$+ \quad \times$

$- \quad \div$

Reelle Zahlenfolgen

· **Bsp**: Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann kann man über die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ folgender aussagen.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{falls } q>1 \\ 1, & \text{falls } q=1 \\ 0, & \text{falls } q\in(-1,1) \\ \nexists, & \text{falls } q\leq -1 \end{cases}$$

1) Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{2\cdot 2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^n = \underset{\text{Bsp } (q=\frac{9}{4}>1)}{\infty}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-5)^n+(-3)^n}{7^{n+4}+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-5)^n}{7^{n+4}+2}+\frac{(-3)^n}{7^{n+4}+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-5)^n}{7^n(7^4+\frac{2}{7^n})}+\frac{(-3)^n}{7^n(7^4+\frac{2}{7^n})}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(-\frac{5}{7}\right)^n}_{\to 0}\cdot\frac{1}{7^4+\underbrace{\frac{2}{7^n}}_{\to 0}}+\right.$$

$$\left.\underbrace{\left(-\frac{3}{7}\right)^n}_{\to 0}\cdot\frac{1}{7^4+\underbrace{\frac{2}{7^n}}_{\to 0}}\right) = \underset{\text{Bsp}}{0}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{\overset{\text{Polygon}}{1-2n^3}}{\underset{\text{Polynom}}{3n^4+2}}\right)^2 = \boxed{25}$$

Polyg. > Polyn. ⇒ $\lim = 0$

$$\frac{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n^3}-2\right)}{\cancel{n^4}\left(3+\frac{2}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{\overset{\text{conjugata}}{(\sqrt{n}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n}+\sqrt{n+3})}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{-3}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-3\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)} = -\frac{3}{2}$$

2) Man untersuche die Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

a) $x_n = q^n$, wobei $q \in (0,1)$,

Monotonie ① $x^{n+1} - x^n = 0$

② $\frac{x^{n+1}}{x^n}$
$\Downarrow \neq 0$ acelaşi semn

b) $x_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

c) $x_n = \frac{n+1}{n}$

d) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Lösung

$\boxed{\text{Wiederholung}}$: Es gibt zwei Methoden um die Monotonie einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ zu untersuchen

$\boxed{M_1}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ untersucht man der Vorzeichen von $x_{n+1} - x_n$ (d.h. $x_{n+1} - x_n$ wird mit 0 vergleichen)

$\boxed{M_2}$: Angenommen, $x_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, oder $x_n < 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ vergleicht man $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ mit 1:

- $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$
  - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend, falls $x_n > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$
  - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ wachsend, falls $x_n < 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$

- $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$
  - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ wachsend, falls $x_n > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$
  - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend, falls $x_n < 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$

a) Monotonie: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ist $x_n > 0$ und $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng fallend

Beschränktheit: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ streng fallend $\Rightarrow$ nach oben beschränkt

Da $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist nach unter beschränkt $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (genauer gesagt gilt $0 < x_n \underset{\leq x_1}{<} 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$)

Konvergenz

(monoton + beschränkt = konv)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} q^n \underset{\text{Bsp}}{=} 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ist konv}$$

b) $x_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \frac{2^n}{5^n} + \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Aus a) $\Rightarrow \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

sind streng fallend, beschränkt und konvergent $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng fallend, beschränkt und konvergent (als Summe von zwei streng fallenden beschränkten und konvergenten Folgen)

c) $X_n = \frac{n+1}{n}$

a) Monotonie: $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Da $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ streng wachsend ist $\underset{n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist

streng fallend $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng fallend

b) Beschränktheit $(x_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ streng fallend $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist nach oben beschränkt.

Da $X_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist nach untem beschränkt $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist beschränkt

c) Konv.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist konvergent

d) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

a) Mon: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_1 < x_2$ und $x_2 > x_3 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist nicht monoton

b) Beschränktheit: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ist $|x_n| = \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow x_n \in [-1, \underbrace{1}_{\frac{1}{2}}]\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

c) Konvergenz $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \underset{\boxed{\text{Th3}}\ \text{2.Vorl}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist konv

A6)

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2-(-2)^n}{3^n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n+7} - \frac{(-2)^n}{3^n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n+7} - \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+7} =$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{(-2)^n}{3^n(1+\frac{7}{3^n})} \Rightarrow 0 - \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}_{0} \frac{1}{1+\frac{7}{3^n}} = 0$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{5n^4+1}{n^2-2n^5}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{\cancel{n^4}(5+\frac{1}{n^4})}{\cancel{n^5}(n^3-2)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{1}{n}\left(\frac{5}{2}\right)\right)^2 = 64$$

$-1 < a < 1$

c) $\lim_{n\to\infty} (\cos(2020))^n$ $\quad$ $\cos(2020) \in (-1, 1)$, weil $\underbrace{2020}_{\text{natürlich}} \notin \{\underbrace{k\pi}_{\text{irrational}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\lim_{n\to\infty} (a)^n = 0$

A7)

a) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

Monotonie: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \frac{n^2}{n^2+1} \Leftrightarrow x_n = \frac{n^2+1-1}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng fallend

$\Downarrow$

$n^2+1>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\left(-\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend

$\Uparrow$

ist streng fallend

SEMINAR 4

· Reelle Zahlenfolge

1. Man bestimme die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-n^3}\right)^{n^2-n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n-n^3}\right)^{3n-n^3}\right]^{\frac{n^2-n^3}{3n-n^3}} \underset{\uparrow}{=} e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n^3}{3n-n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{\cancel{n^3}\left(\frac{3}{n^2}-1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{3}{n^2}-1} = 1$

