Homework 3.3 — Teoria Jocurilor (Cercetări Operaționale)

Termen limită: săptămâna 12 (18 decembrie 2025)

1. (3 puncte) Joc necooperativ

Jucătorii A și B aleg simultan câte un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$. Fie a numărul ales de jucătorul A, b numărul ales de jucătorul B, iar

$$s = a + b$$

suma numerelor alese.

Jucătorul A câștigă suma s dacă aceasta este **pară** și **nedivizibilă cu 3**. În caz contrar, suma este câștigată de jucătorul B.

Modelăm situația ca un joc **zero-sum**. Funcția de câștig (payoff) a jucătorului A este definită prin:

$$u_A(a, b) = \begin{cases} +s, & \text{dacă } s \text{ este pară și } 3 \nmid s, \\ -s, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Payoff-ul jucătorului B este $u_B = -u_A$.

(a) Matricea de payoff (1 punct)

Sumele posibile sunt $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Sumele pare sunt $2, 4, 6, 8$, dintre care doar 6 este divizibilă cu 3. Prin urmare, jucătorul A câștigă pentru $s \in \{2, 4, 8\}$, iar jucătorul B câștigă pentru $s \in \{3, 5, 6, 7\}$.

Matricea de payoff (liniile corespund strategiilor lui A, coloanele strategiilor lui B) este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -5 & -6 \\ 4 & -5 & -6 & -7 \\ -5 & -6 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Rezolvarea jocului și valoarea lui (2 puncte)

Pasul 1: Eliminarea strategiilor dominate slab

Verificăm dacă există strategii dominate slab.

Pentru jucătorul A: niciun rând al matricei nu este dominat slab de un alt rând, deoarece fiecare strategie conține cel puțin o intrare strict mai mare decât intrările corespunzătoare ale oricărei alte strategii.

Pentru jucătorul B: niciuna dintre coloane nu este dominată slab de o altă coloană, fiecare coloană conținând cel puțin o valoare strict mai mică decât celelalte.

Prin urmare, nu se pot elimina strategii dominate slab.

Pasul 2: Căutarea unui punct șa (criteriul maximin/minimax)

Calculăm minimele pe rânduri:

$$\begin{aligned}\min(\text{rând } 1) &= -5,\\ \min(\text{rând } 2) &= -6,\\ \min(\text{rând } 3) &= -7,\\ \min(\text{rând } 4) &= -7.\end{aligned}$$

Rezultă:

$$\max_i \min_j a_{ij} = -5.$$

Calculăm maximele pe coloane:

$$\begin{aligned}\max(\text{coloana } 1) &= 4,\\ \max(\text{coloana } 2) &= 4,\\ \max(\text{coloana } 3) &= 4,\\ \max(\text{coloana } 4) &= 8.\end{aligned}$$

Rezultă:

$$\min_j \max_i a_{ij} = 4.$$

Deoarece

$$\neq minimax,$$

jocul nu admite punct șa, deci nu are soluție în strategii pure.

Pasul 3: Strategii mixte și formularea problemelor liniare

Fie $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ strategia mixtă a jucătorului A și $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ strategia mixtă a jucătorului B. Valoarea jocului este notată cu v.

Problema liniară a jucătorului A:

$$\begin{aligned}&\max\ v\\ &\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{4} p_i a_{ij} \geq v, \quad j = 1, 2, 3, 4,\\ &\qquad \sum_{i=1}^{4} p_i = 1, \quad p_i \geq 0.\end{aligned}$$

Problema duală a jucătorului B:

$$\begin{aligned}&\min\ v\\ &\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{4} a_{ij} q_j \leq v, \quad i = 1, 2, 3, 4,\\ &\qquad \sum_{j=1}^{4} q_j = 1, \quad q_j \geq 0.\end{aligned}$$

Rezolvarea acestui sistem conduce la strategiile optime:

$$p^* = \left(\frac{17}{40}, \ \frac{3}{10}, \ 0, \ \frac{11}{40}\right), \qquad q^* = \left(0, \ \frac{2}{5}, \ \frac{11}{40}, \ \frac{13}{40}\right).$$

Valoarea jocului este:

$$v^* = -\frac{69}{40} \approx -1{,}725.$$

Astfel, în condiții de joc optim, jucătorul A pierde în medie 1,725 unități pe rundă, iar jucătorul B câștigă aceeași valoare.

2. (5 puncte) Joc cooperativ cu utilitate transferabilă

Există patru partide politice:

$$P_1 = 30, \quad P_2 = 20, \quad P_3 = 25, \quad P_4 = 25$$

reprezentanți, într-un parlament de 100 membri.

Pentru adoptarea unui proiect de lege sunt necesare:

- minimum 50 voturi pentru un buget de 10 miliarde,
- minimum 75 voturi pentru un buget de 20 miliarde,
- minimum 90 voturi pentru un buget de 30 miliarde.

După adoptarea unui proiect, partidele care au susținut legea își împart suma. Dacă nu se adoptă niciun proiect, valoarea este 0.

(a) Funcția caracteristică (1 punct)

Pentru o coaliție S, notăm cu $W(S)$ numărul total de voturi ale membrilor săi. Funcția caracteristică este:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & W(S) < 50, \\ 10, & 50 \le W(S) \le 74, \\ 20, & 75 \le W(S) \le 89, \\ 30, & W(S) \ge 90. \end{cases}$$

(b) Nucleul jocului (1,5 puncte)

O alocare (x_1, x_2, x_3, x_4) aparține nucleului dacă satisface:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30, \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \quad x_1 + x_3 \ge 10, \quad x_1 + x_4 \ge 10, \quad x_3 + x_4 \ge 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 20, \quad x_1 + x_2 + x_4 \ge 20, \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 20, \quad x_2 + x_3 + x_4 \ge 10. \end{cases}$$

(c) Valoarea Shapley (2,5 puncte)

Valoarea Shapley pentru fiecare partid este:

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = \left(\frac{35}{3},\ 5,\ \frac{20}{3},\ \frac{20}{3}\right).$$

Numeric (în miliarde):

$$\phi_1 \approx 11{,}67, \quad \phi_2 = 5, \quad \phi_3 \approx 6{,}67, \quad \phi_4 \approx 6{,}67.$$

Se verifică eficiența:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 30 = v(N).$$