A Fuzzy Logic Model of the Romanian Uninominal Proportional Elections System

Horia F. Pop

Department of Computer Science
Babeş-Bolyai University
Cluj-Napoca

Claims

- Election laws should be written by mathematicians, not by politicians

- Algorithms should be used with care (i.e. Greedy is not a universal panacea)

- Elections is a fuzzy logic problem

Contents

Romanian Elections Act No. 15/2008 (Art. 47, 48)

PARLAMENTUL ROMÂNIEI

CAMERA DEPUTAȚILOR **SENATUL**

L E G E

pentru alegerea Camerei Deputaților şi a Senatului şi pentru modificarea şi completarea Legii nr. 67/2004 pentru alegerea autorităților administrației publice locale, a Legii administrației publice locale nr. 215/2001 şi a Legii nr. 393/2004 privind Statutul aleşilor locali

Electoral coefficient (national)

CAPITOLUL XI
Constatarea rezultatelor alegerilor

Art. 47. – (1) După primirea dosarelor prevăzute la art. 45,

(4) Coeficientul electoral la nivel național se stabilește prin împărțirea numărului total de voturi valabil exprimate la nivel național pentru alegerea Camerei Deputaților la numărul de colegii uninominale constituite la nivel național pentru alegerea Camerei Deputaților. Are

Art. 48. – (1) După primirea de la Biroul Electoral Central a constatării cu privire la partidele politice, alianțele politice, alianțele electorale și organizațiile cetățenilor aparținând minorităților naționale care întrunesc și care nu întrunesc pragul electoral potrivit art. 47 alin. (2), birourile electorale de circumscripție procedează la prima etapă de repartizare pe competitor electoral a mandatelor de deputat, respectiv de senator, la nivel de circumscripție electorală.

Electoral coefficient (county)

(3) Biroul electoral de circumscripție stabilește, separat pentru Camera Deputaților și pentru Senat, coeficientul electoral al circumscripției electorale, prin împărțirea numărului total de voturi

50

valabil exprimate pentru toți competitorii electorali care întrunesc condiția prevăzută la art. 47 alin. (2) și pentru candidații independenți care au obținut majoritatea voturilor valabil exprimate în colegiul uninominal în care au candidat la numărul de deputați, respectiv de senatori, ce urmează să fie aleși în acea circumscripție electorală.

Mandates allocation / county (step 1)

(4) Pentru fiecare competitor electoral se împarte numărul total de voturi valabil exprimate obținut prin însumarea voturilor valabil exprimate în favoarea tuturor candidaților săi din colegiile uninominale de pe raza circumscripției electorale la coeficientul electoral, reținându-se partea întreagă, nerotunjită, a câtului. Rezultatul obținut reprezintă numărul de mandate repartizate de către biroul electoral de circumscripție competitorului electoral la nivelul circumscripției electorale în prima etapă de repartizare a mandatelor. Candidaților independenți li se atribuie câte un mandat de către biroul electoral de circumscripție dacă au obținut majoritatea voturilor valabil exprimate în colegiul uninominal în care au candidat.

(5) Voturile rămase, adică cele neutilizate sau inferioare coeficientului electoral, obținute de competitorii electorali ce întrunesc condiția prevăzută la art. 47 alin. (2), precum şi mandatele ce nu au putut fi repartizate de biroul electoral de circumscripție se comunică de acesta Biroului Electoral Central, pentru a fi repartizate centralizat în a doua etapă, la nivel național.

Mandates allocation / national (step 2)

(6) Biroul Electoral Central însumează, pe întreaga țară, separat pentru Camera Deputaților şi pentru Senat, voturile neutilizate şi pe cele inferioare coeficientului electoral al circumscripției electorale din toate circumscripțiile electorale, pentru fiecare partid politic, alianță politică sau alianță electorală care întruneşte condiția prevăzută la art. 47 alin. (2); numărul voturilor astfel obținute de fiecare partid politic, alianță politică şi alianță electorală se împarte la 1, 2, 3, 4 etc., făcându-se atâtea operații de împărțire câte mandate nu au putut fi repartizate la nivelul circumscripțiilor electorale; câturile rezultate din împărțire, indiferent de competitorul electoral de la care provin, se clasifică în ordine descrescătoare, până la concurența numărului de mandate nerepartizate; cel mai mic dintre aceste câturi constituie coeficientul electoral pe țară, pentru deputați şi, separat, pentru senatori; fiecărui competitor electoral care a întrunit condiția prevăzută la art. 47 alin. (2) i se repartizează atâtea mandate de deputați sau, după caz, de senatori, de câte ori coeficientul electoral pe țară se cuprinde în numărul total al voturilor valabil exprimate pentru partidul politic, alianță politică sau alianță electorală respectivă, rezultat din însumarea pe țară a voturilor neutilizate şi a celor inferioare coeficientului electoral al circumscripției electorale.

