Probleme de satisfacere a restricțiilor

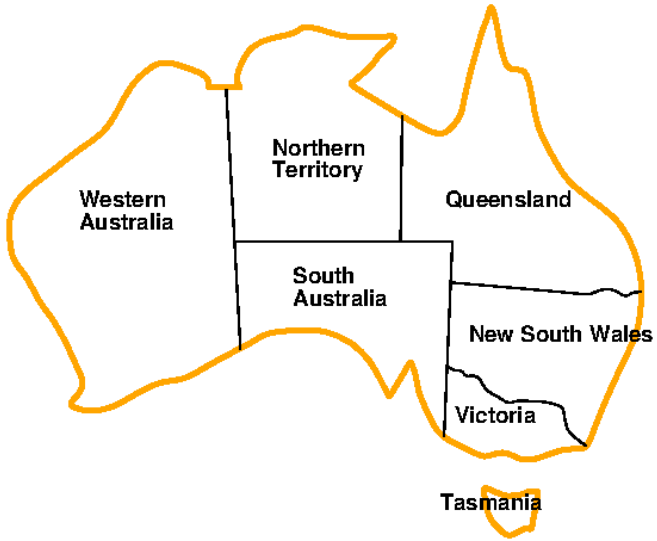
IA 2023/2024

Conținut

Probleme de satisfacere a constrângerilor (CSP)

- Sunt definite prin: variabilele X_i cu valori din domeniul D_i și o mulțime de constrângeri care specifică combinațiile permise de valori pentru submulțimi de variabile.
- O asignare este *consistentă* dacă nu sunt încălcate constrângeri. O asignare este *completă* dacă include toate variabilele.
  Soluție: o asignare completă de valori variabilelor a.î. toate constrângerile sunt satisfăcute.
- NP-hard
  - algoritmi cu *scop-general*, mai puternici decât algoritmii de căutare standard
- MaxCSP: maximizează numărul de constrângeri satisfăcute

Exemplu: Colorarea unei hărți



Variabile: WA, NT, Q, NSW, V, SA, T

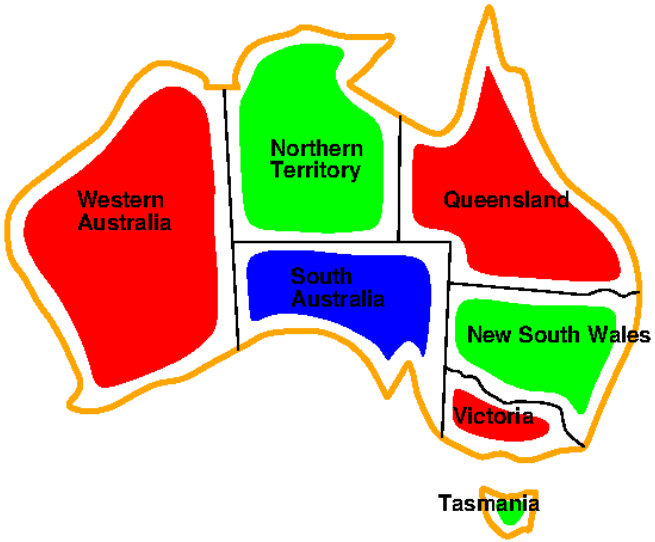
Domenii: $D_i = \{red, green, blue\}$

Constrângeri: regiunile adiacente trebuie să aibă culori diferite

$WA \neq NT$ (dacă limbajul permite), sau

$(WA, NT) \in \{(red, green), (red, blue), (green, red), (green, blue), \ldots\}$

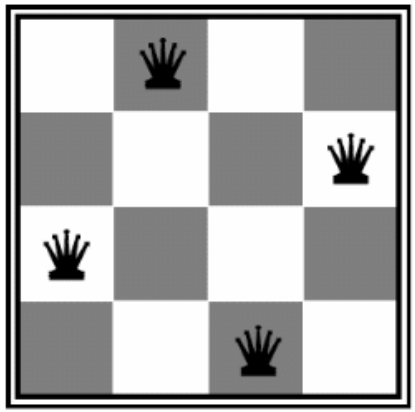
Exemplu: Colorarea unei hărți



Soluțiile sunt asignări care satisfac toate restricțiile.
$\{WA = red, NT = green, Q = red, NSW = green, V = red, SA = blue, T = green\}$

Exemplu: N-Regine

Formularea 1:



Variabile: X_{ij}

Domenii: $\{0, 1\}$

Constrângeri $\sum_{i,j} X_{ij} = N$

$$\forall i, j, k \quad (X_{ij}, X_{ik}) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

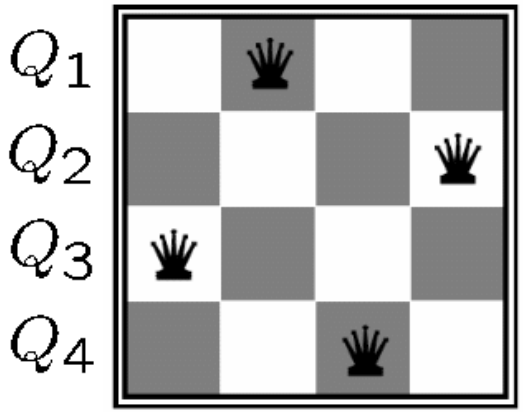
$$\forall i, j, k \quad (X_{ij}, X_{kj}) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

$$\forall i, j, k \quad (X_{ij}, X_{i+k,j+k}) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

$$\forall i, j, k \quad (X_{ij}, X_{i+k,j-k}) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

Exemplu: N-Regine

Formularea 2:



Variabile: Q_k
Domenii: $\{1, 2, 3, ..., N\}$
Constrângeri
Implicit: $\forall i, j \quad non - threatening(Q_i, Q_j)$
Explicit: $(Q_1, Q_2) \in \{(1, 3), (1, 4), ...\}...$

Exemplu: Sudoku

Variabile: $x_{ij} \in \{1, ..., 9\} =: N$ (valorile din celulele corespunzătoare)
Restricții de inegalitate (perechi): toate valorile de pe o linie, coloană, regiune sunt diferite

$$x_{ij} \neq x_{ik} \qquad \forall k \neq i, j \in N, (linie)$$
$$x_{ij} \neq x_{kj} \qquad \forall k \neq i, j \in N, (coloana)$$
$$x_{i_1 j_1} \neq x_{i_2 j_2} \quad \forall (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2) \in C_{ij}, \forall i, j \in N' = \{1, 2, 3\}, (regiune)$$
$$x_{ij} \in N \qquad \forall i, j \in N$$

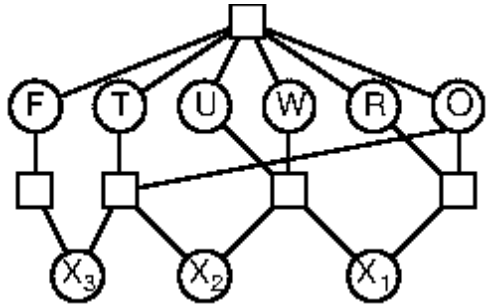
$$C_{ij} = \{(3(i-1) + i', 3(j-1) + j') | (i', j') \in N' x N'\}$$

Se poate utiliza restricția globală `alldifferent` pentru o formulare mai puternică:

$$alldifferent(x_{ij} | j \in N)\ \forall i \in N, (linie)$$
$$alldifferent(x_{ij} | i \in N)\ \forall j \in N, (coloana)$$
$$alldifferent(C_{ij})\ \forall i, j \in N', (regiune)$$
$$x_{i,j} \in N\ \forall i, j \in N$$

Exemplu: Cryptarithmetic puzzle

$$\begin{array}{r} \,T\;W\;O \\ +\;T\;W\;O \\ \hline F\;O\;U\;R \end{array}$$



Variabile: $F\ T\ U\ W\ R\ O\ X_1\ X_2\ X_3$

Domenii: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Constrângeri:

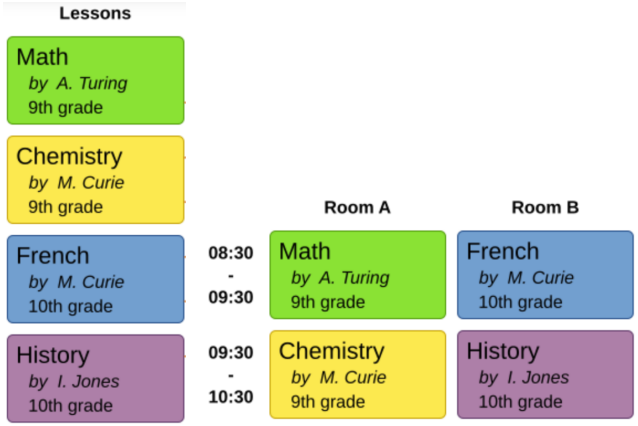
$alldiff(F, T, U, W, R, O)$

$O + O = R + 10 \cdot X_1$, etc.