$l =$ $\frac{x_n}{y_n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\ldots na_n}{n^2}$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine gegen $a\in\mathbb{R}$ konvergierende Folge ist

Seien $x_n = a_1+2a_2+\ldots+na_n$, $y_n = n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

Cesaro-Stolz

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1} = \frac{a}{2} \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} l = \frac{a}{2}$

konvergiert gegen a

Th (S-C) (Thm. 3 Vorl)

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$

Sei $a_n = n, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$

$\boxed{\text{F12}}$ 2°, 3 Vorl.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$

Sei $a_n = n, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

$\boxed{\text{F12}}$ 3°, 3 Vorl

Wichtig: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

2) (Der nicht definierte Fall 1^∞)

Es sei $a \in (0,\infty)$. Man gebe je ein Bsp für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, die gleichzeitig die Bedingungen $\lim\limits_{n\to\infty} a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = a$ erfüllen

<u>Lös:</u> Sei $a_n = a^{\frac{1}{n}}$, $b_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(A10) a), b), c)

(A11) a), c) der Fall: $a \in \mathbb{R}$

(A12)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2n^2}{n^4+1} = \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n}-2\right)}{n^{\cancel{4}\,2}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \frac{1}{n^2} = 0$$

A10)

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{5n^2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{\frac{n^4+1}{n-2n^2}}\right]^{5n^2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{\frac{n^4+1}{n-n^2}}\right]^{5n^2\cdot\frac{n-2n^2}{n^4+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{\frac{n^4+1}{n-n^2}}\right]^{5n^2\cdot\frac{n-2n^2}{n^4+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 5n^2\cdot\frac{n-2n^2}{n^4+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-10n^4}{n^4+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^4}\left(\frac{5}{n}\to 0-10\right)}{\cancel{n^4}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)\to 0}} = e^{-10}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n^2}$$

Seien $x_n = 1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}$ und $y_n = n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\to 1}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{2n+1}}} = 0$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\underset{a_n}{\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{n^3+2n}}} = \Bigg|\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2n}{n^3+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1+2n}{n^3+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} =$$

$$= 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+2n} = 1$$

A1)

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = n$ Teilfolge $\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$x_n = n^{(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$x_{2n} = 2n, \; x_{2n+1} = (2n+1)^{-1} = \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c)

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist nach oben unbeschränkt

und hat die konvergente Teilfolge

$(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

oder: wir definieren

$y_n = \begin{cases} n, & n = 2k \\ 1, & n = 2k+1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$? ?

$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist nach oben beschränkt

und $\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}$

c) Es sei $a \in \mathbb{R}$, Es sei die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Bedingungen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a$

$a_n = n + a$
$b_n = n$ $, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a$

A 12)

$a>0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, s.d $0 < x_0 < \frac{1}{a}$

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

1) $x_n < \frac{1}{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(n)$: „ $x_n < \frac{1}{a}$ ", $\forall n \in \mathbb{N}$

I. $P(0)$: „ $x_0 < \frac{1}{a}$ " (?)

II. Wir nehmen an, dass $P(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ wahr ist und zeigen, dass $P(k+1)$ wahr ist

$$x_{k+1} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow 2x_k - a - ax_k^2 < \frac{1}{a} \Leftrightarrow 0 < ax_k^2 - 2x_k + \frac{1}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{a^2x_k^2 - 2ax_k+1}{a} \Leftrightarrow 0 \overset{(*)}{<} \frac{(ax_k-1)^2}{a}$$

Da $P(k)$ wahr ist $\Rightarrow x_k < \frac{1}{a} \mid \cdot a \Rightarrow ax_k < 1 \Leftrightarrow ax_k - 1 < 0 \Rightarrow ax_k - 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (ax_k-1)^2 > 0$

$\Rightarrow (*)$ gilt $\Rightarrow P(k+1)$ ist wahr

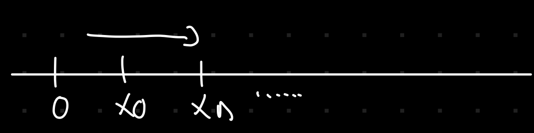
Aus I und II $\Rightarrow P(n)$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$

(iv) Aus (i)...(iii) $\Rightarrow$ die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ist konvergent

sei $l \in \mathbb{R}$ ihr Grenzwert. Aus $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(2x_n - ax_n^2) \Rightarrow l = 2l - al^2 \Rightarrow l - al^2 = 0 \Rightarrow l(1-al) = 0$$

Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsend ist $\Rightarrow x_n \geq x_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$



$\Rightarrow$

$$\Rightarrow l \neq 0 \Rightarrow 1 - al = 0 \Rightarrow l = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{a}$$

SEMINAR 5

- Das Bestimmen der Summe von Reihen

> Man bestimme die Summe der folgenden Reihen:

1) $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[7]{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{7}}}$$ (verallgemeinerte harmonische Reihe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n}} \overset{\text{adună positive}}{=} \infty \qquad \left[= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[7]{n}}\right)\right]$$

↑ verallgem harm Reihe mit $\alpha = \frac{1}{7} \leq 1$

⇓

divergent

2) $$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^n} + \frac{3}{(n+1)!}\right)$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^n}{4^n} = -\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \underset{\uparrow}{=} -\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

geom. Reihe mit $q = -\frac{1}{4}$, $k=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+1)!} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ n+1=m}}{=} 3\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} = 3\left(\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}}_{e} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) = 3(e-2)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{S1}\ 1,4\ \text{Vorl}}}{\Longrightarrow} \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^n} + \frac{3}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{5} + 3(e-2)$$

