$+ \quad \times$

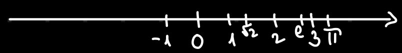
$- \quad \div$

† Amin

Kurs I

I. Grundlagen: Die reelen Zahlen

$\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$



$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$\downarrow$

die erweiterte Menge der reellen Zahlen

Die Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt fortgesetzt: $-\infty < \infty$, $-\infty < x$ und $x < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Es gelten die Inklusionen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$

Def: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Die reele Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

> eine untere Schranke von M, falls $\forall a \in M$ gilt $x \leq a$; wir bezeichnen (be.) mit $US(M)$ die Menge gebildet aus allem unterem Schranken von M;

> eine obere Schranke von M, falls $\forall a \in M$ gilt $a \leq x$; sei $OS(M)$ die Menge der oberen Schranken von M

> ein kleinstes Element von M (Minimum von M), mit $\min M$ bezeichnet, falls $x \in M$ und $x \in US(M)$

> ein größtes Element von M (Maximum von M), mit $\max M$ bezeichnet, falls $x \in M$ und $x \in OS(M)$

> ein Infimum von M, mit $\inf M$ bez., falls x die größte $US(M)$ ist (d.h. $x = \max US(M)$)

> ein Supremum von M, mit $\sup M$ bez., falls x die kleinste $OS(M)$ ist (d.h. $x = \min OS(M)$)

· Die Menge M heißt:

> nach untem beschränkt, falls $US(M) \neq \emptyset$,

> nach oben beschränkt, falls $OS(M) \neq \emptyset$

> beschränkt, falls M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist

> nach unten unbeschränkt, falls $US(M) \neq \emptyset$

> nach oben unbeschränkt, falls $OS(M) \neq \emptyset$

> unbeschränkt, falls M nicht beschränkt ist

- Bsp:

M	US(M)	OS(M)	min M	max M	inf M	sup M
$[1,2]$	$(-\infty,1]$	$[2,\infty)$	1	2	1	2
$(1,2]$	$(-\infty,1]$	$[2,\infty)$	$\nexists$	2	1	2
$(1,2)$	$(-\infty,1]$	$[2,\infty)$	$\nexists$	$\nexists$	1	2
$(-\infty,-1)$	$\emptyset$	$[-1,\infty)$	$\nexists$	$\nexists$		
$[3,\infty)$	$(-\infty,3]$	$\emptyset$	3	$\nexists$	3	∞

- Vereinbarungen (conventie)
  - falls M nach untem unbeschränkt, setzt man $\inf M := -\infty$,
  - falls M nach oben unbeschränkt, setzt man $\sup M := \infty$

- $\boxed{\text{Th } 1}$ (Das Supremumprinzip)
  - jede nicht leere beim oben beschränkte Menge reellen Zahlen hat ein Supremum in $\mathbb{R}$

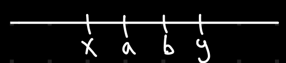
- $\boxed{\text{Folgerung 2 (F)}}$
  - sei S eine nach oben beschränkte Menge reellen Zahlen und M eine nicht leere Teilmenge von S. Dann ist M ebenfalls nach oben beschränkt und es gilt $\sup M \leq \sup S$
  - Beweis (Bws): $\emptyset \neq M \subseteq S \Rightarrow S \neq \emptyset \underset{\text{S nach oben beschränkt ist, } \boxed{\text{Th}_1}}{\Rightarrow} \exists \sup S \in \mathbb{R}$

$\underset{\sup S \in OS(S)}{\Rightarrow} \forall a \in S$ gilt $a \leq \sup S \underset{M \subseteq S}{\Rightarrow} \forall a \in M$ gilt $a \leq \sup S \Rightarrow \sup S \in OS(M) \Rightarrow M$ ist nach oben beschränkt $\underset{M \neq 0, \boxed{\text{Th}_1}}{\Rightarrow} \exists \sup M \in \mathbb{R}$

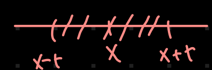
Da $\sup S \in OS(M) \underset{\text{Def Supremum}}{\Longrightarrow} \sup M \leq \sup S$ $\square$

- $\boxed{\text{Th 3}}$ (Das Infimumsprinzip)
  > jede nicht leere nach untem beschränkte Menge reelen Zahlen hat ein Infimum in $\mathbb{R}$
- $\boxed{\text{F4}}$
  > sei S eine nach untem beschränkte Menge reeller Zahlen und M eine nichtleere Teilmenge von S. Dann ist M ebenfalls nach oben beschränkt und es gilt $\inf S \leq \inf M$
- $\boxed{\text{Th 5}}$ (Archimedes)
  > die Menge $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt
- $\boxed{\text{Th 6}}$ (Die Dichtheitseigenschaft – densitate von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)
  > Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x<y$. Dann gibt es wenigstens eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ und wenigstens eine irrationale Zahl $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $x<a<y$ und $x<b<y$

  > In anderem Worten: Zwischen zwei verschiedene reelle Zahlen gibt es wenig. eine rationale Zahl und irrationale Zahl



- Def
  > • ist $x \in \mathbb{R}$ und $r>0$, dann nennt man das offene interval $(x-r, x+r)$ die <u>r-Umgebung</u> von x und bezeichnen es mit $\boxed{B_r(x) := (x-r, x+r)}$



  > eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ wird eine Umgebung von x genannt, wenn $\exists\, r>0$ mit $B_r(x) \subseteq U$

  > eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ wird eine Umgebung von ∞ genannt, wenn $\exists\, a \in \mathbb{R}$ mit $(a, \infty) \subseteq U$

  > eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ wird eine Umgebung von $-\infty$ genannt, wenn $\exists\, a \in \mathbb{R}$ mit $(-\infty, a) \subseteq U$

  > ist $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so bezeichnet man mit $\mathcal{U}(x)$ die Menge gebildet aus allem Umgebungen von x

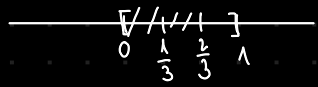
- $\boxed{\text{Bemerkung (Bem)}}$
  > $U \in \mathcal{U}(x) \underset{\text{Def}}{\Rightarrow} \begin{cases} \cdot\ x \in U, \text{ falls } x \in \mathbb{R} \\ \cdot\ U \text{ hat unendlich viele Elemente} \end{cases}$

  > $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(x)$

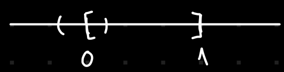
· Bsp:

mulțimea tuturor vecinătăților lui $\frac{1}{3}$

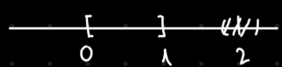
1) $[0,1] \in \mathcal{U}\left(\frac{1}{3}\right)$, weil $B_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \left(0, \frac{2}{3}\right) \subseteq [0,1]$



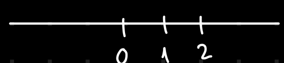
2) $[0,1] \notin \mathcal{U}(0)$, weil $\nexists\, r>0$ mit $B_r(0) = (-r, r) \subseteq [0,1]$



3) $[0,1] \cup \{2\} \notin \mathcal{U}(2)$, weil $\nexists\, r>0$ mit $B_r(2) = (x-r, x+r) \subseteq [0,1] \cup \{2\}$

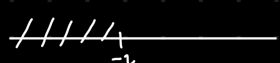


4) $(0,\infty) \in \mathcal{U}(2)$, weil $B_2(2) = (0,4) \subseteq (0,\infty)$



5) $(0,\infty) \notin \mathcal{U}(0)$, weil $0 \notin (0,\infty)$

6) $(-\infty,-2) \in \mathcal{U}(-\infty)$, weil $(-\infty,-2) \subseteq (-\infty,-2)$



7) $(-\infty,-2) \notin \mathcal{U}(\infty)$, weil $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $(a,\infty) \nsubseteq (-\infty,-2)$

8) $\mathbb{Q} \notin \mathcal{U}(0)$, weil $\forall r>0$ ist $B_r(0) = (-r, r) \subseteq \mathbb{Q}$ (weil nach Th.6 $\Rightarrow (-r,r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$)

Grundlagen. Die reellen Zahlen

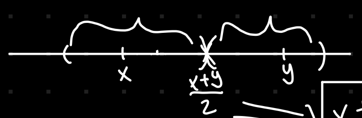
KURS II

Satz 7 (S_1)

> Seien $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ und $x \neq y$. Dann $\exists U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$

· Beweis: O.B.d.A (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $x<y$

1) Fall: $x, y \in \mathbb{R}$



$\Longrightarrow \boxed{x+r=y-r}$

Sei $r = \frac{y-x}{2} > 0$

Dann ist $U := B_r(x) = (x-r, x+r) = \left(\frac{3x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$ und $V := B_r(y) = (y-r, y+r) =$

$x-r = x - \frac{2}{} \frac{y-x}{2} = \frac{3x+y}{2}$

$x+r = x + \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2} \Big| = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{3y-x}{2}\right)$

$\Rightarrow U \cap V = \emptyset$

2) Fall: $x = -\infty, y \in \mathbb{R}$

3) Fall: $x \in \mathbb{R}, y = \infty$

4) Fall: $x = -\infty, y = \infty$ $\square$

↳ S. 2 Üb

Def:

> Für jede reelle Zahl x nennt man die Zahl $|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ den Betrag (oder absoluten Betrag) von x

· **Satz 8:**

> Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

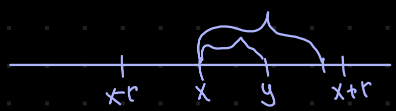
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. Insbesonders ist $|-x| = |x|$

4. $|x+y| \leq |x| + |y|$

5. ist $y > 0$, dann ist $|x| \leq y \iff x \in [-y, y]$

- Def:
  - Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Der Abstand (der Distanz) zwischen x und y wird als $|x| - |y|$ definiert

- Satz 9:
  - Seien $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Dann ist $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r\}$



Reelle Zahlenfolgen

- Def: Sei M eine nicht leere Menge. Eine Funktion $f: \mathbb{N} \to M$ nennt man eine Folge im M. Die Funktionswerte der Folge nennt man Glieder der Folge (Folgenglieder – termeni) und verwendet die Bezeihnunung $x_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, für sie

  Die Folge wird mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(x_n)_{n \geq 0}$ bezeichnet

- Für $M = \mathbb{R}$, so spricht man von einer reellen Zahlenfolge. Weiters werden alle auftretenden Folgen reellen Zahlenfolgen sein und wir werden sie einfach Zahlenfolgen nennen

- Bem:
  1) Die Nummerierung der Folgenglieder kann auch mit einer anderem natürlichen Zahl beginnen, z.B.
     - mit 1 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ oder $(x_n)_{n \geq 1}$
     - mit einer festen Zahl $k \in \mathbb{N}$: $(x_n)_{n \geq k}$
  2) Folgen kann man so einführen:
     - explizit mitteils einer Formel (z.B. $x_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$)
     - rekursiv (z.B.: Fibonaccifolge $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

· Def:

> Die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- monoton wachsend (oder wachsend), falls $x_n \leq x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$
- streng monoton wachsend (oder streng wachsend), falls $x_n < x_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$
- monoton fallend (oder fallend), falls $x_n \geq x_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$
- streng monoton fallend (oder streng fallend), falls $x_n > x_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$
- monoton, falls sie wachsend oder fallend ist
- streng monoton, falls sie streng wachsend oder streng fallend ist

↳ Monotonie von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

· Def:

> Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und sei X die Menge gebildet aus allem Glieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dh. $X=\{x_n | n\in\mathbb{N}\}$)

> Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- nach oben beschränkt
- nach untem beschränkt
- beschränkt
- nach unten unbeschränkt
- nach oben unbeschränkt
- unbeschränkt

wenn X die betreffende Eigenschaft hat

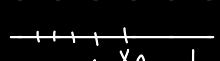
↳ Diese Begriffe beschreiben die Beschränktheit von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

· Bsp:

1) Sei $x_n = (-1)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton weil $x_0 > x_1$ und $x_1 < x_2$ sind. Es gilt $X=\{x_n | n\in\mathbb{N}\}=\{-1,1\} \Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt

2) Jede monoton fallende Folge ist nach oben beschränkt



→ obere Schranke

$-n$ nach untem unbesch.

$\frac{1}{n}$ nach untem besch.

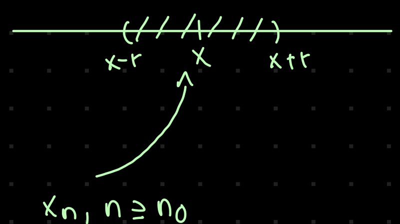
3) Jede monoton wachsende Folge ist nach untem beschränkt

· **Def.:**

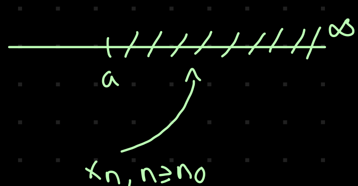
> Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Man sagt, dass x der Grenzwert (limita) der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, wenn $\forall U \in \mathcal{U}(x),\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U,\ \forall n \geq n_0$. Bez. $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x$

· **Bem:**

> Wenn $x \in \mathbb{R}$



> $x = \infty$



· $\boxed{\text{Th1}}$ (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

> hat die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt

> Beweis: Widerspruchbeweis: Wir nehmen an die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hätte zwei Grenzwerte $x, y \in \overline{\mathbb{R}},\ x \neq y$. Aus

$S7 \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x),\ \exists V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$

Aus $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U,\ \forall n \geq n_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in V,\ \forall n \geq n_0$

Sei $m = \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow \begin{cases} m \geq n_0 \Rightarrow x_m \in U \\ m \geq n_1 \Rightarrow x_m \in V \end{cases} \Rightarrow x_m \in U \cap V = \emptyset$ ↯ Widerspruch $\Rightarrow$ der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eindeutig bestimmt □

· Def:

- Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (oder heißt konvergent) wenn sie als Grenzwert eine reelle Zahl $x\in\mathbb{R}$ ist.

