```latex
\documentclass[a4paper, 11pt]{scrartcl}

% Preambul
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{lmodern}
\usepackage{amsmath,amsthm,amssymb}
\usepackage[]{geometry}
\usepackage{graphicx, float, caption, wrapfig, subcaption}
\usepackage{multicol}
\usepackage[dvipsnames, table]{xcolor}
\usepackage{xspace}
\usepackage{minted}

\usepackage{tikz}
\usepackage{todonotes}

\usepackage[romanian]{babel}
\usepackage{hyperref}

% Definițiile câmpurilor
\theoremstyle{plain}
\newtheorem{teorema}{Teorema}[section]
\newtheorem{exemplul}[teorema]{Exemplul}
\newtheorem{propozitie}[teorema]{Propoziția}
\theoremstyle{definition}
\newtheorem*{provocare}{Provocare}
\newtheorem{definitie}[teorema]{Definiția}
\theoremstyle{remark}
\newtheorem*{remarca}{\colorbox{YellowOrange!80!black}{\textcolor{white}{\bfseries \sffamily \upshape
Remarcă}}}



% Comenzi personalizate
\newcommand{\multime}[1]{\mathbb{#1}}
\newcommand{\R}{\multime{R}}
\newcommand{\ie}{\textit{i.e.}\xspace}
\newcommand{\nom}[1]{\bsc{#1}\xspace}
\newcommand{\euler}{{\bfseries \sffamily Euler}}
\newcommand{\turing}{{\bfseries \sffamily Turing }}
\newcommand{\fermat}{{\bfseries \sffamily Fermat }}

% Titlul documentului și metadate
\titlehead{
Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza'' din Iași \hfill \boxed{\phantom{Nume Prenume Grupa}}\\
Facultatea de Matematică\\
\LaTeX
}
\title{Cine a fost \textcolor{Plum}{Pierre de Fermat}?}
\author{
Nume Prenume, Grupa M000\thanks{Facultatea de Matematică, anul II}
}
\date{1601-1665}

\begin{document}

% Corpul documentului

\maketitle
\tableofcontents

\section*{Introducere}
```

```latex
\setlength\intextsep{2mm}
\begin{wrapfigure}{r}{6cm}
    \centering
\includegraphics[width=0.4\textwidth]{Poze/Fermat.jpg}
\caption{Pierre de \fermat}
\end{wrapfigure}

Pierre de \fermat, (născut la 17 august 1601, Beaumont-de-Lomagne, Franța – mort la 12 ianuarie 1665,
Castres), matematician francez care este adesea numit fondatorul teoriei moderne a numerelor. Împreună cu
René Descartes, Fermat a fost unul dintre cei doi matematicieni de frunte din prima jumătate a secolului
al XVII-lea. Independent de Descartes, Fermat a pus bazele metodei analitice de rezolvare a problemelor de
geometrie utilizând noțiunile de reper și dreaptă parametrizată. Metodele sale pentru găsirea tangentelor
la curbe și a punctelor de extrem ale acestora reprezintă nucleul dur al analizei matematice.

Din corespondența sa cu filosoful francez Blaise Pascal se pot culege primele probleme de calcul ale
șanselor unor evenimente aleatoare.

Rezultatele privind calculul probabilităților au fost extrase și prelucrate de Huygens în lucrarea
\textit{De Ratiociniis in Ludo Aleae} (1657).


\begin{remarca}
    Toate informațiile bibliografice sunt preluate de la adresa
    \href{https://www.britannica.com/biography/Pierre-de-Fermat}{Enciclopedia Britannica}.
\end{remarca}






\section{Câteva formule matematice celebre}


\fermat a corespondat mult cu matematicianul \textsc{Viète}, ale cărui notații le-a folosit în studiile
sale, și cu matematicianul \textsc{Descartes}, cu care a fost a avut o "dispută" generată de opiniile
diferite pe care aceștia le aveau în încercarea da formă algebrei prin intermediul geometriei.

\textsc{D'Alembert} a văzut în lucrările lui \fermat prima aplicare a calculului infinitezimal. Pornind de
la problema determinării tangentelor la o curbă, \fermat a propus o metodă, numită \textit{de maximis et
minimis}, care îl face să fie considerat unul din inventatorii calculului diferențial și primul care a
folosit formule de derivare.

\setlength{\marginparwidth}{2.5cm}
\fermat contribuie în corespondența sa epistolară cu Blaise \textsc{Pascal} la dezvoltarea bazelor
calculului probabilităților, o matematică a hazardului ce a pornit de la studiul problemei jocurilor
propuse de cavalerul de Méré. Dar contribuția sa majoră a fost în domeniul teoriei numerelor și a
ecuațiile diofantice. Autor al mai multor teoreme sau conjecturi în acest domeniu, el se află în centrul
teoriei numerelor moderne.