Mandates allocation / county (step 3)

a) pentru fiecare partid politic, alianţă politică sau alianţă electorală care întruneşte condiţia prevăzută la art. 47 alin. (2), se împarte numărul voturilor neutilizate şi al celor inferioare coeficientului electoral al circumscripţiei electorale, din fiecare circumscripţie electorală, la numărul total al voturilor valabil exprimate pentru acel partid politic, alianţă politică sau alianţă electorală avut în vedere la repartizarea mandatelor pe ţară. Rezultatul astfel obţinut pentru fiecare circumscripţie electorală se înmulţeşte cu numărul de mandate cuvenite partidului politic, alianţei politice sau alianţei electorale. Datele obţinute se ordonează descrescător la nivelul ţării şi separat descrescător în cadrul fiecărei circumscripţii electorale. Pentru fiecare circumscripţie electorală se iau în calcul primele partide politice, alianţe politice sau alianţe electorale, în limita mandatelor ce au rămas de repartizat în circumscripţia electorală respectivă. Ultimul număr din această operaţiune reprezintă repartitorul acelei circumscripţii electorale. În continuare, se procedează la repartizarea mandatelor pe circumscripţii electorale în ordinea partidelor politice, alianţelor politice, alianţelor electorale, precum şi a circumscripţiilor electorale din lista ordonată pe ţară, astfel: primul număr din lista ordonată pe ţară se împarte la repartitorul circumscripţiei electorale de la care provine, rezultând numărul de mandate ce-i revin în circumscripţia electorală respectivă. În continuare, se procedează identic cu numerele următoare din lista ordonată pe ţară. În situaţia în care s-a epuizat numărul de mandate cuvenite unui partid politic, unei alianţe politice sau unei alianţe electorale ori dintr-o circumscripţie electorală, operaţiunea se continuă fără acestea. Dacă numărul din lista ordonată pe ţara este mai mic decât repartitorul de circumscripţie electorală, se acordă un mandat;

Mandates allocated by political negotiation or by random choice

c) dacă după aplicarea prevederilor lit. a) și b) au mai rămas mandate nedesfășurate pe circumscripții electorale, Biroul Electoral Central le stabilește pe baza acordului partidelor politice, alianțelor politice sau alianțelor electorale cărora li se cuvin aceste mandate, potrivit alin. (4), iar în lipsa unui acord, prin tragere la sorți, în termen de 24 de ore de la încheierea operațiunilor anterioare.

Mandates assignment (step 1: Majority voting)

(9) În fiecare colegiu uninominal pentru Camera Deputaților, respectiv Senat, se atribuie un singur mandat de deputat, respectiv de senator.

(10) Atribuirea mandatelor de deputat şi de senator se face în două etape, la nivelul colegiilor uninominale şi la nivelul fiecărei circumscripții electorale.

(11) În prima etapă, la nivelul colegiilor uninominale, se atribuie un mandat candidaților care aparțin unui competitor electoral ce a întrunit pragul electoral potrivit art. 47 alin. (2) şi care au obținut majoritatea voturilor valabil exprimate în colegiul uninominal în care au candidat.

(12) În cea de a doua etapă, de alocare pe colegii şi atribuire de mandate competitorilor electorali care au întrunit pragul electoral, biroul electoral de circumscripție va întocmi, separat pentru Camera Deputaților şi Senat, o listă ordonată cu toți candidații cărora nu li s-au atribuit mandate în prima etapă, dispuşi în ordinea descrescătoare a raporturilor dintre voturile valabil exprimate obținute în colegiile uninominale în care au candidat şi coeficientul electoral al circumscripției electorale respective, calculate până la a opta zecimală inclusiv.

Mandates assignment (step 2: Greedy)

(13) Dacă pentru un competitor electoral numărul de mandate atribuite potrivit prevederilor alin. (11) este mai mare sau egal cu numărul de mandate repartizate competitorului electoral respectiv în acea circumscripție electorală, calculat potrivit prevederilor alin. (3) – (7), acestuia nu i se va mai aloca niciun mandat în etapa a doua prevăzută la alin. (12), acesta reținând mandatele atribuite potrivit prevederilor alin. (11).