3) $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$$

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2},\ \forall n\geq 1$$

Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{1}{4n-2} \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{4(n+1)-2} = \frac{1}{4n+2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-2}}_{0} = \frac{1}{2}$$

Summe der Teleskopreihe

A (5)

a) $$\sum_{n\geq 1} \frac{5}{7^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{7^k} = 5\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{7}} \cdot 5 = \frac{1}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}$$

b) $$\sum_{n\geq 1} \left[\frac{(-2)^n}{7^{n+1}} - \frac{3}{(n+1)!} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{7^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{7^n \cdot 7} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7} \cdot \frac{(-2)^n}{7^n} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{7^n} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{\left(-\frac{2}{7}\right)^1}{1+\frac{2}{7}} \right] = \frac{1}{7} \cdot \left[-\frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}} \right] = \frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{2}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{9} \right) = -\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{9} = -\frac{2}{63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+1)!} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{(n+1)!}_{m}} = 3 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) = 3(e-2)$$

$$\sum_{n\geq 1} \left[\frac{(-2)^n}{7^{n+1}} - \frac{3}{(n+1)!} \right] = -\frac{2}{63} - 3(e-2)$$

c) $$\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(n+1)^2}}{n^2\cancel{(n+1)^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n^2}}{(n+1)^2\cancel{n^2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{a_1}{a_k} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - 0 = 1$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$

d) $\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{(n+1)!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!} + \overset{3(e+2)}{\frac{3}{(n+1)!}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{n}{n!\,(n+1)}$$

$(n-1)!\,n$

$$\frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n+1}}{\underbrace{(\cancel{n+1})!}_{n!}} - \frac{1}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{a_{n+1}}$$

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{a_{n+1}} = 2(a_k - \lim_{n\to} a_n) = 2(1-0) = 2$$

$\Rightarrow \boxed{2 + 3(e+2)}$

e) $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}-2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} =$$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sqrt{n+2}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\sqrt{n+1}}_{a_n} \Rightarrow 1 - a_k = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - 1 = \infty \qquad = \infty$$

f) $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! + (n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(1+n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2-1}{(n+2)!}$$

$n+1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n+2}}{(n+2)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\underset{\Downarrow\, m}{(n+1)!}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\underset{\Downarrow\, m}{(n+2)!}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{0!}\right) -$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) = e - 1 - e + 2 = 1$$

g) $\sum_{n=0} \left(-\frac{3}{(n+1)!} + \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+2}} \right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{3}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$\Downarrow$

$-3(e-2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot (2)}{3^n \cdot 3^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot 2}{3^n \cdot 9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{9} \cdot \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^0}{3/1 + \frac{2}{3}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{\cancel{9}3} \cdot \frac{\cancel{3}1}{5} = -\frac{2}{15}$$

$$\frac{q^n}{1-q^n}$$

SEMINAR 6

1) Man untersuche das Konvergenzverhalten der Reihen:

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt[n]{n}$ b) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{3^n}{4^n+5^n}$ c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ d) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

e) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$, wobei $\alpha>0$ fest ist

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \sqrt[n]{n}$ ist divergent

notwendige Konvergenzbedingung

b) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{3^n}{4^n+5^n}$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{3^n}{4^n+5^n} < \frac{3^n}{4^n}$ oder 5^n

$\Rightarrow \sum \frac{3^n}{4^n+5^n} << \underbrace{\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

geom Reihe mit $q=\frac{3}{4} \in (-1,1) \Rightarrow$ die Reihe ist konvergent

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} \frac{3^n}{4^n+5^n}$ ist konvergent

1 Vergleichskriterium

c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

Sei $x_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ und $y_n = \frac{1}{n^\alpha}$ mit einem geeigneten (potrivit) α

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n(n^2+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^3(1+\frac{1}{n^2})}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \underset{\boxed{\alpha=\frac{3}{2}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0,\infty) \underset{\text{2. Vergleichskrit}}{\Longrightarrow} \sum x_n \sim \sum y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \sim \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}_{\substack{\text{verallg harm Reihe} \\ \text{mit } \alpha=\frac{3}{2}>1 \Rightarrow \text{Konvergent}}} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}} \text{ konvergent}$$

d) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Sei $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, n \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1 \underset{\text{Wurzelkriterium}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \text{ ist konvergent}$$

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$, wobei $\alpha>0$ fest ist

Sei $x_n = \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}, n\geq 1 \Rightarrow D_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{(n+1)!}\,(n+1)}{\cancel{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}(\alpha+n)} \cdot \frac{\cancel{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}}{\cancel{n!}} =$

$$= \frac{n+1}{n+\alpha} \Rightarrow D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \overset{\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{\alpha}{n})}}{\frac{n+1}{n+\alpha}} = 1$$

Wir wenden das Raabe-Kriterium an: $R_n = n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right) = n\left(\frac{n+\alpha}{n+1} - 1\right) = \frac{n(\alpha-1)}{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha-1)}{n+1} = \alpha - 1 \xRightarrow[\text{Raabe-Krit}]{}$ falls $\alpha > 2 \Rightarrow \sum x_n$ ist konvergent

falls $\alpha < 2 \Rightarrow \sum x_n$ ist divergent

falls $\alpha = 2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)} = \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(n+1)!} = \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}}_{\substack{\text{harm. Reihe} \\ \Rightarrow \text{divergent}}}$

Also
- falls $\alpha \in (2,\infty) \Rightarrow \sum x_n$ ist konvergent
- falls $\alpha \in (0,2] \Rightarrow \sum x_n$ ist divergent

2) Man untersuche die Konvergenz und die absolute Konvergenz der Reihen:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2(n+1)}}$

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

Absolute Konvergenz: $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}_{\substack{\text{verallgem. harm. Reihe mit } \alpha = \frac{1}{3} < 1 \\ \Rightarrow \text{divergent}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ ist nicht absolut konvergent

???

