \alpha \in k, \ \forall x \in V \end{cases} \iff f(ax+by) = af(x) + bf(y), \ \forall a,b \in k, \ \forall x,y \in V$

<u>Bem:</u> $f \in \operatorname{Hom}_k(V, W) \Rightarrow f(0) = 0$ für Gruppenhomomorphismen

1. $K = \mathbb{R}$

Aus den folgenden Abbildungen welche sind linear

(a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, \ x_2 - x_3, \ x_3 - x_1) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 1, \ x_2 + 2, \ x_3 + 1)$

(c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ f(x_1,x_2,x_3) = (-2x_1 + x_2 + 3x_3, \ -x_1 + x_2 + x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, \ x_2 + x_1, \ 2x_1 + x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ f(x_1,x_2) = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2, \ a_{12}x_1 + a_{22}x_2), \ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$

(f) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

Für die Abbildungen die linear sind, bestimme man $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{im} f$

<u>Lösung:</u>

(b) $f(0,0,0) = (-1, 2, 1) \neq (0,0,0) \Rightarrow f \notin \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \to$ nicht linear

(a) $a, b \in \mathbb{R}, \ x, y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3), \ y = (y_1, y_2, y_3)$

- $f(ax+by) = f(a(x_1,x_2,x_3) + b(y_1,y_2,y_3)) = f(ax_1 + by_1, \ ax_2 + by_2, \ ax_3 + by_3) = (ax_1 + by_1 - ax_1 - ay_2, \ ax_2 + by_2 - ax_3 - by_3,$
$ax_3 + by_3 - ax_1 - by_1)$

- $af(x) + bf(y) = a(x_1 - x_2, \ x_2 - x_3, \ x_3 - x_1) + b(y_1 - y_2, \ y_2 - y_3, \ y_3 - y_1) = (ax_1 - ax_2, \ ax_2 - ax_3, \ ax_3 - ax_1) + (by_1 - by_2, \ by_2 -$
$by_3, \ by_2 - by_1) = (ax_1 - ax_2 + by_1 - by_2, \ ax_2 - ax_3 + by_2 - by_3, \ ax_3 - ax_1 + by_2 - by_1)$

Das heißt $f(ax+by) = a\,f(x)+b(y) \Rightarrow f$ ist linear

(f) $\alpha = 2, \quad x=(1,0)$

$f(\alpha x) = f(2\cdot(1,0)) = f(2,0) = 2^2-0^2=4$

$\alpha f(x) = 2\cdot f(1,0) = 2\cdot(1^2-0^2) = 2\cdot 1 = 2 \neq 4 \Rightarrow f$ ist nicht linear

H. A: Gegenbeispiel für $f(x+y) = f(x)+f(y)$

e) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \; x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \; y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$f(\alpha x+\beta y) = f(\alpha x_1+\beta y_1, \; \alpha x_2+\beta y_2) = (a_{11}(\alpha x_1+\beta y_1)+a_{21}(\alpha x_2+\beta y_2), \; a_{12}(\alpha x_1+\beta y_1)+a_{22}(\alpha x_2+\beta y_2))$

$\alpha(f(x)+\beta(y)) = \alpha(a_{11}x_1+a_{21}x_1, \; a_{12}x_1+a_{22}x_2)+\beta(a_{11}y_1+a_{21}y_2, \; a_{12}y_1+a_{22}y_2) = (\alpha(a_{11}x_1+a_{21}x_2)+\beta(a_{11}y_1+a_{21}y_2),$

$\alpha(a_{12}x_1+a_{22}x_2)+\beta(a_{12}y_1+a_{22}y_2))$

- Partikularfall: $a_{11}=a_{12}=a_{22}=a_{21}=0$

$f(x_1,x_2) = (0,0), \; \forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$0: U \to W, \; 0(x)=0$ linear immer

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad f(x) = (x_1\cdot x_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}x_1+a_{21}x_2, \; a_{12}x_1+a_{12}x_2)$ d.h $f(x)=x\cdot A$

$1\boxed{x_2 = 2}x_2$

- Verallgemeinerung

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n \quad f(x)=x\cdot A$

$$(x_1,x_2,\dots,x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i, \; \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i) \in\mathbb{R}^n$$

$1\times\boxed{m = m}\times n \longrightarrow 1\times n$

$$f(\alpha x+\beta y) = (\alpha x+\beta y)A \;=\; \alpha(xA)+\beta(yA) = \alpha f(x)+\beta f(y) \Rightarrow f \text{ ist linear}$$

Eigenschaften der operationen mit Matrizen

a) $$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2\,,\; x_2-x_3\,,\; x_3-x_1) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

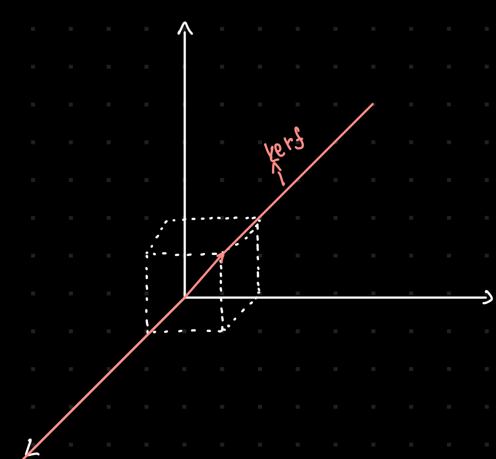
$$\ker f = \{x\in\mathbb{R}^3 \mid f(x)=0\} = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)\} = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid (x_1-x_2, x_2-x_1, x_3-x_1)=(0,0,0)\}$$

$$x\in\ker f \iff (S_0)\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \\ x_3-x_1=0 \end{cases}$$

$$(S_0):\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{Rank } A = 2$$

$$\begin{cases} x_3 = a \\ x_2 = a \\ x_1 = a \end{cases},\quad a\in\mathbb{R} \qquad \Rightarrow \ker f = \{(a,a,a) \mid a\in\mathbb{R}\} = \{a(1,1,1) \mid a\in\mathbb{R}\} = \langle(1,1,1)\rangle$$