(14) Pentru fiecare competitor electoral care a întrunit pragul electoral potrivit prevederilor art. 47 alin. (2), din numărul de mandate repartizat în acea circumscripție electorală, calculat potrivit prevederilor alin. (3) – (7), se scade numărul de mandate atribuite la nivelul colegiilor uninominale potrivit alin. (11), rezultatul reprezentând numărul de mandate de atribuit fiecărui competitor electoral la nivelul circumscripției electorale în cea de a doua etapă de atribuire şi alocare de mandate. Numărul de mandate rezultat pentru fiecare competitor electoral se alocă pentru candidații acestora în ordine descrescătoare în funcție de clasarea în lista prevăzută la alin. (12). În cazul în care următorul candidat căruia urmează să i se atribuie mandat din lista ordonată prevăzută la alin. (12) aparține unui competitor electoral care a epuizat numărul de mandate la care are dreptul în acea circumscripție electorală sau dacă în colegiul uninominal în care acesta a candidat deja s-a atribuit un mandat, se va proceda la trecerea la următorul candidat din lista ordonată, până la atribuirea tuturor mandatelor.

Multiple mandates per uninominal constituency (step 3)

(15) În cazul în care, în urma atribuirii de mandate în cele două etape potrivit prevederilor alin. (11) – (14), unuia sau mai multor competitori electorali care au întrunit pragul electoral potrivit prevederilor art. 47 alin.(2), nu li s-a atribuit numărul de mandate la care au dreptul în acea circumscripție electorală, calculat potrivit prevederilor alin. (3) – (7), acestora li se vor atribui atâtea mandate până la concurența cu acest număr. Mandatele se alocă suplimentar candidaților competitorilor electorali respectivi cei mai bine plasați în lista ordonată prevăzută la alin. (12) cărora nu li s-a alocat mandat, în colegiul uninominal în care au candidat, prin creşterea corespunzătoare a numărului de mandate din circumscripția electorală respectivă și prin excepție de la prevederile alin. (9).

Synthetic algorithm
Seats allocation per party

- Art 47(4). National electoral coefficient
  - = number of national valid votes /
  - / number of national uninominal colleges
- Art 48(3). County electoral coefficient
  - = number of county valid votes /
  - / number of county uninominal colleges
- Art. 48(4). Seats allocation per party, county (step 1)
  - Nr seats = integer part of
  - number of party county votes / county electoral coefficient

Synthetic algorithm
Seats allocation per party

- Seats allocation per party nationally (step 2)
- Art. 48(5). Total unused party votes = summed up nationally
- Art. 48(6). All totals divided to 1, 2, 3, 4 …
  - Number of divisions = number of national unallocated seats (*k*)
  - Quotients sorted decreasingly; the k-th value selected = national electoral coefficient
  - Parties get seats = integer part of unused party votes / coefficient

Synthetic algorithm
Seats allocation per party

- Art. 48(7.a). National seats assigned per county
  - Ratio: unused county party votes / total unused national party votes * nr of assigned national party seats
  - These values sorted decreasingly at national, county levels
  - For each county consider the largest values to the count of seats to be assigned; this value is called county repartitor
  - Allocate seats using Greedy choice
    - unused county party votes / county repartitor
- Art. 48(7.c). Unallocated seats: by political choice or random selection

Synthetic algorithm
Individual seats assignment

- Art. 48 (9-11). Step 1: majority voting wins a seat
- Art. 48 (12-14). Step 2: Greedy choice assignment:
  - Candidates sorted decreasingly by valid votes / county electoral coefficient
- Art. 48 (15). Step 3: Multiple seats per constituency
  - If not all allocated seats were assigned, continue as needed, by violating the uninominal principle

Results, Cluj county (2008)

Real results (votes)

Cluj	PDL	PSD	PNL	UDMR	Votes	Total
1	**12,580**	4,395	2,741	4,442	**24,158**	**25,768**
2	**11,440**	3,632	2,211	3,426	**20,709**	**22,312**
3	**11,249**	4,556	3,884	5,181	**24,870**	**26,725**
4	**11,416**	2,947	2,315	4,637	**21,315**	**22,681**
5	5,500	3,808	**7,900**	2,206	**19,414**	**21,440**
6	5,543	**6,633**	5,543	2,097	**19,816**	**22,819**
7	6,990	**5,891**	2,388	3,404	**18,673**	**21,120**
8	7,789	4,483	**2,299**	1,708	**16,279**	**19,434**
9	7,177	2,811	2,060	**1,825**	**13,873**	**16,251**
10	6,354	2,251	966	**6,504**	**16,075**	**17,529**
Total	**86,038**	**41,407**	**32,307**	**35,430**	**195,182**	**216,079**
Relative	**4.408**	**2.121**	**1.655**	**1.815**	**10.000**	
Mandates	**4**	**2**	**2**	**2**	**10**	**21,607**