\subsection{Multele ,,teoreme ale lui Fermat''}
Cele mai cunoscute 3 (sau mai multe) teoreme ce poartă numele lui \fermat sunt:
\begin{itemize}
\item ,,mica teoremă a lui \fermat'';
\item ,,marea teoremă a lui \fermat'' (care, defapt, timp de 300 de ani a fost o conjectură ce a pus la
    încercarea mintea a mii și mii de matematicieni și nu numai);
\item teorema lui Fermat referitoare la condiția necesară de optim $f'(a)=0$.
\end{itemize}
```

```latex
\begin{teorema}[Mica teoremă a lui \textsc{Fermat}]\label{rez:mica}
Dacă $p$ este un număr prim și $a$ este un număr natural care nu se divide cu $p$, atunci $a^{p-1}\equiv 1
\mod p$.
\end{teorema}

\begin{proof}
\fermat nu oferit o demonstrație teoremei ~\ref{rez:mica}. Pe 18 octombrie 1640, îi scria lui Frénicle de
\textsc{Bessy} următoarele cuvinte:
\begin{quotation}
,,Orice număr prim măsoară în mod infailibil una dintre puterile $-1$ ale oricărei progresii, iar
exponentul puterii menționate este un submultiplu al numărului prim dat $-1\dots$ Și această propoziție
este în general adevărată în toate progresiile și pentru toate numerele prime; v-aș trimite demonstratia,
dar mă tem ca va dura prea mult.''
\end{quotation}
\end{proof}


\begin{teorema}[Marea teoremă a lui \fermat]
Pentru $n$ un număr natural mai mare sau egal decât $2$, nu există numere naturale nenule $x$, $y$, $z$
care să verifice ecuația
\[
x^n + y^n = z^n.
\]
\end{teorema}

\begin{remarca}
Această teoremă a fost demonstrată\todo[size=scriptsize]{Un fapt anecdotic legat de numele lui \fermat
este acela în care acesta notează pe un petic de hârtie că nu are suficient spațiu să scrie demonstrația
faptului că $x^n+y^n=z^n$ nu are soluții întregi netriviale, pentru $n>2$.} de matematicianul englez
Andrew \textbf{\sffamily Wiles} de la Universitatea Princeton, cu ajutorul lui Richard \textbf{\sffamily
Taylor}. După o primă prezentare din iunie 1993, apoi descoperirea unei erori și a încă unui an de muncă
suplimentară, demonstrația a fost publicată în 1995 în \emph{Annals of Mathematics}.

\fermat nota undeva pe marginea unei foi din lucrarea \textit{Aritmetica} că:
\begin{quotation}
,,Am găsit o demonstrație minunată a acestei propoziții, dar marginea este prea îngustă pentru a o
conține.''
\end{quotation}

Pare destul de improbabil ca Pierre de \fermat să fi reușit cu adevărat să demonstreze această teoremă în
cazul general; într-adevăr, demonstrația efectuată de Andrew \textbf{\sffamily Wiles} (chiar dacă ultima
teoremă a lui \fermat este doar un corolar) folosește instrumente matematice de o complexitate ridicată de
care nu ne putem lipsi. Având în vedere cunoștințele timpului său, \fermat nu le-ar fi putut intui.
\end{remarca}




\subsection{Numere de tip \fermat}

\begin{definitie}
Spunem că un număr natural este de tip \fermat dacă acesta se poate scrie sub forma $2^{2^n}+1$, unde $n$
este un număr natural. Notăm al $n$-lea număr de tip \fermat cu $F_n$.
\end{definitie}


Aceste numere sunt legate de numele lui \fermat care a presupus că toate aceste numere sunt prime. Ei
bine, această presupunere s-a dovedit a fi falsă, e.g. $F_5$ fiind compus. Mai mult chiar, toate numerele
\fermat până la $F_{32}$ sunt compuse. Nu este clar dacă numerele care încep de la $F_{33}$ sunt prime sau
nu.

Folosind codul \texttt{Python} de mai jos se poate verifica că numerele de mai sus sunt într-adevăr
compuse.
```

```latex
\begin{minted}[mathescape,
               linenos,
               numbersep=5pt,
               gobble=2,
               frame=lines,
               framesep=2mm]{python}
    import math
    def lista_factori(n):
        factors = [1]

        for t in range(2, (math.ceil((n / 2) + 1))):
            if n % t == 0:
                factors.append(t)

        factors.append(n)
        return factors
    % test: lista_factori(2**5-1)
\end{minted}


\subsubsection{Proprietățile numerelor Fermat}
Șirul de numere de tip \fermat verifică mai multe relații de recurență. De exemplu, dacă $n\ge2$, avem
\[
F_n=(F_{n-1}-1)^2+1
\qquad\text{sau}\qquad
F_n=F_{n-1}^2-2(F_{n-2}-1)^2
\]
sau încă, via produse de numere de tip \fermat,
\begin{equation}\label{eq:stanga}
F_n=2+\prod_{i=0}^{n-1}F_i
\qquad\text{sau}\qquad
F_n=F_{n-1}+2^{(2^{n-1})}\prod_{i=0}^{n-2}F_i.