Konvergenz: Sei $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ↗fallend, $n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ ist fallend und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \xRightarrow[\text{Leibniz-Krit}]{} \sum_{n\geq 1} (-1)^n x_n =$

$= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ ist konvergent

b) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2(n+1)}}$

Absolute konvergenz : $\sum\limits_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2(n+1)}} \right| = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ ist konv (siehe , Aufgabe c) $\Rightarrow \sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

ist absolut konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ ist konvergent

(A17)

a) $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{2^n}{7^n + 10^n}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2^n}{7^n + 10^n} < \frac{2^n}{7^n}$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{7^n + 10^n} << \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{7^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{7^n + 10^n} \text{ konvergent ist}$$

geom Reihe mit $q = \frac{2}{7} \in (-1, 1)$

$\Rightarrow$ konvergent

b) $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{n}{(\ln(n))^n}$

Sei $x_n = \frac{n}{(\ln n)^n}$, $n \geq 2$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})}{\sqrt[n]{(\ln(n))^2}} = \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1 \Rightarrow \sum x_n = \sum \frac{n}{(\ln(n))^2} \text{ ist konvergent}$$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{p^n}$, mit $x>0$ und $p\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^p} \qquad a_n = \frac{x^n}{n^p}$$

$$D := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^{n+1}}}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{\cancel{x^n}} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{x\, n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty} x \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = x$$

Wenn $x>0 \Rightarrow x<1$, dann ist $\sum x_n$ konvergent

$x>1$, dann ist $\sum x_n$ divergent

$x=1$, dann ist keine Entscheidung möglich

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1^n}{n^p} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$$

$\Downarrow$

verallgemeinerte harm

Reihe $\Rightarrow$ $p>1 \Rightarrow$ ist die Reihe konvergent

$p\leq 1 \Rightarrow$ ist die Reihe divergent

(A 18)

a) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^n}{n+3^n}$

Absolute konvergenz: $\sum_{n\geq 1} \left| (-1)^n \frac{e^n}{n+3^n} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n+3^n} \qquad \frac{e^n}{n+3^n} < \left(\frac{e^n}{3^n}\right)$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n+3^n} << \sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{3^n}$$

$\Downarrow$

geom Reihe

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{e^n}{3^n} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n =$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{e}{3}}{1-\frac{e}{3}} = \frac{e}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{3-e} = \frac{e}{3-e}$$

$\frac{e}{3} \in (-1,1) \Rightarrow$ konvergent

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e}{3-e}$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n+3^n}$ ist absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^n}{n+3^n}$ ist konvergent

SEMINAR VII

- Differenziarbarkeit reellwertiger Funktionen einer Variabeln

1) Man bestimme die Polynomfunktion 4. Grades $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(2)=-1$, $f'(2)=5$, $f''(2)=-6$, $f'''(2)=7$ und $f^{(4)}(2)=10$

<u>Lösung:</u> Aus der 6. Vorlesung $\Rightarrow f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 = -1+5(x-2)-$

$$3(x-2)^2 + \frac{7}{6}(x-2)^3 + \frac{5}{12}(x-2)^4$$

2) Man bestimme $(x^3\cdot e^x)^{(6)}$ ↗ 6 Ableitung

<u>Lösung:</u>

$$\boxed{W} \quad (f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x) \quad \text{(die Regel von Leibniz)}$$

$$(x^3)^{(n)} = \begin{cases} x^3, & n=0 \\ 3x^2, & n=1 \\ 6x, & n=2 \\ 6, & n=3 \\ 0, & n\geq 4 \end{cases}$$

$(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n\in\mathbb{N}$. Wir wenden die Regel von Leibniz an:

$f(x) = x^3$, $g(x)=e^x$

// prima deriv dif de 0, deci $k=3 \Rightarrow f^{(6-3)}(x) \Rightarrow f^{3}(x)$

simplified derivata ↑ $(k=3)$

$$\Rightarrow (x^3 e^x)^{(6)} = C_6^3\cdot 6\cdot e^x + C_6^4\, 6x\cdot e^x + C_6^5\, 3x^2\cdot e^x + C_6^6\, x^3\cdot e^x$$

3) Es sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$

a) Man bestimme $f^{(n)}$, für $n\in\mathbb{N}$

b) Man gebe das n-te Taylorpolynom $T_n(x,0)$, für $n\in\mathbb{N}$, an.

c) Man gebe das Restglied $R_n(x,0)$, für $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, nach der Taylorschen Formel an.

d) Man zeige, das f eine Taylorentwicklung auf $\mathbb{R}$ an der Stelle $x_0=0$ hat und bestimme diese