Results, Cluj county

Real results (percentage)

Cluj	PDL	PSD	PNL	UDMR	Votes
1	**0.488**	0.171	0.106	0.172	**0.938**
2	**0.513**	0.163	0.099	0.154	**0.928**
3	**0.421**	0.170	0.145	0.194	**0.931**
4	**0.503**	0.130	0.102	0.204	**0.940**
5	0.257	0.178	**0.368**	0.103	**0.906**
6	0.243	**0.291**	0.243	0.092	**0.868**
7	0.331	**0.279**	0.113	0.161	**0.884**
8	0.401	0.231	**0.118**	0.088	**0.838**
9	0.442	0.173	0.127	**0.112**	**0.854**
10	0.362	0.128	0.055	**0.371**	**0.917**
Total	**3.960**	**1.913**	**1.477**	**1.651**	**9.002**
Mandates	**4**	**2**	**2**	**2**	**10**

Results, Cluj county

Real results (scaled percentages)

Cluj	PDL	PSD	PNL	UDMR	Total
1	**0.521**	0.182	0.113	0.184	**1.000**
2	**0.552**	0.175	0.107	0.165	**1.000**
3	**0.452**	0.183	0.156	0.208	**1.000**
4	**0.536**	0.138	0.109	0.218	**1.000**
5	0.283	0.196	**0.407**	0.114	**1.000**
6	0.280	**0.335**	0.280	0.106	**1.000**
7	0.374	**0.315**	0.128	0.182	**1.000**
8	0.478	0.275	**0.141**	0.105	**1.000**
9	0.517	0.203	0.148	**0.132**	**1.000**
10	0.395	0.140	0.060	**0.405**	**1.000**
Total	**4.389**	**2.143**	**1.649**	**1.818**	**10.000**
Mandates	**4**	**2**	**2**	**2**	**10**

Greedy algorithm

- The Greedy property / optimal substructure
  - The best next move always leads to the optimal solution
- Simple, but not always effective
- Example: the coins change problem
- Problem is parametrized
  - Coins face value
  - Depending on these, Greedy works or not
  - Examples:
    - Coins value is 1, 2, 5
    - Coins value is 1, 4, 5

Example (case study): 6 constituencies and 9 mandates

2 counties same data	C1	C2	C3	Total	remainder	total
P1	510	508	506	**1524**	**524**	**1048**
P2	280	281	282	**843**	**843**	**1686**
P3	210	211	212	**633**	**633**	**1266**
Total	**1000**	**1000**	**1000**	**3000**	3000/3=1000	

(continued)

Mandates allocation, step 1

P1 = 1	**P1 = 1**
P2 = 0	**P2 = 0**
P3 = 0	**P3 = 0**

non-allocated = 4 mandates

P1	**1048**	**524**	**349.33**	**262**
P2	**1686**	**843**	**562**	**421.50**
P3	**1266**	**633**	**422**	**316.50**

1686, 1266, 1048, **843**

(continued)

Mandates allocation, step 2

P1 = 1 = [1048/843]

P2 = 2 = [1686/843]

P3 = 1 = [1266/843]

Total mandates per country

P1 = 2 + 1 = 3

P2 = 0 + 2 = 2

P3 = 0 + 1 = 1

(continued)

Mandates allocation, step 3

	C1	C2	C1	C2
P1	524/1048*1 = 0.5	524/1048*1 = 0.5		**(2) gets 1**
P2	843/1686*2=1	843/1686*2=1	**(1) gets 2**	
P3	633/1266*1=0.5	633/1266*1=0.5		**(3) gets 1**
repartitor	0.5	0.5		

	C1	C2
P1	**1+0**	**1+1**
P2	**0+2**	**0+0**
P3	**0+0**	**0+1**

(continued)

Mandates assignment, step 1

510	**508**	**506**
280	281	282
210	211	212

510	**508**	**506**
280	281	282
210	211	212

Mandates assignment, step 3

510	**508**	**506**
280	**281**	**282**
210	211	212

510	**508**	**506**
280	281	282
210	211	**212**

Results, Cluj county (again) (fuzzy partition)

Real results (scaled percentages)

Cluj	PDL	PSD	PNL	UDMR	Total
1	**0.521**	0.182	0.113	0.184	**1.000**
2	**0.552**	0.175	0.107	0.165	**1.000**
3	**0.452**	0.183	0.156	0.208	**1.000**
4	**0.536**	0.138	0.109	0.218	**1.000**
5	0.283	0.196	**0.407**	0.114	**1.000**
6	0.280	**0.335**	0.280	0.106	**1.000**
7	0.374	**0.315**	0.128	0.182	**1.000**
8	0.478	0.275	**0.141**	0.105	**1.000**
9	0.517	0.203	0.148	**0.132**	**1.000**
10	0.395	0.140	0.060	**0.405**	**1.000**
Total	**4.389**	**2.143**	**1.649**	**1.818**	**10.000**
Mandates	**4**	**2**	**2**	**2**	**10**

Fuzzy and Crisp Partitions

ELSEVIER

Fuzzy Sets and Systems 73 (1995) 365–376

FUZZY sets and systems

Degenerate and non-degenerate convex decomposition of finite fuzzy partitions – I

D. Dumitrescu*, H.F. Pop

Faculty of Mathematics, "Babes-Bolyai" University of Cluj-Napoca, RO-3400, Cluj-Napoca, Romania

Received December 1993; revised June 1994

Fuzzy and Crisp Partitions

ELSEVIER

Fuzzy Sets and Systems 96 (1998) 111–118

FUZZY sets and systems

Degenerate and non-degenerate convex decomposition of finite fuzzy partitions (II)

D. Dumitrescu*, H.F. Pop

Faculty of Mathematics, "Babes-Bolyai" University of Cluj-Napoca, RO-3400 Cluj-Napoca, Romania

Received December 1993; revised June 1994

Partitions spaces

- Non-degenerate hard partitions

$$P_n = \left\{ U \in \{0,1\}^{n \times p} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1, j = 1, \ldots, p, \sum_{j=1}^{p} u_{ij} > 0, i = 1, \ldots, n \right\},$$

- Degenerate hard-partitions

$$P_{n0} = \left\{ U \in \{0,1\}^{n \times p} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1, j = 1, \ldots, p \right\},$$

- Non-degenerate fuzzy partitions

$$P_{fn} = \left\{ U \in [0,1]^{n \times p} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1, j = 1, \ldots, p, \sum_{j=1}^{p} u_{ij} > 0, i = 1, \ldots, n \right\},$$

- Degenerate fuzzy partitions

$$P_{fn0} = \left\{ U \in [0,1]^{n \times p} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1, j = 1, \ldots, p \right\},$$

MiniMax decomposition algorithm

MM convex decomposition algorithm

S1: $k := 1$; residual matrix $R := A$;

S2: $c_k := \min_{j=1,p} \max_{i=1,n} r_{ij}$;

S3: $J_{k,j} := \{t \mid r_{tj} = \max_{i=1,n} r_{ij}\}, j = 1, \ldots, p$;

S4: Let $i_j \in J_{k,j}$. We build U_k as follows: $u_{i_j,j} := 1$ and $u_{i,j} := 0, i \neq i_j$;

S5: $R := R - c_k \cdot U_k$;

S6: If $R = 0$ then STOP else $k := k + 1$ and go to S2.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Fuzzy cardinals
  - 1.7
  - 1.0
  - 1.2
- Crisp cardinals
  - 1
  - 2
  - 1

Counterexample

- Divisive Hierarchical Clustering
- $P = \{A_1, A_{21}, A_{22}\}$
  - $A_1(x) = 0.45$
  - $A_{21}(x) = 0.30$
  - $A_{22}(x) = 0.25$
- So, $x \in A_{21}$, and not $x \in A_1$
  - Why?