  In diesem Fall sagt man, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert (strebt)

- Eine Folge, die nicht konvergiert, wird divergent genannt

- Bsp:

  1) Eine divergente Folge kann:

     - keinen Grenzwert haben

     - $-\infty$ oder ∞ als Grenzwert

  2) Sei $c\in\mathbb{R}$ und $x_n = c$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c.

     Bew: Sei $U\in\mathcal{U}(c)$. Da $x_n = c \in U$, $\overbrace{\forall n \in\mathbb{N}}^{\forall n\geq 0} \underset{\text{Def}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ $\square$

  3) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, d.h. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent

     Bew: Sei $U\in\mathcal{U}(\infty) \Rightarrow \exists a\in\mathbb{R}$ mit $(a,\infty)\subseteq U$

     Laut des Theorems von Archimedes $\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ mit $a < n_0 \Rightarrow a < n, \forall n\geq n_0 \Rightarrow n\in(a,\infty), \forall n\geq n_0 \Rightarrow$

     $n\in U, \forall n\geq n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

  4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

     Bew: $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

     muss begründet werden; darum gibt es Rechenregel für Grenzwerte

  Bsp: Sei $q\in\mathbb{R}$. Dann kann man über die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ folgendes aussagen

- $\boxed{\text{Th}_2}$ - Rechenregeln für konvergerten Folgen

  > Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, dann gelten:

  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(t\cdot a_n) = t\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \forall t\in\mathbb{R}$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

- Die Addition betreffend

  - $\forall x\in\mathbb{R}: x+\infty = \infty + x = \infty$
  - $\forall x\in\mathbb{R}: x+(-\infty) = (-\infty)+x = -\infty$
  - $\infty+\infty=\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

  ■ Nicht definiert

  - $\infty + (-\infty)$
  - $(-\infty)+(\infty)$

- Die Multiplikation betreffend

  - $x\cdot\infty = \infty\cdot x = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x\in(0,\infty) \\ -\infty, & \text{falls } x\in(-\infty,0) \end{cases}$
  - $x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } x\in(0,\infty) \\ \infty, & \text{falls } x\in(-\infty,0) \end{cases}$
  - $\infty\cdot\infty = \infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$
  - $\infty\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$

  ■ Nicht definiert

  - $0\cdot\infty$
  - $\infty\cdot 0$
  - $0\cdot(-\infty)$
  - $(-\infty)\cdot 0$

- **Die Division betreffend**
  - $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$
  - $\frac{1}{0+} = \infty, \frac{1}{0-} = -\infty$

  - **Nicht definiert**
    - $\frac{\infty}{\infty}$
    - $\frac{\infty}{-\infty}$
    - $\frac{-\infty}{-\infty}$
    - $\frac{-\infty}{\infty}$

- **Potenz betreffend**
  - $x^{\infty} = \begin{cases} \infty, \text{ falls } x \in (1, \infty) \\ 0, \text{ falls } x \in [0, 1) \end{cases}$
  - $x^{-\infty} = \begin{cases} 0, \text{ falls } x \in (1, \infty) \\ \infty, \text{ falls } x \in (0, 1) \end{cases}$
  - $(\infty)^x = \begin{cases} \infty, \text{ falls } x \in (0, \infty) \\ 0, \text{ falls } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$
  - $\infty^{\infty} = \infty, \ \infty^{-\infty} = 0$

  - **Nicht definiert**
    - 1^{∞}
    - ∞^{0}
    - 0^{0}
    - $1^{-\infty}$

- $\boxed{\text{Th3}}$
  - Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$

- **Def:** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen (d.h. $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$), dann nennt man $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- **Bsp:** $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_2, x_4, \ldots)$ ist die Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die den gerade Indizes, und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, \ldots)$ die Teilfolge, die den ungeraden Indizes entspricht

- $\boxed{Th_4}$ – Teilfolgen und Grenzwerte

  > Hat die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so hat auch jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert x

- Bem: Th_4 kann verwendet werden, um zu begründen, dass bestimmte Folgen keinen Grenzwert haben. z.B.: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert, weil die Teilfolgen $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ verschiedene Grenzwerte haben

- Beispiel:

  > Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt für den Grenzwert der Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{falls } q > 1 \\ 1, & \text{falls } q = 0 \\ 0, & \text{falls } q \in (-1,1) \\ \nexists, & \text{falls } q \leq -1 \end{cases}$

  > Beweis:

$$(1) \quad x^\infty = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (1,\infty) \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1) \end{cases}$$

1. Fall: $q > 1$. Aus (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$

2. Fall: $q = 1 \Rightarrow q^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$

3. Fall: $q \in (-1,1) \Rightarrow |q| \in [0,1)$. Aus (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Da $|q^n| = |q|^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

   $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$. Aus $Th_3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

4. Fall: $q = 1 \hookrightarrow$ wurde in der obigen Bemerkung behandelt

5. Fall: $q < -1 \Rightarrow q^2 > 1$. Aus (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} (q^2)^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (q^{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{<-1}{q} \cdot q^{2n} = -\infty$. Aus $Th_4 \Rightarrow$

   $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} q^n \quad \square$

Kurs III

Reelle Zahlenfolgen (Folgen)

- $\boxed{\text{Th 5}}$ (Das Vergleichstheorem für Folgen)

  > Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit der Eigenschaft, dass $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \le y_n, \forall n \ge n_0$

  > Es gelten:

  1. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overset{\nearrow \text{konvergent}}{x}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y = y$, so ist $x \le y$

  2. ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

  3. ist $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

- $\boxed{\text{Bem}}$

  > Unter der Voraussetzungen von $\boxed{\text{Th5}}$ 1., falls $x_n < y_n, \forall n \ge n_0 \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

  > z.B: $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $x_n < y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to} y_n$

  (!) „$<$" $\xrightarrow{\lim}$ „$\le$" (d.h. $\forall n \ge n_0\ x_n < y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$)

- $\boxed{\text{Th 6}}$ (Der Sandwich Theorem für Folgen | Einschnittungstheorem | cleştelui)

  > Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit der Eigenschaft, dass $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \le y_n \le z_n, \forall n \ge n_0$.
  Haben die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert $x \in \overline{\mathbb{R}}$, dann hat auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert x

- $\boxed{\text{F7}}$

  > ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Folge, dann konvergiert auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null

  > $\boxed{\text{Bew}}$: Sei $a > 0$, so dass $|a_n| \le a, \forall n \in \mathbb{N} \mid |b_n| \ge 0 \Rightarrow |a_n| \cdot |b_n| \le a|b_n|, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le |a_n b_n| \le a|b_n|, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

  $0 \to 0$, $a|b_n| \to 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$ (gegen Th3 1 Vorl)

  $\overset{\text{Th6}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n| = 0 \overset{\boxed{\text{Th3}}\ 1\ \text{Vorl}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ $\square$

- **Bsp:**

  - $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n^3+2n^2}}_{\Downarrow 0} \cdot \underbrace{\sin(\sqrt{n}+5n^2)}_{\text{konv} \in [-1,1]} \overset{\text{Th7}}{=} 0$

  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Downarrow 0} \cdot \underbrace{(-1)^n}_{\text{besch}} = 0$

- $\boxed{\text{Th8}}$ (Grenzwerte und Beschränktheit)

  - Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten die Aussagen:

    1. ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist sie beschränkt
    2. ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann ist $(x_n)_{n\geq 0}$ nach oben beschränkt
    3. ist $\lim\limits_{n\to\infty} = -\infty$, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt

- $\boxed{\text{Th9}}$ (Grenzwerte und Monotonie) $\qquad X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

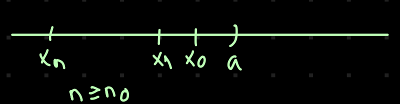
  - Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge und X die Menge gebildet aus allem Folgenglieder. Dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Grenzwert. Genauer gilt:

    1. ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf X$
    2. ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup X$

- $\boxed{\text{Bew}}$

1° Fall 1: X ist nach unten unbeschränkt $\Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach untem unbeschränkt $\Rightarrow \inf X = -\infty$

- Sei $U \in \mathcal{U}(-\infty) \underset{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists\, a \in \mathbb{R}$ mit $(-\infty, a) \subset U$. Dann X nach unten unbeschränkt $\Rightarrow \underline{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}}$ und $x_n < a$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist $\Rightarrow n \geq n_0$ ist $x_n \leq x_{n_0} < a \Rightarrow x_n \in (-\infty, a), \forall n \geq n_0 \Rightarrow \underline{x_n \in U, \forall n \geq n_0} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty = \inf X$

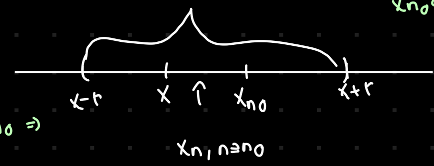


2° Fall 2:

- X ist nach untem beschränkt $\underset{\text{Infimumsprinzip (Th3, Vorl)}}{\Rightarrow} \inf X \in \mathbb{R}$

- Sei $x = \inf X$. Sei $U \in \mathcal{U}(x) \underset{\text{Def}}{\Rightarrow} \exists\, r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq (x-r, x+r)$. Aus $x < x+r \Rightarrow x+r \in US(x) \Rightarrow$ Def Infimum

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} < x + r$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist $\Rightarrow \forall n \geq n_0$ ist $x_n \leq x_{n_0} \underset{x_{n_0} < x+r}{\Rightarrow} x \underset{\substack{x \in US(x) \\ \text{inf}}}{\leq} x_n \,(< x+r), \forall n \geq n_0 \Rightarrow$



$\Rightarrow x_n \in B_r(x), \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

2° ↪ siehe 3 Übung □

· $\boxed{\text{Th}_{10}}$ (Weierstrass)

> Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent

· $\boxed{\text{Th}_{11}}$ (Stolz-Cesàro)

> Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng wachsende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

> ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\exists l := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \bar{\mathbb{R}}$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$

· $\boxed{\text{Folgerung } 12}$

> Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge. Dann gelten:

1° ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \bar{\mathbb{R}}$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} = a$

2° ist $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \bar{\mathbb{R}}$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = a$

3° ist $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \bar{\mathbb{R}}$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (Für Übung)

· <u>Anwendungen</u>

> Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ seien wie folgt definiert: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Dann gelten:

a) $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $0 < y_n - x_n < \dfrac{4}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergieren gegen die gleiche Zahl

> $\boxed{\text{Wiederholung}}$ (W)

- Die „> Bernoulli-Ungleichung" (siehe (H2) b) von der Aufwärmeübung)

  ist $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$ und $x\in\mathbb{R}^*$ mit $x\geq -1$, dann gilt:

  (1) $(1+x)^n > 1+nx$

a) Sei $n\in\mathbb{N}^*$

$$x_n < x_{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \frac{n}{n+1} < \left(\frac{(n+2)\,n}{(n+1)(n+1)}\right)^{n+1} \iff$$

$$\iff \frac{n}{n+1} < \left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \iff \frac{n}{n+1} < \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}.$$

Aus (1) (angewandt auf $x=-\frac{1}{(n+1)^2}\geq -1$ und $n+1\geq 2$) $\Rightarrow \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}$

$$\iff \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1-\frac{1}{n+1} \iff \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > \frac{n}{n+1} \iff x_{n+1}>x_n$$

Es gelten: $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1 \underset{\substack{\uparrow \\ 1<1+\frac{1}{n+1}}}{<} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = y_{n+1}$

Also ist $x_{n+1}<y_{n+1}$: $y_{n+1}<y_n \iff \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \iff 1+\frac{1}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \iff$

$$\iff 1+\frac{1}{n+1} < \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1} \iff 1+\frac{1}{n+1} < \left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1}$$

Aus (1) (angewandt auf $x=\frac{1}{n(n+2)}>0$ und $n+1\geq 2$) $\Rightarrow \left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n(n+2)} >$

$\underset{\substack{\uparrow \\ (n+1)^2>n(n+2)}}{>} 1+\frac{1}{n+1}$. Also ist $y_{n+1}<y_n$

b) Aus a) $\Rightarrow 0<y_n-x_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Außerdem gelten $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n} = \frac{x_n}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{<} \frac{y_n}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{\leq} \frac{y_1}{n} = \frac{4}{n}$,

also ist $y_n-x_n<\frac{4}{n}$

c) Aus a) $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend und $x_n<y_1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Aus a) $\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng fallend und $y_n>x_1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Nach Th 10 (Weierstrass) $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sind konvergent. Seien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ und

$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$

Aus b) und Th6 (Sandwich-Theorem) $\Rightarrow x = y$ $\square$

- Die eulersche Zahl e ist der gemeinsame Grenzwert der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
- Aus Th9 (Grenzwerte und Monotonie) $\Rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

- $\boxed{\text{Th 13}}$ (Grenzwerte mit e)

  > Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n > -1$ und $x_n \neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$. Falls $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$, dann ist $\boxed{\lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e}$

- Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{-2n+3} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}\right]^{\frac{-2n^2+3}{n^2+2n}} = e^{-2}$$

- Bemerkung:

  > Bei Grenzwerten der Form $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{y_n}$ kann der Trick mit e nur im Fall $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ angewandt werden. Zum Beispiel kann dieser Trick bei Bestimmen des folgenden Grenzwertes NICHT eingesetzt werden

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{n^2+2n}\right)^{\frac{n^2+2n}{n^2}} = 2$$

Reihen

- Aufgabe: Man untersuche die Monotonie, Beschränktheit und der existenz des Grenzwertes der folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, wobei $a_n = 1 + 2 + \dots + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ist

  Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Aus $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist nach untem beschränkt. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nach oben unbeschränkt ist. Sei $t \in \mathbb{R}^*_+$. Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $2t < k$. Nun ist

$$a_{2^{k+1}} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{2^2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{\underset{2^2+2^2}{2^3}}\right)}_{>\frac{2^2}{2^3}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{\underset{\Downarrow\, 2^k+2^k}{2^{k+1}}}\right)}_{>\frac{2^k}{2^{k+1}}} > \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2} > t \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$k+1 > 2t$$

nr termx cel maimic termen

$\Rightarrow a_{2^{k+1}} > t \Rightarrow (a_n)$ ist nach oben unbeschränkt $\overset{}{\underset{\boxed{\text{Thg}}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow$ Also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

streng wachsend, nach oben unbeschränkt, Grenzwert $\not\exists$, divergent !!!

