Problema 1 — calcule complet detaliate (ca pe foaie)

(a) Metoda Eliminării Gaussiene pentru sistemul $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1) Justificare a priori (dacă algoritmul se poate aplica)

La eliminarea Gaussiană fără pivotare trebuie ca pivotele folosite la fiecare pas să fie nenule.

$$a_{11} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{pasul 1 este posibil.}$$

După pasul 1 vom verifica noul pivot a_{22} (din submatricea rămasă).

2) Matricea mărită

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

3) Pasul 1: anularea lui a_{21} și a_{31} sub pivotul a_{11}

Pivot:

$$p_1 = a_{11} = 1.$$

Multiplicatori:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1, \qquad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Operații de linie:

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = L_2 - 1 \cdot L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 = L_3 - (-2) \cdot L_1 = L_3 + 2L_1.$$

Calculul efectiv pentru L_2: Linia 2 inițială (cu termenul liber) este

$$L_2 = (1,\ 1,\ 2 \mid -1),$$

linia 1 este

$$L_1 = (1,\ 2,\ 3 \mid 3).$$

Atunci

$$\begin{aligned} L_2 - L_1 &= (1-1,\ 1-2,\ 2-3 \mid -1-3) \\ &= (0,\ -1,\ -1 \mid -4). \end{aligned}$$

Calculul efectiv pentru L_3: Linia 3 inițială:

$$L_3 = (-2,\ -1,\ 2 \mid 2).$$

Calculăm $2L_1$:

$$2L_1 = (2,\ 4,\ 6 \mid 6).$$

Atunci

$$\begin{aligned} L_3 + 2L_1 &= (-2+2,\ -1+4,\ 2+6 \mid 2+6) \\ &= (0,\ 3,\ 8 \mid 8). \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 8 & 8 \end{array}\right).$$

4) Verificare pivot pentru pasul 2

Noul pivot (în submatricea de ordin 2) este

$$p_2 = a_{22} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{pasul 2 este posibil.}$$

5) Pasul 2: anularea lui a_{32} sub pivotul a_{22}

Multiplicator:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Operație:

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2 = L_3 - (-3)L_2 = L_3 + 3L_2.$$

Calculul efectiv:

$$L_2 = (0,\ -1,\ -1 \mid -4), \qquad L_3 = (0,\ 3,\ 8 \mid 8).$$

Calculăm $3L_2$:

$$3L_2 = (0,\ -3,\ -3 \mid -12).$$

Adunăm:

$$\begin{aligned} L_3 + 3L_2 &= (0+0,\ 3+(-3),\ 8+(-3) \mid 8+(-12)) \\ &= (0,\ 0,\ 5 \mid -4). \end{aligned}$$

Rezultă forma triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{array}\right).$$

6) Substituție înapoi (cu calcule explicite)

Din ultima linie:

$$5x_3 = -4 \Rightarrow x_3 = -\frac{4}{5}.$$

Din a doua linie:

$$-x_2 - x_3 = -4.$$

Înlocuim $x_3 = -\frac{4}{5}$:

$$-x_2 - \left(-\frac{4}{5}\right) = -4 \Rightarrow -x_2 + \frac{4}{5} = -4 \Rightarrow -x_2 = -4 - \frac{4}{5} = -\frac{20}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{24}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{24}{5}.$$

Din prima linie:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3.$$

Înlocuim:

$$x_1+2\cdot\frac{24}{5}+3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = 3 \Rightarrow x_1+\frac{48}{5}-\frac{12}{5} = 3 \Rightarrow x_1+\frac{36}{5} = 3 \Rightarrow x_1 = 3-\frac{36}{5} = \frac{15}{5}-\frac{36}{5} = -\frac{21}{5}.$$

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} \\ \frac{24}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}}$$

(b) Factorizarea LU (fără pivotare) pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

0) Ce înseamnă LU (Doolittle) și condiții

Căutăm matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

astfel încât

$$A = LU.$$

Factorizarea fără pivotare este posibilă dacă, pe parcurs, pivotele (echivalent: u_{11}, u_{22}, u_{33}) nu devin nule.

