

Noções Básicas de Grafos

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

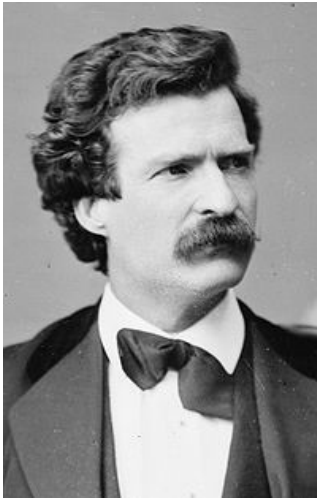
Teoria de Grafos
Bacharelado em Ciência da Computação

09 de maio de 2015

Plano de Aula

- 1 Revisão
 - Preliminares
 - Grafo
 - Outras terminologias
- 2 Noções Básicas de Grafos
 - Matriz de adjacências e incidências
- 3 Vizinhança

Pensamento



Frase

A gente não se liberta de um hábito atirando-o pela janela: é preciso fazê-lo descer a escada, degrau por degrau.

Quem?

Mark Twain (1835 - 1910)
Escritor e humorista estadunidense

Sumário

- 1 Revisão
 - Preliminares
 - Grafo
 - Outras terminologias
- 2 Noções Básicas de Grafos
 - Matriz de adjacências e incidências
- 3 Vizinhança

Preliminares

$V^{(2)}$

Para qualquer conjunto V , denotaremos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não-ordenados de elementos distintos de V .

Corolário 1

Se V tem n elementos, então $V^{(2)}$ tem $\binom{n}{2} := \frac{n(n-1)}{2}$ elementos.

Preliminares

Corolário 2

Os elementos de $V^{(2)}$ serão identificados com os subconjuntos de V que têm cardinalidade 2.

Corolário 3

Assim, cada elemento de $V^{(2)}$ terá a forma $\{v, w\}$, sendo v e w dois elementos distintos de V .

Grafo

Grafo

Um **grafo** é um par (V, A) em que V é um conjunto arbitrário e A é um subconjunto de $V^{(2)}$.

Vértices

São todos os elementos que pertencem a V .

Arestas

São todos os elementos que pertencem a A .

Outras terminologias

$$\{v, w\} \equiv vw$$

Uma aresta como $\{v, w\}$ será denotada simplesmente por vw ou por wv .

Incidência

Diremos que a aresta vw **incide** em v e em w . Também diremos que v e w são as **pontas** da aresta.

Outras terminologias

Ponta

Diremos que para uma aresta vw , v e w são as **pontas** da aresta.

Adjacência

Se vw é uma aresta, diremos que os vértices v e w são **vizinhos** ou **adjacentes**.

Observação

Nossa definição de grafo não admite que arestas tenham pontas coincidentes (i.e. laços). Existem autores que denotam este aspecto da definição dizendo que o grafo é “simples”.

Outras terminologias

$V(G)$ e $A(G)$

Se o nome de um grafo for G , então o conjunto de seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto de suas arestas por $A(G)$.

$n(G)$ e $m(G)$

O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$.

Corolário

$$n(G) = |V(G)| \text{ e } m(G) = |A(G)|.$$

Outras terminologias

\overline{G}

O complemento de um grafo (V, A) é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus A)$.

K_n

O grafo G é **completo** se $A(G) = V(G)^{(2)}$. A expressão “ G é um K_n ” é uma abreviatura de “ G é um grafo completo com n vértices”.

$\overline{K_n}$

O grafo G é **vazio** se $A(G) = \emptyset$. A expressão “ G é um $\overline{K_n}$ ” é uma abreviatura de “ G é um grafo vazio com n vértices”.

Sumário

- 1 Revisão
 - Preliminares
 - Grafo
 - Outras terminologias
- 2 Noções Básicas de Grafos
 - Matriz de adjacências e incidências
- 3 Vizinhança

Matriz de adjacências e incidências

Definição

Uma **matriz de adjacências** de um grafo G é a matriz A definida da seguinte maneira: para todo vértice u e v

$$A[u, v] = \begin{cases} 1 & \text{se } uv \in E_G, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Matriz de adjacências e incidências

Definição

Uma **matriz de adjacências** de um grafo G é a matriz A definida da seguinte maneira: para todo vértice u e v

$$A[u, v] = \begin{cases} 1 & \text{se } uv \in E_G, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Definição

Uma **matriz de incidências** de um grafo G é a matriz M definida da seguinte maneira: para todo vértice u e uma aresta e

$$M[u, e] = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ é uma das pontas de } e, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Sumário

- 1 Revisão
 - Preliminares
 - Grafo
 - Outras terminologias
- 2 Noções Básicas de Grafos
 - Matriz de adjacências e incidências
- 3 Vizinhança

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v ;

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v ;
- Este conjunto será denotado por $N_G(v)$ (ou simplesmente $N(v)$).

Vizinhança

Vizinhança

- A **vizinhança** de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vizinhos de v ;
- Este conjunto será denotado por $N_G(v)$ (ou simplesmente $N(v)$).

Lembrando...

Seja G um grafo e $v, u \in V(G)$.

Dizemos que v é vizinho de u se existe uma aresta que os liga.

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v ;

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v ;
- Este valor será denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$;

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v ;
- Este valor será denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$);
- Um vértice v é **isolado** se $d(v) = 0$.

Grau

Grau

- O **grau** de um vértice v em um grafo G é o número de arestas que incidem em v ;
- Este valor será denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$);
- Um vértice v é **isolado** se $d(v) = 0$.

Corolário

- $d_G(v) = |N(v)|$.

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau máximo

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau máximo

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Média dos graus

$$\mu(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau mínimo e Grau máximo

Grau mínimo

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Grau máximo

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Média dos graus

$$\mu(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Corolário

$$\mu(G) = \frac{2m(G)}{n(G)}$$

Grafo regular

Grafo regular

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$.

Grafo regular

Grafo regular

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$.

r -regular

Um grafo é r -regular se $d(v) = r$ para todo vértice v .

Grafo regular

Grafo regular

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se $\delta = \Delta$.

r -regular

Um grafo é r -regular se $d(v) = r$ para todo vértice v .

Grafo cúbico

Um **grafo cúbico** é o mesmo que um grafo 3-regular.

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- Quantas arestas tem o grafo da torre $t \times t$?

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- Quantas arestas tem o grafo da torre $t \times t$?
- Candidaturas até dia 16 de maio, 13h30;

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- Quantas arestas tem o grafo da torre $t \times t$?
- Candidaturas até dia 16 de maio, 13h30;
- Apresentação e resposta por escrito →
(24 de maio, 15h30);

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- Quantas arestas tem o grafo da torre $t \times t$?
- Candidaturas até dia 16 de maio, 13h30;
- Apresentação e resposta por escrito → (24 de maio, 15h30);
- 20 minutos de apresentação.

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- Quantas arestas tem o grafo da torre $t \times t$?
- Candidaturas até dia 16 de maio, 13h30;
- Apresentação e resposta por escrito → (24 de maio, 15h30);
- 20 minutos de apresentação.

Referência

FEOFILOFF, P. **Exercícios de Teoria dos Grafos**, BCC, IME-USP, 2012.

<http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/>.

Noções Básicas de Grafos

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria de Grafos
Bacharelado em Ciência da Computação

09 de maio de 2015