

Calcul Numeric

Cursul 3

2024

Anca Ignat

$\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$ și $\|\cdot\|_{\mathbf{v},\mathbf{P}}$ - norme vectoriale $\rightarrow \|\cdot\|_{\mathbf{i}}$ și respectiv

$\|\cdot\|_{\mathbf{i},\mathbf{P}}$ norme matriciale induse

$$\|\cdot\|_{\mathbf{v}} \rightarrow \|\cdot\|_{\mathbf{i}}$$

$$\downarrow \quad \quad ?$$

$$\|\cdot\|_{\mathbf{v},\mathbf{P}} \rightarrow \|\cdot\|_{\mathbf{i},\mathbf{P}}$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{v},\mathbf{P}} = \|\mathbf{P}\mathbf{x}\|_{\mathbf{v}} \rightarrow \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{i},\mathbf{P}} = \|\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\|_{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n], \mathbf{p}_i > 0, \forall i, \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \left(\frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_j} \mathbf{a}_{ij} \right)_{i,j=1,n}$$

Valori și vectori proprii

Definiții

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se numește *valoare proprie (autovaloare)* a matricei A un număr complex $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru care există un vector nenul $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ a.î.:

$$Ax = \lambda x.$$

Vectorul x se numește *vector propriu (autovector)* asociat val. proprii λ .

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)x = 0, x \neq 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$$

→ Matricea $\lambda I_n - A$ este singulară.

Polinomul:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_{n-1} \lambda - a_n$$

se numește *polinom caracteristic* asociat matricei A .

→ **grad** $p_A = n \rightarrow$ are n rădăcini care sunt valorile proprii ale matricei A .

Se numește *rază spectrală* a matricei A :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n, \lambda_i - \text{valorile proprii ale matricei } A\}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|^2} \quad \text{norma indusă este}$$

$$\|A\|_2 = |A| = \sqrt{\rho(A^T A)} \quad \text{se numește } \textit{norma spectrală}.$$

Propoziție

Fie $\|\cdot\|$ o normă matriceală naturală. Atunci:

$$\rho(A) \leq \|A\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Numere în format binar

În 1985 IEEE a publicat un raport numit Binary Floating Point Arithmetic Standard 754-1985 și o actualizare în 2008 IEEE 754-2008 care furnizează standarde pentru numere în virgulă mobilă binare și decimale, formate de interschimbare a tipului de date, algoritmi de rotunjire aritmetică, tratarea excepțiilor. Aceste standarde sunt respectate de toți fabricanții de calculatoare care folosesc arhitectura în virgulă mobilă.

O reprezentare binară pe 64 de biți a unui număr real se face în felul următor: primul bit este bitul de semn, următorii 11 biți reprezintă exponentul c iar următorii 52 de biți conțin informații despre partea fracționară, f , numită și mantisă:

$$(-1)^s 2^{c-1023} (1+f) \text{ .}$$

[illegible]

[27.566406249999982236431605997495353221893310546875,
27.5664062500000017763568394002504646778106689453125).

Cel mai mic număr pozitiv care poate fi reprezentat este cu $s = 0, c = 1, f = 0$ adică

$$z = 2^{-1022}(1 + 0) \approx 0.22251 \times 10^{-307}$$

iar cel mai mare este pentru $s = 0, c = 2046, f = 1 - 2^{-52}$

$$Z = 2^{1023}(2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}.$$

Numerele care apar în calcule și sunt mai mici decât z sunt setate în general la 0 (*underflow*) iar cele mai mari decât Z duc, de obicei, la oprirea calculelor (*overflow*).

Se observă că numărul 0 are două reprezentări:
 $s = 0, c = 1, f = 0$ și $s = 1, c = 1, f = 0$.

Reprezentarea zecimală

$$\pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n \quad 1 \leq d_1 \leq 9, \quad 0 \leq d_i \leq 9, \quad i = 2, \dots, k \quad -$$

reprezentarea zecimală folosind k cifre. Orice număr real y :

$$y = 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^n$$

poate fi reprezentat folosind k cifre printr-o simplă trunchiere

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n .$$

O altă metodă de a obține o reprezentare cu k cifre este prin rotunjire:

$$fl(y) = 0.\delta_1\delta_2\dots\delta_k \times 10^n$$

Dacă $d_{k+1} \geq 5$ se adaugă 1 la d_k pentru a obține $fl(y)$ (*round up*), altfel se face trunchierea la k cifre (*round down*).

