A 原神
B 方舟
Subtask2
Subtask3
Subtask4
Subtask5
C 铁道
估计下界
考虑构造
D 启动
Subtask2
$n^2 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod p$
Subtask3
$n^2 \equiv 1 \pmod {p^e} \Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod {p^e} \quad p \geq 3$
Subtask 4
Subtask 5

A 原神

由于消灭敌人和攻击力的奇偶性有关，首先要按奇偶性分开考虑。而且贪心地，一定是优先消灭攻击力大的敌人。

a_i 为奇数的敌人一定可以被消灭，所以可以直接去掉。

而对于 a_i 为偶数的敌人，从大到小排序。然后就要使用药水使得尽量多的偶数变成奇数。统计一下 b_i 为奇数的药水，把最大的若干个 a_i 为偶数的敌人消灭即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$。

B 方舟

Subtask2

有经典DP，状态为 $f_{i,0/1}$ 表示到了第 i 个数，总选择元素个数为奇数/偶数时的总贡献，转移易得

$$\begin{cases} f_{i,0} = f_{i-1,0} + f_{i-1,1} \cdot a_i \\ f_{i,1} = f_{i-1,1} + f_{i-1,0} \cdot a_i \end{cases}$$

Subtask3

发现上述DP中对于同一个数可以用矩阵优化转移。

Subtask4

上述DP转移变为

$$\begin{cases} f_{i,0} = f_{i-1,0} + f_{i-1,1} \cdot \frac{1}{i} \\ f_{i,1} = f_{i-1,1} + f_{i-1,0} \cdot \frac{1}{i} \end{cases}$$

相加得

$$f_{i,0}+f_{i,1}=(1+\frac{1}{i})(f_{i-1,0}+f_{i-1,1})$$

显然可以求得通项公式，带入即可。

Subtask5

结合Subtask3和Subtask4的做法即可，将Subtask3中的结果作为Subtask4的初始条件。

其实这题本质上是一个循环卷积问题，可以做大小为任意数的倍数的集合。

C 铁道

估计下界

这题关键在于你要知道下界是啥，有一个十分简略的估计是把这个问题看成用长度为3的路径覆盖完全图，那么显然有下界$\frac{C_n^2}{3}\sim\frac{n^2}{6}$，所以你知道了最终的答案是$O(n^2)$的。

考虑如何更精准地估计下界，注意到电梯楼层只能是递增的，这就意味着如果把区间分成长度为m的和长度为$n-m$的，这两个区间中的每一对都必须有一部电梯直达，所以下界为$m(n-m)\le\frac{n^2}{4}$。

考虑构造

我们注意到实际上两个区间之间的对数量（$\frac{n^2}{4}$）远大于区间内的对数量（$\frac{n^2}{16}$），所以我们只需要优先满足区间中间的对即可。

考虑利用上述性质，对于每个区间之中的对(i,j)，肯定是将其拆为$(\le i,i,j,\ge j)$，那么我们就可以对于每一个i和j，存一下还有哪些$\le i$和$\ge j$的没有被匹配走，之后在处理(i,j)的时候顺带取出来没有匹配的就好。

其实由于两种对的数量差距过大，每部电梯最多只停3层也可以满足要求，下面给出构造：

$\forall i,j,k,\ 1\le i<k\le j\le n,\ i+j=n+1:\ (i,k,j)$

可以看出，在上述构造下每对楼层间都有电梯直达，并且总电梯数为$\sum_{i=1}^{n/2}n+1-2i=\frac{n^2}{4}$。

这题主要就是要有一个估计，然后根据估计去构造，其实你直接贪的话也可以贪出最优的答案，但是根据实现可能会TLE。

D 启动

Subtask2

$$n^2\equiv 1\pmod p\Rightarrow n\equiv\pm 1\pmod p$$

$n^2\equiv 1\pmod p$等价于$p|(n^2-1)=(n-1)(n+1)$，故$p|n-1$或$p|n+1$，等价于$n\equiv 1\pmod p$或$n\equiv -1\pmod p$。

Subtask3

$$n^2 \equiv 1 \pmod{p^e} \Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod{p^e} \quad p \geq 3$$

数学归纳法，e等于1显然成立，若e成立，考虑$e+1$：

显然$n^2 \equiv \pm 1 \pmod{p^{e+1}} \Rightarrow n^2 \equiv \pm 1 \pmod{p^e}$，故由归纳前提$n = kp^e \pm 1$。

在$\mod p^{e+1}$下考虑$(kp^e \pm 1)^2 = k^2p^{2e} \pm 2kp^e + 1 = \pm 2kp^e + 1$，由$n^2 \equiv 1 \pmod{p^{e+1}}$，故$p|k$，故$n = \pm 1$。

对于$p=2$的情况，上式中的k可以取1，故导致$p=2$时结论为只有$\{1, -1, p^{e-1}-1, p^{e-1}+1\}$，证明略去。

Subtask 4

分解n，做个CRT就好。

Subtask 5

有一种算法叫做Pollard-rho，可以在$O(n^{0.25})$的时间复杂度内分解n，由于数据随机，可以轻松通过。