\end{equation}

Se poate deduce acum cu ușurință următorul rezultat.
\begin{teorema}[\textbf{Goldbach}]
Două numere de tip \fermat distincte sunt prime între ele, i.e. $\mathrm{cmmmdc}(F_n,F_{m})=1$, pentru
$m\ne n$ numere naturale.
\end{teorema}

\begin{proof}
    Fie $m<n$ numere naturale fixate arbitrar și $d=\mathrm{cmmmd(F_n,F_m)}$. Din formula
    \eqref{eq:stanga}, deducem că $F_m\mid F_n-2$. Din definiția noțiunii de $\mathrm{cmmmdc}$, avem că
    $d\mid F_m$, de unde rezultă $d\mid F_n-2$. Prin urmare $d\mid 2$. Însă toate numerele de tip \fermat
    sunt impare, deci $d\ne 2$. Cu aceasta demonstrația este completă.
\end{proof}




Fie acum $D(n, b)$ numărul de cifre utilizate în scrierea numărului $F_n$ în baza $b$,
atunci\footnote{Parantezele pătrate desemnează funcția partea întreagă și $\log_b$.}
\begin{align}
D(n,b)&= \lfloor 1+\log_b\left( 2^{2^n}+1 \right) \rfloor\\
    &\approx \lfloor 1+\log_b\left( 2^{2^n}\right) \rfloor\\
    &=1+\lfloor 2^n\log_b(2)\rfloor.
\end{align}

De exemplu, în baza 10,
\begin{multicols}{2}
\begin{itemize}\label{list:prime}
\item $F_0=3$ și $D(0,10)=1$,
\item $F_1=5$ și $D(1,10)=1$,
\item $F_2=17$ și $D(2,10)=2$,
```

```latex
\item $F_3=257$ și $D(3,10)=3$,
\item $F_4=65537$ și $D(4,10)=5$,
\item $F_5=4294967297$ și $D(5,10)=10$.
\end{itemize}
\end{multicols}


Importanța istorică a numerelor de tip \fermat rezidă din studiul numerelor prime și necesitatea de a elabora metode de factorizare. Lui \fermat îi era cunoscut următorul rezultat.

\begin{propozitie}
Fie $k$ un număr natural strict pozitiv, dacă numărul $2^k + 1$ este prim, atunci $k$ este o putere a lui $2$.
\end{propozitie}

Demonstrația acestui rezultat se bazează pe observația că orice număr natural se poate scrie sub forma $a2^b$, unde $a,b$ sunt numere naturale și $a$ este impar.
\begin{proof}
Fie $k$ un număr natural strict pozitiv. Există $a$ impar și $b$ astfel încât $k = a 2^b$. Fie $c := 2^{2^b}$. Atunci
\[
1+2^k =1 + c^a= (1 + c)\sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i c^i,
\]
ceea ce ne permite să afirmăm că $1 + c$ este un divizor prim al numărului $1 + 2^k$ și deci egal cu acesta, lucru adevărat numai pentru $k = 2^b$.
\end{proof}

\fermat a conjecturat (în mod eronat) că reciproca rezultatului de mai sus este adevărată, demonstrând că $F_n$ este prim pentru $n=0,1,2,3,4$. La momentul scrierii acestor note, nu cunoaștem decât $5$ numere de tip \fermat care sunt prime, cele citate în lista de la pagina \pageref{list:prime}.

\subsubsection{Factorizarea numerelor de tip \fermat compuse}

{
\begin{table}[H]
    \centering
\[
\arraycolsep=15pt
\def\arraystretch{1.25}
\begin{array}{@{}>{\columncolor{gray!20}}cccc@{}}
\rowcolor{Dandelion!25}F_n&\text{$D(n,10)$}&\text{\texttt{Număr de factori}}&\text{\texttt{Listă factori}}\\
5   &10     &2  &3\text{ și }7\\
6   &20     &2  &\cellcolor{Magenta!20}6\text{ și }14\\
7   &39     &2  &17\text{ și }22\\
8   &78     &3  &16\text{ și }62\\
9   &\cellcolor{RoyalBlue!20}155    &3  &7,\ 49\text{ și }99\\
10  &309    &4  &8,\ 10,\ 40\text{ și }252\\
11  &617    &\cellcolor{Plum!20}5   &6,\ 6,\ 21,\ 22\text{ și }564\\
\end{array}
\]
\caption{Factorizarea numerelor de tip \fermat.}
\end{table}
}



\newpage

\end{document}
```