Lösung:

a) $$\sin^{(n)} = \begin{cases} \sin, & n = 4m \\ \cos, & n = 4m+1 \\ -\sin, & n = 4m+2 \\ -\cos, & n = 4m+3 \end{cases} \Rightarrow \sin^{(2k)} = (-1)^k \underset{\sin(0)=0}{\sin}, \quad \sin^{(2k+1)} = (-1)^k \cos, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

b) $$T_n(x, \overset{x_0}{0}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \ ; \text{ aus a)} \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0, \ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sei } m \in \mathbb{N} \Rightarrow T_{2m+1}(x,0) = \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

$$T_{2m+1}(x,0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\text{Für } m \in \mathbb{N}^* \text{ ist } T_{2m}(x,0) = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(2m)}}{(2m)!} x^{2m} = T_{2m-1}(x,0)$$

c) Nach der Taylorschen Formel: $\exists c$ zwischen x und 0 (x_0), so dass $R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - \overset{x_0}{0})^{n+1} =$

$$= \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

d) $$\text{Sei } x \in \mathbb{R} \overset{\text{c)}}{\Longrightarrow} \left|R_n(x,0)\right| = \left| \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{\overbrace{\left|\sin^{(n+1)}(c)\right|}^{\le 1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le |R_n(x,0)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Aus der 6 Vorlesung} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \underset{\text{Sandwich-Theorem}}{\Longrightarrow} \lim_{n \to \infty} |R_n(x,0)| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} R_n(x,0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\underset{\text{Th (Taylor)}}{\Rightarrow}$ f hat eine Taylorentwicklung (auf $\mathbb{R}$) an der Stelle $x_0 = 0$ und diese ist $\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \forall x \in \mathbb{R}}$

(A20) 1), 2.a), 3.a), 3.b)

(A21)

1) Man bestimme die Polynomfunktion 4. Grades $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(2)=-1$, $f'(2)=5$, $f''(2)=-6$, $f'''(2)=7$ und $f^{(4)}(2)=10$

<u>Lösung</u>: Aus der 6. Vorlesung $\Rightarrow f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 = -1 + 5(x-2)$

$3(x-2)^2 + \frac{7}{6}(x-2)^3 + \frac{5}{12}(x-2)^4$

(A20)

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(-1)=-2$, $f'(-1)=0$, $f''(-1)=1$, $f^{(3)}(-1)=-5$

$$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f^{(3)}(-1)}{3!}(x+1)^3 = (-2) + 0 + \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{(-5)}{6}(x+1)^3 =$$

$$= -2 + \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{5}{6}(x+1)^3$$

2)

a) $(e^{5x})^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$

$$(e^{5x})^{(n)} = \begin{cases} e^{5x}, & n=0 \\ 5e^{5x}, & n=1 \\ 25e^{5x}, & n=2 \\ 125e^{5x}, & n=3 \\ \vdots \\ 5^n e^{5x}, & n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

b) $T_n(x,\overset{\uparrow x_0}{0}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$; aus a) $\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $\forall k\in\mathbb{N}$

Sei $m\in\mathbb{N} \Rightarrow T_{2m+1}(x,0) = \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}x^{2m+1} =$

$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}$

$$T_{2m+1}(x,0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Für $m\in\mathbb{N}^*$ ist $T_{2m}(x,0) = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(2m)}}{(2m)!}x^{2m} = T_{2m-1}(x,0)$

3)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}\sin x$

a) $$T_2(x,0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = \frac{1}{1}x + \frac{\cancel{4}^{\,2}x^2}{\cancel{2}} = x + 2x^2$$

$f'(x) = 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos(x)$

$f''(x) = 4e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\sin(x) \Longleftrightarrow 3e^{2x}\sin(x) + 4e^{2x}\cos(x)$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 4$

b) $R_2(x,0)$, für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Nach der Taylorschen Formel: $\exists c$ zwischen x und 0 (x_0), so dass $R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - \overset{x_0}{0})^{n+1} = \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$

Nach der Taylorsche Formel: $\exists c$ zwischen x und 0, so dass $R_2(x,0) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!} \cdot x^3 = \frac{(e^{2x} \sin x)^{(3)}(c)}{3!} x^3$

$3e^{2x}\sin(x) + 4e^{2x}\cos(x)$

$$f^{(3)}(x) = 6e^{2x}\sin(x) + 3e^{2x}\cos(x) + 8e^{2x}\cos(x) - 4e^{2x}\sin(x) = 2e^{2x}\sin x + 11e^{2x}\cos x$$

$$R_2(x,0) = \frac{2e^{2c}\sin c + 11e^{2c}\cos c}{3!} x^3$$

(A 21)

SEMINAR VIII

- Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

$\boxed{W}$: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2} = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2}$$

→ Def: Die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist. Bez: $x \perp y$

→ Bem:

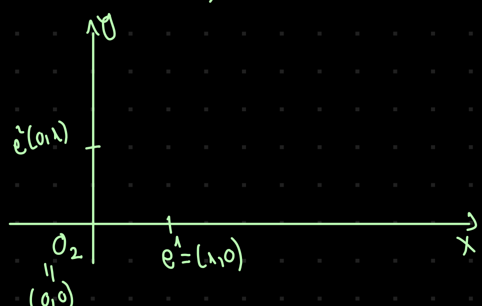
1) $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$, weil $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ist

2) $\underset{(0 \ldots 0)}{\overset{}{0_n}} \perp x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, weil $\langle 0_n, x \rangle = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

3) Seien $k, l = \{1, \ldots, n\}$ mit $k \neq l$. Dann ist $e^k \perp e^l$, weil $e^k = (0, 0, \ldots, \underset{k\text{-te Stelle}}{1}, 0, 0)$, $e^l = (0, \ldots, \underset{l\text{-te Stelle}}{1}, 0, 0) \Rightarrow \langle e^k, e^l \rangle = 0$ $\boxed{k < l}$

4) ist $n \geq 2$, dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\langle x, y \rangle = 0 \not\Rightarrow x = 0_n$ oder $y = 0_n$

z.B. $n = 2$: $e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$



$\langle e^1, e^2 \rangle = 0$, aber $e^1 \neq 0_2$ und $e^2 \neq 0_2$

1) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ so, dass $y \perp x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $y = 0_n$

Lösung: $\langle y, x \rangle = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0_n$

$\boxed{S_1}$ 5), 7 Vorl.

