Terceiro Teste

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria dos Grafos
Esdras Lins Bispo Jr.

28 de junho de 2016

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos, sendo uma das 05 (cinco) componentes que formarão a média final da disciplina: dois testes, duas provas e exercícios;
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$
\begin{aligned}
MF &= MIN(10, S) \\
S &= (\sum_{i=1}^{4} 0,2.T_i) + 0,2.P + 0,1.E
\end{aligned}
$$

  em que

  - S é o somatório da pontuação de todas as avaliações,
  - T_i é a pontuação obtida no teste i,
  - P é a pontuação obtida na prova, e
  - E é a pontuação total dos exercícios.

- O somatório da pontuação de todas as questões desta avaliação é 11,0 (onze) pontos. Isto é um sinônimo de tolerância na correção. Se você por acaso perder 1,5 (um e meio), sua nota será 9,5 (nove e meio);
- O conteúdo exigido compreende os seguintes pontos apresentados no Plano de Ensino da disciplina: (5) Cortes e Pontes, (6) Árvores, (9) Planaridade e (10) Outros tópicos.

Nome:
Assinatura:

1. (5,0 pt) [E 1.110] Responda, justificando a sua resposta:

   (a) Suponha que todos os vértices de um grafo G têm grau par. É verdade que $\mathrm{d}(X)$ é par para todo subconjunto X de V_G?

   R - Sim, é verdade. Será provado por indução que $\mathrm{d}(X)$ é par para todo subconjunto X de V_G, se todos os vértices de um grafo G têm grau par. A indução será feita em $|X|$.

   - **Caso básico 1:** $|X| = 0 \therefore$ Como $\nabla(X) = \emptyset$, então $\mathrm{d}(X) = 0$ e 0 é par.
   - **Caso básico 2:** $|X| = 1 \therefore$ Seja v o único vértice de X. Logo $|\nabla(X)|$ será par, pois todos os vértices de G têm grau par. Assim temos que $\mathrm{d}(X)$ é par, pois $\mathrm{d}(X) = \mathrm{d}(v)$.
   - **Caso Geral:** $|X| > 1 \therefore$
     - **Hipótese de Indução:** $\mathrm{d}(X)$ é par, para $|X| = k$;
     - **Passo da Indução:** $\mathrm{d}(X')$ é par, para $|X'| = k + 1 \therefore$ Seja y o vértice que pertence a X' e não pertence a X. Podemos calcular $\mathrm{d}(X')$ desta forma:

       $$\mathrm{d}(X') = \mathrm{d}(X) - d_X(y) + d_{X'}(y)$$

       em que

       * $d_X(y)$ é a quantidade de vizinhos de y que estão em X, e
       * $d_{X'}(y)$ é a quantidade de vizinhos de y que estão em X'.

       Ora só há duas possibilidades, tendo em vista que $d(y)$ é par:

       i. $\underline{d_X(y) \text{ e } d_{X'}(y) \text{ são pares}}$: $\mathrm{d}(X')$ é par, pois

       $$\textsc{Par} - \textsc{Par} + \textsc{Par} = \textsc{Par}$$

       ii. $\underline{d_X(y) \text{ e } d_{X'}(y) \text{ são ímpares}}$: $\mathrm{d}(X')$ é par, pois

       $$\textsc{Par} - \textsc{Ímpar} + \textsc{Ímpar} = \textsc{Par}$$

   Logo, provamos que $\mathrm{d}(X)$ é par para todo subconjunto X de V_G, se todos os vértices de um grafo G têm grau par ■

(b) Suponha que todos os vértices de um grafo G têm grau ímpar. É verdade que $\mathrm{d}(X)$ é ímpar para todo subconjunto próprio e não vazio X de V_G?

R - Não é verdade. Será feita uma prova por absurdo. Suponha que seja verdade a afirmação dada. Seja $G = (V, A)$ um grafo de forma que $V = \{a, b, c, d\}$ e $A = \{ab, cd\}$. Se admitirmos $X = \{a, c\}$, temos que X é subconjunto próprio e não vazio de V_G. Deste modo, $\mathrm{d}(X) = 2$ e 2 é par (o que é um absurdo). Logo, não é verdade que $\mathrm{d}(X)$ é ímpar para todo subconjunto próprio e não vazio X de V_G ■

2. (5,0 pt) [E 1.226] Mostre que um grafo é uma floresta se e somente se tem a seguinte propriedade: para todo par (x, y) de seus vértices, existe no máximo um caminho com extremos x e y no grafo.

   R - A prova será dividida em duas partes:

   (a) se em um grafo todo par (x, y) de seus vértices tiver no máximo um caminho com extremos x e y, então este grafo é uma floresta;

   (b) se um grafo for uma floresta, então, neste grafo, todo par (x, y) de seus vértices tem no máximo um caminho com extremos x e y.

   Parte (a): Ora, se todo par (x, y) de vértices de um grafo tiver no máximo um caminho com extremos x e y, então este grafo não tem circuitos. Isto é verdade, pois se há circuitos em um grafo, pelo menos um par de vértice tem dois caminhos distintos que os ligam. Se este grafo não tem circuitos, então este grafo é uma floresta.

   Parte (b): Se um grafo for uma floresta, então este grafo só tem pontes. Logo, para todo par (x, y) de vértices deste grafo pode haver:

   - Nenhum caminho que liga x a y,
     se x e y estiverem em componentes distintos;
   - Um caminho, se x e y estiverem no mesmo componente (pois todo componente é conexo).

   Pode-se garantir que não há mais de um caminho com extremos x e y, pois, se houvesse, então este grafo teria um circuito contendo os vértices x e y. Mas isto é impossível, pois este grafo só tem pontes e, consequentemente, não tem circuitos. Logo, neste grafo, todo par (x, y) de seus vértices tem no máximo um caminho com extremos x e y.

   Como (a) e (b) são verdadeiras, logo um grafo é uma floresta se e somente se tem a seguinte propriedade: para todo par (x, y) de seus vértices, existe no máximo um caminho com extremos x e y no grafo ■