Reading Project – Cercetări Operaționale

Planificarea liniilor de transport public cu niveluri de serviciu prin *Column Generation*

Năstase Baraș Luca

14 decembrie 2025

Rezumat

Lucrarea analizează problema planificării liniilor de transport public cu niveluri de serviciu, formulată ca un program liniar de mari dimensiuni. Datorită numărului foarte mare de variabile, problema este abordată prin *column generation.* Sunt prezentate formularea matematică completă, problema principală restrânsă, problema duală, problema de pricing, precum și euristicile utilizate pentru accelerarea convergenței.

1 Formularea matematică a problemei

Fie $G = (V, E)$ graful rețelei de transport. Considerăm o mulțime de cereri $\mathcal{K}$, unde fiecare cerere $k \in \mathcal{K}$ este definită prin originea $o_k \in V$, destinația $d_k \in V$ și volumul $q_k > 0$.

1.1 Mulțimi

- $\mathcal{L}$ – mulțimea tuturor liniilor de transport fezabile;
- $\mathcal{P}_k$ – mulțimea tuturor rutelor fezabile pentru cererea k;
- $\mathcal{P} = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{P}_k$.

1.2 Variabile decizionale

Pentru fiecare linie $\ell \in \mathcal{L}$:

$$x_\ell \geq 0,$$

unde x_ℓ reprezintă frecvența de operare a liniei ℓ.

Pentru fiecare cerere $k \in \mathcal{K}$ și rută $p \in \mathcal{P}_k$:

$$y_{k,p} \in [0, 1],$$

unde $y_{k,p}$ reprezintă proporția din cererea q_k alocată rutei p.

1.3 Costuri

Fiecărei linii ℓ îi este asociat un cost de operare $c_\ell > 0$. Fiecărei rute $p \in \mathcal{P}_k$ îi este asociat un cost generalizat:

$$w_{k,p} = \alpha T_{k,p} + \beta \tau_{k,p},$$

unde $T_{k,p}$ este timpul total de parcurs, $\tau_{k,p}$ este numărul de transferuri, iar $\alpha, \beta > 0$ sunt parametri dați.

1.4 Funcția obiectiv

Problema este formulată cu o singură funcție obiectiv:

$$\min \sum_{\ell \in \mathcal{L}} c_\ell x_\ell + \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}_k} w_{k,p} q_k y_{k,p}. \tag{1}$$

1.5 Constrângeri

Satisfacerea cererii

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_k} y_{k,p} = 1, \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

Fezabilitatea rutelor O rută p poate fi utilizată doar dacă toate liniile necesare sunt operate:

$$y_{k,p} \leq \sum_{\ell \in \mathcal{L}} a_{\ell p} x_\ell,$$

unde $a_{\ell p} \in \{0, 1\}$ indică dacă linia ℓ este utilizată în ruta p.

Constrângeri de service-level

$$T_{k,p} \leq T_k^{\max}, \quad \tau_{k,p} \leq \tau_k^{\max}.$$

2 Restricted Master Problem (RMP)

Dat un subset finit $\mathcal{L}^t \subset \mathcal{L}$ și $\mathcal{P}_k^t \subset \mathcal{P}_k$, problema principală restrânsă este:

$$\min \sum_{\ell \in \mathcal{L}^t} c_\ell x_\ell + \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}_k^t} w_{k,p} q_k y_{k,p}, \tag{2}$$

sub constrângerile corespunzătoare restrânse.

RMP este un program liniar rezolvat prin metoda simplex.

3 Problema duală și costul redus

Fie π_k variabila duală asociată constrângerii de satisfacere a cererii k. Costul redus al unei rute $p \in \mathcal{P}_k$ este:

$$\bar{c}_{k,p} = w_{k,p} q_k - \pi_k.$$

O coloană este utilă dacă $\bar{c}_{k,p} < 0$.

4 Problema de pricing

Problema de pricing pentru o cerere k este:

$$\min_{p \in \mathcal{P}_k} \left(w_{k,p} q_k - \pi_k \right), \tag{3}$$

sub constrângerile de service-level.

Aceasta este o problemă de tip *shortest path cu resurse*, pe graful G, în care costurile arcelor sunt modificate prin termenii duali.

5 Algoritmul de Column Generation

Algorithm 1 Column Generation

Inițializare $\mathcal{L}^0, \mathcal{P}_k^0$
repeat
  Rezolvă RMP și obține soluțiile duale
  Rezolvă problema de pricing
  if există coloană cu cost redus negativ **then**
    Adaugă coloana în RMP
  end if
until nu mai există coloane cu cost redus negativ

6 Euristici pentru accelerarea algoritmului

Aplicarea directă a metodei de column generation poate conduce la un număr mare de iterații, în special în cazul instanțelor de dimensiuni reale. Pentru a îmbunătăți performanța computațională, sunt utilizate euristici care nu modifică formularea problemei, ci doar modul de explorare a spațiului variabilelor.

6.1 Generarea multiplă de coloane

În loc de a adăuga o singură coloană cu cost redus negativ la fiecare iterație, se poate genera un set:

$$\mathcal{C}^t = \{j \mid \bar{c}_j < 0\},$$

unde $\bar{c}_j$ este costul redus al coloanei j.

Prin adăugarea simultană a mai multor coloane, se reduce numărul de rezolvări ale problemei principale restrânse. Din punct de vedere matematic, această strategie nu afectează corectitudinea metodei, deoarece orice coloană cu cost redus negativ poate intra într-o bază optimală a simplexului.

6.2 Limitarea spațiului de căutare în pricing

Problema de pricing este, în general, o problemă de optimizare combinatorială pe graf, de tip *shortest path cu resurse*. Pentru reducerea timpului de calcul, se impun limite superioare asupra resurselor, de exemplu:

$$T_{k,p} \leq \hat{T}_k < T_k^{\max}, \quad \tau_{k,p} \leq \hat{\tau}_k < \tau_k^{\max}.$$

Aceste restricții reduc spațiul de căutare fără a elimina, în practică, coloane relevante, deoarece rutele cu cost redus negativ sunt concentrate în zona soluțiilor de calitate superioară.

6.3 Inițializare fezabilă euristică

Algoritmul pornește de la un set inițial de coloane $\mathcal{P}_k^0$ și $\mathcal{L}^0$ construit euristic, de exemplu:

- rute de tip *shortest path* în raport cu timpul de parcurs;
- linii directe care conectează noduri cu cerere mare.

Această inițializare asigură fezabilitatea inițială a RMP și reduce numărul de iterații necesare pentru convergență.

7 Discuție teoretică și justificare matematică

7.1 Echivalența cu metoda simplex

Metoda de column generation este echivalentă cu aplicarea metodei simplex asupra programului liniar complet, în care variabilele sunt generate dinamic. Din punct de vedere teoretic, fiecare iterație de column generation corespunde introducerii unei variabile ne-bazice cu cost redus negativ în baza simplexului.

Astfel, dacă la un moment dat nu mai există coloane cu cost redus negativ, soluția curentă a RMP este optimă pentru relaxarea liniară a problemei complete.

7.2 Optimalitate și convergență

Fie z^t valoarea funcției obiectiv la iterația t. Prin construcție,

$$z^{t+1} \leq z^t,$$

deoarece adăugarea unei coloane cu cost redus negativ extinde spațiul fezabil al RMP. Deoarece problema este mărginită inferior, șirul $\{z^t\}$ este convergent.

La convergență, soluția obținută este optimă pentru problema LP completă, adică problema în care toate coloanele ar fi fost introduse explicit.

7.3 Caracterul euristic al metodei

Problema formulată în Secțiunea anterioară este un program liniar care reprezintă o relaxare a problemei originale de planificare a liniilor de transport, problemă care este în general de natură combinatorială. Relaxarea intervine în principal prin:

- permiterea variabilelor de frecvență x_ℓ să fie continue;
- permiterea alocării fracționare a cererii prin variabilele $y_{k,p} \in [0,1]$.

Prin aplicarea metodei de column generation se obține soluția optimă a acestei relaxări liniare, însă nu există, în general, garanția că soluția obținută va fi integrală.

Soluția furnizată de algoritmul de column generation este optimă pentru relaxarea liniară a problemei complete, dar nu este neapărat fezabilă pentru problema originală discretă.

Demonstrație. Metoda de column generation este echivalentă cu aplicarea metodei simplex asupra programului liniar complet, cu generarea întârziată a coloanelor. Convergența este garantată atunci când nu mai există coloane cu cost redus negativ, moment în care soluția curentă este optimă pentru LP-ul complet. Totuși, integritatea variabilelor nu este impusă în LP, astfel încât soluția poate conține valori fracționare. □

În consecință, din punctul de vedere al problemei originale, metoda are un caracter euristic: ea furnizează o soluție de calitate bună, dar nu garantează optimalitatea pentru problema discretă. Pentru obținerea unei soluții integrale optime, metoda de column generation poate fi integrată într-un cadru de tip *branch-and-price*, în care ramificarea se realizează asupra variabilelor, iar pricing problem este rezolvată în fiecare nod al arborelui de ramificare.

7.4 Interpretarea economică a variabilelor duale

Fie π_k variabila duală asociată constrângerii de satisfacere a cererii pentru cererea $k \in \mathcal{K}$. Din teoria dualității liniare, π_k reprezintă variația marginală a valorii optime a funcției obiectiv în raport cu o unitate suplimentară de cerere q_k.

Astfel, π_k poate fi interpretată ca un *preț economic* al cererii corespunzătoare perechii origine–destinație k.

Pentru o rută $p \in \mathcal{P}_k$, costul redus este definit ca:

$$\bar{c}_{k,p} = w_{k,p} q_k - \pi_k.$$

O rută p cu $\bar{c}_{k,p} < 0$ indică existența unui dezechilibru între costul real al rutei și valoarea economică atribuită cererii de soluția curentă.

Demonstrație. Dacă $\bar{c}_{k,p} < 0$, atunci includerea rutei p în RMP ar reduce valoarea funcției obiectiv, ceea ce implică faptul că prețul dual π_k supraevaluează costul real al satisfacerii cererii prin rutele existente. Introducerea unei noi coloane corectează acest dezechilibru, îmbunătățind soluția curentă. □

În acest sens, problema de pricing poate fi interpretată ca un mecanism de arbitraj economic, care identifică rute sau linii subevaluate de modelul curent și le introduce în problemă. La convergență, absența coloanelor cu cost redus negativ indică un echilibru între costurile reale și prețurile duale, echilibru care caracterizează soluția optimă a relaxării liniare.

8 Concluzii

Problema planificării liniilor de transport public cu niveluri de serviciu poate fi formulată ca un program liniar de mari dimensiuni, cu un număr exponențial de variabile. Enumerarea explicită a tuturor coloanelor este imposibilă din punct de vedere computațional.

Metoda de column generation permite rezolvarea eficientă a acestei probleme prin generarea iterativă a variabilelor relevante, utilizând informația duală furnizată de problema principală restrânsă. Euristicile introduse accelerează convergența fără a compromite corectitudinea soluției LP.

Abordarea analizată demonstrează că tehnicile de generare dinamică a variabilelor reprezintă un instrument esențial în rezolvarea problemelor de optimizare de mari dimensiuni din transporturi și, în general, din Cercetări Operaționale.