2) Man zeige die folgende Äquivalenz für $x, y \in \mathbb{R}^n$ $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\| = \|x-y\|$

Lösung: $\|x+y\| = \|x-y\| \Leftrightarrow \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle} \Leftrightarrow \langle x+y, x+y \rangle = \langle x-y, x-y \rangle \Leftrightarrow$ $\langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle =$

$\boxed{S_1\ 7\ \text{Vorl}}$

$= \langle x, x-y \rangle - \langle y, x-y \rangle \underset{\boxed{S_1}\,7\,\text{Vorl}}{\Leftrightarrow} \cancel{\langle x,x \rangle} + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \cancel{\langle y,y \rangle} = \cancel{\langle x,x \rangle} - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle + \cancel{\langle y,y \rangle} \underset{\boxed{S_1}\,7\,\text{Vorl}}{\Leftrightarrow} 4\langle x,y \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle x,y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$

(A29)

a) $a := \langle u, v \rangle,\ b := \|u\|,\ c := \|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle} \Rightarrow \langle v,v \rangle = c^2$

$\langle u+v, v \rangle = \langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle = a + c^2$

$\langle u, 2u-3v \rangle = \langle u, 2u \rangle - \langle u, 3v \rangle = 2\langle u,u \rangle - 3\langle v,u \rangle = 2b^2 - 3a$

$\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle} = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle} = \sqrt{\langle u, u-v \rangle - \langle v, u-v \rangle} = \sqrt{\langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle} = \sqrt{b^2 - 2a + c^2}$

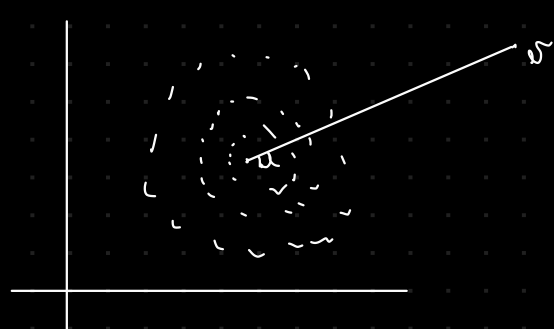
b) $n = 3,\ u = (-1,2,3),\ v = (-2,1,-3)$

b1) a, b und c

$a := \langle u,v \rangle = \langle (-1,2,3), (-2,1,-3) \rangle = 2 + 2 - 9 = -5$

$b := \|u\| \Rightarrow b := \sqrt{\langle (-1,2,3) \rangle}$

b2) $r > 0,\quad v \notin B(u,r) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|y-u\| < r\}\ ;\ \|v-u\| \geq r$



$v - u = (-1, -1, -6) \Rightarrow \|v-u\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{38} \Rightarrow r \in (0, \sqrt{38}]$

b3) $t \in \mathbb{R},\ (1,-1,t) \in \overline{B}(u,5)$

$\|u - (1,-1,t)\| \leq 5 = \|(-1,2,3) - (1,-1,t)\| \leq 5 \Leftrightarrow \|(-2,3,3-t)\| \leq 5 =$

$= \sqrt{(-2)^2+3^2+(3-t)^2} \leq 5 \iff \sqrt{4+9+9-6t+t^2} \leq 5 \iff \sqrt{t^2-6t+22} \leq 5 \,\Big|^2 \iff t^2-6t+22 \leq 25 \iff$

$\iff t^2-6t+22-25 \leq 0 \iff t^2-6t-3 \leq 0 \Rightarrow t \in \left[\frac{6-\sqrt{48}}{2}, \frac{6+\sqrt{48}}{2}\right]$

$\Delta = b^2 - 4ac \iff 36 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 36+12 = 48$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{6+\sqrt{48}}{2}$

$x_2 = \frac{6-\sqrt{48}}{2}$

(A30)

$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

SEMINAR 8 \ WOCHE 10

(A 33)

Man entscheide, ob die Folgen $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergent sind oder nicht, und bestimme im Fall von Konvergenz deren Grenzwert:

a) $n = 2$ und $x^k = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k, (-1)^k\right)$, b) $n = 3$ und $x^k = \left(\frac{2^k}{k!}, \frac{1-4k^7}{k^7+12k}, \frac{\sqrt{k}}{e^{3k}}\right)$,

c) $n = 2$ und $x^k = \left(\frac{\sin k}{k}, -k^3 + k\right)$,

d) $n = 4$ und $x^k = \left(\frac{2^{2k}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{2k}}, \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}, (e^k + k)^{\frac{1}{k}}, \frac{\alpha^k}{k}\right)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ fest ist.

geometrische Folge mit $q = -\frac{1}{2} \in (-1,1) \Rightarrow$ konv. mit $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$

a) $n=2$, $x^k = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k, (-1)^k\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Da $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ divergent ist $\Rightarrow (x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ist divergent

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^k$ nicht existiert also divergent

b) $n=3$, $x^k = \left(\frac{2^k}{k!}, \frac{1-4k^7}{k^7+12k}, \frac{\sqrt{k}}{e^{3k}}\right)$

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2^k}{k!} = 0$ (weil $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a^k}{k!} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$) Vorlesungs

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1-4k^7}{k^7+12k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{k^7\left(\frac{1}{k^7}-4\right)}{k^7\left(1+\frac{12}{k^6}\right)} = -4$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{k}}{e^{3k}} = 0$ (↪ siehe Vorlesung 8

$\Rightarrow (x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ist konvergent und $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = (0,-4,0)$

(A 34) (Grenzwerte reellwertiger Funktionen von mehreren Variablen)

Gegeben seien die Funktionen $f,\ g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \text{ und } g(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

a) Man zeige, dass die Funktion f keinen Grenzwert in 0_2 hat.

b) Man zeige, dass die Funktion g einen Grenzwert in 0_2 hat und bestimme diesen Grenzwert.