Un număr r^* aproximează numărul r cu t cifre exacte dacă t este cel mai mare întreg nenegativ pentru care:

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} \leq 5 \times 10^{-t} .$$

În cazul trunchierii avem

$$\left| \frac{y - fl(y)}{y} \right| \leq 10^{-k+1}$$

iar când se face rotunjirea:

$$\left| \frac{y - fl(y)}{y} \right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

Operațiile elementare

$$x +_c y = fl(fl(x) + fl(y))$$

$$x -_c y = fl(fl(x) - fl(y))$$

$$x \times_c y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \div_c y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

Surse de erori în calculele numerice

1. Erori în datele de intrare:

- măsurători afectate de erori sistematice sau perturbații temporare,
- erori de rotunjire: $1/3$, π , $1/7, \dots$

2. Erori de modelare

- erori de discretizare:

limita unui șir , suma unei serii , funcții neliniare approximate de funcții liniare, aproximarea derivatei unei funcții ...

- simplificări în modelul matematic

idealizări , ignorarea unor parametri...

3. Erori în timpul calculelor:

- de rotunjire datorate capacității limitate de memorare a datelor, operațiile nu sunt efectuate exact.
- erori ale bibliotecilor folosite (,bug').

4. Erori umane (date, algoritmi, înțelegerea problemei)

Eroare absolută , eroare relativă

a – valoarea exactă,

\tilde{a} – valoarea aproximativă.

Eroare absolută : $a - \tilde{a}$ sau $|a - \tilde{a}|$ sau $\|a - \tilde{a}\|$

$$a = \tilde{a} \pm \Delta_a, |a - \tilde{a}| \leq \Delta_a$$

Eroare relativă: $a \neq 0$ $\frac{a - \tilde{a}}{a}$ sau $\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|}$ sau $\frac{\|a - \tilde{a}\|}{\|a\|}$

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|} \leq \delta_a \quad (\delta_a \text{ se exprimă, de regulă, în } \%).$$

În aproximările $1\text{kg} \pm 5\text{g}$, $50\text{g} \pm 5\text{g}$ erorile absolute sunt egale dar pentru prima cantitate eroarea relativă este 0,5% iar pentru a doua eroarea relativă este 10%.

$$a_1 = \tilde{a}_1 \pm \Delta_{a_1}, a_2 = \tilde{a}_2 \pm \Delta_{a_2},$$

$$a_1 \pm a_2 = (\tilde{a}_1 \pm \tilde{a}_2) \pm (\Delta_{a_1} \pm \Delta_{a_2})$$

$$\Delta_{a_1+a_2} \leq \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}.$$

a_1 cu eroare relativă δ_{a_1} și a_2 cu eroare relativă δ_{a_2} :

$$a = a_1 * a_2 \text{ sau } \frac{a_1}{a_2} \text{ rezultă } \delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}.$$

Condiționare \leftrightarrow stabilitate

Condiționarea unei probleme caracterizează sensibilitatea soluției în raport cu perturbarea datelor de intrare, în ipoteza unor calcule exacte (independent de algoritmul folosit pentru rezolvarea problemei).

Fie \mathbf{x} datele exacte de intrare, $\tilde{\mathbf{x}}$ o aproximație cunoscută a acestora, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ soluția exactă a problemei și $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{x}})$ soluția problemei cu $\tilde{\mathbf{x}}$ ca date de intrare. Se presupune că s-au făcut calcule exacte la obținerea soluțiilor $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ și $\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{x}})$.

O problemă se consideră a fi *prost condiționată* dacă $P(\mathbf{x})$ și $P(\tilde{\mathbf{x}})$ diferă mult chiar dacă eroarea relativă $\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ este mică.

Condiționarea numerică a unei probleme este exprimată prin amplificarea erorii relative:

$$k(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\|P(\mathbf{x}) - P(\tilde{\mathbf{x}})\|}{\|P(\mathbf{x})\|}}{\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}} \quad \text{pentru } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ și } P(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$$

O valoare mică pentru $k(\mathbf{x})$ caracterizează o problemă bine-condiționată.

Condiționarea este o proprietate locală (se evaluează pentru diverse date de intrare \mathbf{x}). O problemă este bine-condiționată dacă este bine-condiționată în orice punct.