1) Egalarea element cu element în $A = LU$

Scriem produsul LU complet (înmulțire de matrici, linie $\times$ coloană).

Linia 1 din LU: Linia 1 din L este $(1, 0, 0)$, deci:

$$(LU)_{1j} = 1 \cdot u_{1j} + 0 \cdot u_{2j} + 0 \cdot u_{3j} = u_{1j}.$$

Prin urmare:

$$u_{11} = a_{11} = 1, \quad u_{12} = a_{12} = 2, \quad u_{13} = a_{13} = 3.$$

Deci prima linie din U este $(1, 2, 3)$.

Linia 2 din LU: Linia 2 din L este $(\ell_{21}, 1, 0)$.

$$(LU)_{21} = \ell_{21}u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \ell_{21}u_{11}.$$

Dar $(LU)_{21} = a_{21} = 1$ și $u_{11} = 1$, deci

$$\ell_{21} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \ell_{21} = 1.$$

$$(LU)_{22} = \ell_{21}u_{12} + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = \ell_{21}u_{12} + u_{22}.$$

Știm $a_{22} = 1$, $\ell_{21} = 1$, $u_{12} = 2$:

$$1 = 1 \cdot 2 + u_{22} \Rightarrow u_{22} = 1 - 2 = -1.$$

$$(LU)_{23} = \ell_{21}u_{13} + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = \ell_{21}u_{13} + u_{23}.$$

Știm $a_{23} = 2$, $\ell_{21} = 1$, $u_{13} = 3$:

$$2 = 1 \cdot 3 + u_{23} \Rightarrow u_{23} = 2 - 3 = -1.$$

Linia 3 din LU: Linia 3 din L este $(\ell_{31}, \ell_{32}, 1)$.

$$(LU)_{31} = \ell_{31}u_{11} + \ell_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = \ell_{31}u_{11}.$$

Dar $a_{31} = -2$ și $u_{11} = 1$, deci

$$\ell_{31} \cdot 1 = -2 \Rightarrow \ell_{31} = -2.$$

$$(LU)_{32} = \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} + 1 \cdot 0 = \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22}.$$

Știm $a_{32} = -1$, $\ell_{31} = -2$, $u_{12} = 2$, $u_{22} = -1$:

$$-1 = (-2) \cdot 2 + \ell_{32} \cdot (-1) \Rightarrow -1 = -4 - \ell_{32} \Rightarrow 3 = -\ell_{32} \Rightarrow \ell_{32} = -3.$$

$$(LU)_{33} = \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + 1 \cdot u_{33}.$$

Știm $a_{33} = 2$, $\ell_{31} = -2$, $u_{13} = 3$, $\ell_{32} = -3$, $u_{23} = -1$:

$$2 = (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + u_{33} \Rightarrow 2 = -6 + 3 + u_{33} \Rightarrow 2 = -3 + u_{33} \Rightarrow u_{33} = 5.$$

2) Concluzie: L și U

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.}$$

3) Verificare explicită (înmulțire completă, element cu element)

Calculăm LU:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Elementele:

$$(LU)_{11} = 1{\cdot}1 + 0{\cdot}0 + 0{\cdot}0 = 1, \quad (LU)_{12} = 1{\cdot}2 + 0{\cdot}(-1) + 0{\cdot}0 = 2, \quad (LU)_{13} = 1{\cdot}3 + 0{\cdot}(-1) + 0{\cdot}5 = 3.$$

$$(LU)_{21} = 1{\cdot}1 + 1{\cdot}0 + 0{\cdot}0 = 1, \quad (LU)_{22} = 1{\cdot}2 + 1{\cdot}(-1) + 0{\cdot}0 = 2-1 = 1, \quad (LU)_{23} = 1{\cdot}3 + 1{\cdot}(-1) + 0{\cdot}5 = 3-1$$

$$(LU)_{31} = (-2)\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 1\cdot 0 = -2, \quad (LU)_{32} = (-2)\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 0 = -4+3 = -1,$$

$$(LU)_{33} = (-2)\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 5 = -6+3+5 = 2.$$

Deci

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A,$$

factorizarea este corectă, iar pivotele sunt

$$u_{11} = 1 \neq 0, \quad u_{22} = -1 \neq 0, \quad u_{33} = 5 \neq 0.$$

(c) Factorizarea LU cu pivotare parțială pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

0) Forma cerută

Căutăm o matrice de permutare P și L, U astfel încât:

$$PA = LU,$$

unde L are diagonală unitate și U este superior triunghiular.