Exemplu: planificarea orarului

Planificarea orarului profesorilor și a elevilor

- Variabile: profesori, materii, clase, săli, intervale orare
- Constrângeri:
  - un profesor predă anumite materii
  - o materie este ținută la anumite clase
  - un profesor preferă anumite intervale orare, etc.



Exemplu: *Job-shop scheduling*

Asamblarea unei mașini

- Sarcini: instalează axele (față, spate), fixează roțile, strânge piulițele (pentru fiecare roată), fixează capacele roților, inspectează ansamblul final.
  Modelare: variabila: sarcină, valoare: timpul la care începe (minute).
  $X = \{Axle_F, Axle_B, Wheel_{RF}, Wheel_{LF}, Wheel_{RB}, Wheel_{LB}, Nuts_{RF}, Nuts_{LF}, Nuts_{RB}, Nuts_{LB}, Cap_{RF}, Cap_{LF}, Cap_{RB}, Cap_{LB}, Inspect\}$

- Constrângeri:
  - o sarcină trebuie să înceapă înaintea alteia (o roată trebuie instalată înaintea capacului)
    $T_1 + d_1 \leq T_2$ (T_1 trebuie să înceapă înaintea lui T_2)
  - o sarcină necesită o perioadă de timp pentru a fi finalizată

Exemplu: *Job-shop scheduling*

Asamblarea unei mașini. Constrângeri:

- Axele trebuie instalate înaintea roților
  $Axle_F + 10 \leq Wheel_{RF}$
- După fixarea roților, strânge piulițele și apoi atașează capacele
  $Wheel_{RF} + 1 \leq Nuts_{RF}$; $Nuts_{RF} + 2 \leq Cap_{RF}$
- Pentru a așeza axele, se utilizează un instrument ($Axle_F$, $Axle_B$ nu se suprapun)
  $(Axle_F + 10 \leq Axle_B)$ **or** $(Axle_B + 10 \leq Axle_F)$
- Inspecția este la sfârșit și durează 3 minute
  $X + d_X \leq Inspect$
- Ansamblul trebuie terminat în 30 de minute
  $D = \{1, 2, 3, ..., 27\}$

Probleme din lumea reală

- Planificarea orarului personalului medical
- Planificarea transportului în comun, a construcției unei fabrici, *Floorplanning*, etc.
- *Meeting scheduling*
- Probleme de asignare (a profesorilor la clase)
- Configurare hardware

Obs: multe probleme din lumea reală implică variabile cu valori reale

`https://www.csplib.org/Problems/`

Tipuri de variabile

- Variabile discrete
  - domenii finite; dimensiune domeniu $d \implies O(d^n)$ asignări complete
    - ex: Boolean CSPs, incl. Boolean satisfiability (NP-complete)
  - domenii infinite (întregi, șiruri de caractere, etc.)
    - ex: job scheduling
    - constrângeri liniare (rezolvabil), neliniare (nedecidabil)

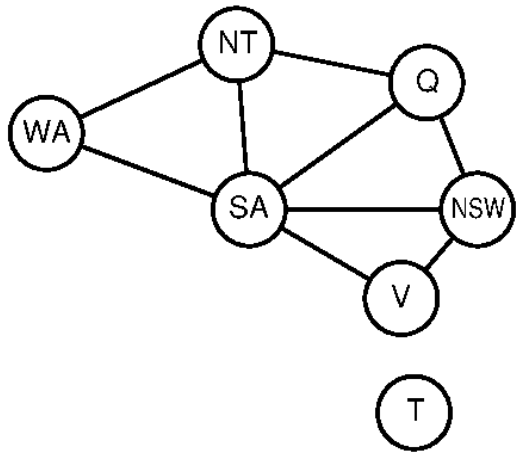
- Variabile continue
  - ex: timpii de început/sfârșit pentru observațiile furnizate de telescopul Hubble
  - constrângeri liniare (rezolvabile în timp polinomial cu metode de programare liniară)

Tipuri de constrângeri

- Constrângeri unare implică o singură variabilă
  ex: $SA \neq green$
- Constrângeri binare implică perechi de variabile
  ex: $SA \neq WA$
  Probleme CSP binare: fiecare constrângere se referă la cel mult două variabile
- Constrângeri de ordin superior implică 3 sau mai multe variabile
  ex: constrângerile din exemplul *cryptarithmetic puzzle*
- Preferințe (restricții soft) ex: *roșu* este mai bun decât *verde*
  reprezentate prin costuri asociate asignărilor $\rightarrow$ probleme de optimizare

Graful de restricții

Nodurile sunt variabile, muchiile reprezintă restricții



Algoritmii cu scop-general utilizează structura grafului pentru a accelera căutarea (ex: Tasmania este o subproblemă independentă)

Conținut

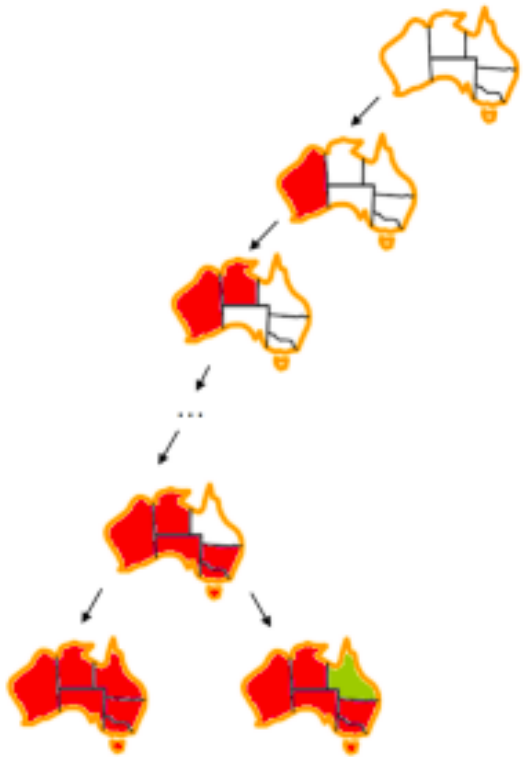
Formularea standard (căutare incrementală)

Stările sunt definite prin valorile asignate.

- Starea inițială: asignarea vidă, $\emptyset$
- Funcția succesor: atribuie o valoare unei variabile neasignate
- Testarea obiectivului: asignarea curentă este completă

Formularea standard (căutare incrementală)

- Soluțiile se găsesc la adâncimea n în arbore (n variabile asignate) $\Longrightarrow$ utilizează DFS
- Factorul de ramificare este nd, la următorul nivel $(n-1)d$, etc. $\rightarrow$ $n!d^n$ frunze, d^n asignări posibile



Backtracking

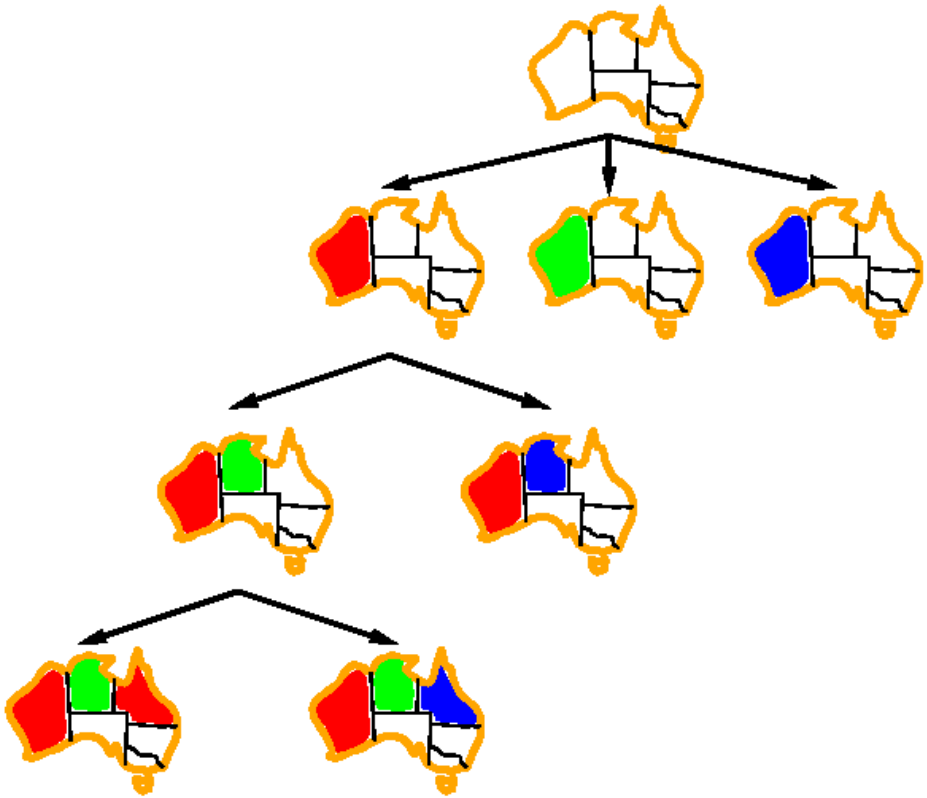
Asignările variabilelor sunt comutative
$[WA = red \text{ then } NT = green]$ la fel ca $[NT = green \text{ then } WA = red]$