MiniMiniMax decomposition

MMM convex decomposition algorithm

S1: $k := 1$; residual matrix $R := A$;

S2: $c_k := \min_{j=1,p} \max_{i=1,n} r_{ij}$;

S3: $I_{k,j} := \{s | r_{sj} = \min_{i=1,n}\{r_{ij} | r_{ij} \geqslant c_k\}\}, j = 1, \ldots, p$;

S4: Let $i_j \in I_{k,j}$. We build U_k as follows: $u_{i_j,j} := 1$ and $u_{i,j} := 0, i \neq i_j$;

S5: $R := R - c_k \cdot U_k$;

S6: If $R = 0$ then STOP else $k := k + 1$ and go to S2.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Fuzzy cardinals
  - 1.7
  - 1.0
  - 1.2
- Crisp cardinals
  - 2
  - 1
  - 1

MM vs MMM - Results

- MM and MMM stop after a finite number of steps
- Any fuzzy partition may be decomposed in convex combination of degenerate crisp partitions
- All convex decompositions of a fuzzy partition by MM/MMM have the same length
- The coefficients sequence using MM/MMM is strictly decreasing

Third method: (non)degenerate decomposition

Theorem 1. *Let* $U \in P_{fn}$. *The necessary and sufficient condition for* U *to be in* $\operatorname{conv} P_n$ *is that*

$$\sum_{j=1}^{p} u_{ij} \geqslant 1, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Notations

Let $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$. A function $d: \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$ is called *a path through* U. A path through U is called *positive* if $u_{d(j),j} > 0$ for each j, $1 \leqslant j \leqslant p$. A positive and surjective path through U is called *complete*.

More notations

Let s in (0,1]. Consider matrix U in $[0,1]^{nxp}$ with property that

$$\sum_{i=1,n} U_i(x^j) = s, \text{ for any j}$$

$$\sigma_i(U) = \sum_{j=1,p} U_i(x^j), \text{ cardinal of } U_i$$

$$r_i(d) = \left| d^{-1}(i) \right|, \text{ number of hits in defuzzified partition}$$

Essential theorem

Theorem 3. *Let* $U \in [0,1]^{n \times p}, \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = s, 1 \leqslant j \leqslant p.$ *There does exist a positive path through* U*, called d, so that*

(i) $\sigma_i(U) \in (ks, (k+1)s) \Rightarrow r_i(d) \in \{k, k+1\};$

(ii) $\sigma_i(U) = ks \Rightarrow r_i(d) = k,$

where k is a non-negative integer.

Hint of proof (constructive)

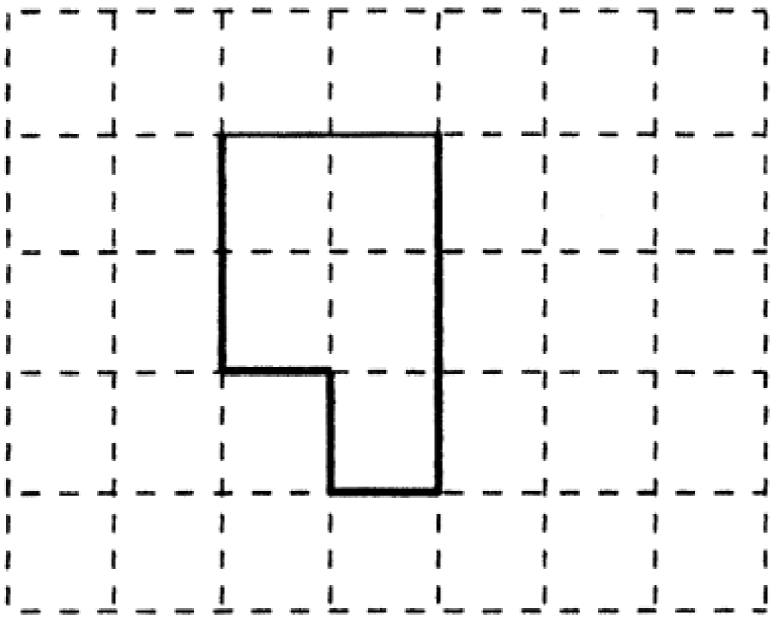
Proof. We try to build a matrix from $\{0, s\}^{n \times p}$ which will represent the positive path. For this, we will build a chain of transformations of the type $U \to V$, $U, V \in [0, s]^{n \times p}$, with the following properties:

(i) $\sum_{i=1}^{n} v_{ij} = s$, for each j, $1 \leqslant j \leqslant p$;
(ii) $\sigma_i(U) \in [ks, (k+1)s] \Rightarrow \sigma_i(V) \in [ks, (k+1)s]$;
(iii) $\sigma_i(U) = ks \Rightarrow \sigma_i(V) = ks$;
(iv) $u_{ij} = 0 \Rightarrow v_{ij} = 0$.

The chain will end with a matrix $V \in \{0, s\}^{n \times p}$, having the properties (i)–(iv) above.