1) Pasul 1 (coloana 1): alegerea pivotului

În coloana 1, pe liniile 1–3:

$$|2| = 2, \quad |1| = 1, \quad |1| = 1.$$

Maximul este 2 pe linia 1, deci *nu pivotăm* (nu schimbăm linii).

Pivotul:

$$p_1 = 2.$$

2) Eliminare sub pivotul p_1

Multiplicatori:

$$m_{21} = \frac{1}{2}, \qquad m_{31} = \frac{1}{2}.$$

Operații:

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1.$$

Calcul pentru L_2:

$$L_2 = (1,2,1), \quad \tfrac{1}{2}L_1 = \tfrac{1}{2}(2,4,3) = (1,2,\tfrac{3}{2}).$$
$$L_2 - \tfrac{1}{2}L_1 = (1-1,\ 2-2,\ 1-\tfrac{3}{2}) = (0,0,-\tfrac{1}{2}).$$

Calcul pentru L_3:

$$L_3 = (1,-3,2), \quad \tfrac{1}{2}L_1 = (1,2,\tfrac{3}{2}).$$
$$L_3 - \tfrac{1}{2}L_1 = (1-1,\ -3-2,\ 2-\tfrac{3}{2}) = (0,-5,\tfrac{1}{2}).$$

Matricea devine:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) Pasul 2 (coloana 2): pivotare parțială

În coloana 2, pe liniile 2–3:

$$|0| = 0, \quad |-5| = 5.$$

Pivotul maxim este pe linia 3, deci schimbăm $L_2 \leftrightarrow L_3$.

Matricea de permutare:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

După pivotare, forma triunghiulară (de lucru) este:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4) Construirea lui L (cu atenție la pivotare)

Multiplicatorii față de pivotul din coloana 1 au fost:

$$m_{21} = \frac{1}{2}, \quad m_{31} = \frac{1}{2}.$$

După schimbarea liniilor 2 și 3 la pasul 2, acești multiplicatori se așază astfel încât:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Explicație: la pasul 2, sub pivotul -5 elementul de pe linia 3, coloana 2 este deja 0, deci $m_{32} = 0$.

5) Rezultatul final

$$\boxed{PA = LU, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

6) Verificare completă: se obține PA?

Mai întâi:

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Acum calculăm LU element cu element.

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Linia 1:

$$(2, 4, 3).$$

Linia 2:

$$\left(\tfrac{1}{2}, 1, 0\right) \cdot U = \tfrac{1}{2}(2, 4, 3) + 1 \cdot (0, -5, \tfrac{1}{2}) = (1, 2, \tfrac{3}{2}) + (0, -5, \tfrac{1}{2}) = (1, -3, 2).$$

Linia 3:

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \cdot U = \tfrac{1}{2}(2, 4, 3) + 1 \cdot (0, 0, -\tfrac{1}{2}) = (1, 2, \tfrac{3}{2}) + (0, 0, -\tfrac{1}{2}) = (1, 2, 1).$$

Deci

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = PA,$$

verificare corectă.

(d) Factorizarea Cholesky pentru $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

0) Condiții de aplicare (a priori)

Cholesky se aplică **doar** dacă:

$$A \text{ este simetrică } (A = A^T) \quad \text{și} \quad A \text{ este pozitiv definită.}$$

1) Verificarea simetriei (cu calcul explicit)

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Comparăm:

$$a_{12} = 2 \neq 5 = a_{21}.$$

Deci

$$A \neq A^T.$$

2) Concluzie

$$\boxed{\text{Cholesky NU se poate aplica, deoarece matricea nu este simetrică.}}$$