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

a) • Sei $a^k = \left(\frac{1}{k}, 0\right),\ \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a^k = (0,0) = 0_2,$

$$\lim_{k\to\infty} f(a^k) = \lim_{k\to\infty} f\left(\tfrac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{k^2}+0} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

• Sei $b^k = \left(0, \frac{1}{k}\right),\ \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} b^k = (0,0) = 0_2,$

$$\lim_{k\to\infty} f(b^k) = \lim_{k\to\infty} f\left(0, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^2}}{0^2+\frac{1}{k^2}} \overset{\frac{1}{\cancel{k^2}}\cdot\frac{\cancel{k^2}}{1}}{=} \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

$\Longrightarrow$ f hat keinen Grenzwert in 0_2

$\boxed{\text{Th2}}$

8 Vorlesung

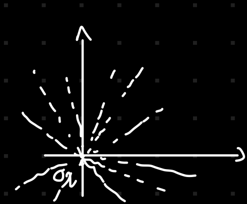
b) $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Es gilt $(x^2-y^2)^2 \geq 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \geq 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \mid +4x^2y^2 \Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \geq 4x^2y^2,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 \geq 4x^2y^2,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+y^2 \geq \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\} \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{4} \geq \underbrace{\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}}_{=\,g(x,y)},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$

$\Rightarrow 0 \leq g(x,y) \leq \dfrac{x^2+y^2}{4},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$

$\to 0$



Da $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{4} = 0$ ist $\xRightarrow[\text{Sandwich-Theorem}]{} \lim\limits_{(x,y)\to 0_2} g(x,y) = 0$

(A 35) (Stetigkeit reellwertiger Funktionen von mehreren Variablen)

Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{2(x^4+y^4)}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2. \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{2(x^4+y^4)}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2 \end{cases}$ → Rationalefunktion → Zähler und Nenner sind Polynome

Als rationale Funktion ist die Funktion f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$ stetig

- Sei $a^k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a^k = (0,0) = 0_2$,

$$\lim_{k\to\infty} f(a^k) = \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^4 - 0^4}{2\left(\left(\frac{1}{k}\right)^4 + 0^4\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^4}{2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^4} = \frac{1}{2} \neq \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0_2)}} \xRightarrow[\boxed{\text{Th3}}\text{ Vorlesung}]{} f \text{ ist in } 0_2 \text{ nicht stetig}$$

- $\boxed{\text{Bemerkung}}$: Man kann zeigen, dass f in 0_2 keinen Grenzwert hat (Hausaufgabe)

(A 36)

Sei $f\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = \frac{z^2 e^y}{x}$. Man bestimme:

a) alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f,

b) die Vektoren $u := \nabla f(1,0,2)$, $v := \nabla f(2,1,1)$ und deren Skalarprodukt $\langle u, v\rangle$.

! Partiell nach einer Variabeln zu differenzieren bedeutet, nach der betreffenden Variabeln zu differenzieren, während die anderen Variabeln wie Konstanten behandelt werden

$$f(x,y,z) = \frac{z^2 e^y}{x}$$

a) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{z^2 e^y}{x^2} \quad \left(\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{z^2 \cdot e^y}{x} \quad \left(\frac{d}{dy}\, e^y = e^y\right) \quad (= f(x,y,z))$$

$$f(x,y,z) = \frac{z^2}{x} \cdot e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2ze^y}{x} \quad \left(\frac{d}{dz}\, z^2 = 2z\right)$$

b) Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ ist $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) =$

$$= \left(-\frac{z^2 e^y}{x^2}, \frac{z^2 e^y}{x}, \frac{2ze^y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow u = \nabla f(1,0,2) = (-4, 4, 4)$$

$$\Rightarrow v = \nabla f(2,1,1) = \left(-\frac{e}{4}, \frac{e}{2}, e\right)$$

$$\Rightarrow \langle u, v\rangle = -\cancel{4}\cdot\left(-\frac{e}{\cancel{4}}\right) + \overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{e}{\cancel{2}_1} + 4e = 7e$$

(A 38)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2 \end{cases}$.

a) Man zeige, dass f partiell differenzierbar (nach beiden Variablen) auf $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme beide partiellen Ableitungen erster Ordnung von f.

b) Man zeige, dass f in 0_2 nicht stetig ist (obwohl f in 0_2 partiell differenzierbar ist).

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq \emptyset \\ 0, & (x,y) = 0_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h^2}}$$

a) ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy \; 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy \; 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

• Wir untersuchen die partielle Differenzierbarkeit von f in $\underset{\underset{(0,0)}{\parallel}}{0_2}$ nach x: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \Rightarrow f$ ist in 0_2 nach x partiell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

• Wir untersuchen die partielle Differenzierbarkeit von f in 0_2 nach y:

$\lim\limits_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{0}{y} = \lim\limits_{y \to 0} 0 = 0 \Rightarrow f$ ist in 0_2 nach y partiell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind wie folgt def $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y(y^2-x^2), & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2 \end{cases}$$

Partielle Differenzierbarkeit in (1,2) nach x (laut Def): $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x,2) - f(1,2)}{x-1}$

Partielle Differenzierbarkeit in (1,2) nach x (laut Def): $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{f(1,y) - f(1,2)}{y-2}$