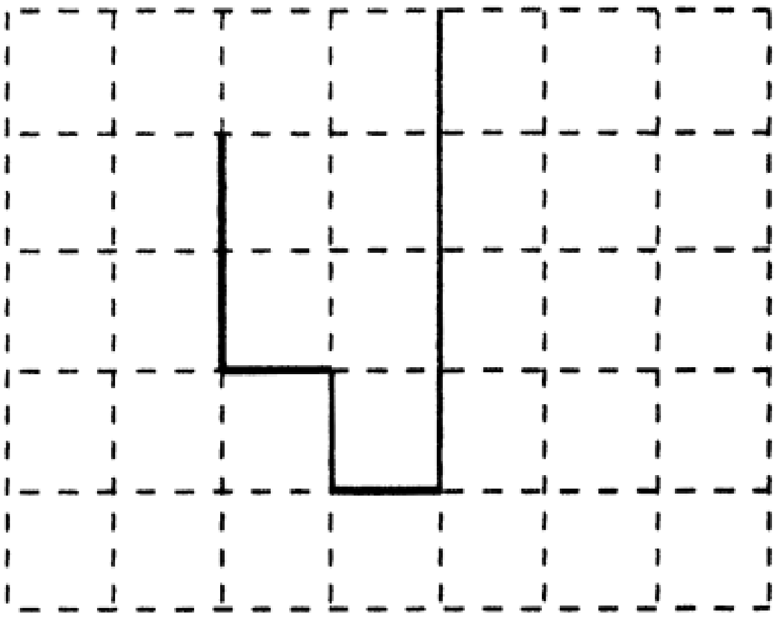
How to construct new matrix

We search in the matrix U two types of structures:



(i)

or



(ii)

(continued)

Now let u be the minimal element of the sequence. We modify the elements from the sequence by adding or subtracting u alternatively according to the following rules:

– the smallest element becomes zero (if there exist two smallest elements, this applies to only one of them);

– we add u to the neighbors of this element;

– we subtract u from the neighbors of these elements, and so on

The rest of the elements of the matrix remain unmodified. We remark that the sum of every two neighbors of the sequence remains unmodified.

Corollary

Corollary. *In the hypotheses of the theorem, we have*

$$\left[\frac{\sigma_i(U)}{s}\right] < \left[\frac{\sigma_j(U)}{s}\right] \Rightarrow r_i(d) \leqslant r_j(d),$$

$$\left[\frac{\sigma_i(U)}{s}\right] = \left[\frac{\sigma_j(U)}{s}\right] \Rightarrow |r_i(d) - r_j(d)| \leqslant 1,$$

where $[x]$ *denotes the integer part of the real number* x.

DNDCD Algorithm

Degenerate and non-degenerate convex decomposition (DNDCD) algorithm

S1: Put $k := 1$; $s := 1$. Initialize the residual matrix $R := A$.

S2: Using the procedure described in the proof of Theorem 3, build the positive path through R and the matrix $U_k \in \{0, 1\}^{n \times p}$ corresponding to this positive path.

S3: Let us denote by α the minimal value of the elements through the path:

$$\alpha = \min_{j=1,\, p} I_{d(j),\, j}.$$

Let us denote by $I_k = \{i \mid \sigma_i(R) \geqslant s\}$. Let β be a number in (0, 1) such that

$$\beta = \min\left\{\frac{\sigma_i(R) - s}{r_i(d) - 1} \,\middle|\, i \in I_k, \sigma_i(R) \neq s, r_i(d) \neq 1\right\}.$$

Let us denote $c_k = \min\{\alpha, \beta\}$ (this modality of computing c_k has some properties described later in this paper).

S4: Put $R := R - c_k U_k$; $s := s - C_k$.

S5: If $R = 0$ then STOP, else $k := k + 1$ and go to S2.

Limited cardinality

Proposition 6 (Limited cardinality). *If $A \in P_{fn0}$ and $U \in P_{n0}$ is the dominant matrix of the convex decomposition of the matrix A, then*

(i) $[\sigma_i(A)] < [\sigma_j(A)] \Rightarrow \sigma_i(U) \leqslant \sigma_j(U)$,

(ii) $[\sigma_i(A)] = [\sigma_j(A)] \Rightarrow |\sigma_i(U) - \sigma_j(U)| \leqslant 1$.

