绍兴一中省选模拟赛 解题报告

Contents

1 A Safe Bet **2**

1.1 题意简述 2

1.2 算法1 2

1.3 算法2 2

1.4 算法3 2

2 Room Service **3**

2.1 题意简述 3

2.2 算法1 3

2.3 算法2 3

3 Rain **4**

3.1 题意简述 4

3.2 算法分析 4

1 A Safe Bet

1.1 题意简述

底面为$R \times C$的盒子中有 m 面垂直放置，水平呈‘/’状 45°放置的镜子和 n 面呈‘\’状 45°放置的镜子，从 $(1,0)$ 向右发射一条光线，若光线遇到镜子会发生90° 反射，若最后光线从 (R,C) 向右射出，则可以打开盒子。判断当前情况是否直接打开箱子，若不能，求出放置一面镜子使其打开的方案数（同一格两种放置方式只算一种），并输出字典序最小的一个答案。

【数据范围】$n,m \leq 10^5$, $R,C \leq 10^6$。

1.2 算法1

枚举镜子的位置，逐格模拟光线的运动。

加离散后期望得分30分。

1.3 算法2

模拟光线进来的路线和出去的路线，两者求交。

加离散后期望得分65分。

1.4 算法3

先模拟光线的运动，记录发射位置和方向，每次在当前方向上找下一面镜子（用 *set* 优化），然后修改位置和方向，继续模拟。如果光线从 (R,C) 向右射出，则打开。否则从 $(R,C+1)$ 向左射出光线，反向追踪。可以发现可行位置为两次追踪得到的轨迹的交点个数。那么在两次追踪过程中分别记录下横向和纵向轨迹，然后第一次的横向和第二次的纵向求交，第二次横向和第一次纵向求交，求交过程可以用扫描线，并用线段树或树状数组优化单点修改，区间询问。求出交点个数和字典序最小的交点即可。

【时间复杂度】$O((n+m)\log C)$，【空间复杂度】$O(n+m+C)$，【期望得分】100分。

2 Room Service

2.1 题意简述

从凸 n 边形内一点出发，碰到所有边至少一次后回到该点，求最短距离。碰到端点视为两条边都碰到。

【数据范围】$n \leq 100$。

2.2 算法1

特判正方形的情况。

直接在内部走一个矩形即可，答案为对角线长度*2。这对长方形也适用。

期望得分25分。

2.3 算法2

首先考虑这样一个问题，从点 A 出发，碰到直线 L 上任意一点后，到达点 B，求最短路径。做法是把点 A 沿直线做镜面反射，A' 与 B 的距离就是最短距离，连线就是方案。如果有两条直线，那就反射两次。但当 L 为线段时，交点不能取到，这时肯定是某个端点最优。

回到本题，有个比较显然的结论，最优方案中路径是不会相交的，一定是按照某个顺序依次经过每条边（如果没有想到这个可以用dfs代替DP，可以得到65分）。又因为路径是可逆的，所以我们可以假设是按顺时针顺序。

而由开始的结论，只有端点的状态有效，先预处理端点两两之间的距离 $d[i][j]$，即把出发点沿中途经过边依次反射，最后得到的点和到达点构成的直线是最优路径。但该路径只有和每条反射的边都有交时才合法，所以不断倒着反射回去，看每条边是否和路径都相交。然后使用 $floyd$ 得到两点间最短路。

然后先枚举起始边，计算起点直接回到起点的方案，并预处理起点出发到每个点的距离 $Ds[]$ 和每个点出发到终点的距离 $Dt[]$，然后枚举起点出发到达的点 j 和出发到达终点的点 k（j 和 k 可以相等），用 $Ds[j] + d[j][k] + Dt[k]$ 更新答案。

【时间复杂度】$O(n^3)$，【空间复杂度】$O(n^2)$，【期望得分】100分。

这题曾在ZJOI讲课中出现过。

3 Rain

3.1 题意简述

给出 n 个高度为 h_i 个点 m 条边的连通平面图，且所有区域均为三角形，边界外的点高度都比与其相邻的边界低。求暴雨淹没整个区域后形成的湖泊个数。两个只有一些深度为 0 的公共点的湖泊会被当作不同的湖泊。

【数据范围】$n \leq 52^2$。

3.2 算法分析

一个点的水面高度取决于它到边界需要经过的海拔最高的点。则从边界上的点出发，$dijkstra$ 求出每个点的水面高度，然后对于有水的部分 dfs 或 bfs 求连通块即可。

需要注意的是求边界的问题，可以先找出 x 坐标最小的点，该点肯定在边界上。从该点出发的极角最小的边肯定是边界。从该边出发并绕回该边（边界会经过一个点多次，若从点出发会使边界不全），每次往逆时针方向第一条边走，即反向边的下一条边。可以使用循环链表（或加链尾特判，比如链尾指向某一负数）实现，将所有边排序后依次加入链表以保证有序，链表节点从 2 开始标号后 xor 1 即可得到反向边。本题范围较小，可以暴力找反向边（会被卡到 $O(m^2)$，利用单调性后为 $O(m)$）。

【时间复杂度】$O(m \log m)$，【空间复杂度】$O(m)$。