KURS IV

· Reihen (Serii)

› Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Wir bilden einen neuen Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nach der Vorschrift/Def:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \dots x_n,$$ d.h. $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_3 = x_1 + x_2 + x_3$ usw. Die Glieder $s_n, n\in\mathbb{N}^*$, heißen Teilsummen (sume parțiale) der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

› Def: Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ der Teilsummen der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ wird Reihe genannt. Die Zahlen x_n, $n\in\mathbb{N}^*$, heißen Glieder der Reihe. Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ den Grenzwert $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \overline{\mathbb{R}}$ hat, so nennt man s die Summe der Reihe und sagt, dass die Reihe eine Summe hat.

Eine Reihe heißt konvergent, falls sie eine Summe $s\in\mathbb{R}$ hat. Eine Reihe, die nicht konvergent ist, nennt man divergent

› Bem: Falls die Indizierung (indexare) der Folge (x_n) mit einer anderen natürlichen Zahl beginnt als mit 1, dann beginnt die Indizierung des Teilsummen mit der gleichen Zahl

› Bezeichnung:

Folge	Reihe	Summe der Reihe (falls sie ∃)
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum\limits_{n\geq 0} x_n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$	$\sum\limits_{n\geq 1} x_n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$
$(x_n)_{n\geq k}$ $(k\in\mathbb{N})$	$\sum\limits_{n\geq k} x_n$	$\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n$

> Bsp:

1) Die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

Aus der 3 Vorlesung $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+ \dots \frac{1}{n}\right) = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow$ die harmonische Reihe hat die Summe unendlich (∞), also ist sie konvergent

2) Die verallgemeinste harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest ist

Diese Reihe ist
- konvergent, falls $\alpha > 1$
- divergent, falls $\alpha \leq 1$

?

3) Die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n$, wobei $q \in \mathbb{R}^*$ fest ist

Die Teilsummen sind $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \underset{\text{falls } q \neq 1}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$?

1 Fall: $q \in (-1,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$

2. Fall: $q = 1 \Rightarrow s_n = n+1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty \Rightarrow$ die Reihe ist divergent

3. Fall: $q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=\infty}^{\infty} q^n = \infty \Rightarrow$ die Reihe ist divergent

4. Fall: $q \leq -1 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to q} q^{n+1} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} s_n \Rightarrow$ die Reihe hat keine Summe, also ist divergent

Also die Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n$ ist konvergent $\Leftrightarrow q \in (-1,1)$ (d.h $|q| < 1$)

4) <u>Die e Reihe</u> $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ (wobei $0! := 1$)

Es ist $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Man kann zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} s_n = e$, also ist

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e}$$

5) <u>Teleskopreihen</u> $\sum_{n\geq k} x_n$ eine Reihe mit der Eigenschaft, dass $\exists$ eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$,

sodass $x_n = a_n - a_{n+1}, \forall n \geq k$

Angenommen, $\exists\, l = \lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$, dann gilt $\sum_{n=k}^{\infty} x_n = a_k - l$?

<u>Beweis:</u> Sei $(s_n)_{n\geq k}$ die Folge der Teilsummen der Folge $(x_n)_{n\geq k}$. Für $n \geq k$ ist $s_n = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n = (a_k - \cancel{a_{k+1}}) + (\cancel{a_{k+1}} - a_{k+2}) + \ldots + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_k - a_{n+1} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n =$

$= \lim_{n\to\infty} (a_k - a_{n+1}) = a_k - l$ $\square$

- <u>Bem:</u> Falls $x_n = a_{n+1} - a_n, \forall n \geq k$, dann ist $\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} x_n = l - a_k}$

- <u>Beispiel</u>: Man bestimme die Summe der Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

Lösung: $\underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{= x_n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{= a_n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Aus 5) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1 -$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$

> $\boxed{S1}$ (Rechenregel für konvergente Reihen)

$\sum_{n\geq 0} x_n$ und $\sum_{n\geq 0} y_n$ konvergente Reihen. Dann gelten:

1° Die Reihe $\sum_{n\geq 0}(x_n+y_n)$ ist konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$

2° Für alle $t\in\mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n\geq 0} t x_n$ konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} t x_n = t\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

> $\boxed{S2}$

- ist die Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$ konvergent, dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

konv

Bew: sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Aus der Voraussetzung $\Rightarrow \exists s = \lim_{n\to\infty} s_n \in\mathbb{R}$. Andererseits ist $x_n =$

?

?

$= s_n - s_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$ $\square$

$x_0+x_1+\dots+x_{n-1}+x_n$; $x_0+x_1+\dots+x_{n-1}$

> Bem S2:

1) $\boxed{S2} \Rightarrow$ Falls $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ oder $\nexists \lim_{n\to\infty} x_n$, dann ist $\sum_{n\geq 0} x_n$ divergent

Bsp: $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist divergent, weil $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$?

$\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ ist divergent, weil $\nexists \lim_{n\to\infty}(-1)^n$

2) Die Umkehrung von $\boxed{S2}$ stimmt nicht. (Falls $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ ist konv)

Bsp: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ ist divergent, aber $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$!!!

> **Def:** Die Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$ nennt man: mit nichtnegativen Glieder, falls $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$; mit positiven Glieder, falls $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

> $\boxed{S_3}$

- Jede Reihe mit nichtnegativen Gliedern hat eine Summe

Bew: Sei $\sum_{n\geq 0} x_n$ eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern, d.h. $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, und sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, n \in \mathbb{N}$.

?? ?

Dann ist $s_{n+1} - s_n = x_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wachsend $\xRightarrow[\text{Th 3 Vorl}]{} \exists \lim_{n\to\infty} s_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ hat eine Summe $\square$

Bem: $\boxed{S_3}$ $\Rightarrow$ Jede divergente Reihe mit nicht negativen Glieder die Summ ∞ hat

Bsp: Für $\alpha \leq 1$ ist $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty}$ verallgemeinerte (Bsp 3)

> **Das Bestimmen der Summe von Reihen**

- **Bem:** Beim Bestimmen der Summe einer Reihe ist es sehr wichtig zu beachten, wo die Induzierung dieser Reihe beginnt, weil im Allgemeinen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \neq \sum_{n=k}^{\infty} x_n$ für $k \in \mathbb{N}^*$ ist. Es gilt:

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \Downarrow s_n = x_0 + x_1 + \dots x_n, n\geq 0$

$\sum_{n=k}^{\infty} x_n \rightarrow \bar{s}_n = x_k + x_{k+1} + \dots + x_n, n \geq k$

Für $n \geq k$: $\bar{s}_n = s_n - (x_0 + \dots + x_{k-1})$?

hat die Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$ eine Summe, dann hat auch die Reihe $\sum_{n\geq k} x_n$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ eine Summe und es gilt

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1})} \quad (1)$$

Bsp: 1) Sei $q \in (-1,1) \setminus \{0\}$. Man bestimme die Summe der Reihe $\sum_{n\geq k} q^n$, mit $k \in \mathbb{N}^*$ fest

Lösung: $\sum_{n=k}^{\infty} q^n \underset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} q^n - (1+q+q^{k-1}) = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^k}{1-q} = \frac{q^k}{1-q}$. Also

ist $\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}}$

2) Man bestimme die Summe der Reihe $\sum_{n\geq 2} \frac{(-3)^n+1}{5^{n-2}}$

Lösung: $\sum_{n\geq 2}^{\infty} \frac{(-3)^n+1}{5^{n-2}} = \sum_{n\geq 2}^{\infty} \left(\frac{(-3)^n}{5^{n-2}} + \frac{1}{5^{n-2}} \right)$

$$\sum_{n\geq 2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5^{n-2}} = \sum_{n\geq 2}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n \cdot 25 = 25 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 25 \cdot \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{1+\frac{3}{5}} = \frac{45}{8}$$

geometrische Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{5^{n-2}} \underset{n-2=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{5^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

$q = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n+1}{5^{n-2}} = \frac{45}{8} + \frac{5}{4} = \frac{55}{8}$$

$\boxed{S1}$ 1^0

· Bem:

1) Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist eine notwendige Konvergenzbedingung für die Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ folgt laut $\boxed{S2}$ aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$). Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist aber keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 0} x_n$

2) Bei der Untersuchung der Konvergenz / Divergenz einer Reihe ist es nicht wichtig, mit welchem Index die „Summation" beginnt. Es gilt für $k \in \mathbb{N}$: die Reihe $\sum_{n \geq k} x_n$ ist konvergent gdw. $\Leftrightarrow \forall p \geq k$ ist die Reihe $\sum_{n \geq p} x_n$ konvergent

↳ aus diesem Grund werden wir oft die Reihen mit $\sum x_n$ statt $\sum_{n \geq k} x_n$ bezeichnen, wenn wir die Konvergenz/Divergenz der Reihen untersuchen; für die Folge $(x_n)_{n \geq k}$ werden wir einfach (x_n) schreiben

- Def: Über zwei Reihen $\sum x_n$ und $\sum y_n$ sagt man, dass sie das gleiche Konvergenzverhalten haben, wenn sie entweder beide konvergent oder beide divergent sind.
- Def: Seien $\sum x_n$ und $\sum y_n$ Reihen mit nichtnegativen Glieder. Man sagt, dass die Reihe $\sum y_n$ eine Majorante für die Reihe $\sum x_n$ ist (oder, dass $\sum x_n$ eine Minorante für $\sum y_n$ ist), in Zeichen $\sum x_n \ll \sum y_n$, falls $\exists$ $c > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \leq c\, y_n$, $\forall n \geq n_0$, ist

  Gilt sowohl $\sum x_n \ll \sum y_n$ als auch $\sum y_n \ll \sum x_n$, dann schreibt man $\sum x_n \sim \sum y_n$ und spricht von äquivalenten Reihen

- Bem:

  $-\sum x_n \sim \sum y_n \iff \exists\, c, d > 0, \exists\, n_0 \geq n$, so dass $d \cdot y_n \ll x_n \ll c \cdot y_n, \forall n \geq n_0$

> $\boxed{Th\ 4}$ (Das erste Vergleichskriterium)

- Sind $\sum x_n$ und $\sum y_n$ Reihen mit nichtnegativen Glieder und ist $\sum x_n \ll \sum y_n$, dann gelten:

  1° Ist $\sum y_n$ konvergent, dann ist auch $\sum x_n$ konvergent

  2° Ist $\sum x^n$ divergent, dann ist auch $\sum y_n$ divergent

- Bew: O.B.d.A (fără a restrânge generalitatea) nehmen wir an, dass $x_n \leq c \cdot y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, wobei $c > 0$ ist.

  Wir bezeichnen mit s_n die Teilsummen von $\sum x_n$ und mit t_n die Teilsummen von $\sum y_n$.

