Reading Project – Cercetări Operaționale
Planificarea liniilor de transport public cu niveluri de serviciu prin *Column Generation*

Năstase Baraș Luca, Lupu Andreea, Dragoș Bădărău

14 ianuarie 2026

Rezumat

Se consideră o problemă de planificare a liniilor de transport public cu cereri origine–destinație și restricții de nivel de serviciu. Modelul conduce la un program liniar de mari dimensiuni, cu un număr exponențial de variabile asociate rutelor. Rezolvarea se realizează prin *column generation*: se definește o problemă principală restrânsă (RMP), se derivă problema duală și condiția de cost redus (în sensul metodei simplex), iar apoi se formulează problema de *pricing* ca un *shortest path* cu resurse (*SPPRC*). Sunt indicate strategii standard de accelerare și cadrul *branch-and-price* pentru obținerea soluțiilor integrale.

1 Formularea matematică a problemei

Fie $G = (V, E)$ graful rețelei. Considerăm o mulțime de cereri origine–destinație $\mathcal{K}$, unde fiecare cerere $k \in \mathcal{K}$ este definită prin originea $o_k \in V$, destinația $d_k \in V$ și volumul $q_k > 0$.

1.1 Notare (glosar rapid)

Mulțimea nodurilor V reprezintă stații/zone, iar E reprezintă arce orientate. Pentru fiecare arc $e = (u, v) \in E$ notăm cu $t_e > 0$ timpul de parcurs pe arc. Pentru fiecare cerere $k \in \mathcal{K}$, parametrii $T_k^{\max}$ și $\tau_k^{\max}$ reprezintă limitele de nivel de serviciu (timp maxim, respectiv număr maxim de transferuri).

1.2 Mulțimi

- $\mathcal{L}$: mulțimea liniilor (serviciilor) fezabile;
- $\mathcal{P}_k$: mulțimea rutelor fezabile pentru cererea k;
- $\mathcal{P} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{P}_k$.

1.3 Variabile

Pentru fiecare linie $\ell \in \mathcal{L}$:

$$x_\ell \geq 0,$$

unde x_ℓ reprezintă frecvența (decizie continuă) asociată liniei ℓ (de exemplu, vehicule/oră).

Pentru fiecare cerere $k \in \mathcal{K}$ și rută $p \in \mathcal{P}_k$:

$$y_{k,p} \in [0, 1],$$

unde $y_{k,p}$ reprezintă proporția din cererea q_k alocată rutei p. În relaxarea liniară, cererea poate fi împărțită fracționar între rute.

1.4 Costuri și nivel de serviciu

Fiecărei linii ℓ îi corespunde un cost de operare $c_\ell > 0$. Fiecărei rute $p \in \mathcal{P}_k$ îi corespund mărimi de serviciu:

$$T_{k,p} \text{ (timp total)}, \qquad \tau_{k,p} \text{ (număr transferuri)}.$$

În forma agregată, costul pe unitate de cerere pentru ruta p este:

$$w_{k,p} = \alpha T_{k,p} + \beta \tau_{k,p}, \qquad \alpha, \beta > 0. \tag{1}$$

1.5 Agregarea costurilor și echivalența formulărilor

În formulările aplicate, funcția obiectiv este frecvent descompusă în mai multe componente aditive (timp, transferuri, penalizări pentru capacitate/crowding, penalizări de serviciu etc.), de forma:

$$\min \sum_{\ell \in \mathcal{L}} c_\ell x_\ell + \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}_k} (\alpha_1 T_{k,p} + \alpha_2 \tau_{k,p} + \alpha_3 \kappa_{k,p} + \alpha_4 \rho_{k,p})\, q_k\, y_{k,p}, \tag{2}$$

unde $\kappa_{k,p}$ și $\rho_{k,p}$ sunt termeni suplimentari (de exemplu, crowding/capacitate), iar $\alpha_i \geq 0$ sunt ponderi.

Definind costul generalizat:

$$w_{k,p} = \alpha_1 T_{k,p} + \alpha_2 \tau_{k,p} + \alpha_3 \kappa_{k,p} + \alpha_4 \rho_{k,p}, \tag{3}$$

se obține forma compactă:

$$\min \sum_{\ell \in \mathcal{L}} c_\ell x_\ell + \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}_k} w_{k,p} q_k\, y_{k,p}. \tag{4}$$

Agregarea este echivalentă deoarece fiecare componentă contribuie aditiv la obiectiv, iar linearitatea în variabilele (x, y) se păstrează; structura RMP, condițiile de cost redus și problema de pricing rămân neschimbate.

1.6 Funcția obiectiv

În continuare se utilizează forma compactă:

$$\min \sum_{\ell \in \mathcal{L}} c_\ell x_\ell + \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}_k} w_{k,p} q_k y_{k,p}. \tag{5}$$

1.7 Constrângeri

Satisfacerea cererii

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_k} y_{k,p} = 1, \qquad \forall k \in \mathcal{K}. \tag{6}$$

Activarea rutelor prin liniile utilizate Fie $a_{\ell p} \in \{0, 1\}$ indicatorul că linia ℓ este utilizată în ruta p. Impunem condiții de activare:

$$y_{k,p} \leq x_\ell, \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ \forall p \in \mathcal{P}_k,\ \forall \ell \in \mathcal{L} \text{ cu } a_{\ell p} = 1. \tag{7}$$

Acestea exprimă faptul că ruta poate fi utilizată numai dacă fiecare linie necesară este operată (în sensul modelului).

Constrângeri de nivel de serviciu

$$T_{k,p} \leq T_k^{\max}, \qquad \tau_{k,p} \leq \tau_k^{\max}, \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ \forall p \in \mathcal{P}_k. \tag{8}$$

2 Restricted Master Problem (RMP)

La iterația t, se consideră mulțimi finite $\mathcal{L}^t \subset \mathcal{L}$ și $\mathcal{P}_k^t \subset \mathcal{P}_k$. Problema principală restrânsă este:

$$\min \sum_{\ell \in \mathcal{L}^t} c_\ell x_\ell + \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}_k^t} w_{k,p} q_k y_{k,p}, \tag{9}$$

sub constrângerile (restrânse) corespunzătoare:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_k^t} y_{k,p} = 1, \qquad \forall k \in \mathcal{K}, \tag{10}$$

$$y_{k,p} \leq x_\ell, \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ \forall p \in \mathcal{P}_k^t,\ \forall \ell \in \mathcal{L}^t \text{ cu } a_{\ell p} = 1, \tag{11}$$

$$T_{k,p} \leq T_k^{\max}, \quad \tau_{k,p} \leq \tau_k^{\max}, \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ \forall p \in \mathcal{P}_k^t, \tag{12}$$

$$x_\ell \geq 0, \qquad \forall \ell \in \mathcal{L}^t, \tag{13}$$

$$0 \leq y_{k,p} \leq 1, \qquad \forall k \in \mathcal{K},\ \forall p \in \mathcal{P}_k^t. \tag{14}$$

RMP este un program liniar rezolvat (de regulă) prin simplex, iar soluția duală furnizează informația necesară pentru *pricing*.

3 Problema duală și costul redus

Fie π_k variabila duală asociată constrângerii $\sum_{p \in \mathcal{P}_k^t} y_{k,p} = 1$ pentru cererea k. În plus, pentru fiecare inegalitate de activare $y_{k,p} - x_\ell \leq 0$ apare un dual nenegativ $\mu_{k,p,\ell} \geq 0$ (pentru ℓ cu $a_{\ell p} = 1$).

Conform regulii de cost redus din metoda simplex (echivalent, derivare lagrangiană), pentru o coloană $y_{k,p}$ (inclusiv pentru $p \notin \mathcal{P}_k^t$) costul redus este:

$$\boxed{\bar{c}_{k,p} = w_{k,p} q_k - \pi_k + \sum_{\ell \in \mathcal{L}^t:\ a_{\ell p} = 1} \mu_{k,p,\ell}.} \tag{15}$$

O coloană este eligibilă pentru a intra în RMP dacă $\bar{c}_{k,p} < 0$.

4 Problema de pricing (SPPRC)

Pentru fiecare cerere $k \in \mathcal{K}$, problema de pricing caută o rută cu cost redus minim:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_k} \bar{c}_{k,p} \quad \text{s.t.} \quad T_{k,p} \leq T_k^{\max}, \quad \tau_{k,p} \leq \tau_k^{\max}. \tag{16}$$

4.1 Structură aditivă și termeni globali

În mod tipic, $T_{k,p}$ este aditiv pe arce: dacă $p = (e_1, \ldots, e_m)$, atunci

$$T_{k,p} = \sum_{j=1}^{m} t_{e_j}.$$

Astfel, partea de timp din $w_{k,p} q_k$ se descompune arc-cu-arc:

$$q_k \alpha\, T_{k,p} = \sum_{e \in p} q_k \alpha\, t_e.$$

Termenii $-\pi_k$ sunt constanți pentru cererea k, iar componenta $q_k \beta\, \tau_{k,p}$ depinde de numărul de transferuri.

Termenul de activare $\sum_{\ell:a_{\ell p}=1} \mu_{k,p,\ell}$ depinde de setul de linii utilizate de ruta p. În abordarea clasică SPPRC, această dependență se poate gestiona prin extinderea stării cu informație despre linia curentă sau printr-o aproximare/penalizare la evaluarea finală; esențial este că pricing rămâne un *shortest path* cu resurse.

4.2 Graful de stări (varianta clasică)

Problema de pricing poate fi formulată pe un graf de stări, în care o *stare* este:

$$(v, T, \tau),$$

unde $v \in V$ este nodul curent, $T \geq 0$ este timpul acumulat, iar $\tau \geq 0$ este numărul de transferuri acumulate. Fezabilitatea impune:

$$T \leq T_k^{\max}, \qquad \tau \leq \tau_k^{\max}.$$

O tranziție pe un arc $e = (v, v') \in E$ are forma:

$$(v, T, \tau) \to (v',\ T + t_e,\ \tau + \Delta\tau),$$

unde $\Delta\tau$ se definește conform modelului de transferuri (de exemplu, $\Delta\tau = 1$ pentru fiecare schimbare de linie; în acest caz starea se poate extinde cu linia curentă).

4.3 Rezolvare prin etichetare și dominanță

SPPRC se rezolvă uzual prin algoritmi de etichetare (*label-setting/label-correcting*). Se păstrează pentru fiecare nod v un set de etichete (labels) cu resurse și cost acumulat. O etichetă $L_1 = (T_1, \tau_1, C_1)$ domină $L_2 = (T_2, \tau_2, C_2)$ dacă:

$$T_1 \leq T_2, \quad \tau_1 \leq \tau_2, \quad C_1 \leq C_2,$$

cu cel puțin o inegalitate strictă, caz în care L_2 poate fi eliminată.

5 Algoritmul de Column Generation

Algorithm 1 Column Generation

Inițializează $\mathcal{L}^0$ și $\mathcal{P}_k^0$ astfel încât RMP să fie fezabil
repeat
  Rezolvă RMP și extrage soluțiile duale (inclusiv π_k și $\mu_{k,p,\ell}$)
  Pentru fiecare $k \in \mathcal{K}$, rezolvă problema de pricing (SPPRC)
  if există k, p cu $\bar{c}_{k,p} < 0$ **then**
    Adaugă în RMP coloanele găsite (eventual mai multe)
  end if
until nu mai există coloane cu cost redus negativ

6 Euristici standard de accelerare

6.1 Adăugarea multiplă de coloane

În loc de o singură coloană pe iterație, se pot adăuga toate coloanele (sau un subset controlat) care satisfac $\bar{c}_{k,p} < 0$, reducând numărul de rezolvări ale RMP.

6.2 Restrângerea controlată a spațiului în pricing

Pentru accelerare, se pot impune praguri mai stricte decât cele finale:

$$T_{k,p} \le \hat{T}_k < T_k^{\max}, \qquad \tau_{k,p} \le \hat{\tau}_k < \tau_k^{\max}, \tag{17}$$

scăzând efortul de calcul al *pricing*-ului.

6.3 Inițializare fezabilă

Se construiesc $\mathcal{P}_k^0$ și $\mathcal{L}^0$ astfel încât RMP să fie fezabil, de exemplu prin:

- rute *shortest path* (după timp) pentru fiecare cerere k;
- linii directe pentru perechi cu cerere ridicată.

7 Justificare

7.1 Echivalența cu metoda simplex

Column generation aplică simplex pe problema completă, dar cu generare întârziată a variabilelor. La fiecare iterație se caută coloane cu cost redus negativ; dacă nu există astfel de coloane, soluția curentă este optimă pentru LP-ul complet.

7.2 Monotonicitate și convergență

Fie z^t valoarea obiectivului RMP la iterația t. Adăugarea unei coloane cu cost redus negativ extinde spațiul fezabil și nu poate înrăutăți valoarea optimă:

$$z^{t+1} \le z^t.$$

Cum problema este mărginită inferior, șirul $\{z^t\}$ este convergent, iar la oprire se obține optimumul relaxării liniare complete.

7.3 Relaxarea liniară și integritatea soluției

Modelul este o relaxare liniară: frecvențele x_ℓ sunt continue, iar cererea se poate împărți fracționar prin $y_{k,p} \in [0,1]$.

Propoziție 1. *Soluția furnizată de algoritmul de* column generation *este optimă pentru relaxarea liniară a problemei complete, dar nu este, în general, integrală.*

Demonstrație. La oprire nu există coloane cu cost redus negativ, deci soluția curentă este optimă pentru LP-ul complet. Integritatea nu este impusă în LP, astfel încât soluția poate fi fracționară. □

Pentru obținerea unei soluții integrale optime se utilizează cadrul *branch-and-price*, în care *pricing*-ul este rezolvat în fiecare nod al arborelui de ramificare.

7.4 Interpretarea variabilelor duale

Variabila duală π_k asociată constrângerii de satisfacere a cererii pentru k reprezintă variația marginală a valorii optime în raport cu modificarea termenului din partea dreaptă. Pentru o rută $p \in \mathcal{P}_k$, costul redus

$$\bar{c}_{k,p} = w_{k,p} q_k - \pi_k + \sum_{\ell : a_{\ell p} = 1} \mu_{k,p,\ell}$$

măsoară dacă introducerea rutei în RMP poate îmbunătăți soluția curentă; condiția $\bar{c}_{k,p} < 0$ indică existența unei rute care reduce obiectivul.

8 Concluzii

Problema planificării liniilor de transport public cu niveluri de serviciu conduce la un LP cu un număr foarte mare de variabile asociate rutelor. Metoda de *column generation* rezolvă eficient relaxarea liniară prin iterarea între RMP și *pricing*. Euristicile de accelerare reduc timpul de calcul fără a modifica criteriul de oprire. Pentru soluții integrale, metoda se extinde natural la *branch-and-price*.