La fiecare nod considerăm asignarea unei singure variabile
(nu intră în conflict cu asignarea curentă)
$\Longrightarrow$ d noduri pe nivel și d^n frunze

Căutarea DFS pentru CSP cu asignări pentru o singură variabilă: backtracking. Backtracking este algoritmul de bază neinformat pentru CSP.

Exemplu Backtracking

Când un nod este extins, se verifică dacă fiecare stare următoare este consistentă, înainte de a fi adăugată.



Backtracking

```
function BACKTRACKING-SEARCH(csp) returns solution/failure
    return RECURSIVE-BACKTRACKING({ }, csp)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp) returns soln/failure
    if assignment is complete then return assignment
    var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[csp], assignment, csp)
    for each value in ORDER-DOMAIN-VALUES(var, assignment, csp) do
        if value is consistent with assignment given CONSTRAINTS[csp] then
            add {var = value} to assignment
            result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp)
            if result ≠ failure then return result
            remove {var = value} from assignment
    return failure
```

Backtracking = DFS + ordonarea variabilelor + *fail-on-violation*

Poate rezolva problema celor n regine pentru $n \approx 25$.

Conținut

Îmbunătățirea eficienței algoritmului Backtracking

1. Ce variabilă trebuie asignată?
2. În ce ordine trebuie verificate valorile?
3. Putem detecta eșecul mai devreme?
4. Putem profita de structura problemei?

1. Minimum-remaining-values

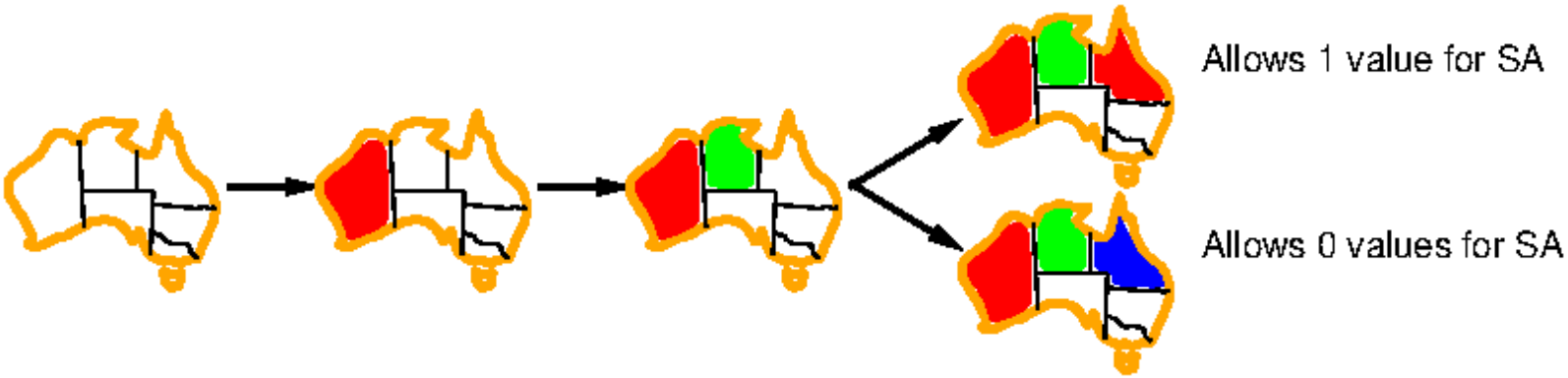
Minimum-remaining-values (MRV): alege variabila cu cele mai puține valori permise (variabila cea mai constrânsă).

"Fail-first" heuristic

2. Least-constraining-value

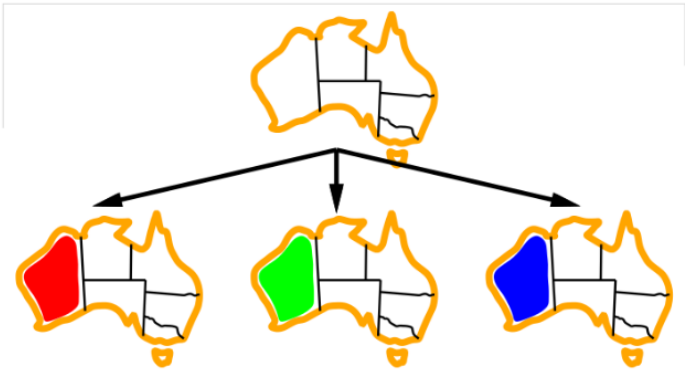
Least-constraining-value: alege valoarea cea mai puțin constrânsă
(cea care exclude cele mai puține valori)

Exemplu: ce valoare alegem pentru Q?



Combinarea acestor euristici face posibilă rezolvarea problemei 1000-regine.

Chestionar



Question!

Variable order WA, NT, Q, NSW, V, T, SA. Tightest upper bound on naïve backtracking search space size?

(A): 145 (B): 382

(C): 433 (D): 3^7

Chestionar

Question!

Variable order SA, NT, Q, NSW, V, WA, T. Tightest upper bound on naïve backtracking search space size?

(A): 52 (B): 145

(C): 382 (D): 433

Forward checking

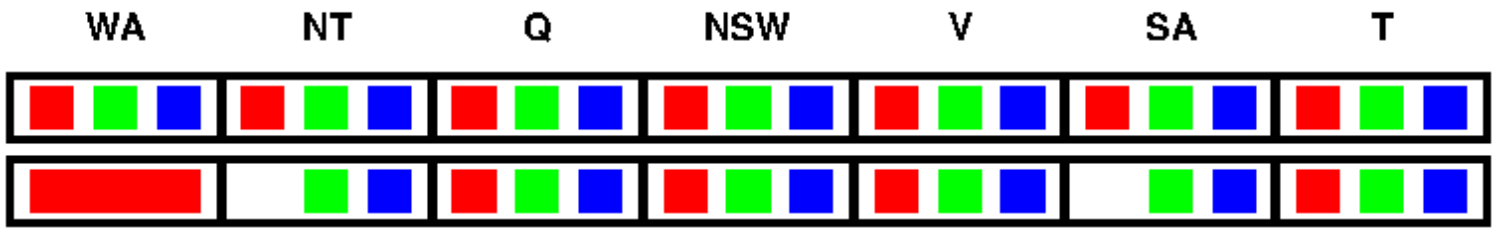
Idee: actualizează domeniul variabilelor neasignate

- atunci când selectăm o valoare pentru o variabilă, elimină valoarea din domeniul variabilelor neasignate, conectate cu aceasta