  Dann ist $0 \leq s_n \leq c \cdot t_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

  $$\left(s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} c \cdot y_n = c \cdot \sum_{k=0}^{n} y_k = c \cdot t_n \right)$$

Aus $\boxed{S3} \Rightarrow \exists\, s = \lim_{n\to\infty} s_n$, und $\exists\, t := \lim_{n\to\infty} t_n$

Aus dem Vergleichstheorem für Folgen (s. $\boxed{Th5}$ 3 Vorl) $\underset{(2)}{\Rightarrow}$ $0 \le s \le c \cdot t$ (3)

1° Da $\sum y_n$ konvergent ist $\Rightarrow \overset{t_n \text{ konvergiert}}{t \in \mathbb{R}} \underset{(3)}{\Longrightarrow} s \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum x_n$ ist konvergent

2° Da $\sum x_n$ divergent ist $\underset{\boxed{S3}}{\Longrightarrow} s = \infty \underset{(3)}{\Rightarrow} t = \infty \Rightarrow$ die Reihe $\sum y_n$ ist divergent $\square$

· <u>Bsp:</u> Sei $\alpha \le 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ ist $n^\alpha \le n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ ist $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \ll \sum \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow$ $\sum \frac{1}{n}$ ist div, $\boxed{Th4}$ 2°

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ ist divergent

04.11.2022

KURS V

Reihen

> $\boxed{\text{Fs}}$

- Sind die Reihen $\sum x_n$ und $\sum y_n$ mit nichtnegativen Glieder äquivalent (d.h. $\sum x_n \sim \sum y_n$), dann haben sie das gleiche Konvergenzverhalten

> $\boxed{\text{Bem}}$

- Haben zwei Reihen mit nichtnegativen Gliedern das gleiche Konvergenzverhalten, dann mussen sie nicht unbedingt äquivalent sein

> $\boxed{\text{Th6}}$ (Das zweite Vergleichskriterium)

- Sind $\sum x_n$ und $\sum y_n$ mit positiven Gliedern (d.h. $x_n > 0$ und $y_n > 0$ für alle n) und $\exists\ l := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, dann gelten

  1° ist $l < \infty$, dann ist $\sum x_n \ll \sum y_n$

  2° ist $l > 0$, dann ist $\sum y_n \ll \sum x_n$

  3° ist $0 < l < \infty$, dann ist $\sum x_n \sim \sum y_n$

  - Bsp: $\sum \underbrace{\frac{n^2}{n^5+2n^3+1}}_{x_n}$ $\quad y_n = \frac{1}{n^\alpha}$, für $\alpha \in \mathbb{R}$ geeignet (verallgem. harm. Reihe)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot n^\alpha}{n^5+2n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\, n^\alpha}{n^{\cancel{5}\,3}\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^5}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^5}\right)} \underset{\boxed{\alpha=3}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^5}} = 1$$

$$\underset{\boxed{\text{Th6}}\ 3°}{\Longrightarrow} \sum \frac{n^2}{n^5+2n^3+1} \sim \underbrace{\sum \frac{1}{n^3}}_{\text{verallgem. h. Reihe mit } \alpha = 3 > 1 \Rightarrow \text{konv}} \underset{\boxed{\text{Th5}}}{\Longrightarrow} \sum \frac{n^2}{n^5+2n^3+1} \text{ ist konv}$$

$\boxed{\text{Th7}}$ (Das Wurzelkriterium → oder Cauchy)

- Sei $\sum x_n$ eine Reihe mit nichtnegativen Glieder, so dass $\exists\ l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten:

  1° ist $l < 1$, dann ist $\sum x_n$ konvergent

  2° ist $l > 1$, dann ist $\sum x_n$ divergent

$\boxed{\text{Bem}}$: ist $l = 1$, dann kann man keine Entscheidung treffen (Die Reihe kann konvergent, aber auch divergent sein). In diesem Fall muss die Reihe mit anderem Methoden untersuchen werden

Bsp: $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ist divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$

$\boxed{\text{Th8}}$ (Das Quotientkriterium – oder D'Alembert)

- Sei $\sum x_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern und sei $D_n : \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

- Falls $\exists\ D : \lim\limits_{n\to\infty} D_n \in \overline{\mathbb{R}}$, dann gelten:

  1° ist $D < 1$, dann ist $\sum x_n$ konv

  2° ist $D > 1$, dann ist $\sum x_n$ div

  Bem: Im Fall $D = 1$ kann man über das Konvergenzverhalten der Reihe nichts aussagen

$\boxed{\text{Th9}}$ (Das Kriterium von Raabe)

- Sei $\sum x_n$ und Reihe mit positiven Gliedern und sei $R_n := n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$

- Falls $\exists R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n \in \overline{\mathbb{R}}$, dann gelten:

  1° ist $R > 1$, dann ist $\sum x_n$ konvergent

  2° ist $R < 1$, dann ist $\sum x_n$ divergent

  Bem: Im Fall $R = 1$ kann man über das Konvergenzverhalten der Reihe nichts aussagen

> **Def:** Die Reihe $\sum x_n$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum |x_n|$ konvergent ist

- **Bsp:**
  ist $q \in (-1,1)$, $q \neq 0$, dann ist die geometrische Reihe $\sum q^n$ absolut konvergent, weil die Reihe $\sum |q^n| = \sum |q|^n$ konv. ist
  $\uparrow$ geom. Reihe mit $|q| \in (0,1)$

> $\boxed{S10}$

- Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent

> $\boxed{\text{Bem}}$: Die Umkehrung von $\boxed{S10}$ gilt nicht: es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind

> $\boxed{\text{Th11}}$ (Das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

- ist (x_n) eine fallende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, dann ist die alternierende Reihe $\sum (-1)^n x_n$ (oder $\sum (-1)^{n+1} x_n$) konvergent

- **Bsp:** Nach $\boxed{\text{Th11}}$ $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist konv, weil $(x_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ fallend ist und den Grenzwert 0 hat. Die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist nicht absolut konvergent, weil die Reihe $\sum \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \underbrace{\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}}_{\text{harmonische Reihe}}$ divergent ist

Bsp: Man untersuche die Konvergenz und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, wobei $x \in \overline{\mathbb{R}}$ fest ist

Lösung:
Für die absolute Konvergenz $\sum\limits_{n\geq 0} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$. Wir wenden die Wurzelkriterium an: $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \underset{\uparrow}{=} 0 < 1 \underset{\boxed{\text{Th7}}\,(\text{Wurzelkrit})}{\Rightarrow} \sum\limits_{n\geq 0} \left|\frac{x^n}{n!}\right|$ ist konv

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ (3. Üb)

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ ist absolut konvergent } \underset{\boxed{S10}}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ ist konvergent}$$

<u>Bem:</u> Für $x=1$ erhalt man $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ mit Summe e. Wir werden zeigen, dass

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften reellwertiger Funktionen einer Variabeln

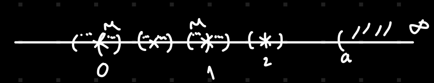
> Der Grenzwert einer Funktionen in einem Punkt, Stetigkeit (continuitate), Differenzierbarkeit (derivabilitate)

> **Def:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ ist ein Häufungspunkt von M, wenn $\forall U \in \mathcal{U}(\alpha)$ gilt $(U \setminus \{\alpha\}) \cap M \neq \emptyset$ (Punkte in M verschiedene). Die Menge gebildet aus allem Häufungspunkten von M wird mit M' bezeichnet

> $\boxed{\text{Bem:}}$

1) $M' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

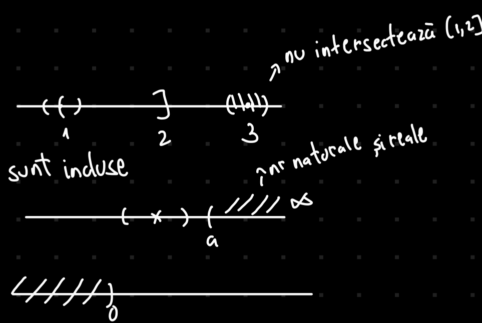
2) Ein Häufungspunkt von M muss nicht unbedingt ein Element von M sein



Bsp:

M	M'
$(0,1)$	$[0,1]$
$(1,2] \cup \{3\}$	$[1,2]$
$\mathbb{N}$	$\{\infty\}$
$\mathbb{R}^*$	$\overline{\mathbb{R}}$
$\emptyset$	$\emptyset$

↗ și $-\infty$ și ∞ sunt incluse



> **Def:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ (Teilmenge). Ein Punkt $x \in M$, der kein Häufungspunkt von M ist, wird isolierten Punkt von M genannt.

> **Bem:** $x \in M$ ist ein isolierter Punkt von $M \iff \exists U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap M = \{x\}$

> **Bsp:** Jede natürliche Zahl ist ein isoliertes Punkt von $\mathbb{N}$

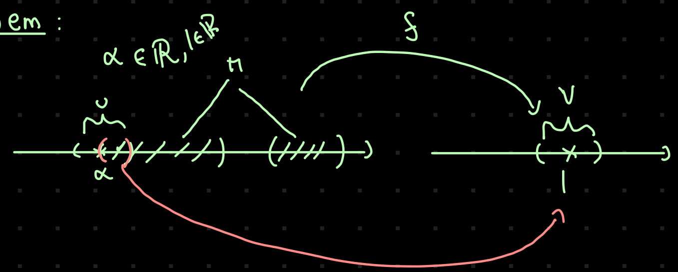
Ab jetzt: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$

> **Def:** Seien $f: M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in M'$ und $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Man sagt, dass, dass l der Grenzwert von f in (bei) α ist, wenn $\forall V \in \mathcal{U}(l)\ \exists U \in \mathcal{U}(\alpha)$, so dass $\forall x \in (U \setminus \{\alpha\}) \cap M$ gilt $f(x) \in V$

> **Bezeichung:** $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$

Man sagt, dass f einen Grenzwert in α hat, falls $\exists\, l \in \overline{\mathbb{R}}$, so dass $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$

> Bem:



> $\boxed{Th1}$ (Eindutigkeit des Grenzwertes von Funktionen)

- Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M'$. Hat f einen Grenzwert in α, dann ist dieser eindeutig bestimmt

> $\boxed{Th2}$ (Die Charakterisierung für den Grenzwert von Funktionen mit Hilfe von Folgen)

- Seien $f: M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in M'$ und $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind äquivalent

  $1°$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$

  $2°$ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M \setminus \{\alpha\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} = \alpha$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

Beispiel: Man untersuche die Existenz des Grenzwertes der Dirichlet-Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$ in allem Häufungspunkten der Definitionsbereichs

Lösung

$(-\infty, \infty$ Häufspunkt$)$

$$\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$$

Bem: Aus der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ folgt, dass jede reelle Zahl der Grenzwert sowohl einer streng wachsende Folge rationaler Zahl als auch einer streng fallenden Folge irrationaler Zahlen ist (s A9 von 1 Übungsblatt)

1 Fall: $\alpha \in \mathbb{R} \underset{\text{Bem}}{\Longrightarrow} \exists$ Folgen (x_n) rationaler Zahlen und (y_n) irrationaler Zahlen in $\mathbb{R}\setminus\{x\}$

mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$. Andererseits ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 0 \underset{\boxed{Th2}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow f$ hat in α keinen Grenzwert

2. Fall $\alpha = \infty$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} (\overset{\text{irrationale Zahlen}}{\overset{\uparrow}{n+\sqrt{2}}}) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+\sqrt{2}) = \underset{\boxed{Th_2}}{\underset{\uparrow}{0}} \Rightarrow f$ hat keinen Grenzwert bei ∞.

3. Fall $\alpha = -\infty$. Analog zum 2. Fall $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $\square$

> $\boxed{Th_3}$ (Vergleichstheorem für Funktionen)

- Seien $f, g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in M'$, so dass $\exists U \in \mathcal{U}(\alpha)$ mit $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (U\setminus\{\alpha\}) \cap M$
- $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\exists \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, dann ist $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$

> $\boxed{\text{Bem}}$: ist $f(x) < g(x)$, $\forall x \in (U\setminus\{\alpha\}) \cap M \not\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) < \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$

Bsp: $\overset{\to f(x)}{\dfrac{x}{x+1}} < \overset{\to g(x)}{1}$, $\forall x > 0$, aber $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

> $\boxed{Th_4}$ (Das Sandwichtheorem für Funktionen)

- Seien f, g, h $M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M'$, so dass $\exists U \in \mathcal{U}(\alpha)$ mit $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (U\setminus\{\alpha\}) \cap M$.
- Falls f und g in α den gleichen Grenzwert $l \in \bar{\mathbb{R}}$ haben, dann hat auch h den Grenzwert l in α

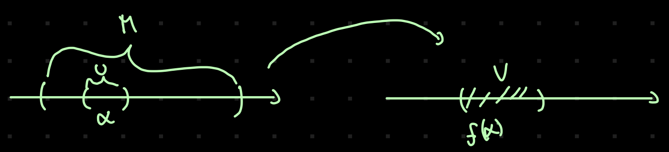
KURS $\underline{\text{VI}}$

11.10.2022

- Eigenschaften reelwertiger Funktionen einer Variabeln

> <u>Def</u>: Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M$. Die Funktion <u>f ist stetig in α</u>, falls $\forall V \in \mathcal{U}(f(\alpha))\ \exists U \in \mathcal{U}(\alpha)$ mit $\forall x \in U \cap M$ gilt $f(x) \in V$. Ist f nicht stetig in α, so nennt man f <u>unstetig in α</u> und α eine <u>Unstetigkeitsstelle von f</u>
>
> Ist f stetig in jedem Punkt von D, wobei $\emptyset \neq D \subseteq M$, dann sagt man, dass <u>f stetig auf D</u> ist. Ist f stetig auf M, dann sagt man einfach, dass f stetig ist

> <u>Bem</u>:



> $\boxed{\text{Th 5}}$ (Charakterisierungen für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt)

- Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in M$. Dann sind äquivalent:

  1° f ist stetig in α

  2° Für jede Folge $(x_n)_m$ im M, die gegen α konvergent, konvergent $(f(x_n))_m$ gegen $f(x)$

  3° Entweder (ist α ein isolierter Punkt von M) oder ($\alpha \in M'$, $\exists \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$)

> <u>Bem</u>: 2° zeigt, dass $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n)}$, falls f in $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ stetig ist

- <u>Bsp</u>:

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sin stetig} \\ \text{in } 0}}{=} \sin\left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3}\right) = \sin 0 = 0$$

> <u>Bem</u>:

1) Summen, Produkte und Quadraten (falls definiert) stetiger Funktionen sind stetig
2) Die Verknupfung (compunere) von zwei stetigen Funktionen ist stetig
3) Die „elementaren Funktionen" (Potenzfunktionen, Exponentialfunkt., Logarithmische Funktionen, Winkelfkt (trig func)) sind auf ihrem maximalen Definitionsbereichen stetig

› **Def:**

- Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $a \in M \cap M'$. Die Funktion f hat eine Ableitung's (deriv) in a, falls $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \overline{\mathbb{R}}$. Diese Grenzwert wird mit $f'(x)$ bezeichnet und die Ableitung von f in a genannt. Falls f eine Ableitung in a hat und diese Ableitung eine reelle Zahl ist, dann nennt man f differenzierbar in a.
- ist $\emptyset \neq D \subseteq M$, so heißt f differenzierbar auf D, falls f in einem Punkt von D differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion $f': D \to \mathbb{R}$, $x \in D \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$, die Ableitung von f auf D
- ist f differenzierbar auf M, so sagt man einfach, dass f differenzierbar ist, und nennt die Ableitung von f auf M einfach die Ableitung von f

› **Def:**

- Die Ableitungen höherer Ordnung einer Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ werden rekursiv wie folgt definiert:
  - $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$,
  - sei $n \in \mathbb{N}^*$, so dass die erste Ableitung $f^{(n)}: M \to \mathbb{R}$ von f auf M umgekehrt werden ist, ist $f^{(n)}: M \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann nennt man $f^{(n+1)} = (f^{(n)})': M \to \mathbb{R}$ die $n+1$-te Ableitung von f und sagt, dass f $(n+1)$-mal differenzierbar
  - Bez: $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$

› Anwendungen der Diferenzierbarkeit: Aproximationen von Funktionen mit Hilfe von Polinomfunktionen

- **Bem:** sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(x) = a + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ eine Polynomfunktion n-ten Grades mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n \cdot x^{n-1}$$

$$P''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \ldots (n-1) n\, a_n x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(x) = n!\, a_n$$

$$\Rightarrow P(0) = a_0$$

$$P'(0) = a_1$$

$$P''(0) = 2a_2,$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

$\rightarrow$ allgemein $P^{(k)}(0) = k!\, a_k,\ \forall k \in \{0, \dots, n\} \Rightarrow a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!},\ \forall k \in \{0, \dots, n\} \Rightarrow (1)\ P(x) = P(0) + \frac{P(0)}{1!} x + \dots +$

$\frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n,\ \forall x \in \mathbb{R}$

- Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Gesucht werden $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ mit $P(x) = A_0 + A_1 (x-x_0) + \dots + A_n (x-x_0)^n$

Sei $y = x - x_0 \Rightarrow x = y + x_0 \Rightarrow P(x) = P(y + x_0) = A_0 + A_1 y + \dots + A_n y^n$

Sei $Q(y) = A_0 + A_1 y + \dots + A_n y^n \ (= P(y + x_0) = P(x))$.

