Caminho, Circuito e Subgrafo

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria de Grafos
Bacharelado em Ciência da Computação

23 de maio de 2016

UFG
Regional Jataí

Plano de Aula

1. Revisão
   - Matriz de adjacências e incidências
   - Vizinhança
2. Caminhos e Circuitos
3. Subgrafos

Pensamento

Frase

O plano que não pode ser mudado não presta.

Quem?

Públio Siro (??? - 43 d.C.)
Escritor latino da Roma antiga.

Sumário

UFG Regional Jataí

Matriz de adjacências e incidências

Definição

Uma **matriz de adjacências** de um grafo G é a matriz A definida da seguinte maneira: para todo vértice u e v

$$A[u,v] = \begin{array}{ll} 1 & \text{se } uv \in E_G \text{ ,} \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{array}$$

Definição

Uma **matriz de incidências** de um grafo G é a matriz M definida da seguinte maneira: para todo vértice u e uma aresta e

$$M[u,e] = \begin{array}{ll} 1 & \text{se } u \text{ é uma das pontas de } e \text{ ,} \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{array}$$

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v;

UFG
Regional Jataí

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v;
- Este conjunto será denotado por $N_G(v)$ (ou simplesmente $N(v)$).

Lembrando...

Seja G um grafo e $v, u \in V(G)$.
Dizemos que v é vizinho de u se existe uma aresta que os liga.

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v;
- Este valor será denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$;
- Um vértice v é **isolado** se $d(v) = 0$.

Corolário

- $d_G(v) = |N(v)|$.

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau máximo

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Média dos graus

$$\mu(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Corolário

$$\mu(G) = \frac{2m(G)}{n(G)}$$

UFG
Regional Jataí

Grafo regular

Grafo regular

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$.

r-regular

Um grafo é r-regular se $d(v) = r$ para todo vértice v.

Grafo cúbico

Um **grafo cúbico** é o mesmo que um grafo 3-regular.

UFG
Regional Jataí

Sumário

UFG
Regional Jataí

Caminhos e Circuitos

Caminho

Um grafo G é um **caminho** se V_G admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}$$

Caminhos e Circuitos

Caminho

Um grafo G é um **caminho** se V_G admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}$$

- os vértices v_1 e v_n são os **extremos** do caminho;

UFG
Regional Jataí

Caminhos e Circuitos

Caminho

Um grafo G é um **caminho** se V_G admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}$$

- os vértices v_1 e v_n são os **extremos** do caminho;
- os demais vértices são **internos**;

Caminhos e Circuitos

Caminho

Um grafo G é um **caminho** se V_G admite uma permutação $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}$$

- os vértices v_1 e v_n são os **extremos** do caminho;
- os demais vértices são **internos**;
- diremos que esse caminho **liga** v_1 a v_n.

UFG
Regional Jataí

Caminhos e Circuitos

Caminho

Um grafo G é um **caminho** se V_G admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}$$

- os vértices v_1 e v_n são os **extremos** do caminho;
- os demais vértices são **internos**;
- diremos que esse caminho **liga** v_1 a v_n.

Notação

Podemos denotar um caminho pela sequência representada pelos seus vértices:

UFG
Regional Jataí

Caminhos e Circuitos

Caminho

Um grafo G é um **caminho** se V_G admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}$$

- os vértices v_1 e v_n são os **extremos** do caminho;
- os demais vértices são **internos**;
- diremos que esse caminho **liga** v_1 a v_n.

Notação

Podemos denotar um caminho pela sequência representada pelos seus vértices:

$$v_1 v_2 \ldots v_n$$

Caminhos e Circuitos

Circuito

Um grafo G é um **circuito** se V_G tem 3 ou mais elementos e admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_1 v_n\}$$

Caminhos e Circuitos

Circuito

Um grafo G é um **circuito** se V_G tem 3 ou mais elementos e admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_1 v_n\}$$

Notação

- Podemos denotar um circuito simplesmente por:

Caminhos e Circuitos

Circuito

Um grafo G é um **circuito** se V_G tem 3 ou mais elementos e admite uma permutação $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_1 v_n\}$$

Notação

- Podemos denotar um circuito simplesmente por:

$$v_1 v_2 \dots v_n v_1$$

- O **comprimento** de um caminho ou circuito G é o número $m(G)$;

Caminhos e Circuitos

Circuito

Um grafo G é um **circuito** se V_G tem 3 ou mais elementos e admite uma permutação $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que

$$E_G = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_1 v_n\}$$

Notação

- Podemos denotar um circuito simplesmente por:
$$v_1 v_2 \ldots v_n v_1$$
- O **comprimento** de um caminho ou circuito G é o número $m(G)$;
- Um **triângulo, quadrado, pentágono e hexágono** é o mesmo que um circuito de comprimento 3, 4, 5 e 6 respectivamente.