Forward checking

Idee: actualizează domeniul variabilelor neasignate

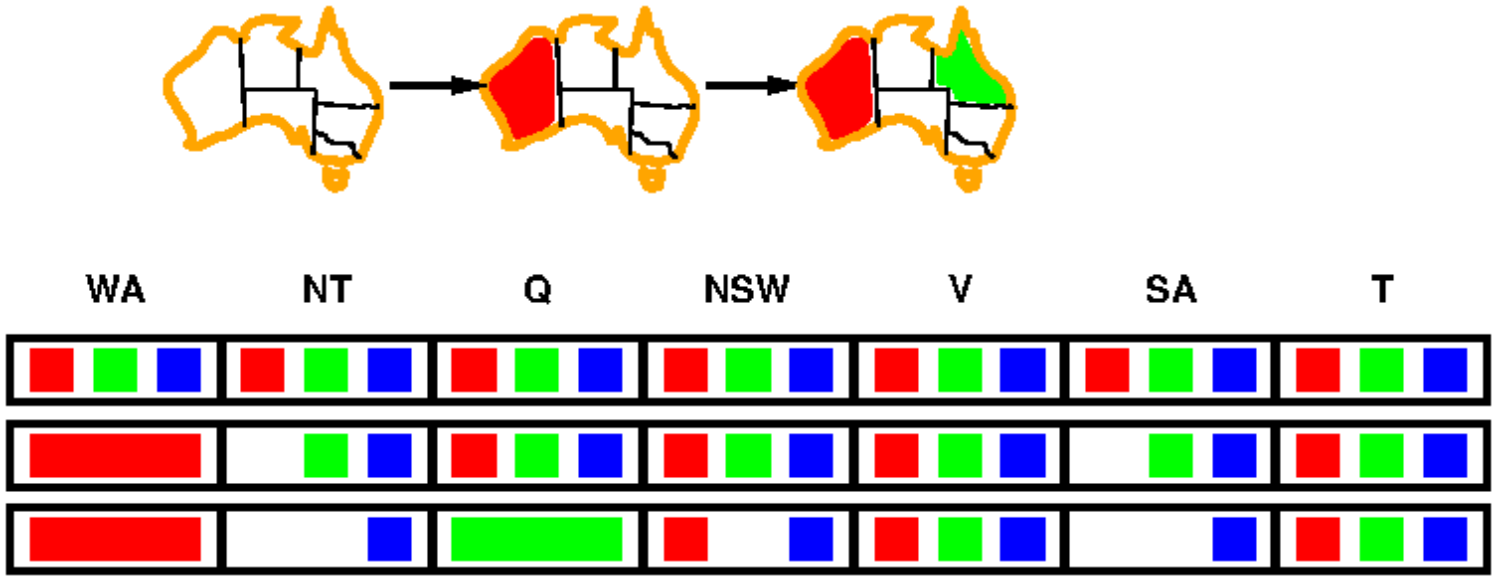
- atunci când selectăm o valoare pentru o variabilă, elimină valoarea din domeniul variabilelor neasignate, conectate cu aceasta



Forward checking

Idee: actualizează domeniul variabilelor neasignate

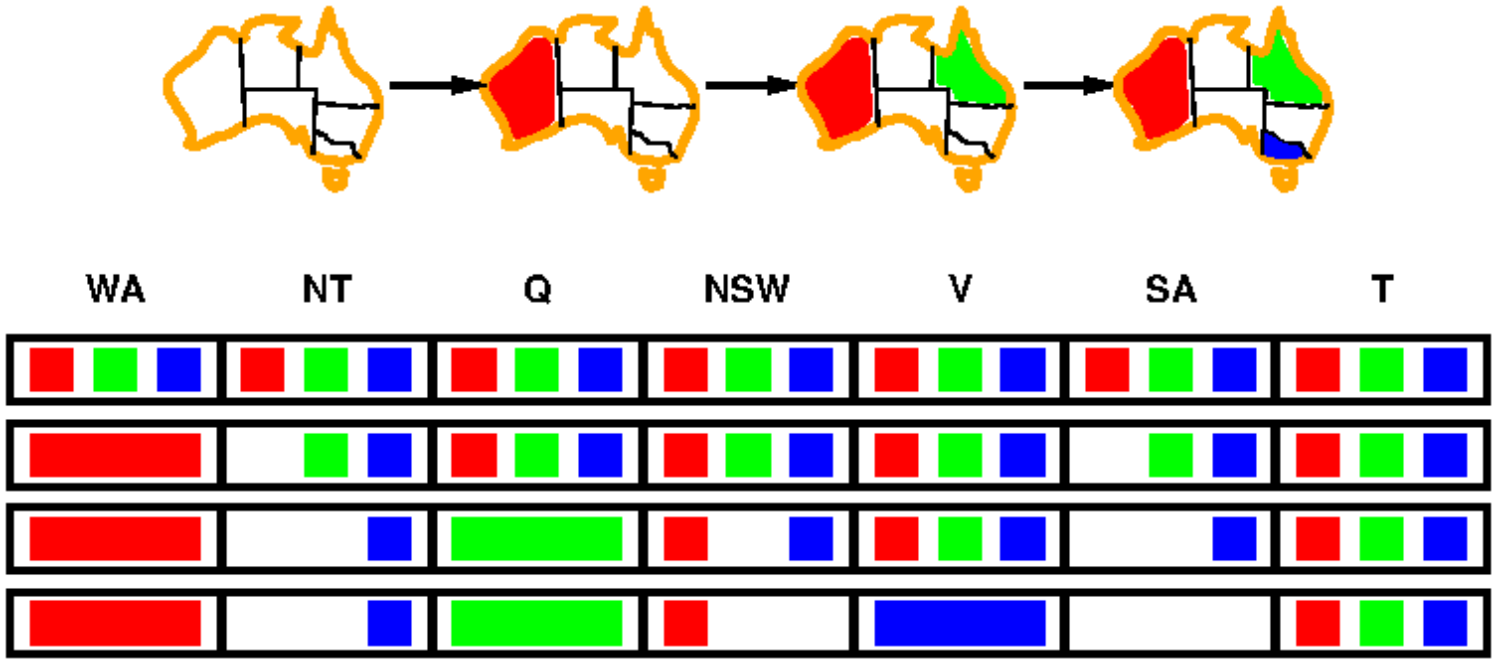
- atunci când selectăm o valoare pentru o variabilă, elimină valoarea din domeniul variabilelor neasignate, conectate cu aceasta



Forward checking

Idee: actualizează domeniul variabilelor neasignate

- atunci când selectăm o valoare pentru o variabilă, elimină valoarea din domeniul variabilelor neasignate, conectate cu aceasta



Forward checking - algoritm

procedure SELECTVALUE-FORWARD-CHECKING

while D'_i is not empty
select an arbitrary element $a \in D'_i$, and remove a from D'_i
empty-domain $\leftarrow$ *false*
for all k, $i < k \leq n$
for all values b in D'_k
if not CONSISTENT$(\vec{a}_{i-1}, x_i{=}a, x_k{=}b)$
remove b from D'_k
end for
if D'_k is empty ($x_i = a$ leads to a dead-end)
empty-domain $\leftarrow$ *true*
if *empty-domain* (don't select a)
reset each D'_k, $i < k \leq n$ to value before a was selected
else
return a
end while
return null (no consistent value)
end procedure