Nach (1) $\Rightarrow Q(y) = Q(0) + \frac{Q'(0)}{1!} y + \dots + \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} y^n$

Aus $Q(y) = P(y + x_0) \Longrightarrow Q^{(k)}(y) = P^{(k)}(y + x_0),\ \forall k \in \{0, \dots, n\},\ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(x_0),\ \forall k \in \{0, \dots, n\} \Rightarrow$

$$\boxed{P(x) = P(x_0) + \frac{P(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,\ \forall x \in \mathbb{R}} \quad (2)$$

Ab jetzt: $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein nichtentartetes (nedegenerat: are cel puțin două pct) Intervall, d.h. ein Intervall das wenigstens zwei Punkte enthält

> Def:

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Die Polynomfunktion

$$T_n(x, x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ist <u>das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0</u>

x: Argument der Polynomfunktion

x_0: der feste Punkt, von dem man ausgeht

> Bem: Ist $x \in I$, dann hängt es von dem <u>Restglied</u> $R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$ ab, wie gut $T_n(x, x_0)$ den Wert $f(x)$ approximiert

> Beispiel

1) Die Taylorpolynome der Exponentialfunktion an der Stelle $x_0 = 0$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

Da $(e^x)' = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}$??? . Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann $T_n(x, 0) = 1 + \frac{1}{1!} x + \dots + \frac{1}{n!} x^n =$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

> $\boxed{\text{Th6}}$ (Die Taylorsche Formel)

- Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$, $n \in \mathbb{N}$ und $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a,b]$ eine stetige Ableitung n-ter Ordnung und auf (a,b) $n+1$-mal differenzierbar ist. Dann gibt es für alle $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ einen Punkt c, der sich echt zwischen x und x_0 befindet (d.h. zwischen x und x_0 sowie verschieden von x und x_0) so dass

$$(*)\quad R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

also ist

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied}}}$$

↳ das ist die n-te Taylorsche Formel

> Bem: ist f auf $[a,b]$ $n+1$-mal differenzierbar, dann mus man in $\boxed{\text{Th6}}$ nicht verlangen, dass $x \neq x_0$. Dann gibt es $\forall x, x_0 \in [a,b]$ einen Punkt c zwischen x und x_0, so dass $(*)$ gilt. (Ist $x = x_0$, dann setzt man $c = x_0$)

$\boxed{\text{Beispiel 1}}$: Die Taylorsche Formel für die Exponentialfunktion

Seien $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und x_0 wie in Bsp 1. Sei $n \in \mathbb{N}$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach $\boxed{\text{Th6}}$ $\Longrightarrow$ $\exists c$ zwischen x und 0 mit der Eigenschaft $f(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n}_{T_n(x,0)} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x,0)}$

↑ man nehme $a,b \in \mathbb{R}$, sodass $x, 0 \in [a,b]$

> Def:

- Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Ist $x_0 \in I$ gegeben, so nennt man die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

die Taylor-Reihe von f an der Stelle x_0

die Teilsummen dieser Reihe sind die Taylorpolynome der Funktion f an der Stelle x_0

Beispiel 3: Die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion an der Stelle, $x_0 = 0$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Aus der 5. Vorlesung $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ konvergent ist

Insbesonder ist also $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \ \forall x\in\mathbb{R}}$ (3)

› $\boxed{\text{Th 7}}$ (Taylor)

- Seien $f: I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$.

  Ist $x \in I$, dann gilt

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \quad (4)$$

dann und nur dann, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$ ist.

› Bem: $(4) \Longleftrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x,x_0)$

› Def:

dezvoltare

- Falls (4) für alle $x \in I$ gilt, so sagt man, dass f eine Taylorentwicklung (auf I) an der Stelle x_0 hat. Die Gleichheit (4) bezeichnet man als die Taylorentwicklung von f an der Stelle x_0.

› Bsp: Die Taylorentwicklung (auf $\mathbb{R}$) der Exponentialfunktion an der Stelle $x_0 = 0$. Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion und $x \in \mathbb{R}$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus Bsp 2, dass $\exists c$ zwischen 0 und x mit $R_n(x,0) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

$$\Rightarrow |R_n(x,0)| = \frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq |R_n(x,0)| \leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |R_n(x,0)| = 0 \Rightarrow$$

- $c \leq |c| \leq |x|$
- Exponentialfunktion ist wachsend

0

$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (wegen (3))

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0 \overset{\boxed{\text{Th 7}}}{\Longrightarrow} \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

- Wir setzen als bekannt voraus:
  - die Ableitungen der elementaren Funktionen
  - die Differentationsregeln
  - Die Produktregel $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ kann wie folgt verallgemeinert werden:

- $\boxed{\text{Th8}}$ (Die Leibnitsche Regel)
  - Seien I ein nichtentartetes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ sind $f,g: I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen.

    Daraus gilt:

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x), \ \forall x \in I}$$

- <u>Bem:</u> Es sei daran erinnert, dass man die Binomialkoeffizienten mit Hilfe des Pascalsche Dreieck bestimmen kann

1

1 1 $n=1$

1 2 1 $n=2$

1 3 3 1 $n=3$

1 4 6 4 1 $n=4$

KURS VII

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

- Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \cdot \text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}\}$. Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden <u>Vektoren</u> oder <u>Punkten</u> genannt. Ist $x \in \mathbb{R}^n$, dann schreibt man $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und nennt $x_1, \ldots, x_n$ die <u>Koordinaten</u> des Vektors x.

- <u>Bem:</u> Andere Bezeichnungen:

n	Koordinaten von Vektoren in $\mathbb{R}^n$
2	(x, y)
3	(x, y, z)

- Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (oder der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$) zeichnet sich durch zwei Operationen aus:
  - die Addition: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
  - die Skalarmultiplikation $\underset{\in \mathbb{R}}{\alpha} (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

  , die bestimmte Bedingungen (Axiome) erfüllen

- <u>Bezeichnungen:</u>
  - $0_n = (0, \ldots, 0)$ ↳ Nullvektor
  - $e^1, \ldots, e^n$ – die Vektoren der kanonischen Basis, wobei $e^1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots \; e^j = (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow\, j\text{-te Koordinate}}{1}, 0, \ldots, 0), \ldots, e^n = (0, \ldots, 0, \underset{\downarrow\, n\text{-te Koordinate}}{1})$
  - $x = (-1)x, \forall x \in \mathbb{R}^n \; (\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow -x = (-x_1, \ldots, -x_n))$

- <u>Bem:</u> Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $\boxed{x = x_1 e^1 + \ldots + x_n e^n}$, und

$$\begin{aligned} x_1 e^1 &= (x_1, 0, \ldots, 0) \\ x e^2 &= (0, x_2, \ldots, 0) \quad + \\ &\vdots \\ x_n e^n &= (0, 0, \ldots, 0, x_n) \\ \hline x_1 e^1 + \ldots + x_n e^n &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

- Das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$: Sind $x=(x_1,\dots,x_n)$ und $y=(y_1,\dots,y_n)$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so nennt man die reelle Zahl

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1+x_2\cdot y_2+\dots+x_ny_n,$$

das <u>Skalarprodukt der Vektoren x und y</u>.

- Die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$: Ist $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, so nennt man die reelle Zahl $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{(x_1)^2+\dots+(x_n)^2}$ die <u>euklidische Norm des Vektors x</u>

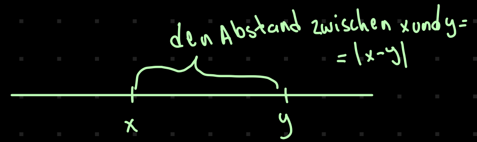
- Der euklidische Abstand: Sind $x,y\in\mathbb{R}^n$, dann ist $\|x-y\|$ <u>der euklidische Abstand zwischen x und y</u>

- <u>Def:</u> Den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem euklidische Abstand, nennt man den <u>euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$</u>

- <u>Bem:</u>

  1) ist $x\in\mathbb{R}^n$, dann ist $\|x\|$ der euklidische Abstand zwischen x und 0_n

  2) Ist $n=1$, dann ist $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$. In diesem Fall gilt für $x,y\in\mathbb{R}$: $\langle x,y\rangle = x\cdot y$

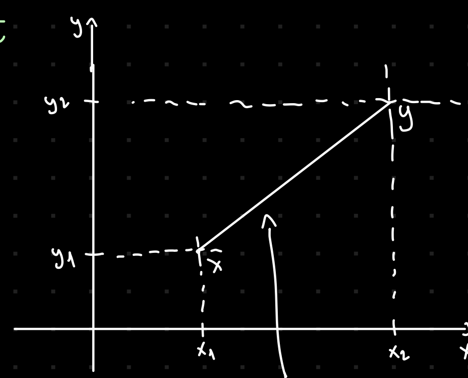


$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\|x-y\| = |x-y|$$

  3) ist $n=2$, dann kann $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit der Ebene identifizieren. Seien $x=(x_1,y_1)$, $y=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|x-y\| = \|(x_1-x_2,\,y_1-y_2)\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



die Strecke, deren Endpunkte (x_1,y_1) und (x_2,y_2) sind, hat die Länge $\|x-y\|$ (= der euklidische Abstand zwischen den Punkten (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$)

- $\boxed{S1}$ (Eigenschaften des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^n$)

  1) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$

  2) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle,\ \forall \alpha\in\mathbb{R},\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n$

  3) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n$

4) $\langle x, x\rangle \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

5) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_n$

> $\boxed{S_2}$ (Eigenschaften der euklidischen Norm im $\mathbb{R}^n$)

1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

3) $\|x\| = 0 \iff x = 0_n$

> <u>Def:</u> Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann ist $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-x\| < r\}$ <u>den offene Kugel mit Zentrum x und Radius r</u>,

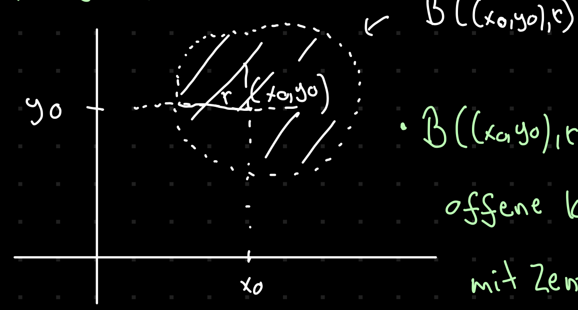
$\overline{B}(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-x\| \leq r\}$ <u>der abgeschlossene Kugel mit Zentrum x und Radius r</u>

> <u>Bem:</u>

1) Sind $n=1$, $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, dann ist $B(x,r) = B_r(x) = (x-r, x+r)$ und $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$

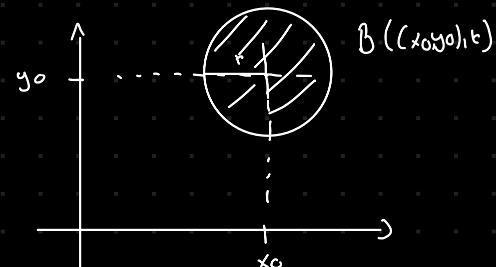
$\uparrow$ r-Umgebung von x

2) Es seien $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$



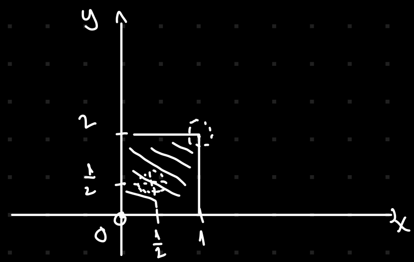
• $B((x_0,y_0),r)$ ist die offene Kreisscheibe mit Zentrum (x_0,y_0) und Radius r (der Kreis selbst wird ausgeschlossen)