$\operatorname{im} f = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = (a,b,c)\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists - \text{''} - \ (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1) = (a,b,c)\}$

$$(S)\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_2 - x_3 = b \\ x_3 - x_1 = c \end{cases} \iff (S) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$(a,b,c) \in \operatorname{im} f \iff (S)$ ist lösbar $\xRightarrow[]{\text{Kronecker Cappelli}}$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} \xLeftrightarrow{\text{Rouche}}$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+b+c \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b+c) = 0$$

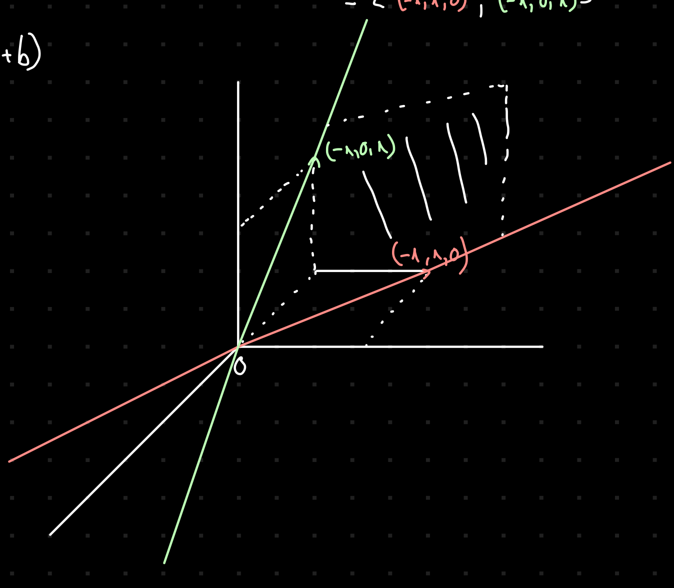
$\operatorname{im} f = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c = 0\} = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$ $\boxtimes$

$y_1 + y_2 + y_3 = 0$

$$\begin{cases} y_2 = a \\ y_3 = b \\ y_1 = -(a+b) \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \{(-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$



2. $V=\mathbb{R}^2,\ K=\mathbb{R}$

$S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1+x_2+x_3=0\}$

$T=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=x_2=x_3\}$

Z.z $S,T\leq\mathbb{R}^3$ und $S\oplus T=\mathbb{R}^3$

$$S\oplus T=\mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} S\cap T=\{0\} \\ S+T=\mathbb{R}^3\end{cases} \iff \begin{matrix} S\cap T\subseteq\{0\}\ (\{0\}\subseteq S\cap T \text{ gilt immer}) \\ \mathbb{R}^3\subseteq S+T\ (S+T\subseteq\mathbb{R}^3 \text{ gilt immer!})\end{matrix}$$

$$S+T=\{x+y \mid x\in S,\ y\in T\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \quad x\in S\cap T \iff \begin{cases} x\in S \\ x\in T\end{cases} \iff \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1=x_2=x_3\end{cases}$$

$$3x_1=0 \Rightarrow x_1=0 \Rightarrow x_2=x_3=0 \Rightarrow S\cap T=\{(0,0,0)\}$$

$(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ Wir suchen $x=(x_1,x_2,x_3)\in S$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in T$ s.d.

$$(a,b,c)=x+y \iff \begin{cases} x_1+y_1=a \\ x_2+y_2=b \\ x_3+y_3=c \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ y_1=y_2=y_3 \end{cases}$$

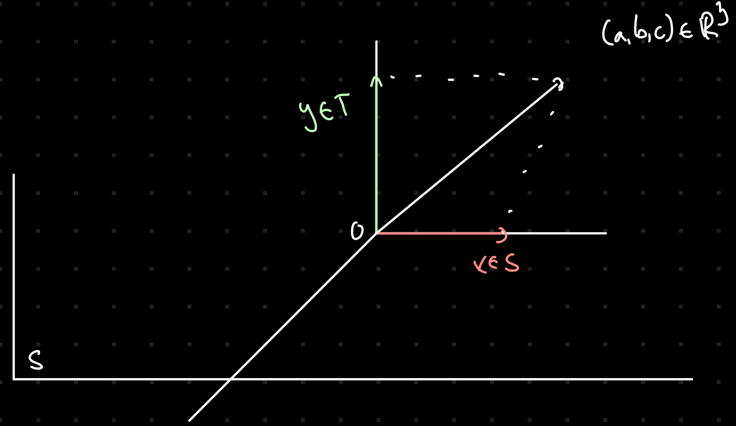
$$\Rightarrow \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{=0}+\underbrace{(y_1+y_2+y_3)}_{3y_1}=a+b+c$$

$$y_1=y_2=y_3=\frac{a+b+c}{3}$$

$$x_1=a-y_1=a-\frac{a+b+c}{3}=\frac{2a-b-c}{3};\quad x_2=\frac{-a+2b-c}{3},\quad x_3=\frac{-a-b+2c}{3}$$

Bemerkung: Die Lösung ist eindeutig bestimmt $\iff$ die Summe ist direkt

$$(a,b,c)=\left(\frac{2a-b-c}{3},\frac{-a+2b-c}{3},\frac{-a-b+2c}{3}\right)\in S,\ \left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3}\right)\in T$$



(a,b,c) ∈ ℝ³
y∈T
0
x∈S
S