Sumário

Subgrafos

Definição

Um **subgrafo** de um grafo G é qualquer grafo H tal que $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.

Subgrafos

Definição

Um **subgrafo** de um grafo G é qualquer grafo H tal que $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.

Notações e Nomenclaturas

- É conveniente escrever "$H \subseteq G$" para dizer que H é subgrafo de G;

Subgrafos

Definição

Um **subgrafo** de um grafo G é qualquer grafo H tal que $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.

Notações e Nomenclaturas

- É conveniente escrever "$H \subseteq G$" para dizer que H é subgrafo de G;
- Um subgrafo H de G é **gerador** (*abrangente*, para alguns) se $V_H = V_G$;

UFG
Regional Jataí

Subgrafos

Definição

Um **subgrafo** de um grafo G é qualquer grafo H tal que $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$.

Notações e Nomenclaturas

- É conveniente escrever "$H \subseteq G$" para dizer que H é subgrafo de G;
- Um subgrafo H de G é **gerador** (*abrangente*, para alguns) se $V_H = V_G$;
- Um subgrafo H de G é **próprio** se $V_H \neq V_G$ ou $E_H \neq E_G$ (notação: $H \subset G$).

UFG
Regional Jataí

Subgrafos

Subgrafo induzido - $G[X]$

O subgrafo de G **induzido** por um subconjunto X de V_G é o grafo (X, F) em que F é o conjunto $E_G \cap X^{(2)}$.
Esse subgrafo é denotado por $G[X]$.

UFG
Regional Jataí

Subgrafos

Subgrafo induzido - $G[X]$

O subgrafo de G **induzido** por um subconjunto X de V_G é o grafo (X, F) em que F é o conjunto $E_G \cap X^{(2)}$.
Esse subgrafo é denotado por $G[X]$.

$G - X$

Para qualquer subconjunto X de V_G,
denotaremos por $G - X$ o subgrafo $G[V_G \setminus X]$.

UFG
Regional Jataí

Subgrafos

Subgrafo induzido - $G[X]$

O subgrafo de G **induzido** por um subconjunto X de V_G é o grafo (X, F) em que F é o conjunto $E_G \cap X^{(2)}$.
Esse subgrafo é denotado por $G[X]$.

$G - X$

Para qualquer subconjunto X de V_G,
denotaremos por $G - X$ o subgrafo $G[V_G \setminus X]$.

$G - v$

Uma abreviação para $G - \{v\}$.

UFG
Regional Jataí

Subgrafos

$G - a$

Uma abreviação para o grafo $(V_G, E_G \setminus \{a\})$.

Subgrafos

$G - a$

Uma abreviação para o grafo $(V_G, E_G \setminus \{a\})$.

$G - A$

Se A é um subconjunto de E_G, então $G - A$ é uma abreviação para o grafo $(V_G, E_G \setminus A)$.

Subgrafos

$G - a$

Uma abreviação para o grafo $(V_G, E_G \setminus \{a\})$.

$G - A$

Se A é um subconjunto de E_G, então $G - A$ é uma abreviação para o grafo $(V_G, E_G \setminus A)$.

Corolário

$G - A$ é um grafo gerador de G.

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- Quanto valem os parâmetros m, δ, e Δ de uma roda com n vértices? (ver E 1.76);
- Candidaturas até dia 24 de maio, 13h30;
- Apresentação e resposta por escrito $\rightarrow$ (07 de junho, 15h30);
- 20 minutos de apresentação.

UFG
Regional Jataí

Caminho, Circuito e Subgrafo

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria de Grafos
Bacharelado em Ciência da Computação

23 de maio de 2016