• $\overline{B}((x_0,y_0),r)$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe mit Zentrum (x_0,y_0) und Radius r (der Kreis gehört dieser Menge an)



> <u>Def:</u> Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nennt man eine <u>Umgebung von x</u>, falls $\exists r > 0$ mit $B(x,r) \subseteq U$. Man bezeichnet mit $\mathcal{U}(x)$ die Menge gebildet aus allen Umgebungen von x

Bsp: 1) $n=2$, $M=[0,1]\times[0,2]\setminus\{0_2\}$

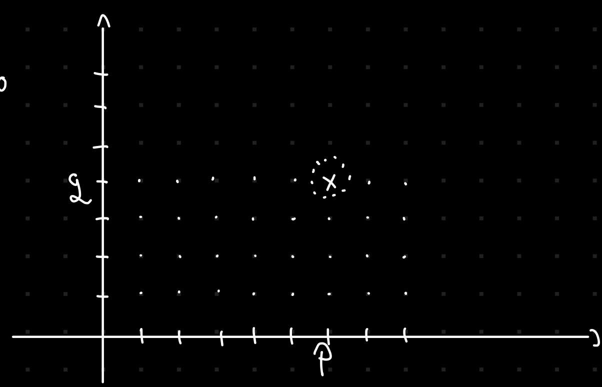


- $M \notin \mathcal{U}(0_2)$, weil $0_2 \notin M$
- $M \notin \mathcal{U}((1,2))$, weil $\forall r>0$ $B((1,2),r) \not\subseteq M$
- $M \in \mathcal{U}((\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$, weil $B((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\frac{1}{2}) \subseteq M$

2) $n=2$, $M=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(p,q)\in M$

$M \notin \mathcal{U}((p,q))$, weil $\forall r>0$

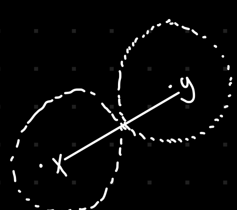
$B((p,q),r) \not\subseteq M$



$\boxed{\text{Lemma 3}}$

Seien $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x\neq y$. Dann $\exists\, U\in\mathcal{U}(x)\ \exists\, V\in\mathcal{U}(y)$ mit $U\cap V=\emptyset$

Bew: im $\mathbb{R}^2$



Im Allgemeinen: sei $r := \|x-y\|$. Da $x\neq y \Rightarrow x-y\neq 0_n \overset{\boxed{S2}\ 3)}{\Longrightarrow} \|x-y\|\neq 0 \Rightarrow \|x-y\|>0 \Rightarrow r>0$. Wir setzen

$U=B(x,\frac{r}{2})$, $V=B(y,\frac{r}{2}) \Rightarrow U\in\mathcal{U}(x)$, $V\in\mathcal{U}(y)$. Wir zeigen, dass $U\cap V=\emptyset$. Widerspruchbeweis: Angenommen,

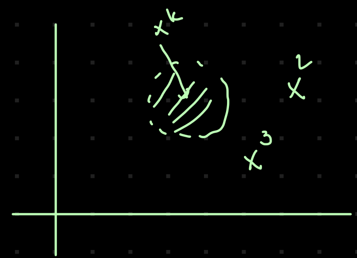
$\exists z\in U\cap V \Rightarrow z\in U, z\in V \Rightarrow \|z-x\|<\frac{r}{2}$, $\|z-y\|<\frac{r}{2} \Rightarrow r = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \overset{\boxed{S2}}{\leq} \|x-z\|+\|z-y\|$

$= \|-(z-x)\| + \|z-y\| \overset{\boxed{S2}}{=} |-1|\cdot\|z-x\| + \|z-y\| = \|z-x\|+\|z-y\| < \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r \Rightarrow r<r$ ↯ $\Rightarrow U\cap V=\emptyset$

- Wir bezeichnen Folgen im $\mathbb{R}^n$ mit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $x^k=(x^k_1,\dots,x^k_n)$, $\forall k\in\mathbb{N}$

Def: Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Eine Vektor $x\in\mathbb{R}^n$ wird <u>Grenzwert der Folge</u> $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ genannt, falls $\forall U\in\mathcal{U}(x)$ $\exists k_0\in\mathbb{N}$, so dass $x^k\in U, \forall k\geq k_0$. In diesem Fall sagt man, dass $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ <u>gegen x konvergiert</u> (strebt). Bez: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$

Bem: $n=2$



$\boxed{\text{Th4}}$ (Die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge im $\mathbb{R}^n$)

- Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, die einen Grenzwert hat. Dann hat $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen einzigen Grenzwert

$\boxed{\text{Th5}}$ (Charakterisierungen für den Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$)

- Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$ mit $x^k=(x_1^k,\dots,x_n^k)$ und $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

  1° $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$

  2° Die reelle Zahlenfolge $(\|x^k-x\|)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k-x\|=0$

  3° $\forall j\in\{1,\dots,n\}$ konvergiert die reelle Zahlenfolge $(x^k_j)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x_j

Bem:

$$x^1=(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$$
$$x^2=(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$$
$$\vdots$$
$$x^k=(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$
$$\vdots$$
$$x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bsp: 1. im $\mathbb{R}^3$, sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ def als $x^k=\left(\frac{1}{k+1}, \frac{2k^2}{k^2+1}, \sqrt[k]{k}\right)$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0,\ \lim_{k\to\infty}\frac{2k^2}{k^2+1}=2,\ \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=1 \underset{\boxed{\text{Th5}}\ 3^\circ\Rightarrow 1^\circ}{\Longrightarrow} (x^k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ ist konv. und } \lim_{k\to\infty} x^k=(0,2,1)$$

2. im $\mathbb{R}^2$ sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ def als $x^k=\left(k, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$\lim_{k\to\infty} k = \infty \Rightarrow (k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist divergent $\Rightarrow (x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ist nicht konvergent / ist divergent

$\boxed{\text{Th5}}$ $i \to j$

KURS $\underline{\text{VIII}}$

- **Aufgaben Folgen**

1) Es seien $a>1$, $\alpha,\beta>0$. Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}}$

<u>Lösung</u>: Sei $\alpha = 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x'}{(a^{\beta x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\beta a^{\beta x}\ln(a)} = 0 \overset{\text{L'Hospital}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^{\beta x}} = 0,\ \forall \beta>0 \quad (*)$$

im Allgemeinen: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{a^{\frac{\beta}{\alpha}\cdot x}}\right)^\alpha \underset{(*)}{=} 0$

Also $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0,\ \forall \alpha,\beta>0,\ \forall a>1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^{\beta x}}{x^\alpha} = \infty,\ \forall \alpha,\beta>0,\ \forall a>1}$

2) Man untersuche die Konvergenz der Folgen $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$

$$x^k = \left(\left(1+\frac{1}{3k^2+1}\right)^{-2k^2}, \frac{k^{100}}{4^k}\right), \quad y^k\left(\frac{3^k}{k!}, k^2\right), \forall k\in\mathbb{N}$$

<u>Lösung</u>:

Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{3k^2+1}\right)^{-2k^2} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3k^2+1}\right)^{3k^2+1}\right]^{-\frac{2k^2}{3k^2+1}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{100}}{4^k} \underset{1)\ (\alpha=100,\ \beta=1,\ a=4)}{=} 0$$

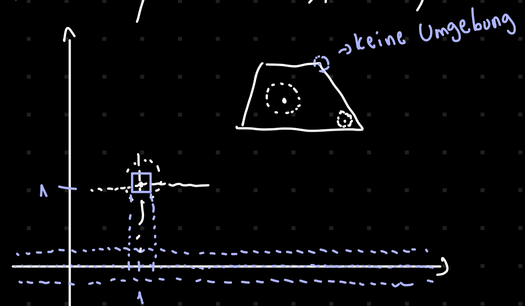
$\Rightarrow (x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konv. im $\mathbb{R}^2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = (e^{-\frac{2}{3}}, 0)$

Folge $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Aus $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 = \infty \Rightarrow (y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist divergent

Bem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \forall x\in\mathbb{R}$, weil die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ konv. ist $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x, \forall x\in\mathbb{R}\right)$

(siehe 5 und 6 Vorlesung)

3) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \notin \mathcal{U}((1,1))$, weil $\nexists\, r>0$ mit $B((1,1),r)\subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$



Eigenschaften reelwertiger Funktionen mehrer Variabeln

- Def: ist M eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f: M\to\mathbb{R}$, dann wird f eine reelwertige Funktion von n Variabeln genannt

- Bsp:

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = (x_1)^2-(x_2)^2+3x_1$ oder $f(x,y)=x^2-y^2+3x$
↳ reelwertige Funktion von 2 Variabeln

2) $g:(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x_1,x_2,x_3)=\ln x_1+\ln x_2-\ln x_3$ oder $g(x,y,z)=\ln x+\ln y-\ln z$
↳ reelwertiger Funktion von 3 Variabeln

3) $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $h(x_1,\dots,x_n) = \|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{(x_1)^2+\dots+(x_n)^2}$
↳ reelwertige Funktionen von n Variabeln

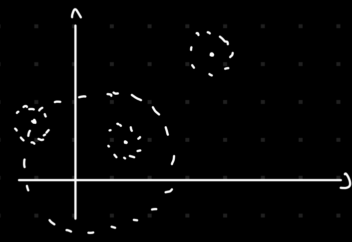
- Def: Sei $M\subseteq\mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x\in\mathbb{R}^n$ ist eine Häufungspunkt von M, falls $\forall U\in\mathcal{U}(x)$ gilt $(U\setminus\{x\})\cap M\neq\emptyset$

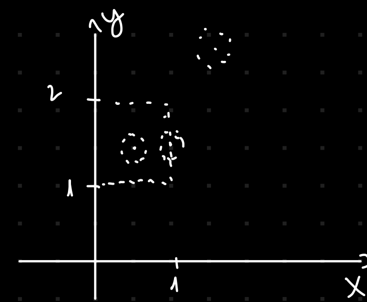
  Bez: M' = eine Menge gebildet aus allem Häufungspunkten von M

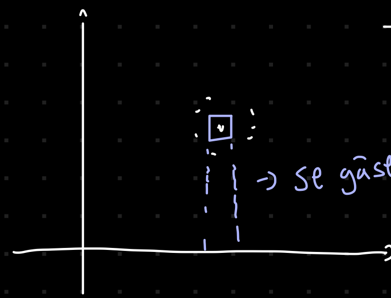
Ein Punkt $x \in M$, der kein Häufungspunkt von M ist, wird isolierter Punkt von M genannt

> Bsp: $n=2$

M	M' → e inclus și „conturul" cercului
$B(0_2,1)$	$\bar{B}(0_2,1)$
$(0,1)\times(1,2)$	$[0,1]\times[1,2]$
$\mathbb{Q}^2$	$\mathbb{R}^2$







→ se găsesc două coordonate raționale

Ab jetzt $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$

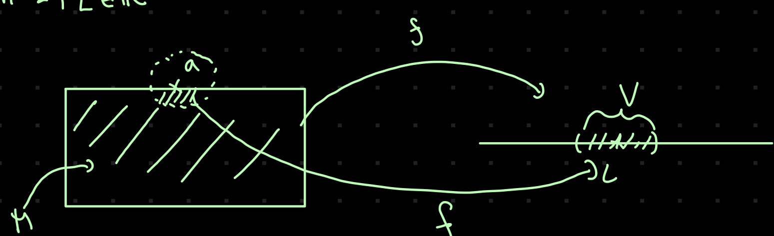
> Def: Seien $f: M \to \mathbb{R}$, $a=(a_1,\dots,a_n) \in M'$ und $L \in \bar{\mathbb{R}}$. Man sagt, dass L der Grenzwert von f im (bei) a ist,

falls $\forall\, V \in \mathcal{U}(L)\ \exists\, U \in \mathcal{U}(a)$, so dass $\forall\, x \in (U \setminus \{a\}) \cap M$ gilt $f(x) \in V$

Bez: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ oder $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1,\dots,x_n) = L$.

Man sagt, dass f einen Grenzwert in a hat, falls $\exists\, L \in \bar{\mathbb{R}}$, so dass $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ist

> Bem: $n=2$, $L \in \mathbb{R}$



> $\boxed{\text{Th 1}}$ (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $a \in M'$. Hat f einen Grenzwert in a, dann ist dieser eindeutig bestimmt

> $\boxed{\text{Th 2}}$ (Die Charakterisierung für den Grenzwert einer Funktion mit Hilfe von Folgen)

- Seien $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in M'$ und $L \in \bar{\mathbb{R}}$. Dann sind äquivalent:

1° $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

2° Für jede Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $M\setminus\{a\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = L$

→ <u>Bem:</u> Die für Grenzwerte von reellen Zahlenfolgen bekannten Rechenregeln und Ergebnisse gelten auch für Grenzwerte von Funktionen mehrerer Variabeln. z.B. gibt es ein Sandwich-Theorem auch für Funktionen mehrerer Variabeln

→ <u>Bsp:</u>

1) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0_2\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0_2\}$. Wir zeigen, dass f einen Grenzwert in 0_2 hat und bestimmen diesen: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0_2\}$ ist $-1\le \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 \mid \cdot(x^2+y^2)>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-(x^2+y^2)}_{\xrightarrow{(x,y)\to 0_2}\, 0} \le f(x,y) \le \underbrace{x^2+y^2}_{\xrightarrow{(x,y)\to 0_2}\, 0} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} -(x^2+y^2) \xRightarrow[\text{Sandwich Theorem}]{} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$$

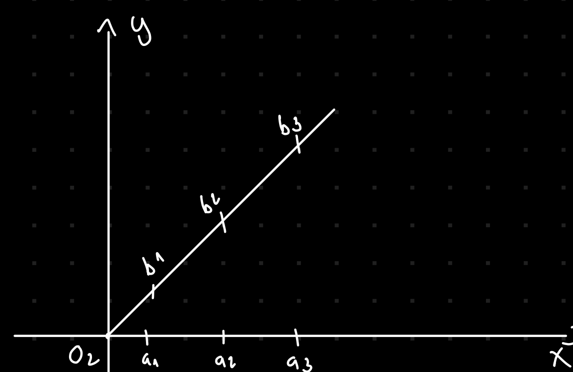
2) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0_2\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$. Wir zeigen, dass f keinen Grenzwert in 0_2 hat. Dafür betrachten wir die Folgen:

- $a^k=\left(\frac{1}{k},0\right)$, $\forall k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a^k=(0,0)=0_2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(a^k)=\lim\limits_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k},0\right)=0$

- $b^k=\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$, $\forall k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} b^k=0_2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(b^k)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}}{\frac{2}{k^2}}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f hat keinen Grenzwert in 0_2

$\boxed{\text{Th2}}$ (da $\lim\limits_{k\to\infty} f(a^k)\neq\lim\limits_{k\to\infty} f(b^k)$)



> **Def:** Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $a \in M$. Die Funktion f <u>ist stetig in a</u>, falls $\forall V \in \mathcal{U}(f(a))\ \exists U \in \mathcal{U}(a)$ mit $\forall x \in U \cap M$ gilt $f(x) \in V$.