Eroarea relativă în datele de ieșire \approx

Număr de condiționare \times Eroarea relativă în datele de intrare

Se consideră polinomul Wilkinson:

$$w(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + P_{18}(x)$$

Dacă se schimbă coeficientul **210** al lui x^{19} cu

$$-210 - 2^{-23} = -210.0000001192$$

soluțiile (cu 5 zecimale exacte) noului polinom sunt:

**1.00000 2.00000, 3.00000, 4.00000, 5.00000, 6.00001, 6.99970, 8.00727,
8.91725, 20.84691, 10.09527 ± i0.64350 11.79363 ± i1.65233,
13.99236 ± i2.51883, 16.73074 ± i2.81262, 19.50244 ± i1.94033**

Pentru rezolvarea unei probleme P , calculatorul execută un algoritm \tilde{P} . Deoarece se folosesc numere în virgulă mobilă, calculele sunt afectate de erori:

$$P(x) \neq \tilde{P}(x)$$

Stabilitatea numerică exprimă mărimea erorilor numerice introduse de algoritm, în ipoteza unor date de intrare exacte,

$$\|P(x) - \tilde{P}(x)\| \text{ sau } \frac{\|P(x) - \tilde{P}(x)\|}{\|P(x)\|}.$$

O eroare relativă de ordinul erorii de rotunjire caracterizează un *algoritm numeric stabil*.

Un **algoritm numeric stabil** aplicat unei **probleme bine condiționate** conduce la **rezultate cu precizie foarte bună**.

Un algoritm \tilde{P} destinat rezolvării problemei P este numeric stabil dacă este îndeplinită una din condițiile:

1. $\tilde{P}(\mathbf{x}) \approx P(\mathbf{x})$ pentru orice intrare \mathbf{x} ;
2. există $\tilde{\mathbf{x}}$ apropiat de \mathbf{x} , astfel ca $\tilde{P}(\mathbf{x}) \approx P(\tilde{\mathbf{x}})$
 \mathbf{x} = datele exacte,
 $P(\mathbf{x})$ = soluția exactă folosind date exacte,
 $\tilde{P}(\mathbf{x})$ = soluția „calculată” folosind algoritmul \tilde{P} cu date
exacte de intrare

Rezolvarea sistemelor liniare

Istoric

- 1900 î.Hr., Babilon - apar primele probleme legate de ecuații liniare simultane
- 300 î.Hr. Babilon - tăbliță cu următoarea problemă:
”Avem două câmpuri de arie totală 1800 ha. Producția la hectar pe primul câmp este de $\frac{2}{3}$ bușel (=36,3l) iar pe al doilea este de $\frac{1}{2}$ bușel. Dacă producția totală este de 1100 bușeli, să se determine aria fiecărui teren în parte.”

- 200-100 î.Hr. China – *9 capitole despre arta matematică* – metodă de rezolvare foarte asemănătoare eliminării Gauss
(„Avem 3 tipuri de grâu. Știm că 3 baloturi din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip și 1 balot din al treilea tip cântăresc 39 măsuri. De asemenea, 2 baloturi din primul tip, 3 baloturi din al doilea tip și 1 balot din al treilea tip cântăresc 34 măsuri și 1 balot din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip și 3 baloturi din al treilea tip cântăresc 26 măsuri. Câte măsuri cântărește un balot din fiecare tip de grâu”)

- 1545, Cardan – în *Ars Magna*, propune o regulă (*regula de modo*) pentru rezolvarea unui sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute (seamănă cu regula lui Cramer)
- 1683, Seki Kowa, Japonia - ideea de „*determinant*”- „*Method of solving the dissimulated problems*”. Calculează ceea ce astăzi cunoaștem sub numele de determinant, determinanții matricelor 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 în legătură cu rezolvarea unor ecuații dar nu a sistemelor de ecuații.

- 1683, Leibniz într-o scrisoare către l'Hôpital explică faptul că sistemul de ecuații:

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

are soluție deoarece :

$$10*21*32+11*22*30+12*20*31=10*22*31+11*20*32+12*21*30$$

(condiția ca determinantul matricei coeficienților este 0).

Leibniz era convins că o notație matematică bună este cheia progresului și experimentează mai mult de 50 de moduri diferite de a scrie coeficienții unui sistem de ecuații. Leibniz folosește termenul de „*rezultant*” în loc de determinant și a demonstrat regula lui Cramer pentru „rezultanți”. Știa că orice determinant poate fi dezvoltat în raport cu o coloană – operația se numește azi dezvoltarea Laplace.