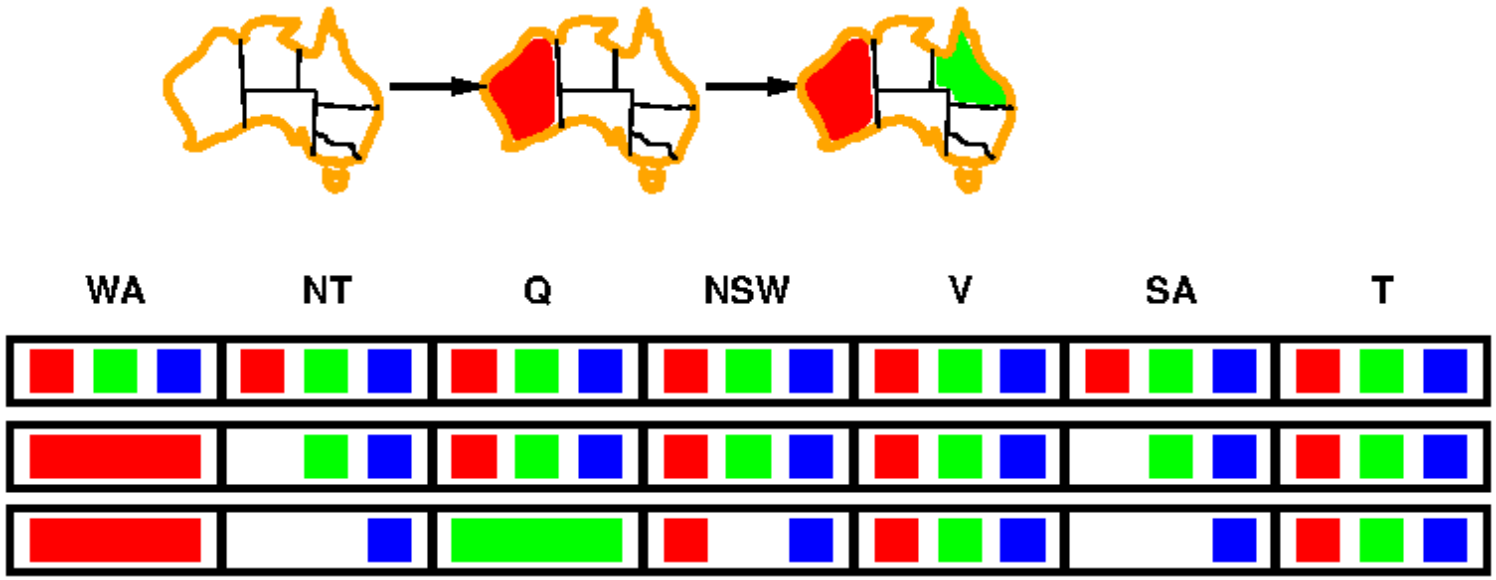
Generalized look ahead

procedure GENERALIZED-LOOKAHEAD
Input: A constraint network $P = (X, D, C)$
Output: Either a solution, or notification that the network is inconsistent.

```
D'_i ← D_i for 1 ≤ i ≤ n          (copy all domains)
i ← 1                            (initialize variable counter)
while 1 ≤ i ≤ n
    instantiate x_i ← SELECTVALUE-XXX
    if x_i is null               (no value was returned)
        i ← i − 1                (backtrack)
        reset each D'_k, k > i, to its value before x_i was last instantiated
    else
        i ← i + 1                (step forward)
end while
if i = 0
    return "inconsistent"
else
    return instantiated values of {x_1, ..., x_n}
end procedure
```

Propagarea constrângerilor

Forward checking propagă informații la variabile neasignate, dar nu asigură detectarea timpurie a eșecurilor:



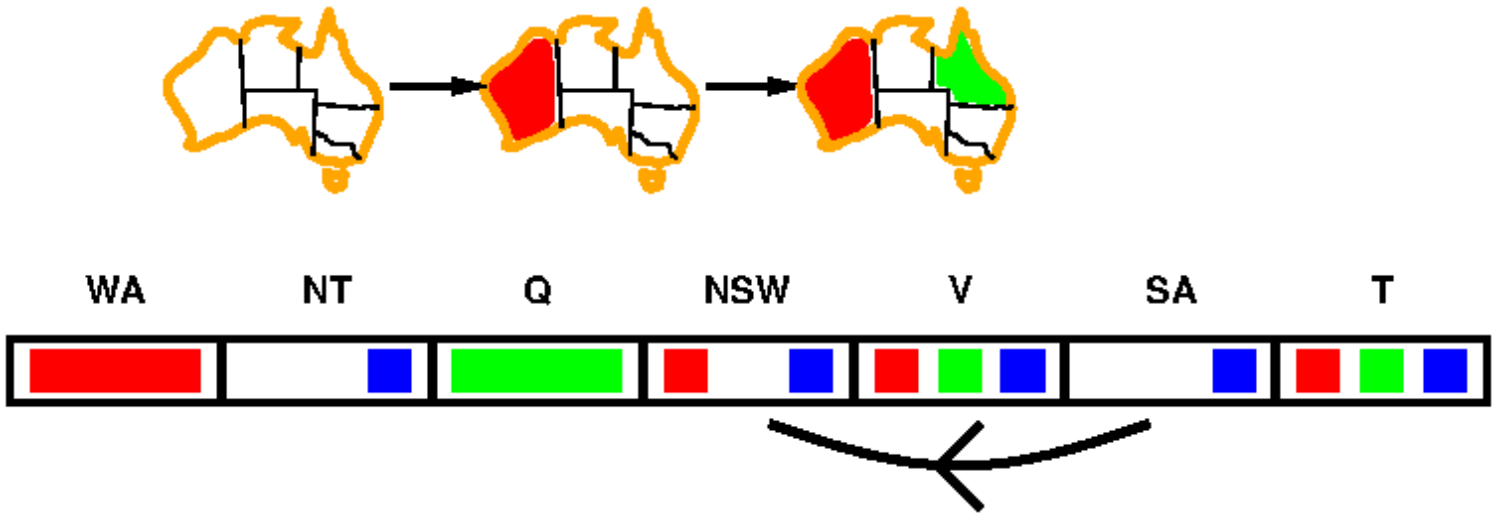
NT și *SA* nu pot fi colorate ambele cu albastru!
Nu există propagare între variabilele neasignate! $\rightarrow$ *Singleton domains*

Aplică în mod repetat constrângerile la nivel local.

Arc consistency

Arc consistency: cea mai simplă formă de propagare; face ca fiecare arc să fie consistent.

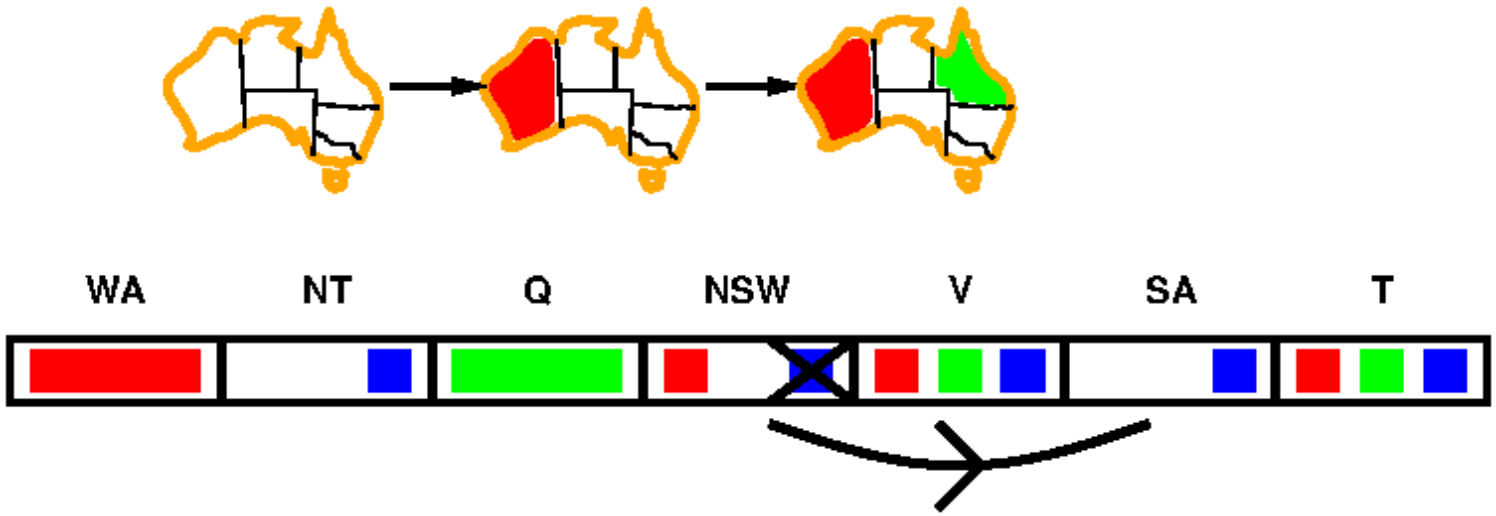
$X \to Y$ este consistent dacă și numai dacă
pentru *fiecare* valoare x a lui X, există *o* valoare permisă y pentru Y



Arc consistency

Arc consistency: cea mai simplă formă de propagare; face ca fiecare arc să fie consistent.