Die Funktion ist stetig auf M (oder einfach f ist stetig), falls f in jedem Punkt von M stetig ist

> $\boxed{\text{Th3}}$ (Charakterisierung für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt)

- Seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $a \in M$. Dann sind äquivalent:

  1° f ist stetig in a

  2° Für jede Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in M mit $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = a$ gilt $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^k) = f(a)$

  3° Entweder (ist a ein isolierter Punkt von M) oder ($a \in M'$, $\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$)

> $\boxed{\text{Th4}}$

- Seien $f: M \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ und $g: S \to \mathbb{R}$ mit $f(M) \subseteq S$. Ist f stetig in $a \in M$ und g stetig in $f(a)$, dann ist $g \circ f$ stetig in a

> <u>Bsp:</u>

1) Polynomfunktionen von n Variablen (d.h. endliche Summen von endlichen Produkten der Variabeln und reeller Zahlen) sind auf $\mathbb{R}^n$ stetig

   $n=2$: $P(x,y) = x^2y - 3x^3y^4 - x + 2$

   P ist stetig auf $\mathbb{R}^2$

   $$\lim_{(x,y) \to (1,2)} P(x,y) \underset{\uparrow \atop \boxed{\text{Th3}}(1° \Rightarrow 3°)}{=} P(1,2) = 2 - 3 \cdot 16 - 1 + 2 = -45$$

   $n=3$ $Q(x,y,z) = x^{10}z^3 + y^2 \cdot z^2 + xyz + 5x^9$

   Q ist stetig auf $\mathbb{R}^3$

2) Rationale Funktionen (d.h. Quotienten von Polynomfunktionen) sind auf deren maximalen Definitionsbereichen stetig.

   $n=2$: $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$

   $n=3$, $g: \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = \dfrac{x^5 - xy^2 + 3}{x+y+z}$

f und g sind stetig

3) Summen, Produkte, Quotienten (falls definiert) reellwertiger stetiger Funktionen mehrer Variabeln sind stetig

4) In $\boxed{Th_4}$ kann man g eine elementare Funktion wählen

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \underbrace{\sin(x+y+z)}_{\text{stetig}} + \underbrace{e^{xyz}}_{\text{stetig}}$

- $g : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \ln x + \sqrt{x} + \cos(x,y)$ $\quad \sqrt{\ }$ - elementare Funk.
- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{= x}) = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2} = \|x\|$

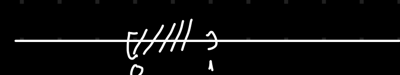
$\to$ f, g, h sind stetig

> **Def:** Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, wird <u>innerer Punkt von S</u> genannt, falls $S \in \mathcal{U}(x)$ (d.h. $\exists r > 0$ mit $B(x,r) \subseteq S$)
>
> <u>Bez:</u> int S = die Menge gebildet aus allen inneren Punkten von S, int S ist <u>das Inneren von S</u>. Die Menge S heißt offen, falls int $S = S$ ist

> <u>Bsp:</u>

1) $n=1$

M	int M	offen
$[0,1]$	$(0,1)$	nein
$(0,1)$	$(0,1)$	ja
$\mathbb{N}$	$\emptyset$	nein



2) $n=2$

M	int M	offen
$B(0_2,1)$	$B(0_2,1)$	ja
$\bar{B}(0_2,1)$	$B(0_2,1)$	nein

> $\boxed{S5}$

- Sei $S \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist int $S \subseteq S$ und int $S \subseteq S'$

Bew: ↳ siehe 8 Üb.

› **Def:** Seien $f: M \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{int} M$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Die Funktion f ist in a partiell nach x_j differenzierbar falls, der folgende Grenzwert (in $\mathbb{R}$) existiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{x_j \to a_j} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_j - a_j} \in \mathbb{R}$$

↳ die partielle Ableitung (erster Ordnung) von f nach x_j in a

Die Funktion f heißt partiell differenzierbar in a, falls f in a partiell nach allen Variabeln $x_1, \dots, x_n$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man den Vektor $\overset{\text{Nabla}}{\nabla} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ den Gradienten von f in a

› **Bsp:**

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2yz + \sin(xy) + z$

Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz + y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2z + x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2y + 1$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = \left(2xyz + y\cos(xy),\ x^2z + x\cos(x,y),\ x^2y + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2,0) = \left(2\cos 2,\ \cos(2),\ 3 \right)$$

KURS IX | WOCHE 10

Eigenschaften reellwertiger Funktionen mehrerer Variabeln

- **Def:** Seien M eine nichtleere offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f: M \to \mathbb{R}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Ist f in allen Punkten von M partiell nach x_j differenzierbar, dann heißt f auf M partiell nach x_j differenzierbar und die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_j}: M \to \mathbb{R}$, die jedem Punkt $a \in M \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathbb{R}$ zuordnet, die partielle Ableitung (erster Ordnung) von f nach x_j

- Wir führen partielle Ableitung höherer Ordnung ein:

- **Def:** Seien $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in M$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Ist f auf M partiell nach x_i differenzierbar und ist $\frac{\partial f}{\partial x}: M \to \mathbb{R}$ in a partiell nach x_j differenzierbar, dann nennt man $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$ die partielle Ableitung zweiter Ordnung von f in a nach (x_i, x_j)

- **Bez:** ist $i = j$, so setzt man $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$

- **Beispiel:** Man bestimme die partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

  $f(x, y, z) = z \cdot \sin(x - y)$

Lösung: Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x-y)' = 1$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z\cos(x-y) \cdot 1}$$

$- z\cos(x-y)$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z\cos(x-y) \cdot 1} \\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = z\cos(x-y) \cdot (-1) = -1 z\cos(x-y)} \\ (zs)' = s \\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \sin(x-y)} \end{array}\right\} = \text{erster Ordnung}$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -z\sin(x-y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = z\sin(x-y)$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \cos(x-y)$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \cos(x-y)$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = z\sin(x-y)$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -z\sin(x-y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -\cos(x-y)$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \cos(x-y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -\cos(x-y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

> Def: Seien $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in M$. Die Funktion f nennt man in a zwei mal partiell differenzierbar, falls f alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in a hat. In diesem Fall nennt man die Matrix

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f in a.

Die Funktion f nennt man (auf M) zweimal partiell differenzierbar, falls f in allem Punkten von M zweimal partiell differenzierbar ist

> **Bsp:** Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def durch $f(x,y) = x^4 y - xy^2$. Diese Funktion ist zweimal partiell differenzierbar. Wir bestimmen $H_f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sowie $H_f(1,-1)$

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 y - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 - 2yx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4x^3 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x^3 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 y & 4x^3 - 2y \\ 4x^3 - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

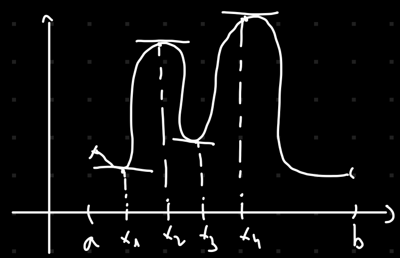
> **Def:** Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ nennt man zweimal stetig partiell differenzierbar, in Zeichen $f \in C^2(M)$, falls f zweimal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f stetig sind.

> **Thm** (Schwarz)

- Seien $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(M)$. Dann ist $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \forall i,j \in \{1,\dots,n\}}$

- Lokale Extremstellen reellwertiger Funktionen mehrerer Variabeln

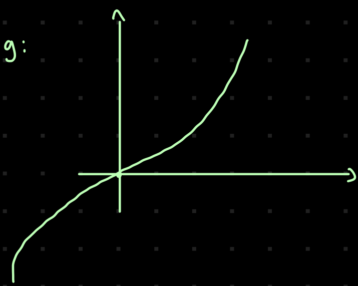
› $\boxed{W}$: Sei z.B. $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion



- x_1 und x_3 sind lokale Minimalstelle von f
- x_2 und x_4 sind lokale Maximalstellen von f

↳ sind Nullstellen von $f' \rightsquigarrow \nabla f$

$\boxed{!\ \text{Bem}}$: Eine Nullstelle der Ableitung ist im Allgemeinen keine lokale Extremstelle; z.B: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=x^3 \Rightarrow g'(x)=3x^2$, $g'(0)=0$, aber 0 ist keine lokale Extremstelle von g:



› Um zu entscheiden, ob eine Nullstelle x_0 von f' eine lokale Extremstelle von f ist oder nicht, kann man f'' verwenden:

- $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ ist eine lokale Minimalstelle von f
- $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ ist eine lokale Maximalstelle von f
- $f''(x_0) = 0 \Longrightarrow$ kann keine Entscheidung getroffen werden

› Def: Seien $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$. Man nennt einen Punkt $a \in M$ eine lokale Minimalstelle (bezw. lokale Maximalstelle) von f, falls $\exists r > 0$ mit: $\forall x \in M \cap B(a,r)$ gilt $f(x) \geq f(a)$ (bzw. $f(x) \leq f(a)$). Die lokalen Minimal- und Maximalstellen von f nennt man lokale Extremstellen von f. Ist a eine lokale Extremstelle von f, so nennt man $f(a)$ einen lokalen Extremwert von f.

Man nennt einen Punkt $a \in M$ eine globale Minimalstelle (bzw. globale Maximalstelle) von f, falls $\forall x \in M$ gilt $f(x) \geq f(a)$ (bzw. $f(x) \leq f(a)$). Die globalen Minimal- und Maximalstellen von f nennt man globale Extremstellen von f.

- $\boxed{\text{Th 1}}$ (Fermat)

  - Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} M$ und $f: M \to \mathbb{R}$ eine in a partiell differenzierbar Funktion. ist a eine lokale Extremstelle von f, dann ist $\nabla f(a) = 0_n$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

- Def: Seien $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: M \to \mathbb{R}$. Man nennt einen Punkt $a \in M$ einen stationären (kritischen) Punkt von f, falls f in a partiell differenzierbar und $\nabla f(a) = 0_n$ ist.

- Def: ist $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$ eine reelle $n \times n$ Matrix, so nennt man die Funktion $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi_c(\overset{\text{vektor}}{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h_i h_j, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

die durch C definierte quadratische Form

- Def: Sei C eine reelle $n \times n$ Matrix. Die quadratische Form Φ_c (oder, äquivalent die Matrix C) nennt man:

  - positiv definit (=pozitiv definită), falls $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}: \Phi_c(h) > 0$ ist
  - positiv semidefinit, falls $\forall h \in \mathbb{R}^n: \Phi_c(h) \geq 0$ ist,
  - negativ definit, falls $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}: \Phi_c(h) < 0$ ist,
  - negativ semidefinit, falls $\forall h \in \mathbb{R}^n: \Phi_c(h) \leq 0$ ist,
  - indefinit, falls $\exists u, v \in \mathbb{R}^n: \Phi_c(u) < 0 < \Phi_c(v)$ ist

- Def: Die reelle $n \times n$ Matrix $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$ nennt man symmetrisch, falls $C = C^T$, d.h. $c_{ij} = c_{ji}$, $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$. ist

- Bsp: Die allgemeine Form einer symmetrischen 2×2 bzw. 3×3 Matrix ist

$$C_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array}, \text{ bzw.}$$

Simetrică

$$C_3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Die dazugehörigen quadratischen Formen sind: $\Phi_{C_2}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_{C_2}(h_1,h_2) = c_{11}\cdot \overbrace{h_1\cdot h_1}^{(h_1)^2} + c_{12}(h_1\cdot h_2) + c_{22}\cdot (h_2)^2 \underbrace{+2c_{12}h_1h_2}_{\text{wegen der Symmetrie}}$

- $\Phi_{C_3}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_{C_3}(h_1,h_2,h_3) = c_{11}\cdot(h_1)^2 + 2c_{12}\cdot h_2\cdot h_1 + 2\cdot c_{13}\cdot h_1\cdot h_3 + c_{22}\cdot (h_2)^2 + 2\cdot c_{23}\cdot h_2\cdot h_3 + c_{33}\cdot (h_3)^2$