- 1750, Cramer prezintă o formulă bazată pe determinanți pentru rezolvarea unui sistem de ecuații liniare – *regula lui Cramer* – „*Introduction in the analysis of algebraic curves*” (dă o regulă generală pentru sisteme $n \times n$:
„One finds the value of each unknown by forming n fractions of which the common denominator has as many terms as there are permutations of n things”
- 1764 Bezout, 1771 Vandermonde, 1772 Laplace – reguli de calcul al determinanților

- 1773 Lagrange – prima utilizare implicită a matricelor în legătură cu formele biliniare ce apar la optimizarea unei funcții reale de 2 sau mai multe variabile (dorea să caracterizeze punctele de maxim și minim a funcțiilor de mai multe variabile)

- 1800-1801, Gauss introduce noțiunea de „*determinant*” (determină proprietățile forme pătratică) – *Disquisitiones arithmeticae*(1801); descrie operațiile de înmulțire matricială și inversă a unei matrice în contextul tabloului coeficienților unei forme pătratică. Gauss dezvoltă *eliminarea Gaussiană* pe când studia orbita asteroidului Pallas de unde obține un sistem liniar cu 6 ecuații cu 6 necunoscute.

- 1812, Cauchy folosește termenul de „*determinant*” în sensul cunoscut azi.
- 1826, Cauchy găsește valorile proprii și deduce rezultate legate de diagonalizarea unei matrice. Introduce noțiunea de matrice asemenea și demonstrează ca acestea au aceeași ecuație caracteristică. Demonstrează că orice matrice reală simetrică este diagonalizabilă.

- 1850, Sylvester introduce pentru prima data termenul de *matrice* (din latină, „uter” – un loc unde ceva se formează sau este produs, „*an oblong arrangement of terms*”)
- 1855, Cayley – algebră matricială, prima definiție abstractă a unei matrice. Studiază transformările liniare și compunerea lor ceea ce îl conduce la operațiile cu matrice (adunare, înmulțire, înmulțirea cu un scalar, inversa)

- 1858, Cayley în *Memoriu asupra teoriei matricelor* : „*Sunt multe lucruri de spus despre această teorie a matricelor și, după părerea mea, această teorie ar trebui să preceadă teoria determinantilor*”
- Jordan (1870 – Treatise on substitutions and algebraic equations – forma canonică Jordan), Frobenius (1878 – On linear substitutions and bilinear forms, rangul unei matrici)
- 1890, Weierstrass – On determinant theory, definiția axiomatică a determinantului

- 1925, Heisenberg reinventează algebra matricială pentru mecanica cuantică
- 1947, vonNeuman & Goldstine introduc numerele de condiționare atunci când analizează erorile de rotunjire
- 1948, Turing introduce descompunerea LU a unei matrice
- 1958, Wilkinson dezvoltă factorizarea QR

....

Propoziție

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pentru care există o normă matricială naturală astfel ca $\|A\| < 1$. Atunci există matricele $(I_n \pm A)^{-1}$ și avem evaluările:

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I \pm A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Evaluarea erorii în rezolvarea sistemelor liniare (condiționarea sistemelor liniare)

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ și sist. de ec. liniare:

$$Ax = b$$

A nesingulară $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists$ sol. sist. $x = A^{-1}b$

Pentru erorile în datele de intrare facem notațiile:

- $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eroarea absolută pentru A ;
- $\Delta b \in \mathbb{R}^n$ eroarea absolută pentru b ;

În realitate se rezolvă sistemul:

$$(A + \Delta A) \tilde{x} = b + \Delta b$$

soluția fiind \tilde{x} :

$$\tilde{x} = x + \Delta x$$

În mod natural se ridică următoarele probleme :

1. Dacă A este matrice nesingulară, $\Delta A = ?$ a.î. $A + \Delta A$ să fie nesingulară ?

2. Pp. A și $A + \Delta A$ nesingulare care sunt relațiile între

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \text{ și } \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} ?$$

1. Pp. A nesingulară.

$$A + \Delta A = A(I_n + A^{-1}\Delta A) \rightarrow$$

$$A + \Delta A \text{ nesingulară} \Leftrightarrow (I_n + A^{-1}\Delta A) \text{ nesingulară}$$

Propoziție

Fie A nesingulară și $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Atunci $I + A^{-1}\Delta A$ este

nesingulară și avem:

$$\left\| (I_n + A^{-1}\Delta A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}$$

Demonstrație. Avem:

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1 \stackrel{\text{Prop}}{\Rightarrow} \exists (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}$$

$$\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}.$$

Pp. că A este nesingulară și $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\begin{aligned}
(A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b + \Delta b \Rightarrow (A + \Delta A)\Delta x + Ax + (\Delta A)x = b + \Delta b \Rightarrow \\
A(I + A^{-1}\Delta A)\Delta x &= \Delta b - (\Delta A)x \Rightarrow \Delta x = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}[\Delta b - (\Delta A)x] \Rightarrow \\
\|\Delta x\| &\leq \left\| (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} \right\| \|A^{-1}\| (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \|x\|) \Rightarrow \\
\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right) \tag{1}
\end{aligned}$$

Din $Ax = b$ obținem $\|b\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$ și ținând seamă

de acest rezultat, din (1) deducem:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

$k(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ *numărul de condiționare* al matricei A .