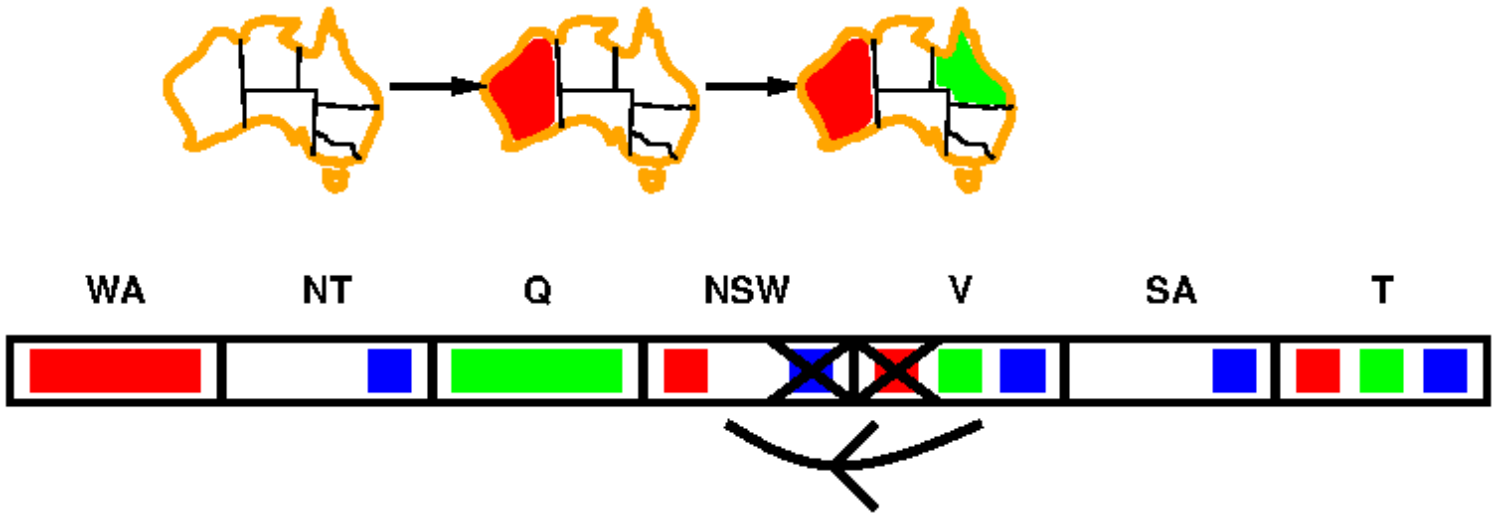
$X \to Y$ este consistent dacă și numai dacă
pentru *fiecare* valoare x a lui X, există *o* valoare permisă y pentru Y



Arc consistency

Arc consistency: cea mai simplă formă de propagare; face ca fiecare arc să fie consistent.

$X \to Y$ este consistent dacă și numai dacă
pentru *fiecare* valoare x a lui X, există *o* valoare permisă y pentru Y

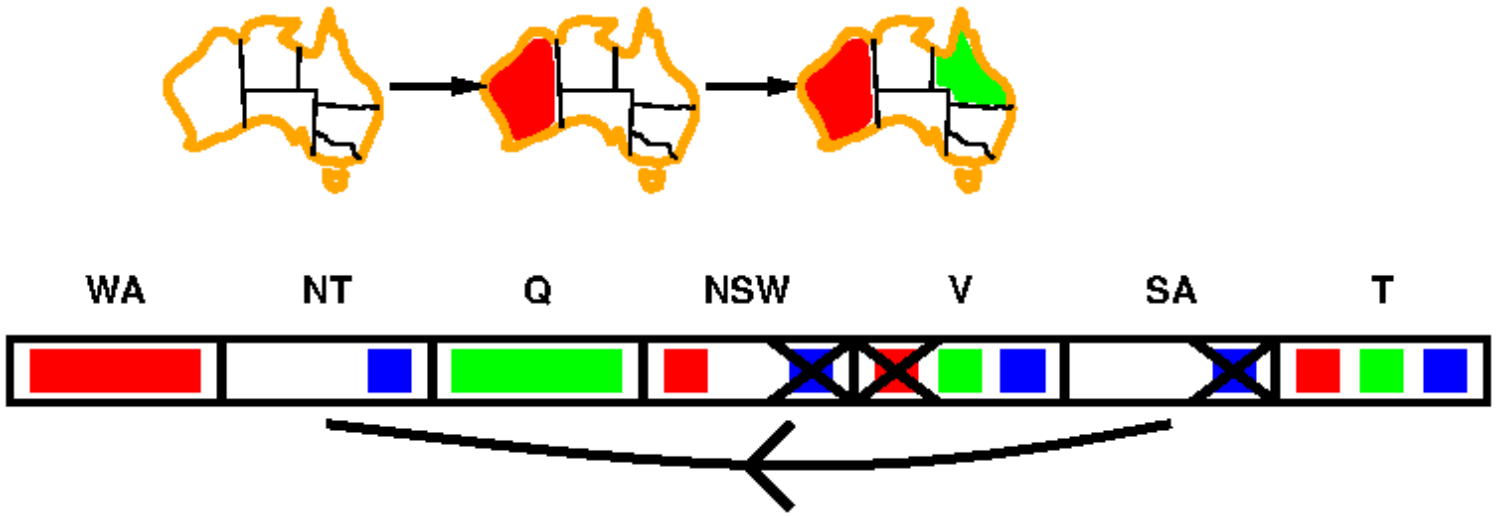


Dacă X pierde o valoare, vecinii lui X trebuie verificați.

Arc consistency

Arc consistency: cea mai simplă formă de propagare; face ca fiecare arc să fie consistent.

$X \to Y$ este consistent dacă și numai dacă
pentru *fiecare* valoare x a lui X, există *o* valoare permisă y pentru Y



Daca X pierde o valoare, vecinii lui X trebuie verificați.

Arc consistency detectează eșecul mai devreme decât *Forward checking*.

Poate fi executat ca un pas de preprocesare sau după fiecare asignare.

Algoritmul Arc consistency

function AC-3(*csp*) **returns** the CSP, possibly with reduced domains
  inputs: *csp*, a binary CSP with variables $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
  local variables: *queue*, a queue of arcs, initially all the arcs in *csp*

  while *queue* is not empty **do**
    $(X_i, X_j) \leftarrow$ REMOVE-FIRST(*queue*)
    if REMOVE-INCONSISTENT-VALUES(X_i, X_j) **then**
      for each X_k **in** NEIGHBORS[X_i] **do**
        add (X_k, X_i) to *queue*

---

function REMOVE-INCONSISTENT-VALUES(X_i, X_j) **returns** true iff succeeds
  removed $\leftarrow$ *false*
  for each x **in** DOMAIN[X_i] **do**
    if no value y in DOMAIN[X_j] allows (x,y) to satisfy the constraint $X_i \leftrightarrow X_j$
      then delete x from DOMAIN[X_i]; *removed* $\leftarrow$ *true*
  return *removed*

Complexitate timp: $O(n^2d^3)$; versiuni $O(n^2d^2)$.

Propagarea constrângerilor

- 3-consistență (*path consistency*), k-consistență
  k-consistență: orice asignare consistentă a $k-1$ variabile poate fi extinsă la o instanțiere de k variabile

  Dacă o problemă CSP cu n variabile este n-consistentă, atunci nu mai e necesară căutarea Backtracking.

- Utilizarea tehnicilor de propagare a constrângerilor implică și o creștere a timpului de execuție
  - un compromis între propagare și căutare; dacă propagarea durează mai mult decât căutarea, atunci nu se merită

- Consistență direcțională

Conflict-Directed Backjumping (CBJ)

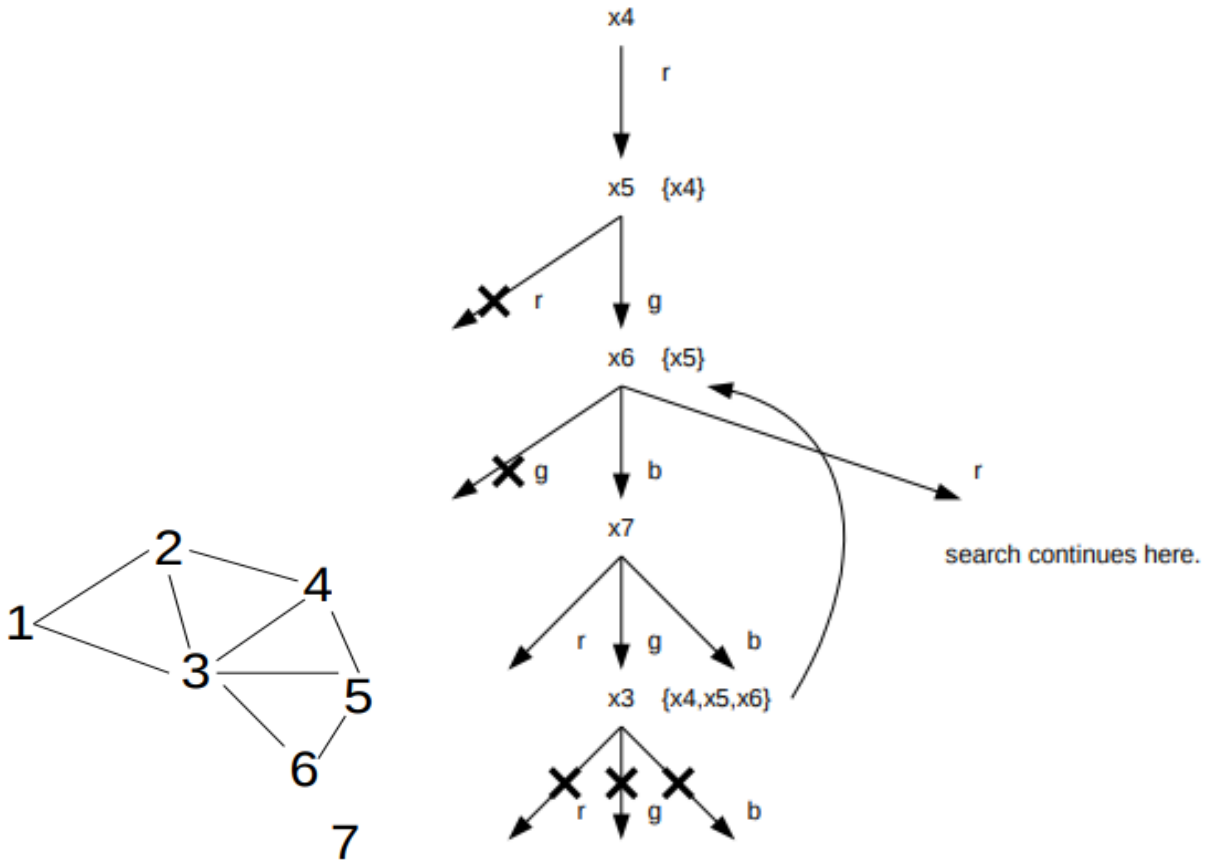
- Backtracking: ne întoarcem la variabila anterioară pentru a-i asigna o nouă valoare
  - ne întoarcem UN nivel în arborele de căutare
- Când ajungem într-un punct din care nu mai putem continua (datorită unei inconsistențe), putem încerca să identificăm cauza problemei
  - în loc să ne întoarcem un nivel, ne putem întoarce direct la variabila care a cauzat problema

Conflict-Directed Backjumping

- Idee: Menține o mulțime de conflicte CONFLICT SET pentru fiecare variabilă (actualizată pe măsură ce asignăm valori variabilelor)
- Considerăm variabila curentă X_i. Mulțimea CONFLICT SET a lui X_i este mulțimea de VARIABILE ASIGNATE ANTERIOR conectate cu X_i (datorită unei restricții)
- Dacă nu am identificat o asignare validă pentru variabila curentă X_i, ne ÎNTOARCEM la variabila X_k, din mulțimea de conflicte a lui X_i, cea mai apropiată
- Actualizăm mulțimea de conflicte a lui X_k
$CONFLICT\_SET(X_k) =$
$CONFLICT\_SET(X_k) \cup CONFLICT\_SET(X_i) \setminus X_k$

Conflict-Directed Backjumping

Exemplu: colorarea unei hărți



X_7 nu este în mulțimea de conflicte a lui X_3; ne întoarcem la cea mai apropiată variabilă din mulțimea de conflicte (X_6)

Conflict-Directed Backjumping

procedure CONFLICT-DIRECTED-BACKJUMPING
Input: A constraint network $\mathcal{R} = (X, D, C)$.
Output: Either a solution, or a decision that the network is inconsistent.

$i \leftarrow 1$ (initialize variable counter)
$D'_i \leftarrow D_i$ (copy domain)
$J_i \leftarrow \emptyset$ (initialize conflict set)
while $1 \leq i \leq n$
  instantiate $x_i \leftarrow$ SELECTVALUE-CBJ
  if x_i is null (no value was returned)
    $iprev \leftarrow i$
    $i \leftarrow$ index of last variable in J_i (backjump)
    $J_i \leftarrow J_i \cup J_{iprev} - \{x_i\}$ (merge conflict sets)
  else
    $i \leftarrow i + 1$ (step forward)
    $D'_i \leftarrow D_i$ (reset mutable domain)
    $J_i \leftarrow \emptyset$ (reset conflict set)
end while
if $i = 0$
  return "inconsistent"
else
  return instantiated values of $\{x_1, \ldots, x_n\}$
end procedure

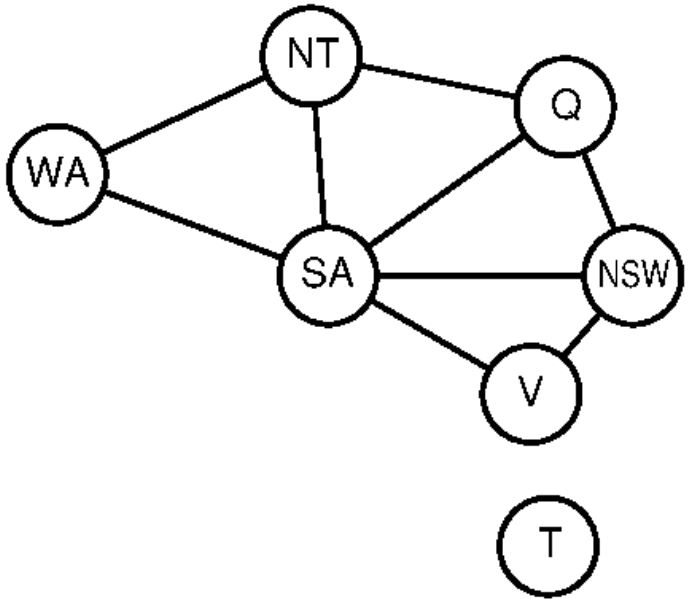
Conflict-Directed Backjumping

subprocedure SELECTVALUE-CBJ

while D'_i is not empty
select an arbitrary element $a \in D'_i$, and remove a from D'_i
consistent $\leftarrow$ *true*
$k \leftarrow 1$
while $k < i$ and *consistent*
if CONSISTENT$(\vec{a}_k, x_i = a)$
$k \leftarrow k + 1$
else
let R_S be the earliest constraint causing the conflict
add the variables in R_S's scope S, but not x_i, to J_i
consistent $\leftarrow$ *false*
end while
if *consistent*
return a
end while
return null (no consistent value)
end procedure

Conținut

Structura problemei



Tasmania și continentul sunt subprobleme independente

Identificabile ca și componente conexe ale grafului constrângerilor.

Structura problemei

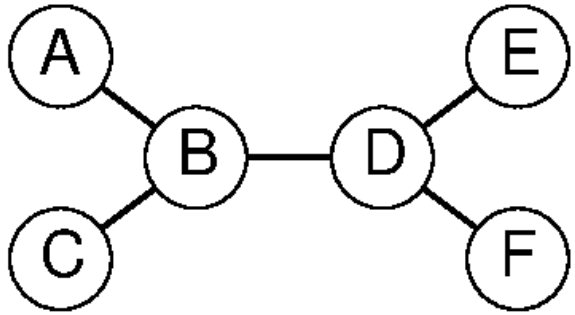
Presupunem că fiecare subproblemă are c variabile, dintr-un total de n.

Complexitatea în cazul cel mai nefavorabil este $n/c \cdot d^c$, *liniar* în n

Exemplu: $n = 80$, $d = 2$, $c = 20$
$2^{80} = 4$ miliarde de ani la 10 milioane noduri/sec
$4 \cdot 2^{20} = 0.4$ secunde la 10 milioane noduri/sec

Sunt rare situațiile acestea.

Probleme CSP cu structură arborescentă



Teoremă: dacă graful de constrângeri nu are cicluri, problema CSP poate fi rezolvată în $O(n\,d^2)$ timp.

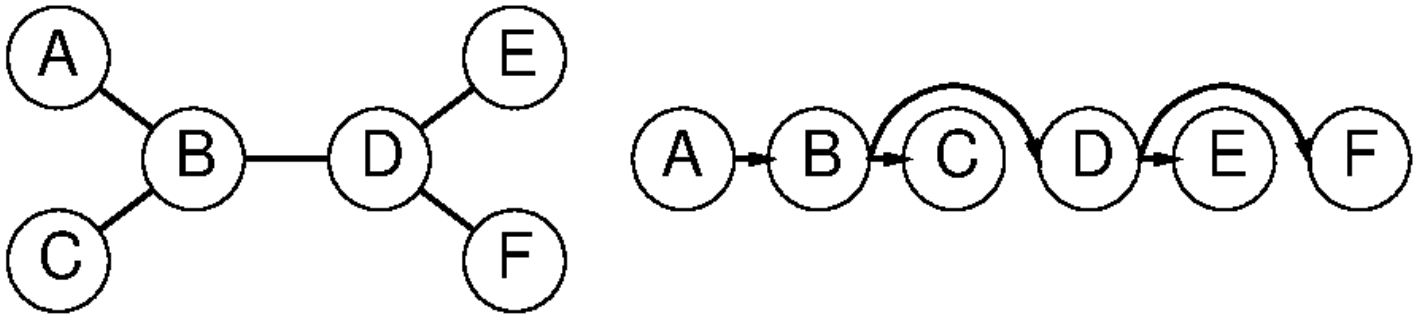
(Reamintim: pentru problemele generale CSP, complexitatea timp în cazul cel mai nefavorabil este $O(d^n)$)

Probleme CSP cu structură arborescentă

O problemă CSP este *directed arc-consistent* pentru o ordonare $X_1, X_2, ..., X_n$ a variabilelor $\iff$ fiecare X_i este arc-consistent cu $X_j, \forall j > i$.