> $\boxed{S2}$: Die reelle 2×2 symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ist
> - positiv definit $\Longleftrightarrow a>0$ und (det) $ad-b^2>0$
> - negativ definit $\Longleftrightarrow a<0$ und $ad-b^2>0$,
> - indefinit $\Longleftrightarrow ad-b^2<0$

> $\boxed{Th3}$ (Sylvester)

- Sei $C=(c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$ eine symmetrische $n\times n$ Matrix. Für alle $s\in\{1,\dots,n\}$ seien $\Delta_s := \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}$

(Hauptminoren von C)

1° C ist positiv definit $\Longleftrightarrow \Delta_s>0,\ \forall s\in\{1,\dots,n\}$

2° C ist negativ definiert $\Longleftrightarrow (-1)^s\Delta_s>0,\ \forall s\in\{1,\dots,n\}$

> Beispiel:

simetrică

$$C = \begin{array}{c} \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$(\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0)$

$\Delta_1=-1,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \det C$

- $\Delta_1<0 \xRightarrow[\boxed{Th3}, 1°]{}$ C ist nicht positiv definit
- $\Delta_2 = -1 < 0 \xRightarrow[\boxed{Th3}]{}$ C ist negativ definit

$\Phi_c : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_c(h_1, h_2, h_3) = -(h_1)^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 + 2h_2h_3$

Aus $\Phi_c(1,0,0) = -1 < 0$ und $\Phi_c(0,1,1) = 2 > 0$ $\Rightarrow$ C ist indefinit

> <u>Bem</u>: Seien $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(M) \overset{\uparrow}{\Longrightarrow} H_f(x)$ ist symmetrisch, $\forall x \in M$

$\boxed{\text{Th6}}$ (Schwarz)

> $\boxed{\text{Th4}}$

- Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in M$ und $f \in C^2(M)$. Dann gelten:

  1° ist a eine lokale Minimalstelle (bezw. lokale Maximalstelle) von f, dann ist $\nabla f(a) = 0_n$ und $H_f(a)$ ist positiv semidefinit (bezw. negativ semidefinit)

  2° ist $\overbrace{\nabla f(a) = 0_n}^{\to f'(a) = 0}$ und $H_f(a)$ $\overbrace{\text{positiv definit}}^{\to f''(a) > 0}$ (bzw. negativ definit), dann ist a eine lokale Minimalstelle (bzw. lokale Maximalstelle) von f.

  3° ist $\nabla f(a) = 0_n$ und $H_f(a)$ indefinit, dann ist a keine lokale Extremstelle von f

  ↪ Algorithmus zur Bestimmung der lokalen Extremstellen einer reellwertiger Funktion von mehreren Variabeln

KURS X / WOCHE 11

~ Lokale Extremstellen ~

<u>Aufgabe</u>: Man bestimme alle lokalen Extremstellen der Funktion $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^3 - y^3$

<u>Lösung</u>:

1) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -3y^2$

2) $\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ -3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ ist der einzige stationäre Punkt von g

3) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$

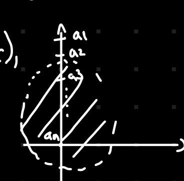
4) $Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\to$ weder positiv, noch negativ, auch nicht indefinit

$\Rightarrow$ die quadratische Form zu $Hg(0,0)$ ist $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(h_1, h_2) = 0$. Da $\Phi(h_1,h_2) \geq 0$ und $\Phi(h_1,h_2) \leq 0$, $\forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, ist $\Rightarrow Hg(0,0)$ ist sowohl positiv als auch negativ semidefinit (das Algorithmus sagt uns nichts)

Es gilt $g(0,0) = 0$. Außerdem ist $g(0,y) = -y^3$, $g(x,0) = x^3$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $(0,0)$ keine lokale Extremstelle von g:

<u>1) Etappe</u>: Wir zeigen, dass $(0,0)$ keine lokale Minimalstelle von g ist. Widerspruchbeweis. Wir nehmen an, $(0,0)$ wäre eine lokale Minimalstelle von $g \Rightarrow \exists r > 0$. $\forall (x,y) \in B((0,0),r)$ gilt $g(0,0) \leq g(x,y)$

Sei $a^n = (0, \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = (0,0) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, so dass $a^n \in B((0,0),r)$,



$\forall n \geq n_0 \Rightarrow a^{n_0} \in B((0,0),r) \Rightarrow 0 \leq g(a^{n_0}) = g(0, \frac{1}{n^0}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq -\left(\frac{1}{n^0}\right)^3$ $\lightning$ $\Rightarrow (0,0)$ ist keine lokale Minimalstelle von g

<u>2) Etappe</u>: Wir zeigen, dass $(0,0)$ keine lokale Maximalstelle von g ist. Widerspruchbeweis. Wir nehmen an,

$(0,0)$ wäre eine lokale Maximalstelle von $g \Rightarrow \exists r>0 \ \ \forall (x,y) \in B((0,0),r)$ gilt $0 = g(0,0) \geq g(x,y)$

Sei $b^n = (\frac{1}{n}, 0), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b^n = (0,0) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ \ b^n \in B((0,0),r), \forall n \geq n_0 \Rightarrow b^{n_0} \in B((0,0),r) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \geq g(b^{n_0}) = g(\frac{1}{n_0}, 0) \Rightarrow 0 \geq (\frac{1}{n_0})^3$ ↯ $\Rightarrow (0,0)$ ist keine lokale Maximalstelle von $g \Rightarrow$

$\Rightarrow (0,0)$ ist keine lokale Extremstelle von g. $\Rightarrow g$ hat keine lokalen Extremstellen

<u>Bem:</u> Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

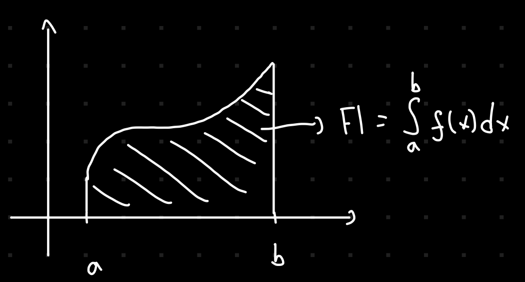
$f(x,y) \geq 0 = f(0,0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (0,0)$ ist eine globale Maximalstelle von f

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ $\Rightarrow (0,0)$ ist der einzige stationare Punkt $\Rightarrow (0,0)$ ist die einzige lokale Extremstelle von f; sie ist sogar eine globale Minimalstelle

~ UNEIGENTLICHE INTEGRALEN ~

- Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist integrierbar und das bestimmte integrale von f über $[a,b]$ und mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet

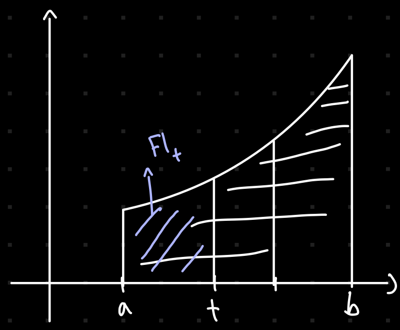
- <u>Bem:</u> ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, dann stellt $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x- Achse dar.



- Wir werden den Begriff des bestimmten Integrals erweitern und integrale auch auf den folgenden intervallen einführen: $[a,b), (a,b], (a,b). [a,\infty), (a,\infty), (-\infty, a], (-\infty, a), \underbrace{(-\infty, \infty)}_{\mathbb{R}}$.

- <u>Bsp:</u>

  1) Wir nehmen an, die stetige Funktion $f: [a,b) \to \mathbb{R}$, hätte den folgenden Graphen

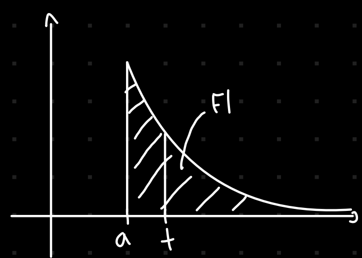


<u>Frage:</u> Wie sollte man den Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Funktion und oberhalb den x-Achse definieren? Ist diesen Flächeninhalt endlich?

- Eine natürliche Vorgehensweise (mod de a proceda) ist die folgende: sei $t \in [a,b)$ und sei Fl_t der Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Einschränkung von f auf $[a,t]$ und oberhalb der x-Achse. Dann ist $Fl_t = \int_a^t f(x)\,dx$. Es ist natürlich, Fl wie folgt zu definieren $Fl = \lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} Fl_t = \lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^t f(x)\,dx$

das wird das uneigentliche integral von f auf $[a,b)$ sein.

2) Die gleiche idee kann man auch Fall einer stetigen Funktion $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$, angewandt werden



$$Fl = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

- <u>Def:</u> Seien $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ mit $a<b$ und $f\,[a,b)\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls $\exists\ l := \lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$, dann nennt man f auf (über) $[a,b)$ <u>uneigentliche integrierbar</u> (integrabilă improprie) und l das <u>uneigentliche integral</u> von f auf (über) $[a,b)$, das wie folgt bezeichnet wird
$\int_a^{b-} f(x)\,dx$, falls $b\in\mathbb{R}$
$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, falls $b=\infty$.

<u>Analog:</u> Sind $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $\exists\ l := \lim\limits_{\substack{t\to a\\ t<a}} \int_t^a f(x)\,dx \in\mathbb{R}$, dann nennt man f auf $(a,b]$ uneigentliche integrierbar und l das uneigentliche integral von f auf $(a,b]$ und bezeichnet dieses mit
$\int_{a+}^b f(x)\,dx$, falls $a\in\mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, falls $a=-\infty$

- <u>Def:</u> Seie $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, mit $a<b$ und $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion f nennt man auf (a,b) uneigentlich integrierbar, falls $\exists\, c\in(a,b)$, so dass f sowohl auf $(a,c]$ und auf $[c,b)$ uneigentlich integrierbar ist. Das uneigentliche von f auf (a,b)

wird dann wie folgt definiert

- $\int_{a+}^{b-} f(x)\,dx = \int_{a+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-} f(x)\,dx$, falls $a, b \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{b-} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-} f(x)\,dx$, falls $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$
- $\int_{a+}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$, falls $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, falls $a = -\infty$, $b = \infty$

- $\boxed{\text{Th1}}$ (Die Formel von Leibniz-Newton für bestimmte Integrale)

  > Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

- $\boxed{\text{Th2}}$ (Die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale über Intervalle $[a,b)$)

  > Seien $-\infty < a < b \leq \infty$, $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gelten:

  1° f ist auf $[a,b)$ uneigentlich integrierbar $\Leftrightarrow$ F hat einen endlichen Grenzwert in b.

  2° Falls F einen endlichen Grenzwert in b hat, dann gilt für das uneigentliche Integral I von f auf $[a,b)$ die Gleichheit

  $$\boxed{I = \lim_{x \to b} F(x) - F(a)}$$

- $\boxed{\text{Th3}}$ (Die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale über Intervalle $(a,b]$)

  > Seien $-\infty \leq a < b < \infty$, $f\ (a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F\ (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gelten:

  1° f ist auf $(a,b]$ uneigentlich integrierbar $\Leftrightarrow$ F hat einen endlichen Grenzwert in a.

  2° Falls F einen endlichen Grenzwert in a hat, dann gilt für das uneigentliche Integral I von f auf $(a,b]$ die Gleichheit $\boxed{I = F(b) - \lim_{x \to a} F(x)}$

- $\boxed{\text{Th4}}$ (Die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integral über (a,b))

  > Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $F(a,b) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gelten:

1° f ist auf (a,b) uneigentlich integrierbar $\Leftrightarrow F$ hat einen endlichen Grenzwert in a und F hat einen endlichen Grenzwert in b

2° Hat F einen endlichen Grenzwert sowohl in a als auch in b, dann gilt für das uneigentliche Integral I von f auf (a,b) die Gleichheit $\boxed{I = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)}$

· Bsp: 1) Man untersuche die uneigentliche Integralbarkeit der Funktion $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$, wobei $a>0$, $p\in\mathbb{R}$ sind, und bestimme, im Fall uneigentliche Integrierbarkeit das entsprechende uneigentliche Integrierbarkeit

Lösung: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^p}dx = \int x^{-p}dx = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p} + C, & p \neq 1 \\ \ln(x) + C, & p = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow F: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ (eine Stammfunktion von f) ist

def durch: $\cdot\, p \neq 1: F(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p}, \forall x \in [a,\infty)$

$\cdot\, p = 1: F(x) = \ln(x), \forall x \in [a,\infty)$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \infty, & 1>p \\ 0, & 1<p \end{cases}$; $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $p=1$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} F(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1<p \overset{\boxed{\text{Th2}}}{\Rightarrow} f$

$\Rightarrow$ ist auf $[a,\infty)$ uneigentlich integrierbar $\Leftrightarrow 1<p$. ist $1<p$, dann ist $\boxed{\int_a^\infty f(x) = \underbrace{\lim_{x\to\infty} F(x)}_{0} - F(a) = \frac{a^{1-p}}{p-1}}$

1) Man untersuche die uneigentliche Integrierbarkeit der Funktion $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, und bestimme, im Fall uneigentlicher Integrierbarkeit das entsprechende uneigentliche Integral.

Lösung: $I = \int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$; $I \longmapsto \int e^t dt = e^t + C \Rightarrow \int f(x)dx = e^{-\frac{1}{x}} + C \Rightarrow F: (a,\infty) \to \mathbb{R}$,

$\boxed{t = -\frac{1}{x}} \to dt = \frac{1}{x^2}dx$

$F(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, ist eine Stammfunktion von f

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \in \mathbb{R} \overset{\boxed{\text{Th}}}{\Rightarrow}$

$\Longrightarrow$ f ist auf $(0,\infty)$ uneigentlich integrierbar und $\int_{0^+}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 0} F(x) = 1$