Propoziție

Dacă matricea A este nesingulară și $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ atunci:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - k(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Din $I_n = A A^{-1}$ rezultă $1 = \|I_n\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = k(A)$.

$k(A) \geq 1$, $\forall A$ dar dep. de norma matricială naturală utilizată.

O matrice A pentru care numărul de condiționare este mare se numește matrice *prost condiționată* ($k(A)$, mare').

$Ax=b$ cu $k(A)$ mare $\rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ poate fi mare chiar dacă erorile

relative $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ și $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ sunt mici.

Fie A o matrice simetrică $A = A^T$, nesară. Utilizând norma matricială subordonată normei vectoriale euclidiene:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)}$$

$$k(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Matricea simetrică A are valorile proprii reale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,

A^2 are valorile proprii $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$

A^{-1} are valorile proprii $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \Rightarrow \rho(A) = |\lambda_n| \quad \text{și} \quad \rho(A^{-1}) = \frac{1}{|\lambda_1|}$$

$$A = A^T \rightarrow \|A\|_2 = \rho(A) = |\lambda_n|, \quad \|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

$$k_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|} \text{ număr de condiționare spectral.}$$

$$A \text{ matrice ortogonală} \rightarrow k_2(A) = 1$$

$$A^T A = A \cdot A^T = I_n \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(I)} = 1 = \|A^T\|_2$$

$$k_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^T\|_2 = 1,$$

Matrice aproape singulară dar cu număr de condiționare mic:

$$A = \text{diag} [1, 0.1, 0.1, \dots, 0.1] \in \mathbb{R}^{100 \times 100} \Rightarrow \det A = 1 \cdot (0.1)^{99} = 10^{-99}$$

$$\|A\|_2 = 1, \quad \|A^{-1}\|_2 = 10 \Rightarrow k_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = 10$$

Matrice foarte prost condiționată cu det. nenul (**det** $A=1$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \dots & (-2)^{i-1} & \dots & (-2)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2 & \dots & (-2)^{i-2} & \dots & (-2)^{n-2} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = \|A\|_1 = 3 \quad ,$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \|A^{-1}\|_1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$n = 100 \Rightarrow k(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 3 \cdot (2^{100} - 1)$$

$$\det A = 1$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.001y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.001y = 2.001 \end{cases} \quad k(A) = 4002$$

$$x = 2, y = 0 \qquad \qquad x = 1, y = 1$$

$$\begin{cases} 400x - 201y = 200 \\ -800x + 401y = -200 \end{cases}, \quad \begin{cases} 401x - 201y = 200 \\ -800x + 401y = -200 \end{cases}$$

$$x = -100, y = -200 \qquad \qquad x = 40000, y = 79800$$

$$k_2(A) = 2503 \qquad \qquad k_2(A) = 1002000$$

$$\begin{cases} 1.2969x + 0.8648y = 0.8642 \\ 0.2161x + 0.1441y = 0.1440 \end{cases} \quad x = 2, \quad y = -2 \quad k_2(A) = 249730000$$

$$\bar{x} = 0.9911, \quad \bar{y} = -0.4870,$$

$$r = b - Az = \begin{pmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.1441 & 0.1441 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-8} \\ -10^{-8} \end{pmatrix}$$

Matricea Hilbert

$$H = (h_{ij})_{i,j=1}^n \quad , \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 x^{i+j-2} dx$$

$$k_2(H_n) \approx \frac{(\sqrt{2} + 1)^{4(n+1)}}{2^{\frac{15}{4}} \sqrt{\pi n}} \sim e^{3.5n}$$

n	$k_2(H_n)$	n	$k_2(H_n)$
1	1	7	$4.753 \cdot 10^8$
2	19.281	8	$1.526 \cdot 10^{10}$
3	$5.241 \cdot 10^2$	9	$4.932 \cdot 10^{11}$
4	$1.551 \cdot 10^4$	10	$1.602 \cdot 10^{13}$
5	$4.766 \cdot 10^5$	11	$5.220 \cdot 10^{14}$
6	$1.495 \cdot 10^7$	12	$1.678 \cdot 10^{16}$

$$H^{-1} = (g_{ij}) \quad g_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j-1)} \frac{(n+i-1)! (n+j-1)!}{[(i-1)!(j-1)!]^2 (n-i)!(n-j)!}$$