Metodă:

1. Alege în rădăcină o variabilă, ordonează variabilele de la rădăcină la frunze a.î. părintele fiecarui nod îl precede în ordonare

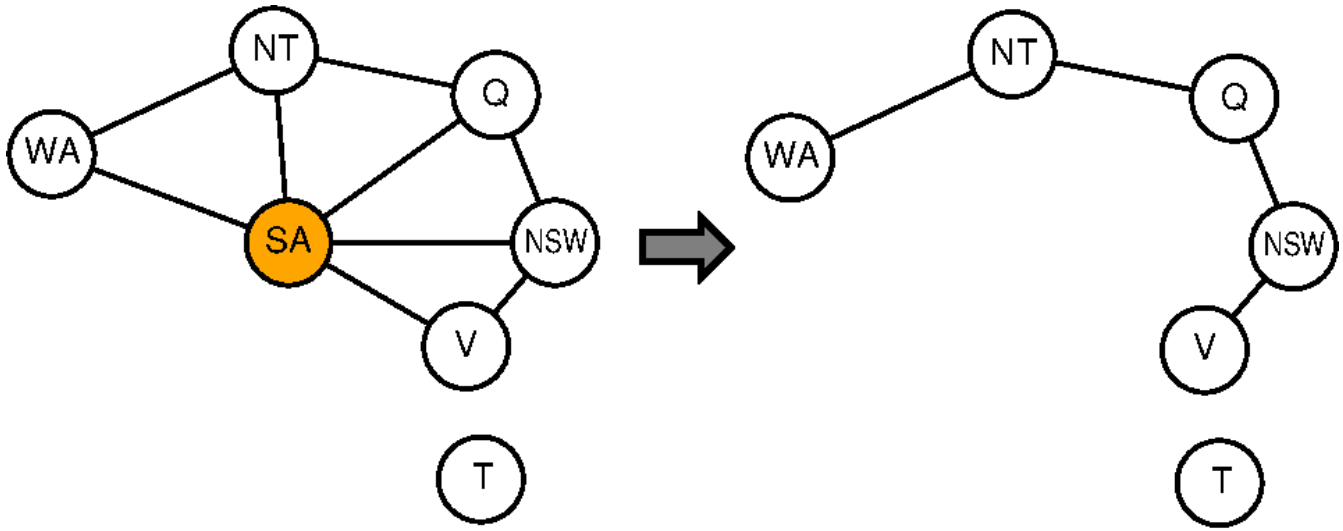


2. For $j = n$ downto 2, aplică *Make-Arc-Consistent*$(Parent(X_j), X_j)$

3. For $j = 1$ to n, asignează X_j (o valoare consistentă din domeniu)

Probleme CSP cu o structură "aproape" arbore

Cutset conditioning



- Alege o submulțime S de variabile a.î. graful de constrangeri devine arbore după ștergerea lui S (S *cutset*)
- Pentru fiecare asignare a variabilelor din S, șterge din domeniul celorlalte variabile valori care sunt inconsistente cu asignarea; returnează cele două soluții.

Timpul de execuție $O(d^c \cdot (n-c)d^2)$, c dimensiune *cutset* (rapid pentru valori mici ale lui c)

Conținut

Algoritmi euristici pentru CSP

Hill-climbing, *Simulated annealing* lucrează cu stări "complete" (toate variabilele asignate)

Pentru a aplica pe probleme CSP:
- permitem stări cu restricții nesatisfacute
- operatori care *reasignează* valori variabilelor

Selectarea variabilei: alege aleator o variabilă conflictuală

Selectarea valorii utilizând euristica min-conflicts:
- alege valoarea care încalcă cele mai puține restricții
- $h(n)$ = numărul de restricții violate

Min-conflicts

function MIN-CONFLICTS(csp, max_steps) **returns** a solution or failure
  inputs: csp, a constraint satisfaction problem
    max_steps, the number of steps allowed before giving up

  $current \leftarrow$ an initial complete assignment for csp
  for $i = 1$ to max_steps **do**
    if $current$ is a solution for csp **then return** $current$
    $var \leftarrow$ a randomly chosen conflicted variable from csp.VARIABLES
    $value \leftarrow$ the value v for var that minimizes CONFLICTS($var, v, current, csp$)
    set $var = value$ in $current$
  return *failure*

Exemplu: 4-Regine

Variabile: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (câte o regină pentru fiecare coloană)

Domenii: $D_i = \{1, 2, 3, 4\}$ (pe ce linie se află fiecare regină)

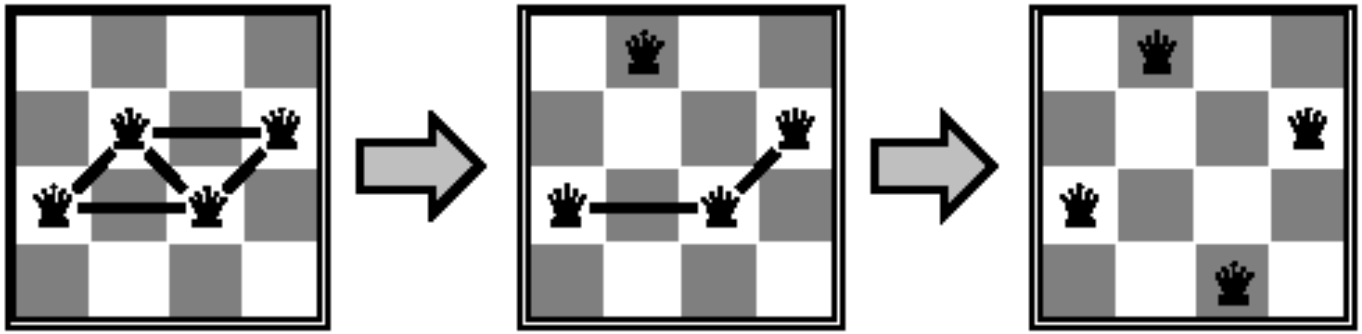
Constrângeri:

$Q_i \neq Q_j$ (nu pot fi pe aceeași linie)

$|Q_i - Q_j| \neq |i - j|$ (sau pe aceeași diagonală)

Exemplu: 4-Regine

- Stare: 4 regine pe 4 coloane ($4^4 = 256$ stări)
- Operatori: mută regina pe coloană
- Testarea obiectivului: nu există atacuri
- Evaluare: $h(n) =$ numărul de atacuri



Compararea algoritmilor pentru CSP

Numărul mediu de verificări a consistenței necesare pentru a rezolva problema

Problem	Backtracking	BT+MRV	Forward Checking	FC+MRV	Min-Conflicts
USA	(> 1,000K)	(> 1,000K)	2K	60	64
n-Queens	(> 40,000K)	13,500K	(> 40,000K)	817K	4K
Zebra	3,859K	1K	35K	0.5K	2K
Random 1	415K	3K	26K	2K	
Random 2	942K	27K	77K	15K	

Concluzii

- Probleme de satisfacere a restricțiilor
  stări: asignări ale variabilelor
  restricții intre variabile
- Backtracking = Depth-first search în care asignăm o variabilă (la fiecare nod)
- Euristici de ordonare a variabilelor și selectare a valorilor
- *Forward-checking* previne asignări care garantează eșecul ulterior. Propagarea constrangerilor (*Arc consistency*) constrânge suplimentar valorile.
- Reprezentarea utilizând graful de constrângeri permite analiza structurii problemei. Problemele cu structură arborescentă pot fi rezolvate în timp liniar.
- Metodele de căutare locală (*Iterative min-conflicts*) sunt de obicei eficiente în practică.