Noções Básicas de Grafos

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

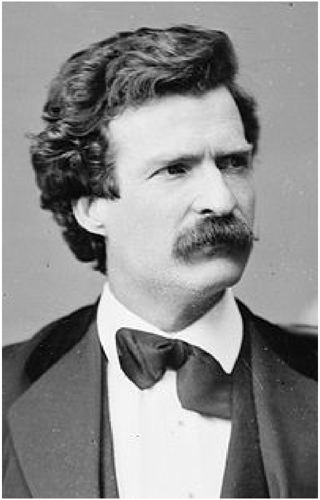
Teoria de Grafos
Bacharelado em Ciência da Computação

09 de maio de 2017

Plano de Aula

UFG
Regional Jataí

Pensamento



Frase

A gente não se liberta de um hábito atirando-o pela janela: é preciso fazê-lo descer a escada, degrau por degrau.

Quem?

Mark Twain (1835 - 1910)

Escritor e humorista estadunidense

Sumário

1. Revisão
   - Preliminares
   - Grafo
   - Outras terminologias
2. Noções Básicas de Grafos
   - Matriz de adjacências e incidências
3. Vizinhança

Preliminares

$V^{(2)}$

Para qualquer conjunto V, denotaremos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não-ordenados de elementos distintos de V.

Corolário 1

Se V tem n elementos, então $V^{(2)}$ tem $\binom{n}{2} := \frac{n(n-1)}{2}$ elementos.

UFG
Regional Jataí

Preliminares

Corolário 2

Os elementos de $V^{(2)}$ serão identificados com os subconjuntos de V que têm cardinalidade 2.

Corolário 3

Assim, cada elemento de $V^{(2)}$ terá a forma $\{v, w\}$, sendo v e w dois elementos distintos de V.

Grafo

Grafo

Um **grafo** é um par (V, A) em que V é um conjunto arbitrário e A é um subconjunto de $V^{(2)}$.

Vértices

São todos os elementos que pertencem a V.

Arestas

São todos os elementos que pertencem a A.

UFG
Regional Jataí

Outras terminologias

$\{v, w\} \equiv vw$

Uma aresta como $\{v, w\}$ será denotada simplesmente por vw ou por wv.

Incidência

Diremos que a aresta vw **incide** em v e em w. Também diremos que v e w são as **pontas** da aresta.

UFG
Regional Jataí

Outras terminologias

Ponta

Diremos que para uma aresta vw, v e w são as **pontas** da aresta.

Adjacência

Se vw é uma aresta, diremos que os vértices v e w são **vizinhos** ou **adjacentes**.

Observação

Nossa definição de grafo não admite que arestas tenham pontas coincidentes (i.e. laços). Existem autores que denotam este aspecto da definição dizendo que o grafo é "simples".

Sumário

Outras terminologias

$V(G)$ e $A(G)$

Se o nome de um grafo for G, então o conjunto de seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto de suas arestas por $A(G)$.

Outras terminologias

$V(G)$ e $A(G)$

Se o nome de um grafo for G, então o conjunto de seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto de suas arestas por $A(G)$.

$n(G)$ e $m(G)$

O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$.

UFG
Regional Jataí

Outras terminologias

$V(G)$ e $A(G)$

Se o nome de um grafo for G, então o conjunto de seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto de suas arestas por $A(G)$.

$n(G)$ e $m(G)$

O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$.

Corolário

$n(G) = |V(G)|$ e $m(G) = |A(G)|$.

Outras terminologias

$\overline{G}$

O complemento de um grafo (V, A) é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus A)$.

Outras terminologias

$\overline{G}$

O complemento de um grafo (V, A) é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus A)$.

K_n

O grafo G é **completo** se $A(G) = V(G)^{(2)}$. A expressão "G é um K_n" é uma abreviatura de "G é um grafo completo com n vértices".

UFG
Regional Jataí

Outras terminologias

$\overline{G}$

O complemento de um grafo (V, A) é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus A)$.

K_n

O grafo G é **completo** se $A(G) = V(G)^{(2)}$. A expressão "G é um K_n" é uma abreviatura de "G é um grafo completo com n vértices".

$\overline{K_n}$

O grafo G é **vazio** se $A(G) = \emptyset$. A expressão "G é um $\overline{K_n}$" é uma abreviatura de "G é um grafo vazio com n vértices".

Matriz de adjacências e incidências

Definição

Uma **matriz de adjacências** de um grafo G é a matriz A definida da seguinte maneira: para todo vértice u e v

$$A[u,v] = \begin{cases} 1 & \text{se } uv \in E_G\,, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Matriz de adjacências e incidências

Definição

Uma **matriz de adjacências** de um grafo G é a matriz A definida da seguinte maneira: para todo vértice u e v

$$A[u,v] = \begin{array}{ll} 1 & \text{se } uv \in E_G\,, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{array}$$

Definição

Uma **matriz de incidências** de um grafo G é a matriz M definida da seguinte maneira: para todo vértice u e uma aresta e

$$M[u,e] = \begin{array}{ll} 1 & \text{se } u \text{ é uma das pontas de } e\,, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{array}$$

Sumário

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v;

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v;
- Este conjunto será denotado por $N_G(v)$ (ou simplesmente $N(v)$).

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v;
- Este conjunto será denotado por $N_G(v)$ (ou simplesmente $N(v)$).

Lembrando...

Seja G um grafo e $v, u \in V(G)$.
Dizemos que v é vizinho de u se existe uma aresta que os liga.

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v;

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v;
- Este valor será denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$;

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v;
- Este valor será denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$;
- Um vértice v é **isolado** se $d(v) = 0$.

UFG
Regional Jataí

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v;
- Este valor será denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$);
- Um vértice v é **isolado** se $d(v) = 0$.

Corolário

- $d_G(v) = |N(v)|$.

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau máximo

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau máximo

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Média dos graus

$$\mu(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau máximo

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Média dos graus

$$\mu(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Corolário

$$\mu(G) = \frac{2m(G)}{n(G)}$$

UFG
Regional Jataí

Grafo regular

Grafo regular

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$.

Grafo regular

Grafo regular

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$.

r-regular

Um grafo é r-regular se $d(v) = r$ para todo vértice v.

Grafo regular

Grafo regular

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$.

r-regular

Um grafo é r-regular se $d(v) = r$ para todo vértice v.

Grafo cúbico

Um **grafo cúbico** é o mesmo que um grafo 3-regular.

UFG
Regional Jataí

Noções Básicas de Grafos

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria de Grafos
Bacharelado em Ciência da Computação

09 de maio de 2017