

Time series

Lucas Coussy

September 2025

1 Introduction

Ici nous proposons un complément pour le cours de séries temporelles, M2 EURIA de Pierre Ailliot pour l'année 2024-2025 (voir [serietemp.pdf](#)). Ce complément comprendra des preuves ainsi que des corrections d'exercice sur R (à trouver avec le github de ce)

2 Processus stationnaires

definition 4. Un processus $(X_t)_{t \in I}$ est gaussien si pour toute suite $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in I^n$ d'instants, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

definition 4.1. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire. X est gaussien si et seulement si, pour toute suite (a_1, \dots, a_n) de nombres réels, la variable aléatoire

$$Z = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \quad (1)$$

est une variable gaussienne. (voir Vecteur aléatoire)

definition 6. Un processus stationnaire X suit un modèle $ARMA(p, q)$ si il vérifie l'équation suivante :

$$X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \dots - \alpha_p X_{t-p} = \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} \quad (2)$$

pour $t \in \mathbb{Z}$ avec ϵ un bruit blanc tel que $\text{var}(\epsilon_t) = \sigma^2$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma)$ les paramètres du modèle.

Lorsque $q = 0$, on obtient le modèle $AR(p)$ et lorsque $p = 0$ on obtient le modèle $MA(q)$.

proposition 1. Si les racines complexes du polynôme $A(z) = 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p$ sont de module strictement supérieures à 1, alors il existe un processus stationnaire qui vérifie (1). De plus, on peut trouver une solution telle que $\text{cov}(X_s, \epsilon_t) = 0$ si $s < t$ (processus causal).

Démonstration de la proposition 1. L'objectif est de réécrire notre processus sous la forme d'un $MA(\infty)$ afin de montrer qu'il est bien stationnaire.

Pour cela vérifions tout d'abord qu'un $MA(\infty)$ est bien stationnaire. Soit Y un processus $MA(\infty)$ tel que :

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i} \quad (3)$$

Cette formulation des modèles MA est la même que celle présente sur [wikipedia](#).

Pour montrer que le processus Y est stationnaire, il suffit de vérifier les points de la définition 2 reporté ci-dessous :

definition 2. Un processus $X = (X_t)_{t \in I}$ est stationnaire au second ordre si :

- $\forall t \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_t) = \mu$ (l'espérance n'évolue pas au cours du temps),
- $\forall (t, h) \in \mathbb{N}^2, \quad \text{cov}(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h)$ (les covariances n'évoluent pas au cours du temps).

Commençons par vérifier que l'espérance est bien constant :

$$\forall t \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(Y_t) = \mu \quad (4)$$

En effet, comme le processus ϵ est une suite de bruit blanc, $\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}) = 0$.

Ensuite vérifions que l'autocovariance est indépendante du temps, prenons $h \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, Y_{t-h}) &= \mathbb{E}((Y_t - \mathbb{E}(Y_t))(Y_{t-h} - \mathbb{E}(Y_{t-h}))) \quad [\text{Par définition de la covariance}] \\ &= \mathbb{E}((Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)) \quad [\text{par l'équation (4)}] \\ &= \mathbb{E}(Y_t Y_{t-h}) - \mu \mathbb{E}(Y_t) - \mu \mathbb{E}(Y_{t-h}) + \mu^2 \quad [\text{Par linéarité de l'espérance}] \\ &= \mathbb{E}(Y_t Y_{t-h}) - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}((\mu + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\mu + \epsilon_{t-h} + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \quad [\text{Par définition de } Y_t] \\ &= \mathbb{E}((\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \quad [\text{En notant } \theta_0 = 1] \\ &= \mathbb{E}(\mu^2 + \mu(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i}) + \mu(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i}) + (\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \\ &= \mu^2 + \mathbb{E}((\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \quad [\forall t \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_i \theta_j \mathbb{E}(\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-h-j}) \\ &= \sum_{i=h}^{\infty} \theta_i \theta_{i-h} \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2) \quad [\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } t-i \neq t-h-j, \epsilon_{t-i} \perp \epsilon_{t-h-j} \text{ donc } \mathbb{E}(\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-h-j}) = 0] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=h}^{\infty} \theta_i \theta_{i-h} \quad [\text{Soit } X \text{ une v.a., } \text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2] \end{aligned}$$

Donc nous venons de montrer que l'autocovariance de $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est bien indépendante de t . Ainsi, notre processus $MA(\infty)$ est bien stationnaire (au second ordre).

De plus, on montre qu'une condition nécessaire à la stationnarité de Y_t est la convergence de la série

$$\sum_{i=h}^{\infty} \theta_i^2 \quad (5)$$

puisque la variance du processus, donnée par $\text{var}(Y_t) = \text{cov}(Y_t, Y_t)$, n'est bien définie que si cette série est convergente.

Maintenant que l'on à prouver qu'un processus $MA(\infty)$ est stationnaire, montrons que l'on peut réécrire un processus $ARMA(p, q)$ comme un processus $MA(\infty)$.

En réécrivant l'équation (2) avec les opérateurs de retard on obtient :

$$X_t - \alpha_1 L X_t - \dots - \alpha_p L^p X_t = \epsilon_t + \beta_1 L \epsilon_t + \dots + \beta_q L^q \epsilon_t \quad (6)$$

Ce qui est équivalent à :

$$A(L)X_t = B(L)\epsilon_t \quad (7)$$

En notant A et B les polynômes de retard qui à L associent :

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p \quad (8)$$

$$B(L) = 1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q \quad (9)$$

Notons pour la suite A_c et B_c les polynômes caractéristique associé.

$$\begin{array}{ccc} A_c : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B_c : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1 + \beta_1 z + \dots + \beta_q z^q \end{array}$$

On cherche ici à inverser le polynôme caractéristique A_c , c'est à dire à trouver une serie entiere Λ qui à z associe $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i z^i$ et qui vérifie $\forall z \in D_{\Lambda}, \quad A_c(z)\Lambda(z) = 1$ ($D_{\Lambda} := D(0, R_{\Lambda})$ où R_{Λ} est le rayon de convergence de Λ).

En effet notre objectif est de réécrire notre processus $ARMA(p, q)$ sous la forme d'un processus $MA(\infty)$, pour cela il faut que $\Lambda(z)$ puisse s'écrire sous forme de série.

Pour cela, nous allons utiliser le théorème fondamental de l'algèbre qui permet de décomposer notre polynôme A_c en un polynôme scindé à racine complexe.

En notant r_1, \dots, r_p les racines de A_c , on peut réécrire notre polynôme ainsi :

$$A_c(z) = K(z - r_1) \dots (z - r_p) \quad (10)$$

où $K \in \mathbb{C}$.

Ainsi inverser notre polynôme revient à inverser chacun des polynômes de notre décomposition. Considérons notre premier polynôme simple $P_{r_1}(X) = (X - r_1)$, en notant $I_{r_1}(X)$ son inverse, on a :

$$\begin{aligned} \forall z \in D_{I_{r_1}} \cap D_{P_{r_1}}, \quad P_{r_1}(z) * I_{r_1}(z) &= 1 \\ I_{r_1}(z) &= \frac{1}{P_{r_1}(z)} \\ I_{r_1}(z) &= \frac{1}{z - r_1} \\ I_{r_1}(z) &= -\frac{1}{r_1} \frac{1}{1 - \frac{z}{r_1}} \end{aligned}$$

où $D_{I_{r_1}}$ et $D_{P_{r_1}}$ sont respectivement les domaines de définitions de I_{r_1} et de P_{r_1} .

Or on sait qu'on peut réécrire cette dernière ligne sous la forme d'une série géométrique si et seulement si $|\frac{z}{r_1}| < 1$.

Ainsi en réécrivant tout nos polynômes simple sous forme de série géométrique, on peut écrire $\Lambda(z)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall z \in \bigcap_{i=1}^p D_{I_{r_i}}, \quad \Lambda(z) &= \frac{1}{K} \prod_{i=1}^p -\frac{1}{r_i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_i}\right)^k \\ &= \frac{1}{K(-r_1)\dots(-r_p)} \prod_{i=1}^p \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_i}\right)^k \\ &= \prod_{i=1}^p \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_i}\right)^k \quad [\text{car} \quad \frac{1}{K(-r_1)\dots(-r_p)} = \frac{1}{A_c(0)} = 1] \end{aligned}$$

En appliquant de manière récursive le produit de cauchy de deux séries on peut montrer qu'il existe une suite de coefficient $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall z \in \bigcap_{i=1}^p D_{I_{r_i}}, \quad \Lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$$

On sait que le rayon de convergence de la série Λ est le $\min_{i \in \{1, \dots, p\}} |r_i|$, pour la suite nous le noterons R_Λ .

Notre formule (7) nous donne maintenant en inversant notre A_c :

$$X_t = \Lambda(L)B(L)\epsilon_t \tag{11}$$

On peut là encore réaliser le produit de cauchy des séries Λ et B_c (en effet, B_c peut être vue comme une série avec des coefficient tous nul à partir d'un certain rang). Nous notons leur produit :

$$\begin{aligned} \forall z \in D(0, R_\Lambda) \cap D_{B_c} \quad \Psi(z) &= \Lambda(z)B_c(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k \quad [\text{Produit de Cauchy des deux séries}] \end{aligned}$$

Où D_{B_c} est le domaine de définition de B_c que nous prendrons comme égal à \mathbb{C} (en effet, comme B_c est un polynôme, il est bien défini pour tout $z \in \mathbb{C}$).

Il est important de noter que $D(0, R_\Lambda) \subset D_{B_c}$ est donc que Ψ converge si et seulement si Λ converge.

Maintenant on peut réécrire l'équation (11) sous la forme désiré d'un processus $MA(\infty)$:

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k L^k \epsilon_t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t-k} \end{aligned}$$

Pour montrer notre condition sur les r_i , il nous manque une hypothèse, c'est celle que notre série $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|$ converge. En effet, cette condition (suffisante mais pas nécessaire) est introduite afin d'assurer la convergence presque sûr de notre processus i.e :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_t < \infty) = 1$$

Ceci nous permet de dire qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{aligned}\Psi(1) &= C \\ \Lambda(1)B_c(1) &= C\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\Lambda(1)B_c(1) = C &\Leftrightarrow \Lambda \text{ converge en } 1 \\ &\Leftrightarrow R_\Lambda > 1 \\ &\Leftrightarrow \min_{i \in \{1, \dots, p\}} |r_i| > 1\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien notre condition sur les racines de notre polynôme A_c qui doivent toutes se trouver à l'extérieur du cercle unité.

Cette conditions est aussi suffisante pour la stationnarité, en effet montrons que l'équation (5) est alors vérifié. On sait que $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|$ converge donc on sait que la suite $(|\psi_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0:

$$\begin{aligned}\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N &\Rightarrow |\psi_n| > |\psi_n|^2 \\ \text{donc } \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k| &> \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2\end{aligned}$$

Ce qui implique bien que $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|^2$ converge, donc notre processus est bien stationnaire.

Il est à noter que le raisonnement ci-dessus à démontrer que la condition sur les racines du polynôme caractéristique n'est pas nécessaire pour l'existence d'un processus stationnaire vérifiant le model ARMA(p, q).

En effet la seule condition nécessaire pour la stationnarité est que la série $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|^2$ converge.

Fin de démonstration

definition 7. On appelle

- **moyenne empirique** $\bar{X}_t = \sum_{t=1}^T X_t$
- **fonction d'autocovariance empirique** $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X}_t)(X_{t-h} - \bar{X}_t)$
- **fonction d'autocorrélation empirique** $\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$

On peut montrer que, sous des conditions assez générales (qui sont vérifiés en particulier par les processus ARMA), ces estimateurs sont consistants (c'est à dire qu'ils convergent en probabilité vers les quantités théoriques associés lorsque la longueur de la série observée T tend vers ∞) et asymptotiquement gaussiens.

Preuve pour la définition 7. Pour prouver que ces estimateurs sont consistants, en pratique, il suffirait de montrer que l'estimateur en moyenne quadratique converge vers 0 pour montrer que l'estimateur est consistant (i.e qu'il converge en probabilité vers sa quantité théorique).

Mais pour faire une preuve théorique valide, cela nécessiterait (en posant $\hat{\theta}$ un estimateur de θ , fonction de n observation) de :

- Prouver que $MSE(\hat{\theta}) = \mathbb{E}((\hat{\theta} - \theta)^2) = Var(\hat{\theta}) + Biais(\hat{\theta})^2$
- Prouver que $\forall c \in \mathbb{R}, \quad \hat{\theta} \xrightarrow{L^2} c$ (équivalent à $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\hat{\theta} - c|^2)^{\frac{1}{2}}$) si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}) = c$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$

- Prouver que $\hat{\theta} \xrightarrow{L^2} c$ implique $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ (cette dernière preuve peut être réalisée de manière plus générale pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a et X une v.a en montrant que $\forall p \geq 1, \quad X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$).

Preuve à venir.

En attendant, des ébauches de preuves sont proposées sur cette page wikipédia

□