Time series

Lucas Coussy

September 2025

1 Introduction

Ici nous proposons un complement pour le cours de séries temporelles, M2 EURIA de Pierre Ailliot pour l'année 2024-2025 (voir serietemp.pdf). Ce complement comprendra des preuves ainsi que des corrections d'exercice sur R (disponibles sur ce dépôt GitHub).

2 Processus stationnaires

definition 4. *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est gaussien si pour toute suite $(t_i)_{i\in\{1,...,n\}} \in I^n$ d'instants, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

definition 4.1. *Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire. X est gaussien si et seulement si, pour toute suite $(a_1, ..., a_n)$ de nombres réels, la variable aléatoire*

$$Z = a_1X_1 + ... + a_nX_n \tag{1}$$

est une variable gaussienne. (voir Vecteur aléatoire)

definition 6. *Un processus stationnaire X suit un modèle $ARMA(p, q)$ si il vérifie l'équation suivante :*

$$X_t - \alpha_1X_{t-1} - ... - \alpha_pX_{t-p} = \epsilon_t + \beta_1\epsilon_{t-1} + ... + \beta_q\epsilon_{t-q} \tag{2}$$

pour $t \in \mathbb{Z}$ avec ϵ un bruit blanc tel que $var(\epsilon_t) = \sigma^2$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_q, \sigma)$ les paramètres du modèle.
Lorsque $q = 0$, on obtient le modèle $AR(p)$ et lorsque $p = 0$ on obtient le modèle $MA(q)$.

proposition 1. *Si les racines complexes du polynôme $A(z) = 1 - \alpha_1z - ... - \alpha_pz^p$ sont de module strictement supérieures à 1, alors il existe un processus stationnaire qui vérifie (1). De plus, on peut trouver une solution telle que $cov(X_s, \epsilon_t) = 0$ si $s < t$ (processus causal).*

Démonstration de la proposition 1. *L'objectif est de réecrire notre processus sous la forme d'un $MA(\infty)$ afin de montrer qu'il est bien stationnaire.*

Pour cela vérifions tout d'abord qu'un $MA(\infty)$ est bien stationnaire.
Soit Y un processus $MA(\infty)$ tel que :

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i\epsilon_{t-i} \tag{3}$$

Cette formulation des modèles MA est la même que celle présente sur wikipédia.

Pour montrer que le processus Y est stationnaire, il suffit de vérifier les points de la définiton 2 reporté ci-dessous :

definition 2. *Un processus $X = (X_t)_{t\in I}$ est stationnaire au second ordre si :*

- $\forall t \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_t) = \mu$ *(l'espérance n'évolue pas au cours du temps),*
- $\forall (t, h) \in \mathbb{N}^2, \quad cov(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h)$ *(les covariances n'évoluent pas au cours du temps).*

Commençons par verifier que l'ésperance est bien constant :

$$\forall t \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(Y_t) = \mu \tag{4}$$

En effet, comme le processus ϵ est une suite de bruit blanc, $\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}) = 0$.
Ensuite verifions que l'autocovariance est indépendante du temps, prenons $h \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
cov(Y_t, Y_{t-h}) &= \mathbb{E}((Y_t - \mathbb{E}(Y_t))(Y_{t-h} - \mathbb{E}(Y_{t-h}))) \quad [\textit{Par définition de la covariance}] \\
&= \mathbb{E}((Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)) \quad [\textit{par l'équation (4)}] \\
&= \mathbb{E}(Y_t Y_{t-h}) - \mu\mathbb{E}(Y_t) - \mu\mathbb{E}(Y_{t-h}) + \mu^2 \quad [\textit{Par linéarité de l'espérance}] \\
&= \mathbb{E}(Y_t Y_{t-h}) - \mu^2 \\
&= \mathbb{E}((\mu + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\mu + \epsilon_{t-h} + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \quad [\textit{Par définition de } