

DCA0121 – INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA

Aula 3 – Lógica Nebulosa (Fuzzy Logic)

Prof. Marcelo Augusto Costa Fernandes

mfernandes@dca.ufrn.br

Introdução

- Várias medias como temperatura, altura, velocidade e distância podem admitir graus
- A teoria dos conjuntos fuzzis e a lógica fuzzy foram criadas por Lofti A. Zadeh da Universidade da Califórnia em Berkeley na década de 60
- Diferentemente da lógica convencional (verdadeiro ou falso) a lógica fuzzy (nebulosa) tenta refletir o que as pessoas pensam modelando de alguma forma o senso de palavras na tomada de decisão.
- Pode trabalhar com uma variedade de informações vagas e incertas, que podem ser traduzidas por expressões do tipo: a maioria, mais ou menos, talvez, etc.
- Utiliza como base a teoria de conjuntos nebulosos (Fuzzy)

Características

- Intenso uso de palavras ao invés de números
 - Termos linguísticos: *frio*, *quente*, *morno*, *alto*, *longe*, *ligeiro*, *devagar*, *lento*, etc.
- Modificadores de predicado
 - *Muito* rápido, *pouco* elevado, *mais ou menos*, etc.
- Uso de probabilidades linguísticas
 - Provável, improvável, etc.
- Manipulação de infinitos valores entre 0 e 1

Conjuntos Fuzzy

- **Lógica clássica**

- Elemento pertence ou não a um conjunto.
- **Conjunto \Rightarrow “alto”**

Ex.: João é alto / João é não alto

- **Lógica fuzzy**

- Elemento pertence, não pertence ou está parcialmente presente em um conjunto
- **Ex.: João é um pouco alto**

x
(Todos os membros de uma equipe)

• • • • •
x5 x6 x7 x8 x9 x10

A (Mulheres)

B

(Menores de 20 anos)

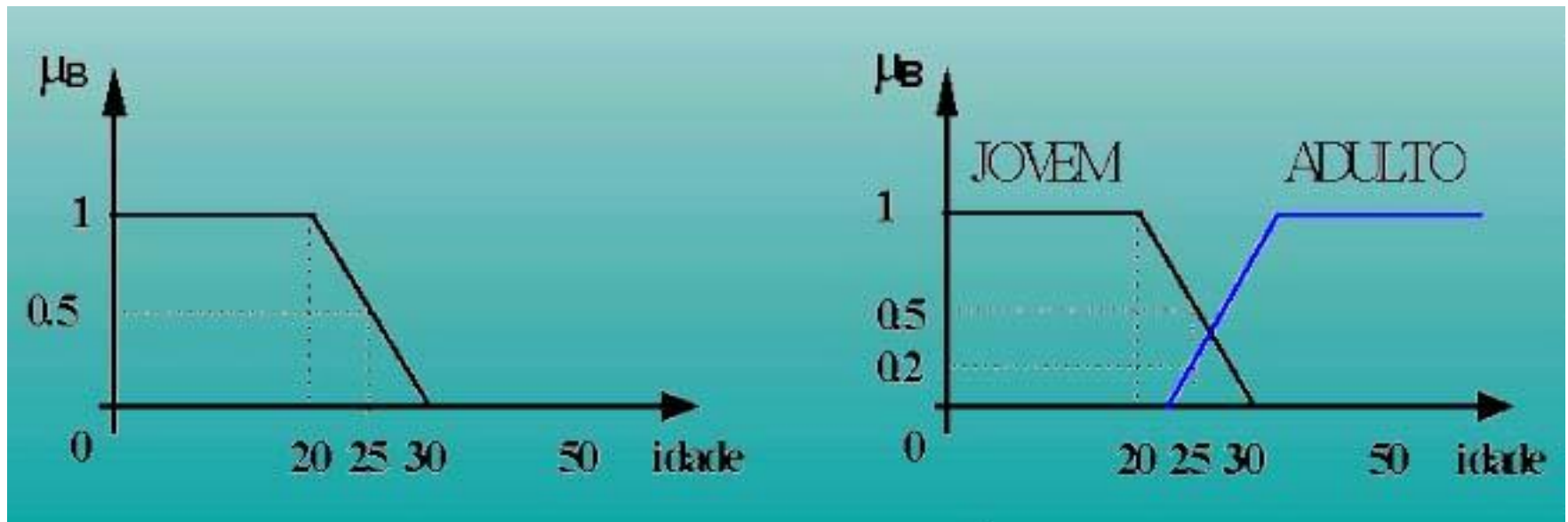
• • • •
x1 x2 x3 x4
18 anos 19 anos 20 anos 35 anos

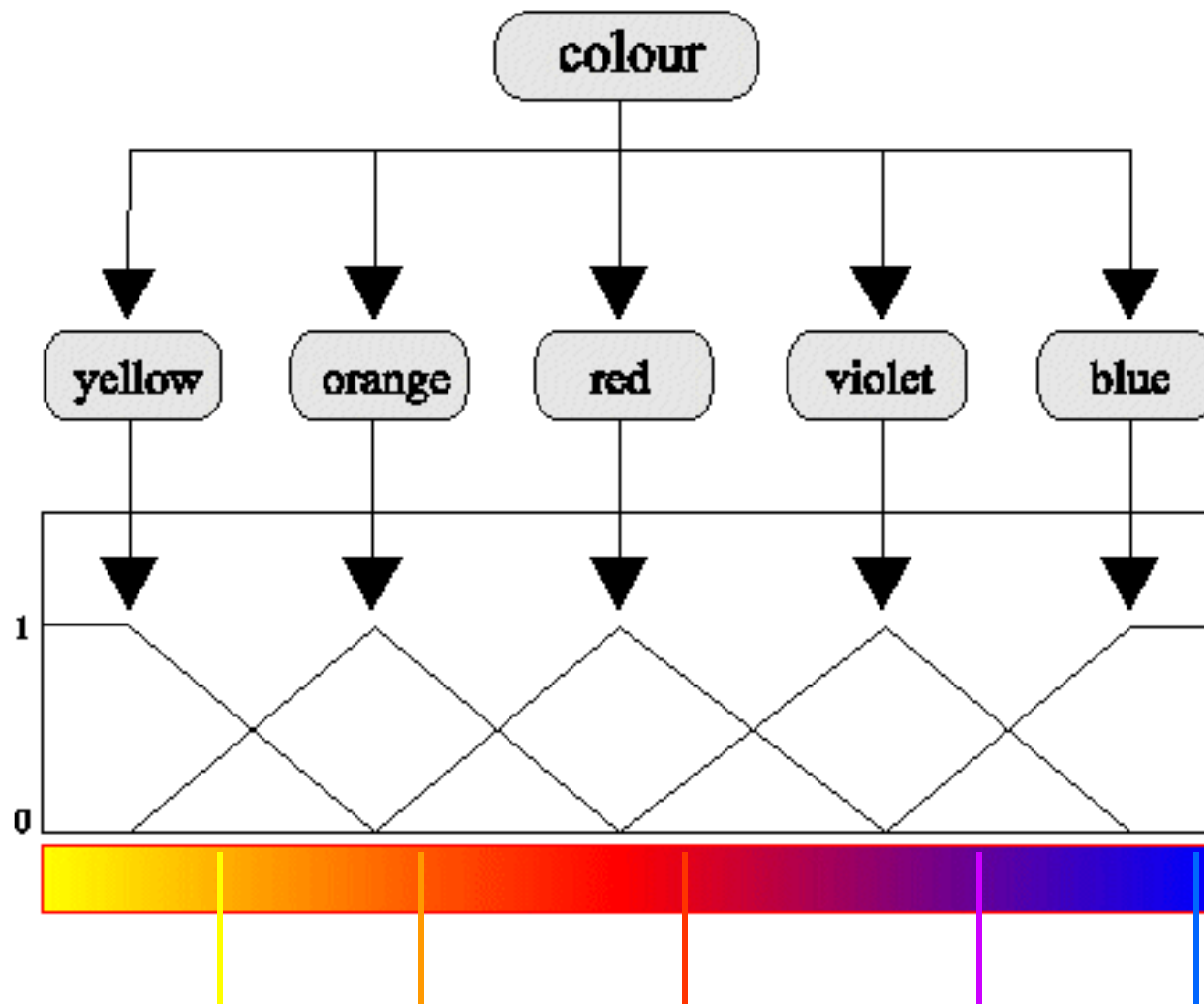
Conjuntos Fuzzy

No gráfico abaixo:

- O valor 1 significa que a pessoa pertence ao grupo de jovens;
- O valor 0 significa que a pessoa não pertence o grupo;
- Os valores intermédios indicam o grau de pertinência da pessoa ao grupo:

se possui 25 anos é 50% jovem e 20% adulto



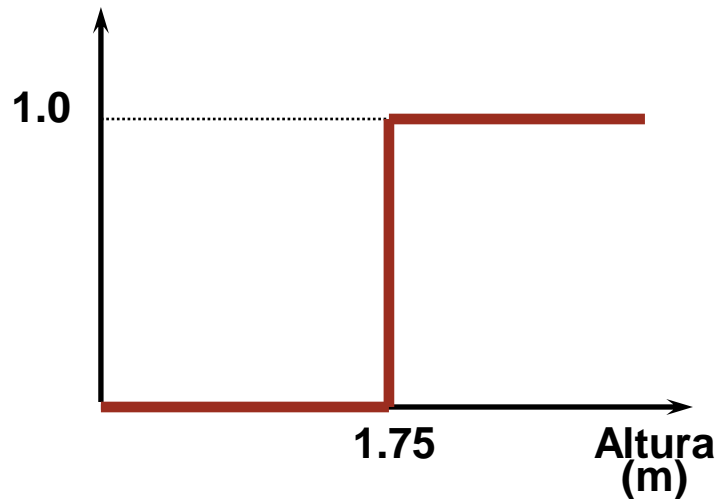


Conjuntos Fuzzy – Função de Pertinência

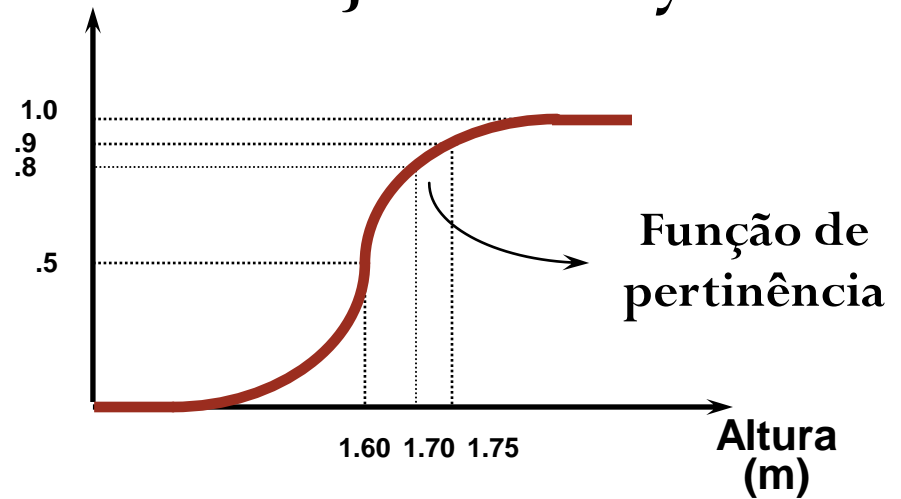
- Conjuntos com limites imprecisos

$A =$ Conjunto de pessoas altas


Conjunto Clássico



Conjunto Fuzzy

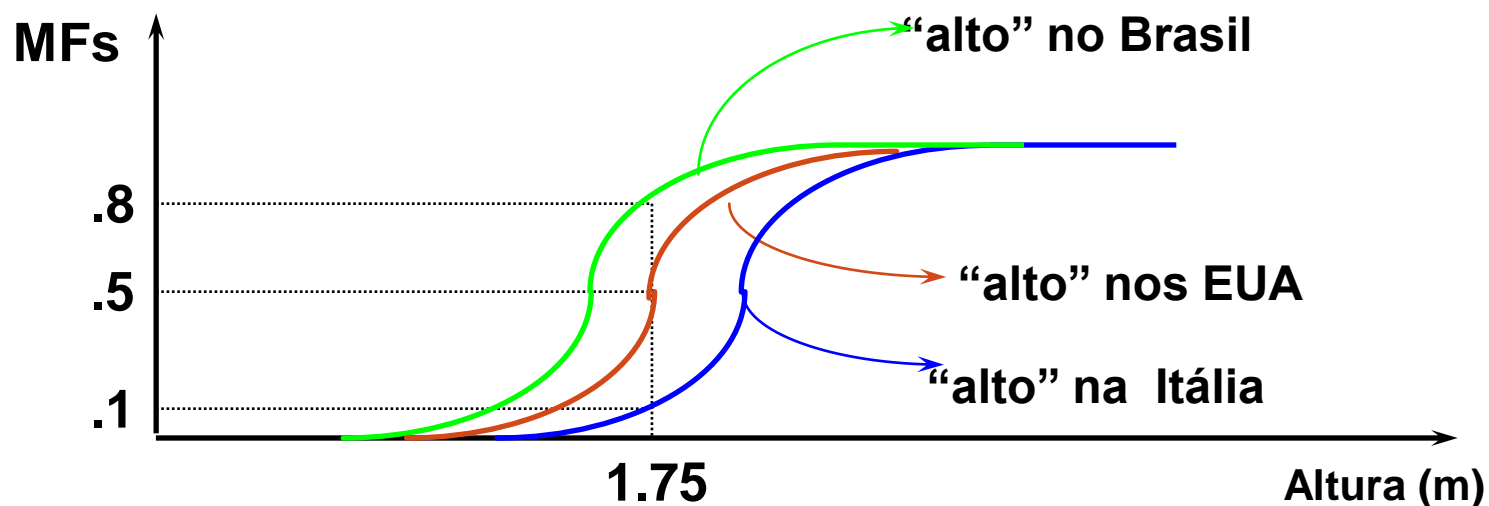


Fuzificação - Função de Pertinência

- Valores *crisp*  Valores fuzzy
- Função de pertinência
 - Ex.: Temperatura, $x = 37^\circ$ (valor *crisp*)
 - Conjuntos fuzzy = frio, morno, quente
 - $m_T(x)$: Função de pertinência de x em T
 - $m_T(37^\circ) = 0.2/\text{frio}, 0.4/\text{morno}, 0.8/\text{quente}$

Função de Pertinência

- Pode ser de várias formas diferentes
- Representam uma função de mapeamento
- Características:
 - Medidas subjetivas
 - Funções não probabilísticas monotonamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente.



Função de Pertinência: Exemplos

- Função Triangular

$$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- Função Trapezoidal

$$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

- Função Gaussiana

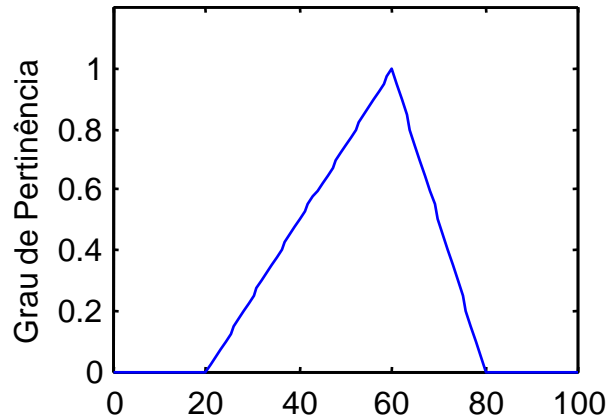
$$\text{gaussmf}(x; a, b, c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

- Função Sino Generalizada

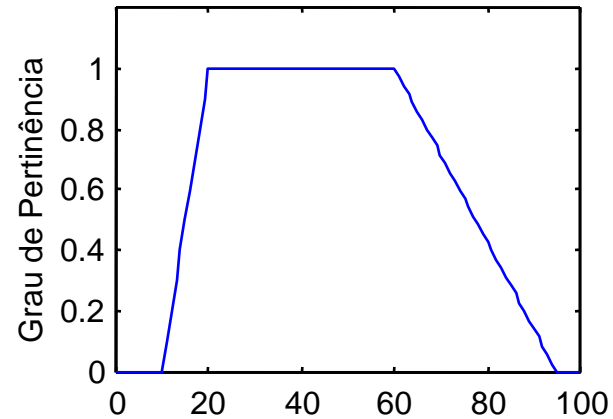
$$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

Função de Pertinência

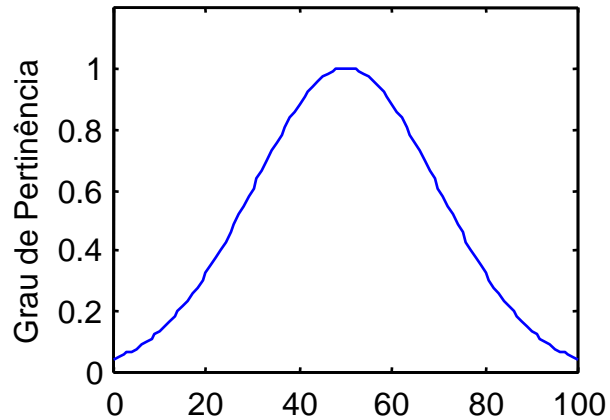
(a) Triangular



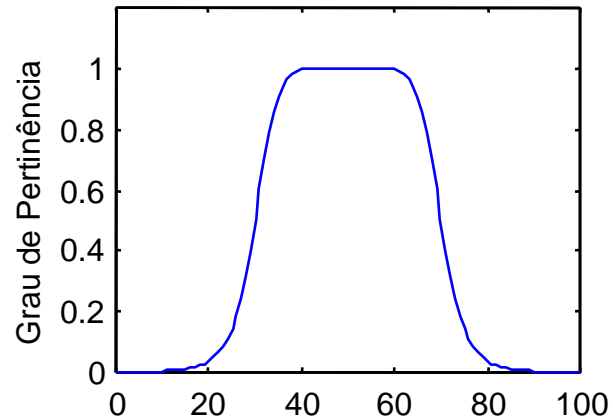
(b) Trapezoidal



(c) Gaussiana

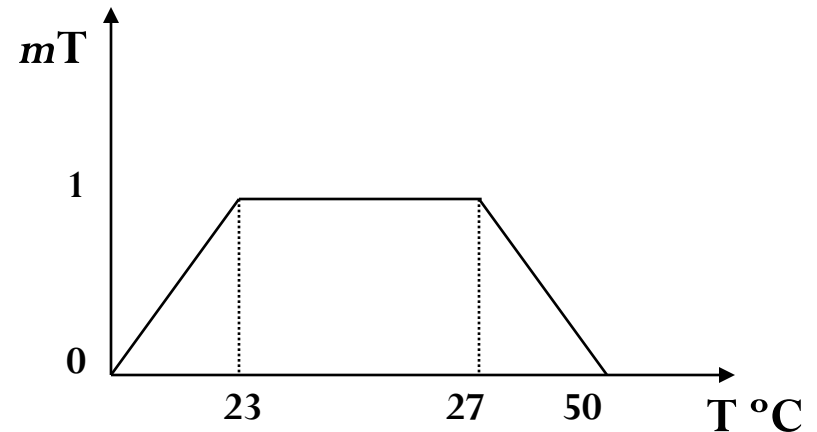


(d) Sino Generalizada

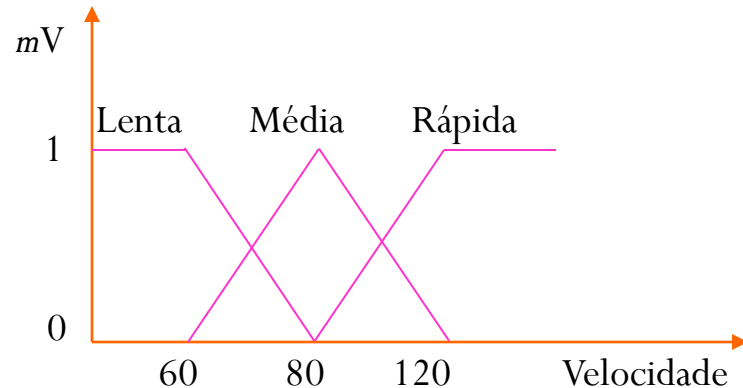


Função de Pertinência

- $mt(23)$ a $mt(27) = 1$
 - Temperatura ambiente
- $mt(21)$ ou $mt(29)$
 - Temperatura quase ambiente
- $mt(0)$ ou $mt(50)$
 - Temperatura não ambiente



Função de Pertinência



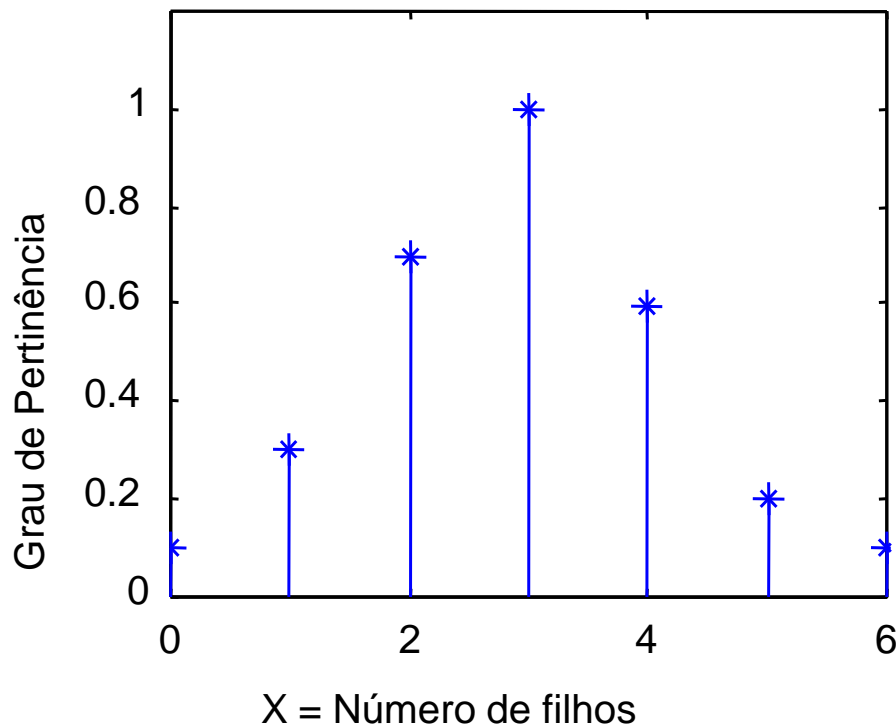
- $T(\text{velocidade}) = \{\text{lenta}, \text{média}, \text{rápida}\}$
- Variável linguística = velocidade
- Termos (conj.fuzzy) = lenta, média, rápida

Conjuntos Fuzzy

- Pertinência não é probabilidade:
 - Pertinência é o nível de compatibilidade de um elemento do conjunto com o conceito do conjunto.
- Exemplo:
 - Pedro é ALTO com $\mu=0.85$.
 - Indica que Pedro é bem compatível com o conceito ALTO.
 - Tem-se uma idéia da altura de Pedro.
 - Pedro tem 0.85 de probabilidade de ser ALTO.
 - Indica que Pedro tem grandes chances de ser ALTO.
 - NÃO se têm a menor idéia da altura de Pedro.

Função de pertinência: Universo Discreto

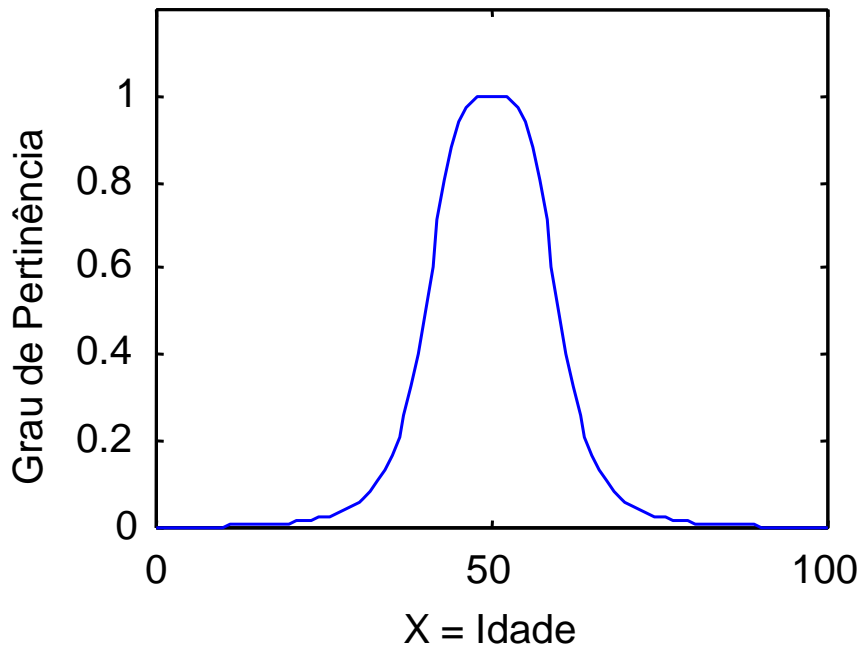
(a) Universo Discreto



- $X = \{SF, Boston, LA\}$ (discreto e não ordenado)
 - $C = \text{"Cidade desejável para se viver"}$
 - $C = \{(SF, 0.9), (Boston, 0.8), (LA, 0.6)\}$
- $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (discreto)
 - $A = \text{"Número de filhos"}$
 - $A = \{(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)\}$

Função de pertinência: Universo Contínuo

(b) Universo Contínuo

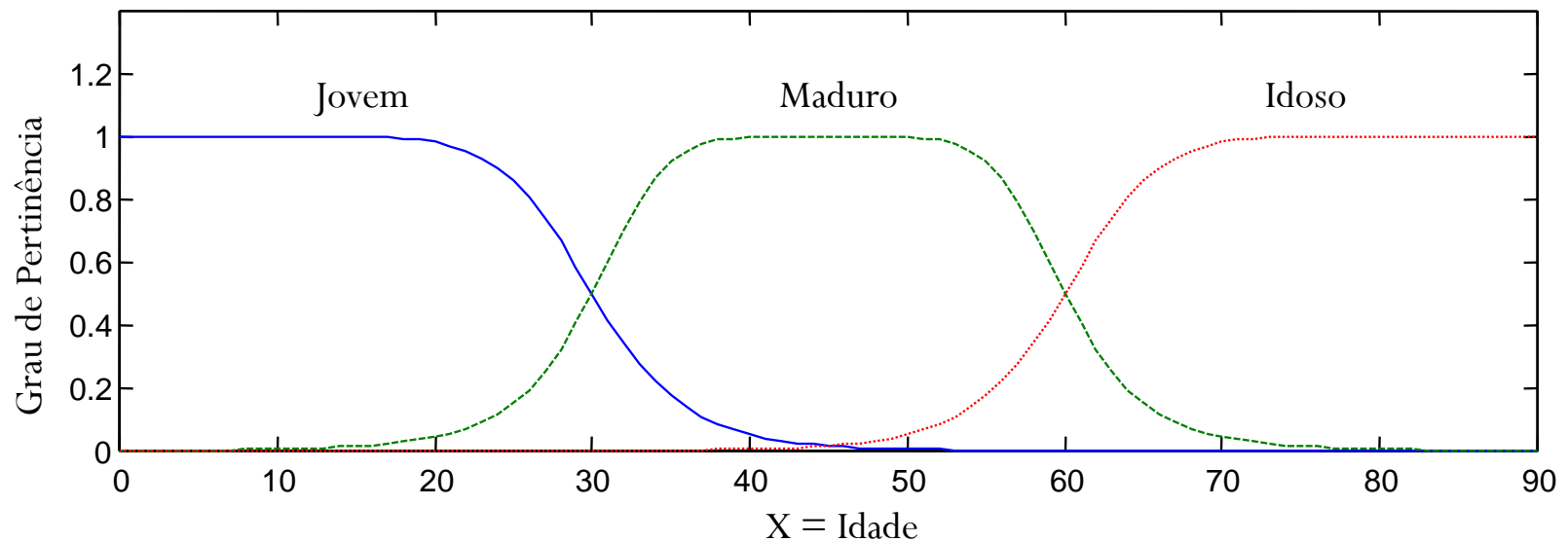


- $X = (\text{Conjunto de números reais positivos})$ (contínuo)
- $B = \text{"Pessoas com idade em torno de 50 anos"}$
- $B = \{(x, \mu_{B(x)}) \mid x \text{ em } X\}$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$

Partição Fuzzy

- Partição fuzzy do universo de X representando “idade”, formada pelos conjuntos fuzzy “jovem”, “maduro” e “idoso”.



Variáveis Linguísticas

- Uma variável lingüística possui valores que não são números, mas sim palavras ou frases em linguagem natural.
 - Idade = idoso
- Um valor lingüístico é um conjunto fuzzy.
- Todos os valores lingüísticos formam um conjunto de termos:
 - $T(\text{idade}) = \{\text{Jovem, velho, muito jovem, ...}$
 $\text{Maduro, não maduro, ...}$
 $\text{Velho, não velho, muito velho, mais ou menos velho, ...}$
 $\text{Não muito jovem e não muito velho, ...}\}$
- Permitem que a linguagem da modelagem fuzzy expresse a semântica usada por especialistas

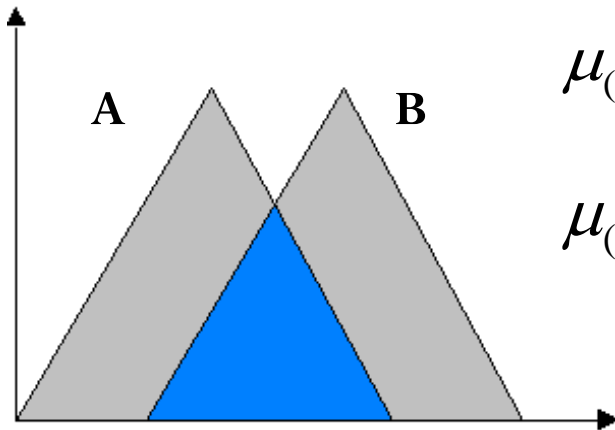
Exemplo:

If projeto.duração *is* não muito LONGO
then risco *is* ligeiramente reduzido

Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

- Intersecção

Sejam X conjunto de pontos, A e B conjuntos contidos em X e $\forall x \in X$.



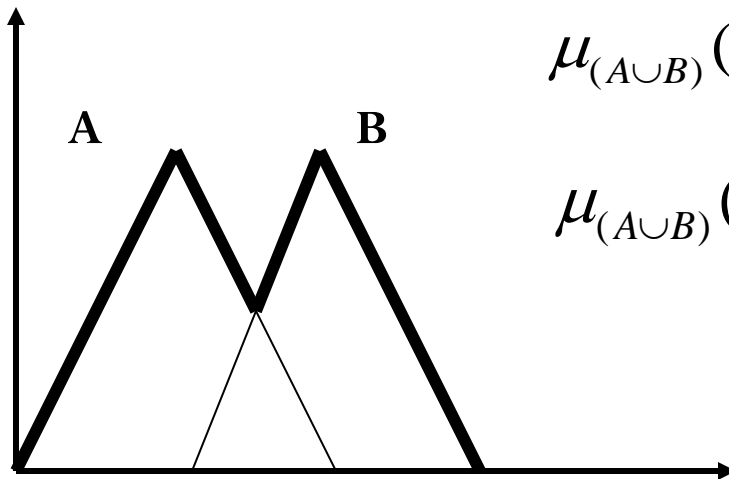
$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

- União

Sejam X conjunto de pontos, A e B conjuntos contidos em X e $\forall x \in X$.



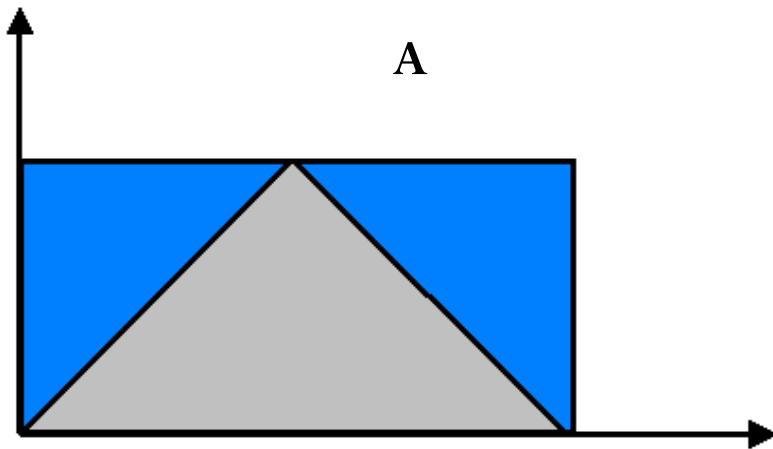
$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

- Complemento

Sejam X conjunto de pontos, A um conjunto contido em X e $\forall x \in X$.



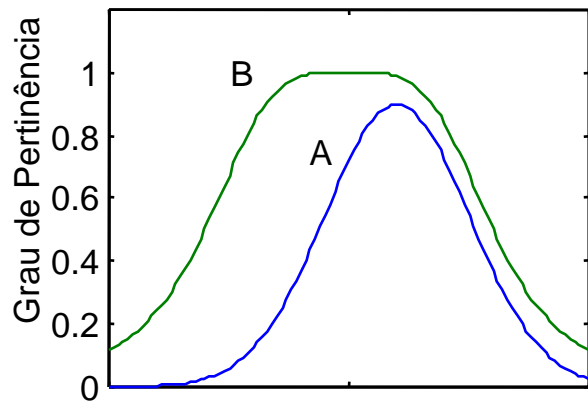
$$\neg\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Operações Básicas

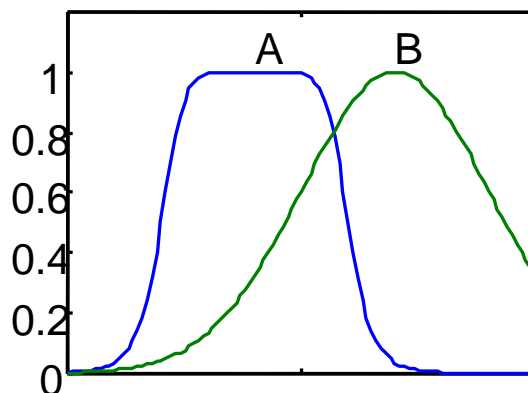
- Subconjunto
 - ⊠ $A \subset B$, se $\mu_{B(x)} \geq \mu_{A(x)}$ para cada $x \in X$
- Igualdade
 - ⊠ $A = B$, se $\mu_{A(x)} = \mu_{B(x)}$ para cada $x \in X$
- Complemento
 - ⊠ $\bar{A} = X - A \rightarrow \mu_{\bar{A}(x)} = 1 - \mu_{A(x)}$
- União
 - ⊠ $C = A \cup B \rightarrow \mu_{C(x)} = \max(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
 - ⊠ $C = \mu_{A(x)} \vee \mu_{B(x)}$
- Interseção
 - ⊠ $C = A \wedge B \rightarrow \mu_{C(x)} = \min(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
 - ⊠ $C = \mu_{A(x)} \wedge \mu_{B(x)}$

Representação

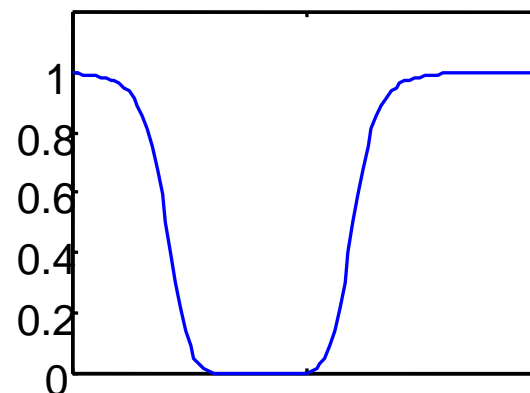
A está contido em B



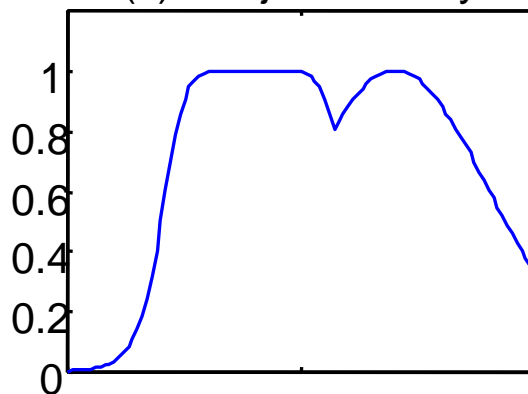
(a) Conjuntos Fuzzy A e B



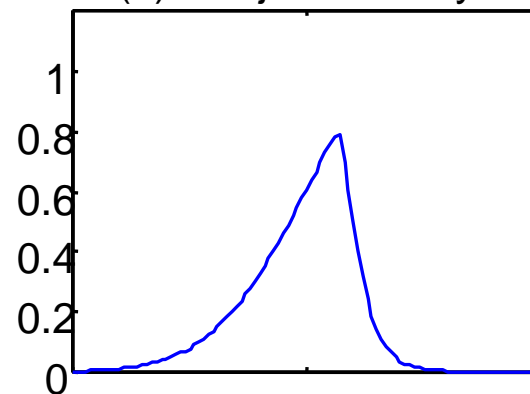
(b) Conjunto Fuzzy não "A"



(c) Conjunto Fuzzy "A ou B"

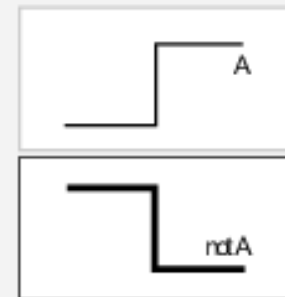
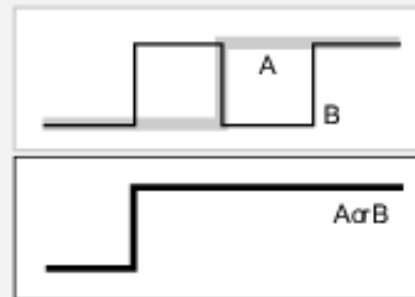
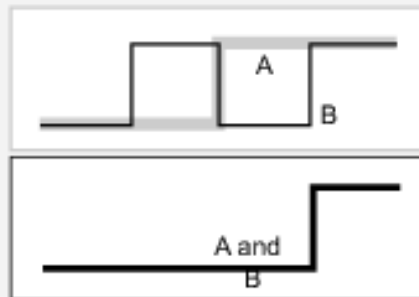


(d) Conjunto Fuzzy "A e B"

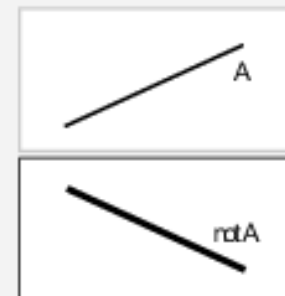
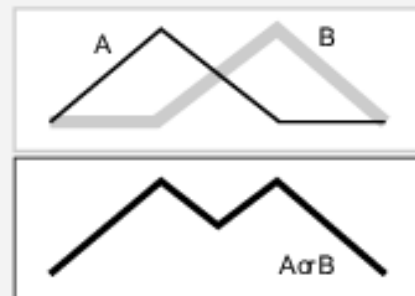
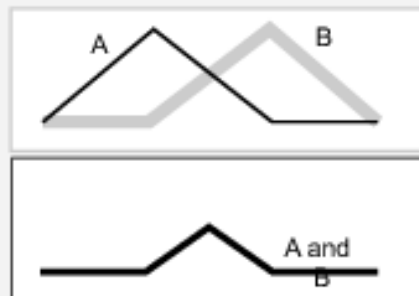


Operadores na lógica clássica a na lógica fuzzy

Two-valued
logic



Multivalued
logic



AND
 $\min(A,B)$

OR
 $\max(A,B)$

NOT
 $(1-A)$

Exemplo (União | Interseção)

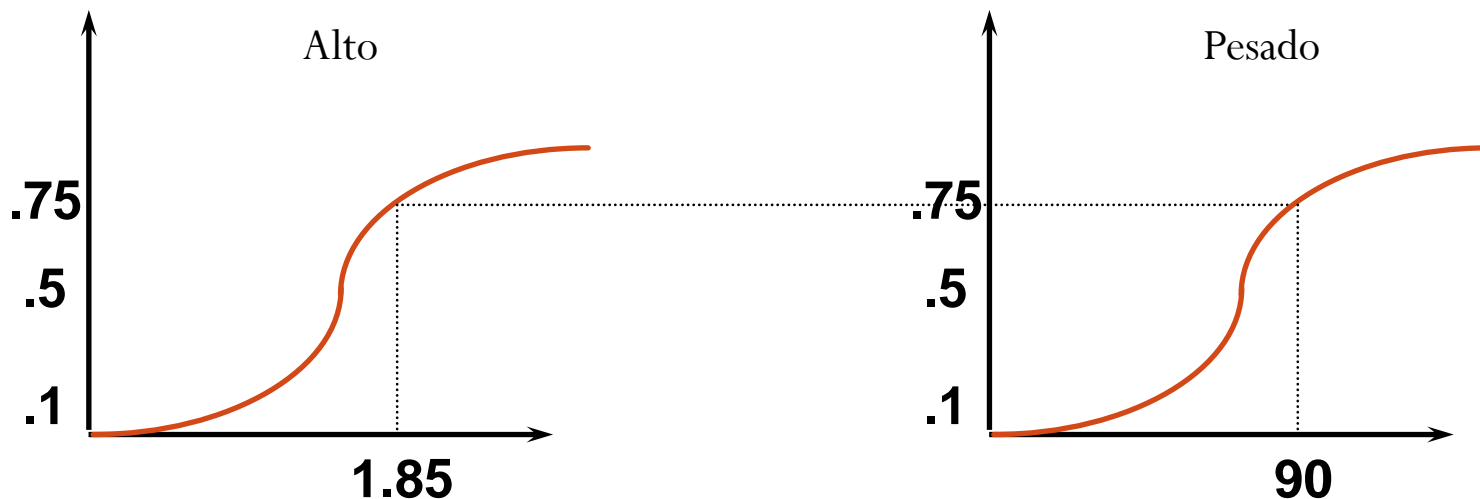
- $X = \{a, b, c, d, e\}$
 - $A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$
 - $B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$
 - União
 - $C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$
 - Interseção
 - $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$

Regras Fuzzy

- Formam a *base de conhecimento*
- Equivalente as regras de produção
- **IF** x é A **THEN** y é B
 (antecedente) (consequente)
- **IF** pressão é alta **THEN** volume é pequeno
- Inferência
 Procedimento para se chegar a conclusões a partir de regras
 IF-THEN (“Raciocínio” fuzzy)

Regras Fuzzy

- E o raciocínio?
 - Avaliar o antecedente
 - Aplicar o resultado ao conseqüente
 - As regras são ativadas parcialmente, dependendo do antecedente
 - Ex: Se a altura é alta, o peso é pesado (altura = 1.85, peso = ?)



Etapas do raciocínio Fuzzy

Variáveis Calculadas
(Valores Linguísticos)

Inferência

Variáveis de Comando
(Valores Linguísticos)

Nível
Linguístico

Fuzzificação

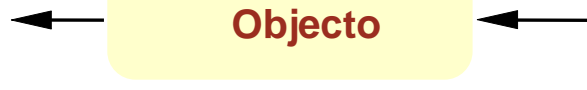
Nível
Numérico

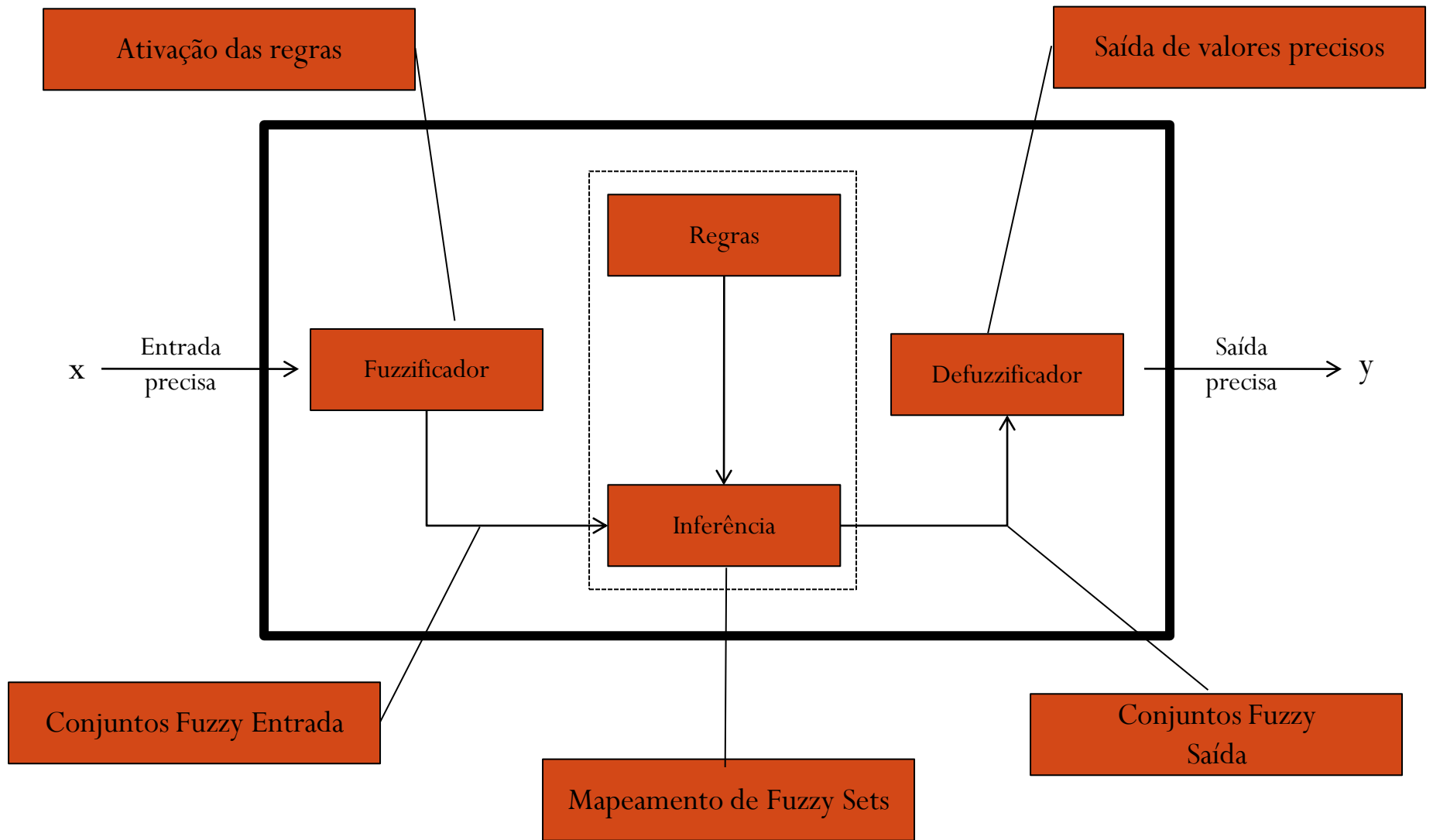
Defuzzificação

Variáveis Calculadas
(Valores Numéricos)

Objecto

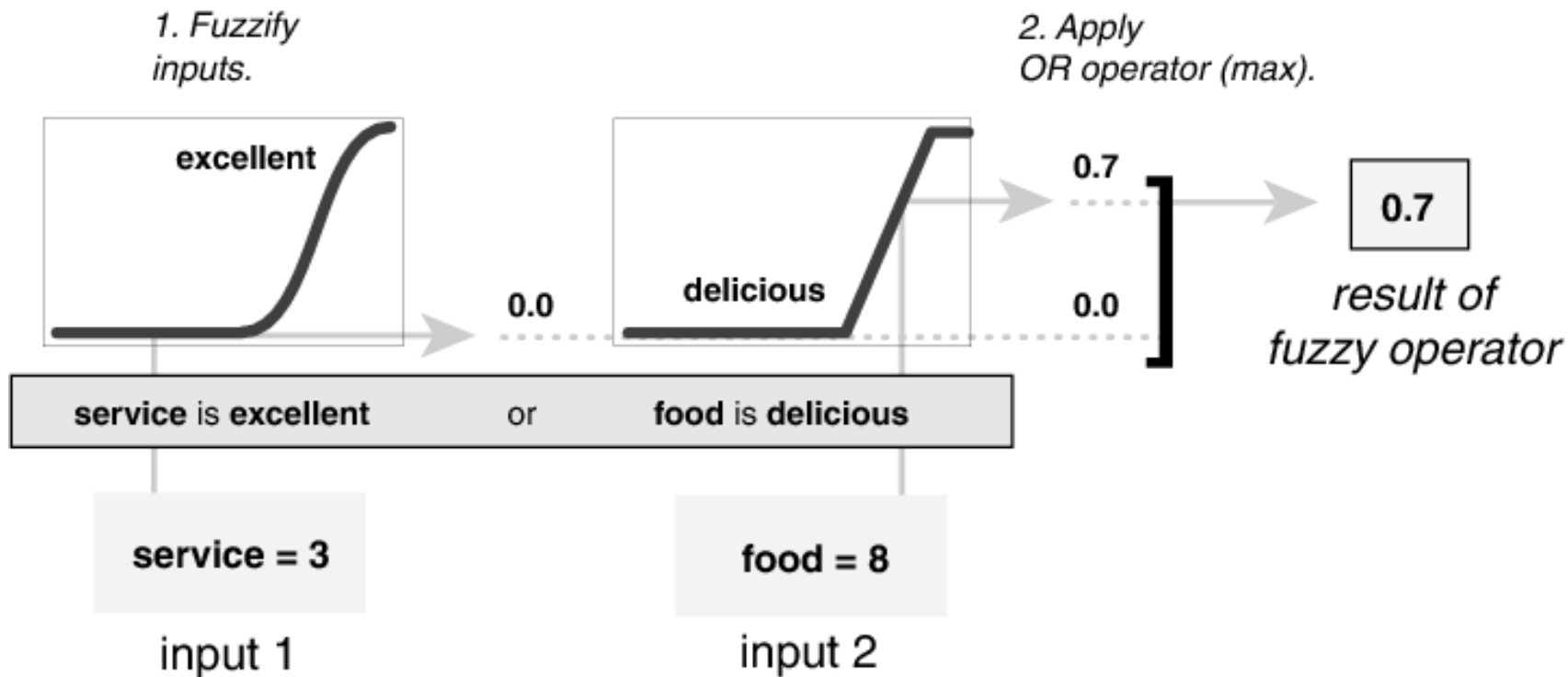
Variáveis de Comando
(Valores Numéricos)





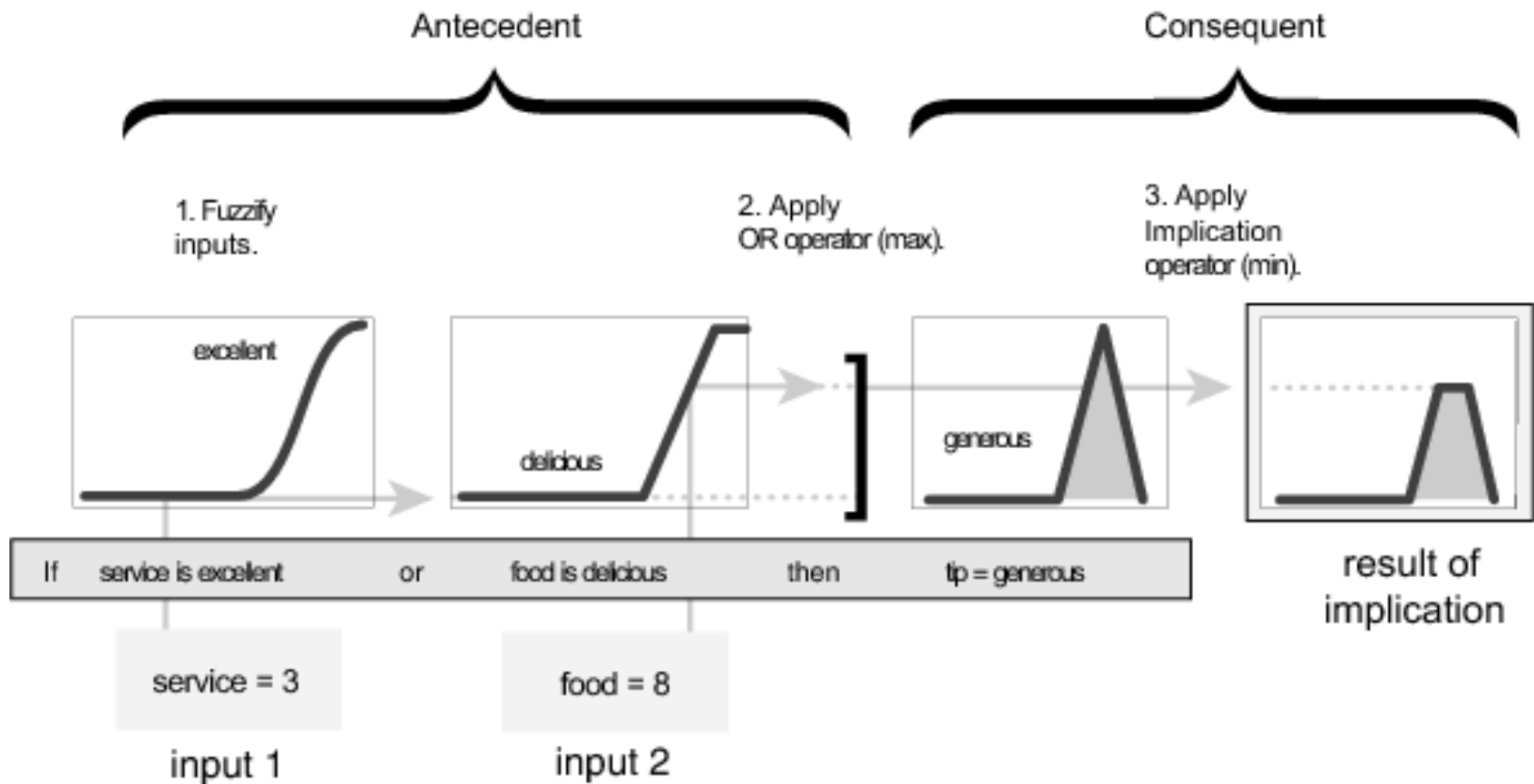
Exemplo

Operadores lógicas em cada regra



Exemplo

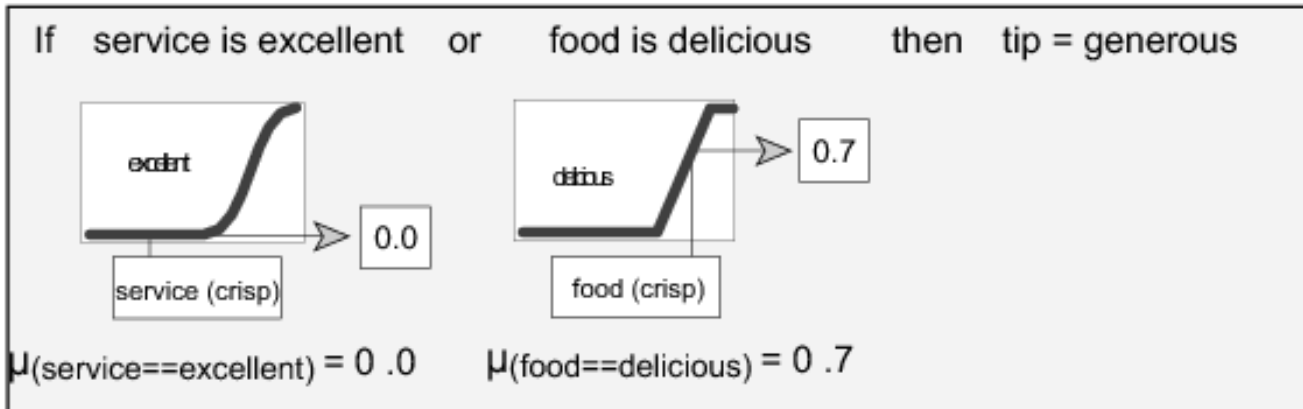
Implicação de cada regra



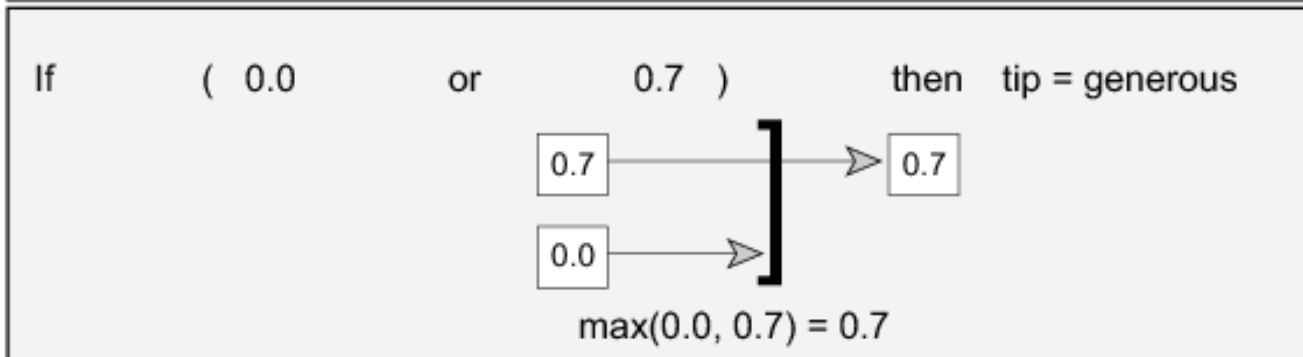
Antecedent

Consequent

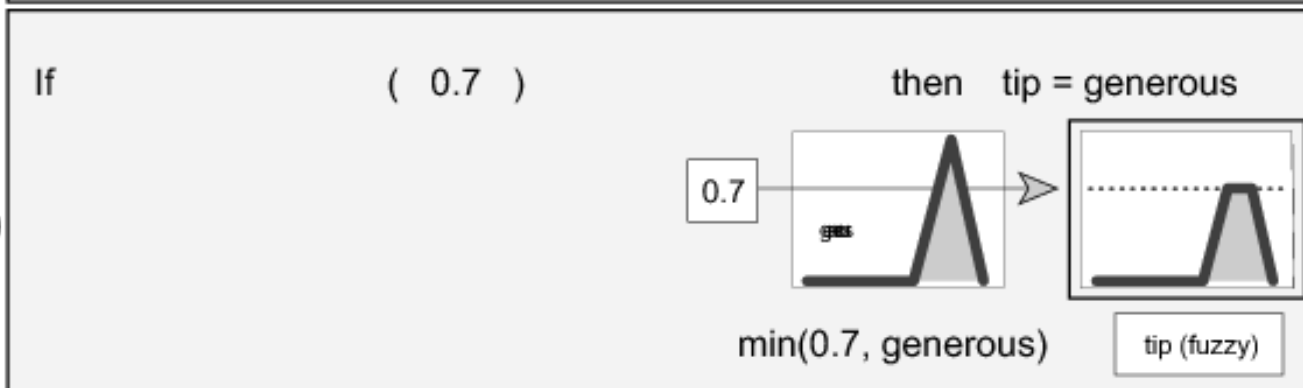
1. Fuzzify inputs



2. Apply OR operator (max)

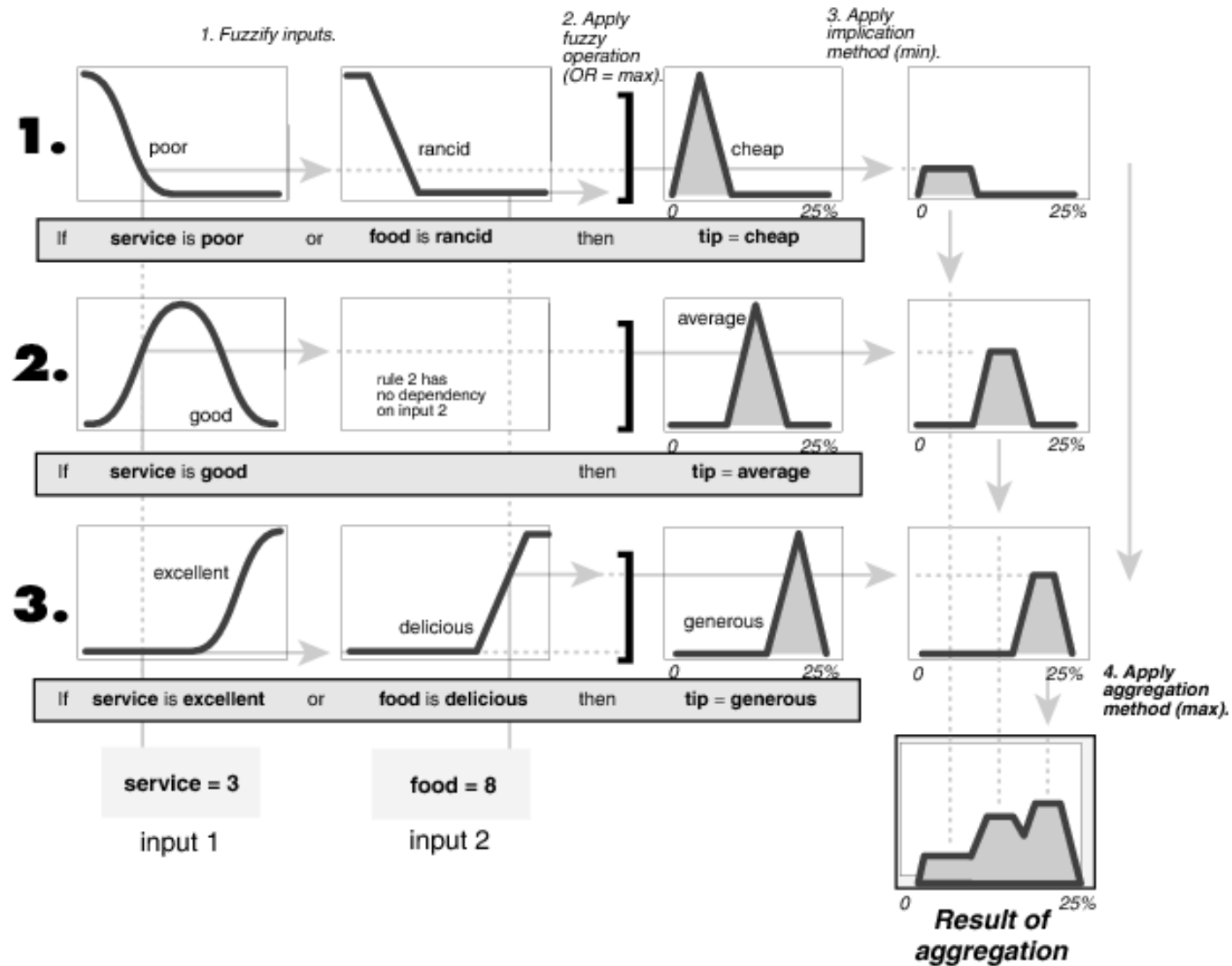


3. Apply implication operator (min)

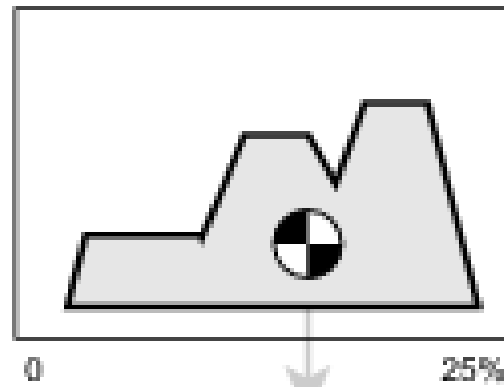


Exemplo

Agregação das regras



Defuzzificação



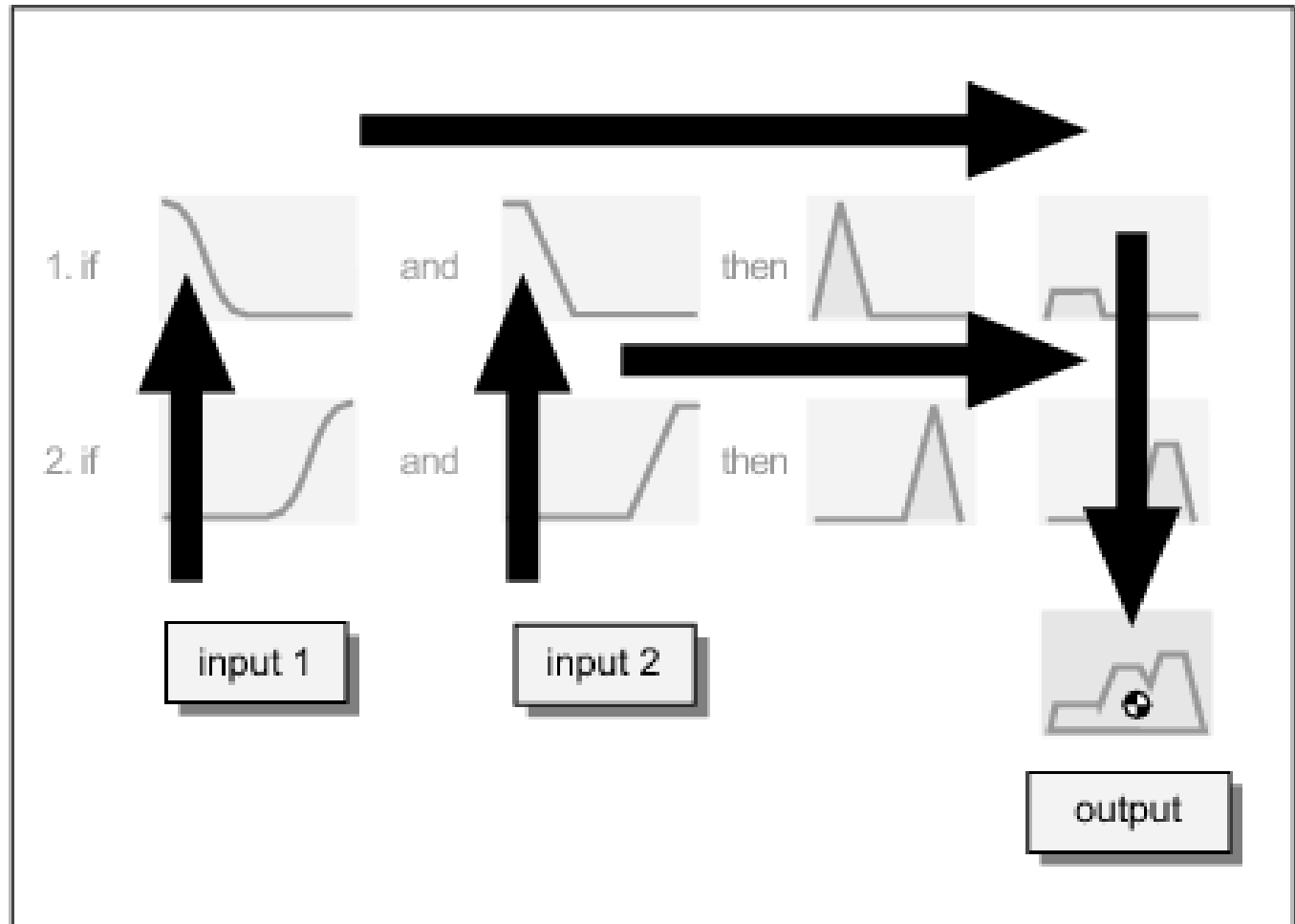
5. Defuzzify the aggregate output (centroid).

tip = 16.7%

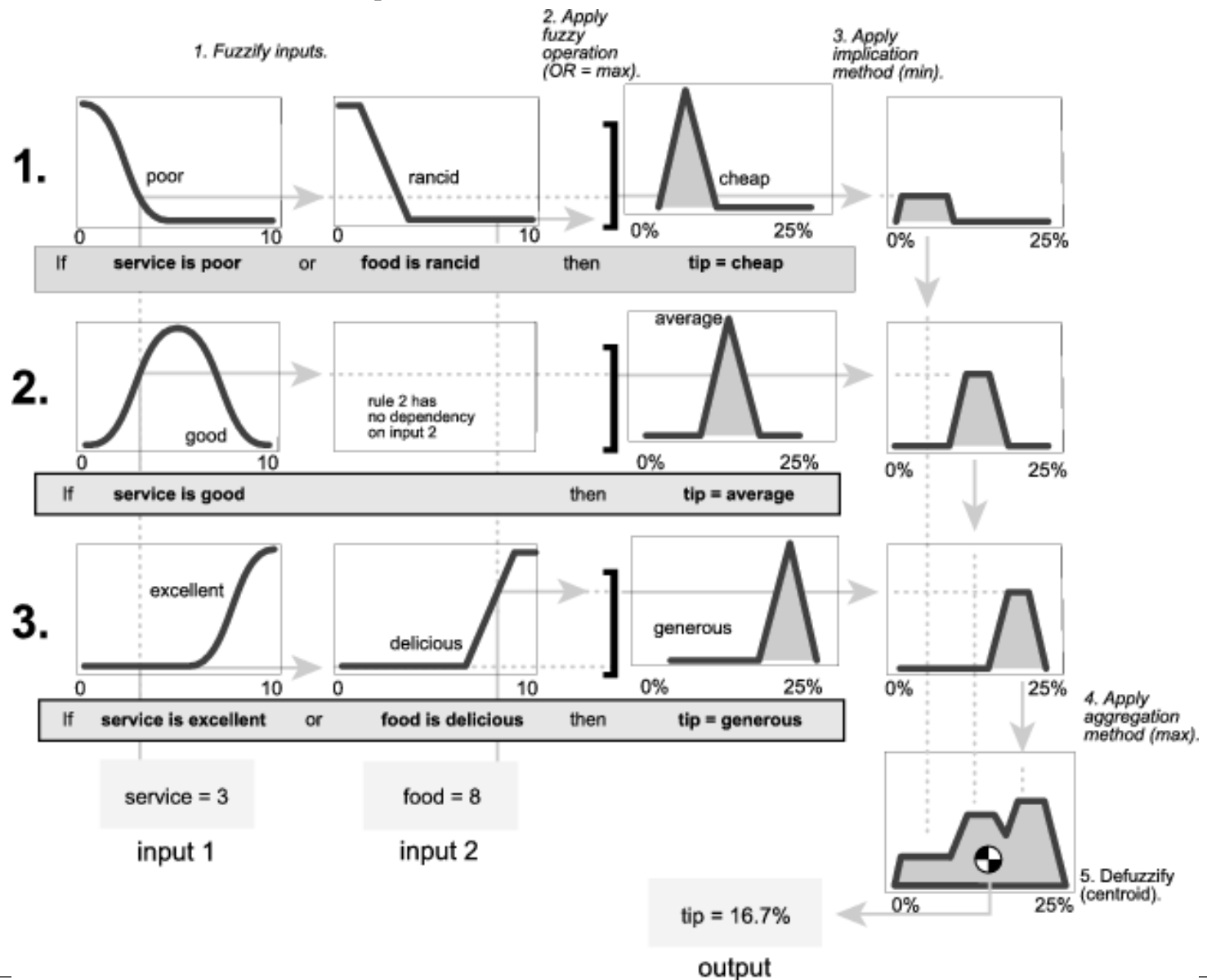
Result of
defuzzification

Resumo do processo de inferência

Interpreting the
fuzzy inference
diagram



Resumo do processo de inferência

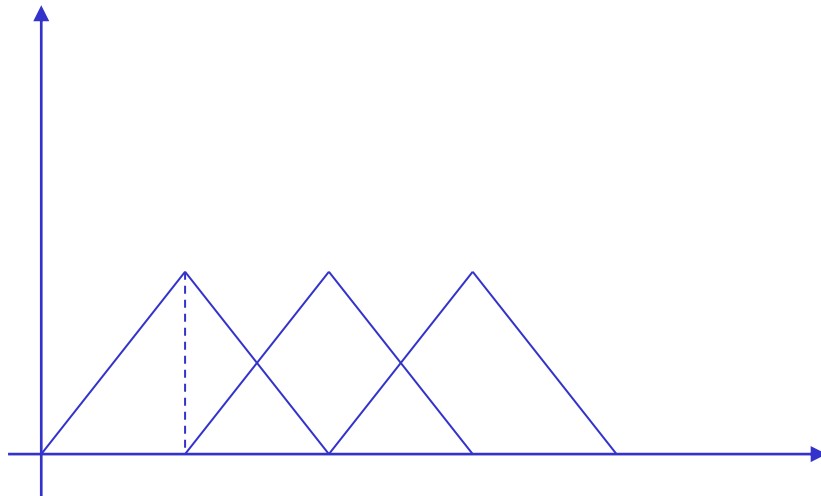


Fuzzificação

- Etapa na qual as variáveis lingüísticas são definidas de forma subjetiva, bem como as funções membro (funções de pertinência)
- Engloba
 - Análise do Problema
 - Definição das Variáveis
 - Definição das Funções de pertinência
 - Criação das Regiões
- Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
 - Triangular, Trapezoidal, ...

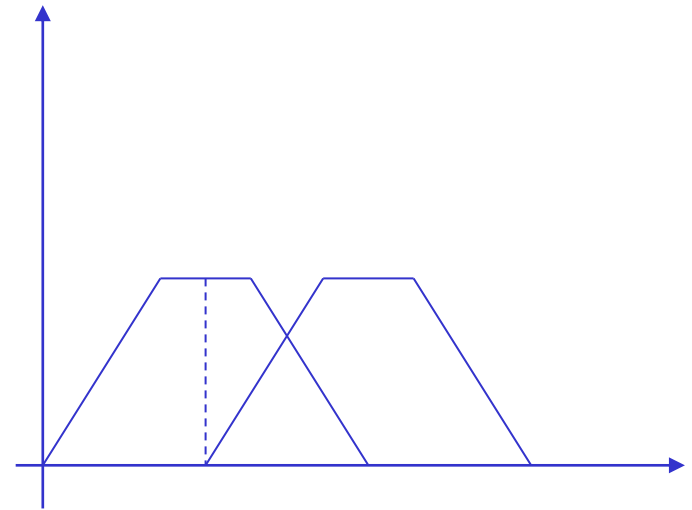
Fuzzificação

TRIANGULAR



Frio Normal Quente

TRAPEZOIDAL



Lento Rápido

Inferência Fuzzy

- Etapa na qual as proposições (regras) são definidas e depois são examinadas paralelamente
- Engloba:
 - Definição das proposições
 - Análise das Regras
 - Criação da região resultante
- O mecanismo chave do modelo *Fuzzy* é a proposição
- A proposição é o relacionamento entre as variáveis do modelo e regiões *Fuzzy*
- Na definição das proposições, deve-se trabalhar com:
 - Proposições Condicionais
$$\textit{if } W \textit{ is } Z \textit{ then } X \textit{ is } Y$$
 - Proposições Não-Condicionais
$$X \textit{ is } Y$$

Inferência Fuzzy

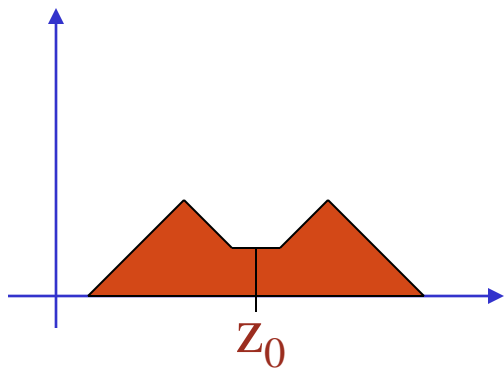
- A regra semântica tradicionalmente utilizada para o processamento de inferências com o modelo de Mamdani é chamada de inferência Máx - Min.
- Utiliza as operações de união e de interseção entre conjuntos da mesma forma que Zadeh, por meio dos operadores de máximo e de mínimo, respectivamente.

Defuzzificação

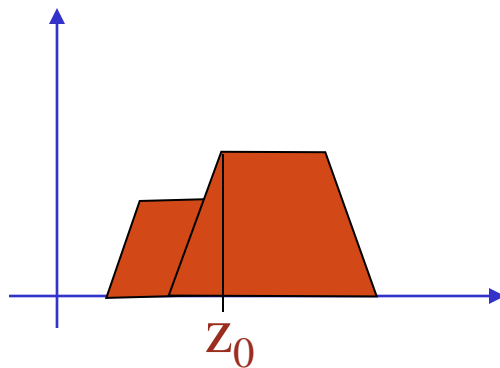
- Etapa no qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema
- Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões *Fuzzy* e o valor esperado
- Dentre os diversos tipos de técnicas de defuzzificação destaca-se:
 - Centróide
 - *First-of-Maxima*
 - Middle-of-Maxima
 - Critério Máximo

Defuzzificação

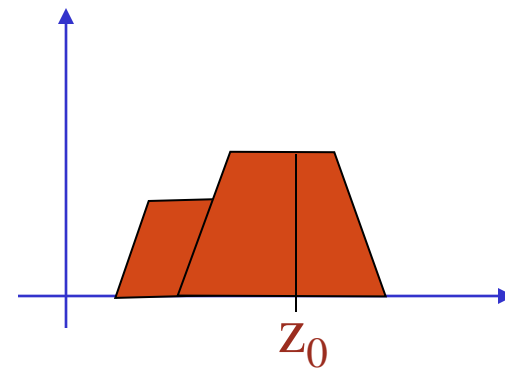
Exemplos:



Centróide



First-of-Maxima



Critério Máximo

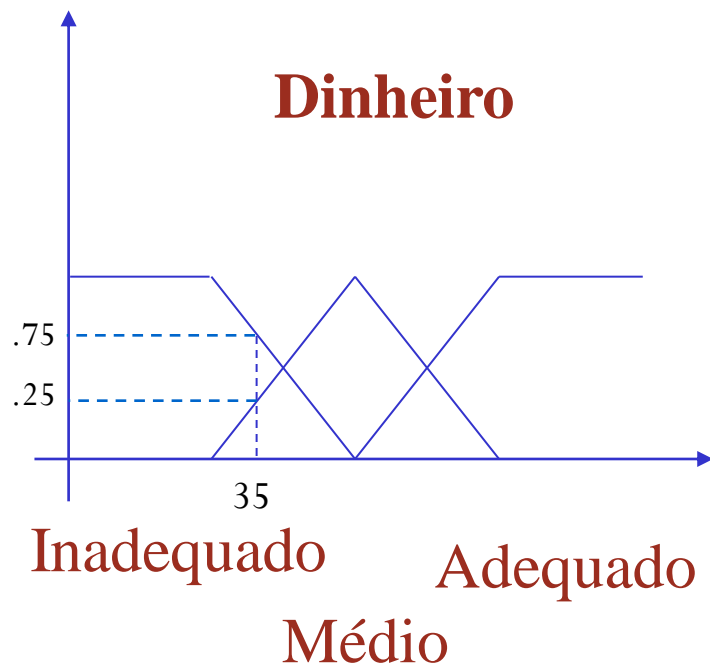
Inferência Fuzzy: Um exemplo

- Objetivo do sistema:
 - um analista de projetos de uma empresa que determina o risco de um determinado projeto
 - Quantidade de dinheiro e de pessoas envolvidas no projeto
- Representação das variáveis de entrada
 - Base de conhecimento
 1. Se dinheiro é adequado ou pessoal é pequeno então risco é pequeno
 2. Se dinheiro é médio e pessoal é alto, então risco é normal
 3. Se dinheiro é inadequado, então risco é alto

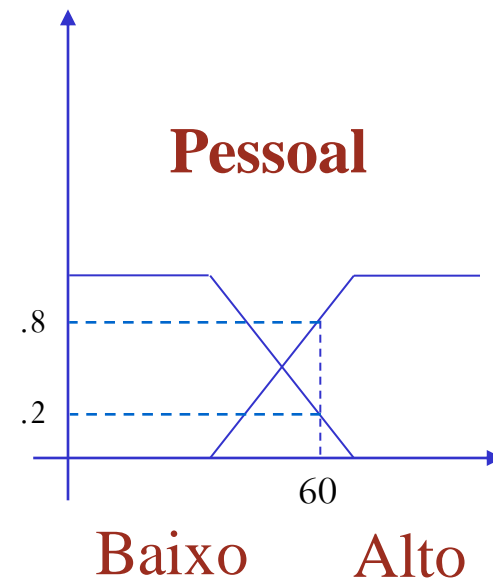
Problema: dinheiro = 35% e pessoal = 60%

Inferência Fuzzy: Um exemplo

- Passo 1: Fuzzificar



$$\mu_i(d) = 0,25 \text{ \& } \mu_m(d) = 0,75$$



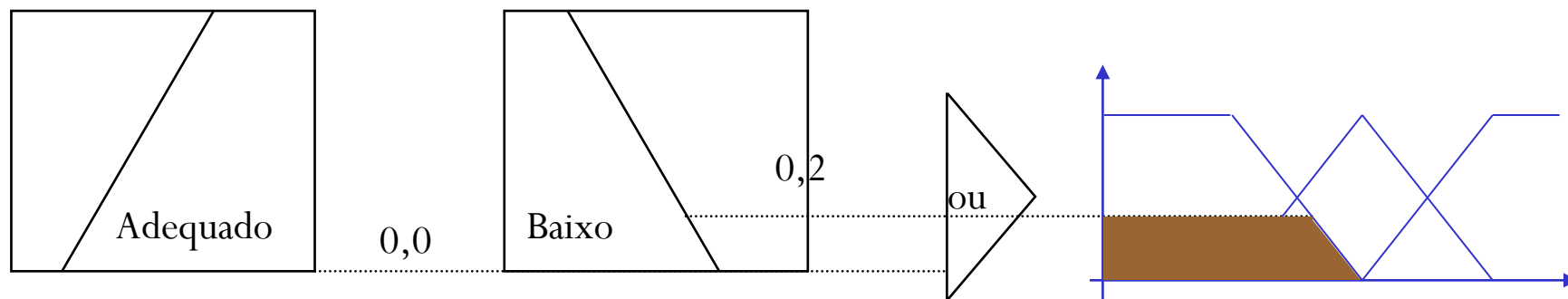
$$\mu_b(p) = 0,2 \text{ \& } \mu_a(p) = 0,8$$

Inferência Fuzzy: Um exemplo

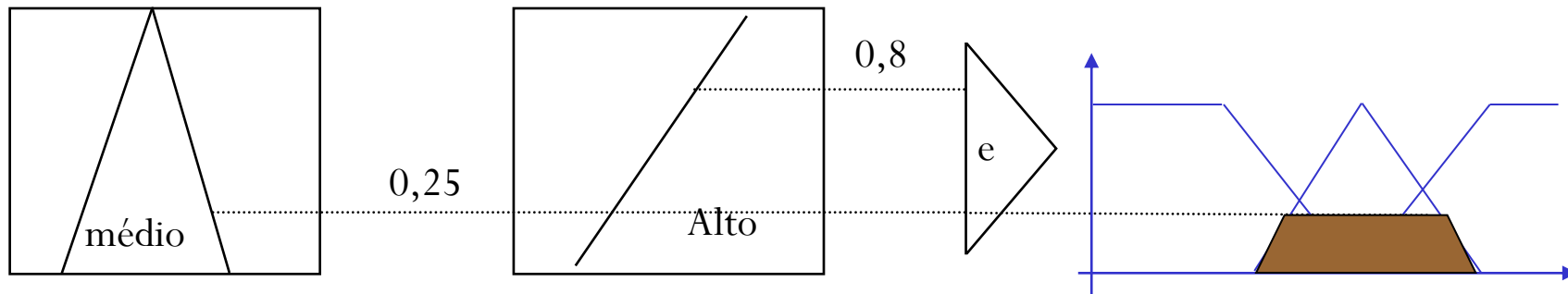
- Passo 2: Avaliação das regras

- Ou \rightarrow máximo, e \rightarrow mínimo

Regra 1:

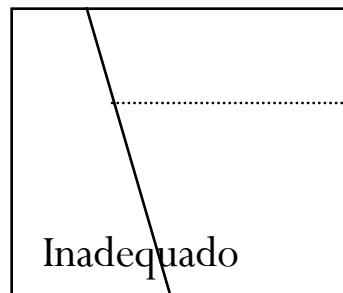


Regra 2:



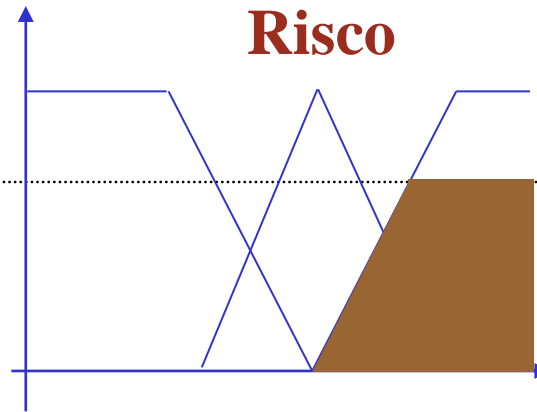
Inferência Fuzzy

Regra 3:



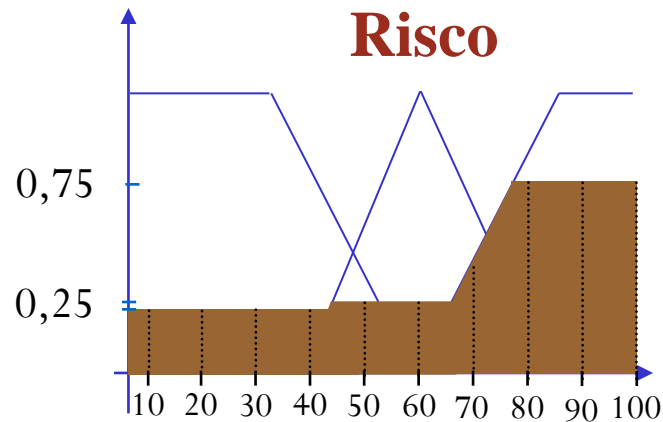
0,75

Risco



Inferência Fuzzy

- Passo 3: Defuzzificação



$$C = \frac{(10 + 20 + 30 + 40) * 0,2 + (50 + 60 + 70) * 0,25 + (80 + 90 + 100) * 0,75}{0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,75 + 0,75 + 0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$

Projeto de um Sistema Fuzzy

- Seleção das variáveis de entrada e saída
- Definição das regras e conjuntos fuzzy
- Mecanismo de inferência (MIN-MAX)
- Escolha da estratégia de defuzzificação