SEMINAR 9 \ WOCHE 11

~ Lokale Extremstellen ~

m	symm Matrix	positiv definit	negativ definit	indefinit	positiv / negativ semidefinit
2	$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$	$a>0$ und (det) $ad-b^2>0$	$a<0$ und $ad-b^2>0$	$ad-b^2<0$	Definition
≥ 3	$C=(c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$	$\Delta_s>0$, $\forall s \in \{1,\dots,n\}$	$(-1)^s \Delta_s > 0$, $\forall s \in \{1,\dots,n\}$ $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0$ usw.	Definition	Definition

Hauptminoren

· $\boxed{\text{Aufgabe 1}}$: Man entscheide, ob die folgende Matrizen: a) $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, b) $C_2 = \begin{array}{c|ccc} & h_1 & h_2 & h_3 \\ \hline h_1 & \boxed{4} & -1 & 2 \\ h_2 & -1 & -3 & 0 \\ h_3 & 2 & 0 & 2 \end{array}$,

c) $C_3 = \begin{array}{c|ccc} & h_1 & h_2 & h_3 \\ \hline h_1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ h_2 & 1 & 1 & 1 \\ h_3 & 1 & 1 & 1 \end{array}$ positiv/negativ definit, bzw. positiv/negativ semidefinit oder indefinit sind.

Lösung:

a) $\det C_1 < 0 \Longrightarrow C_1$ ist indefinit

Tabelle ($\boxed{S2}$, 9 Vorl.)

Tabelle ($\boxed{Th3}$ 9 Vorl.)

b) $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \det C_2$; $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0 \Rightarrow C_2$ ist weder positiv, noch negativ definit

Die quadratische Form zu C_2 ist $\Phi_{C_2}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi_{C_2}(h_1,h_2,h_3) = 4(h_1)^2 - h_1h_2 + 2h_1h_3 - h_2h_1 - 3(h_2)^2 +$

$+ 2h_3h_1 + 2(h_3)^2 = 4(h_1)^2 - 2h_1h_2 + 4h_1h_3 - 3(h_2)^2 + 2(h_3)^2$

Aus $\Phi_{C_2}(1,0,0) = 4 > 0$, $\Phi_{C_2}(0,1,0) = -3 < 0 \Rightarrow C_2$ ist indefinit

Tabelle ($\boxed{\text{Th3}}$ 3 Vorl)

c) $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \det C_3$; $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0 \Rightarrow C_3$ ist weder positiv, noch negativ definit

Die quadratische Form zu C_3 ist $\Phi_{C_3}\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi_{C_3}(h_1,h_2,h_3) = (h_1)^2 + 2h_1h_3 + 2h_1h_3 + (h_2)^2 + 2h_2h_3 + (h_3)^2 =$

$= (h_1+h_2+h_3)^2 \geq 0$, $\forall (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow C_3$ ist positiv semidefinit, jedoch nicht positiv definit

· $\boxed{\text{Aufgabe 2}}$: Man bestimme alle lokalen Extremstellen, deren Art (Minimal oder Maximalstelle) sowie die entsprechenden lokalen Extremwerte der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Lösung: ↗ (Algorithmus)

1) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$

2) $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \quad |(\,)^2 \Rightarrow x^4 = y^2 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1\} \Rightarrow (0,0)$ und $(1,1)$ sind die einzigen stationären Punkte von f

Die stationaren Punkte von f sind Lösungen des Systems

3) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

4) $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

- $H_f(0,0)$; $\det H_f(0,0) = -9 < 0 \overset{\uparrow \text{Tabelle}}{\Longrightarrow} H_f(0,0)$ ist indefinit $\Longrightarrow (0,0)$ ist keine lokale Extremstelle von f

- $H_f(1,1)$: $\det H_f(1,1)$: $6 > 0 \overset{\text{Tabelle}}{\Rightarrow} H_f(1,1)$ ist positiv definit $\Rightarrow (1,1)$ ist eine lokale Minimalstelle von f. Der dazu gehörende lokale Extremwert ist $f(1,1) = -1$

(A 41)

Man bestimme alle lokalen Extremstellen, deren Art (Minimal- oder Maximalstelle) sowie die entsprechenden lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 + z^2$,

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = z^2(1+xy) + xy$,

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

d) $f\colon (-1,\infty) \times (1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x+1)(y-1) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1}$.

a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 + z^2$

1) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 - 3$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y$ $\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z$

2) $\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Die stationare Punkten sind $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$

3) Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 - 3$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z$

$\frac{\partial f}{\partial x^2} = 6x$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x \partial z} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y^2} = 2$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y \partial z} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z \partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial z \partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y^2} = 2$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4)

$$H_f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(-1,0,0) = \begin{array}{c|ccc} & h_1 & h_2 & h_3 \\ \hline h_1 & -6 & 0 & 0 \\ h_2 & 0 & 2 & 0 \\ h_3 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$\cdot$ $\det H_f(1,0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow H_f(1,0,0)$ ist positivdefinit $= (1,1,0)$ eine lokale Minimalstelle von f

$\det \Delta_1 > 0$

$\det \Delta_2 > 0$!

$\det \Delta_3 > 0$

$$\begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$= 24 + 0 + 0 - 0 = 24 > 0$

$\det H_f(-1,0,0) = -24 < 0$

Die quadratische Form ist $\Phi_{H_f(-1,0,0)} = -6(h_1)^2 + 2(h_2)^2 + 2(h_3)^2 =$

Aus $\Phi_{H_f(-1,0,0)}(1,0,0) = -2 < 0$ und $\Phi_{H_f(-1,0,0)}(-1,0,0) = 10 > 0 \Rightarrow H_f(-1,0,0)$ ist indefinit

$\Rightarrow (-1,0,0)$ es gibt keine lokale Extremstelle !