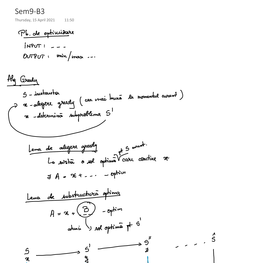
Sem9-B3
Thursday, 15 April 2021 11:50

Pb. de optimizare

INPUT: ...
OUTPUT: min/max ...

Alg. Greedy

S - instanta
x - alegere greedy (cea mai bună de moment aleasă)
x - determină subproblema S'

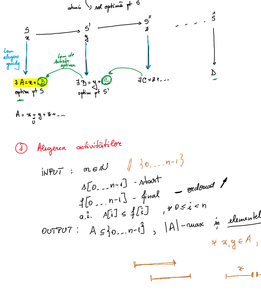


Lema de alegere greedy

La orice x ad optim pt S cont. cea aleasă x
$\exists$ A - x + ... - optim

Lema de substructură optimă

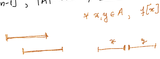
A - x - (2) - optim
ainsi A ad optimă pt S'



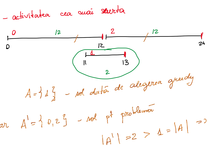
① Alegerea activităților

INPUT: $n \in \mathbb{N}$ // $\{0, \dots, n-1\}$
$s[0, \dots, n-1]$ - start
$f[0, \dots, n-1]$ - final — ordonat!
a.î. $s[i] \le f[i]$, $\forall 0 \le i < n$

OUTPUT: $A \subseteq \{0, \dots, n-1\}$, $|A|$-max și elementele din A nu se suprapun
$\forall x, y \in A$, $f[y] \le s[x]$ sau $f[y] \le s[x]$



a) x - activitatea cea mai scurtă

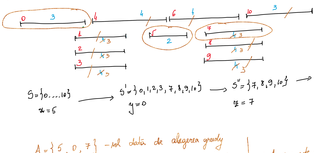


$A = \{1, 2\}$ - sol obținută de alegerea greedy

Dar $A' = \{0, 1\}$ - sol pt problemă

$|A'| = 2 > 1 = |A|$ => A nu este optim

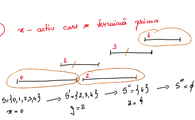
b) x - activ. care se suprapunem cu cât mai puțin posibil.



$S = \{0, \dots, 10\}$, $x = 5$ → $S' = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $y = 0$ → $S'' = \{7, 8, 9, 10\}$, $z = 7$ → $S''' = \emptyset$

$A = \{5, 0, 7\}$ - sol obținută de alegerea greedy
Dar $A' = \{0, 4, 6, 10\}$ - o sol mai bună decât A
$|A'| > |A|$
=> A nu este optim

② x - activ care se termină primă



$S = \{0, 1, 2, 3\}$, $x = 0$ → $S' = \{2, 3\}$, $y = 2$ → $S'' = \{3\}$, $z = 3$ → $S''' = \emptyset$

$A = \{0, 2, 3\}$
0 → ✓
1 → ✗ ($f[0] \ge s[1]$)
2 → ✓ ($f[0] \le s[2]$)
3 → ✗ ($f[0] \ge s[3]$)
2 - finalul ultimei este cel mai mic
4 → ✓ ($f[0] \le s[4]$)

```
A = emptySet;
t = 0
for(i=0; i<n; i++)
{ if(t ≤ s[i])
    { A = A ∪ nrAgtiveSet(i);
      t = f[i];
    }
}
return A;
```

② plata unei sume de bani cu un minim de bancnote.

INPUT: $n \in \mathbb{N}$ // suma de plătit

OUTPUT: $\ell = \langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle$ a.î. $\ell.size() = \min$ și $\sum_{j \in \ell} j = n$
$b_i \in \{500, \dots, 1\}$ ℓ sol

DOMENIU: $b = [500, 200, 100, 50, 10, 5, 1]$

$\ell = \langle 500, 100, 100, 5 \rangle$ <=> $m = [1, 0, 2, 0, 0, 1, 0]$
$\sum_{i=0}^{6} m[i] = \min$
$\sum_{i=0}^{6} b[i] \cdot m[i] = n$

x = cea mai mare bancnotă $\le$ suma de plătit

(5) n → (5) S - x → (5) S' = S' - y
x y
- - -

Subproblema: $S \subseteq \{0, \dots, n\}$

Lema de alegere greedy

$S \subseteq \{0, \dots, n\}$
x - alegerea greedy (cea mai mare bancnotă $\le S$)
$\exists \ell = \langle x, \dots \rangle$ - sol optimă pt S
//

Dem Pp. RA. că $\ell' = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$ - sol optimă ce nu conține pe x
z - cea mai mare bancnotă $\le S$ => $x > b_1$, $x > b_2$, ... $x > b_k$; $\ell \subseteq \{1, \dots, k\}$

S = 300
x = 200
$\ell' = \langle 100, 100, 100 \rangle$ → $\ell = \langle 200, 100 \rangle$ => ℓ' nu este optim

S = 600
x = 500
$\ell' = \langle 200, 200, 200 \rangle$
$\ell = \langle 500, 100 \rangle$ =>

Datorită tipului de bancnote, există o submulțime Y de bancnote din ℓ' a.î. le putem înlocui cu Z de bancnote
$\sum_{b \in Y} b = \sum_{c \in Z} c$ și $|Z| < |Y|$ și $x \in Z$
Temă

=> ℓ obținută după înlocuire are mai puține bancnote decât ℓ'
=> ℓ' nu este optim => contradicție =>
=> toate sol optime îl conțin pe x

Lema de substructură optimă

$S \in \{0, \dots, n\}$
x - alegerea greedy ($x \max \le S$)
$\ell = \langle x, \dots \rangle$ - sol optimă pt S
y z
//
ℓ' - sol optimă pt $S' = S - x$
//

Pp. RA. că ℓ' nu este sol optimă pt S' =>
=> există ℓ'' - sol optimă pt S' => $\ell''.size() < \ell'.size()$

ℓ - sol pt S => $\sum_{y \in \ell} y = S$ => $\sum_{y \in \ell'} y = S' = S - x$

ℓ'' - sol pt S' => $\sum_{z \in \ell'} z = S'$

$\hat{\ell} = \langle x, \dots \rangle$ (ℓ'')
→ sol pt S
$\sum_{z \in \hat{\ell}} z = x + \sum_{z \in \ell''} z = x + S' = x + S - x = S$ ✓
→ $\hat{\ell}$ mai bun decât ℓ ✓
$\hat{\ell}.size() = 1 + \ell''.size() < 1 + \ell'.size() = \ell.size()$

=> $\hat{\ell}$ sol pt S a.î. $\hat{\ell}.size() < \ell.size()$ => ℓ nu este optim pt S =>
=> contradicție => ℓ' - sol optimă pt S'

Temă Alg pt (ex 1, 2, 3), 4)