Example

$$R = A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Fuzzy cardinals
  - 1.7
  - 1.0
  - 1.2
- Crisp cardinals
  - 2
  - 1
  - 1

Example (case study)

0.500010	0.500010	0.500010	1.000000	0.129940	0.370090
0.290030	0.290020	0.290010	0.000000	0.870060	0.000000
0.209960	0.209970	0.209980	0.000000	0.000000	0.629910
0.500010	0.500010	0.500010	1.000000	0.129940	0.370090
0.290030	0.499990	0.080040	0.000000	0.870060	0.000000
0.209960	0.000000	0.419950	0.000000	0.000000	0.629910
0.500010	0.419970	0.580050	1.000000	0.000000	0.500030
0.290030	0.580030	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
0.209960	0.000000	0.419950	0.000000	0.000000	0.499970
0.709970	0.419970	0.370090	1.000000	0.000000	1.000000
0.290030	0.580030	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.629910	0.000000	0.000000	0.000000

Example (case study)

0.500010 0.500010 0.500010 0.500010 0.500010 0.500010
0.290060 0.290050 0.290040 0.290030 0.290020 0.290010
0.209930 0.209940 0.209950 0.209960 0.209970 0.209980

0.500010 0.500010 0.500010 0.500010 0.500010 0.500010
0.290060 0.290050 0.290040 0.290030 0.499990 0.080040
0.209930 0.209940 0.209950 0.209960 0.000000 0.419950

0.500010 0.500010 0.500010 0.500010 0.419970 0.580050
0.290060 0.290050 0.290040 0.290030 0.580030 0.000000
0.209930 0.209940 0.209950 0.209960 0.000000 0.419950

0.209980 0.500010 0.500010 0.790040 0.419970 0.580050
0.580090 0.290050 0.290040 0.000000 0.580030 0.000000
0.209930 0.209940 0.209950 0.209960 0.000000 0.419950

0.209980 0.500010 0.500010 1.000000 0.419970 0.370090
0.580090 0.290050 0.290040 0.000000 0.580030 0.000000
0.209930 0.209940 0.209950 0.000000 0.000000 0.629910

0.000000 0.500010 0.500010 1.000000 0.629950 0.370090
0.790070 0.290050 0.290040 0.000000 0.370050 0.000000
0.209930 0.209940 0.209950 0.000000 0.000000 0.629910

0.000000 0.500010 0.790050 1.000000 0.339910 0.370090
0.790070 0.290050 0.000000 0.000000 0.660090 0.000000
0.209930 0.209940 0.209950 0.000000 0.000000 0.629910

0.000000 0.500010 0.790050 1.000000 0.339910 0.370090
1.000000 0.080120 0.000000 0.000000 0.660090 0.000000
0.000000 0.419870 0.209950 0.000000 0.000000 0.629910

0.000000 0.290060 1.000000 1.000000 0.339910 0.370090
1.000000 0.080120 0.000000 0.000000 0.660090 0.000000
0.000000 0.629820 0.000000 0.000000 0.000000 0.629910

0.000000 0.000000 1.000000 1.000000 0.339910 0.660150
1.000000 0.080120 0.000000 0.000000 0.660090 0.000000
0.000000 0.919880 0.000000 0.000000 0.000000 0.339850

0.000000 0.000000 1.000000 1.000000 0.259790 0.660150
1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.740210 0.000000
0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.339850

0.000000 0.000000 1.000000 1.000000 0.000000 0.919940
1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000
0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.080060

0.000000 0.000000 1.000000 1.000000 0.000000 1.000000
1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000
0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

Example (Cluj county)

0.520738	0.552417	0.452312	0.535585	0.283301	0.279723	0.374337	0.478469	0.517336	0.395272
0.181927	0.175383	0.183193	0.138259	0.196147	0.334730	0.315482	0.275385	0.202624	0.140031
0.113461	0.106765	0.156172	0.108609	0.406923	0.279723	0.127885	0.141225	0.148490	0.060093
0.183873	0.165435	0.208323	0.217546	0.113629	0.105824	0.182295	0.104920	0.131550	0.404603

= 4.389491
= 2.143161
= 1.649347
= 1.818001

1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 = 5 2.604546
0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 = 2 0.650212
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 = 1 0.406923
0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 = 2 0.612927
4.274607

1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 = 5 2.578388
0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 = 3 0.925597
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 = 1 0.406923
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 = 1 0.404603
4.315512

Remarks & Conclusions

- Method not leading to unique results
  - Limited cardinality property is guaranteed
- How to select the best solution?
- Answer is problem dependent
- For elections:
  - Total vote percentage of selected mandates should be maximal at national (not county) level
- To follow:
  - A nice topic for an M.Sc. disertation (to start with)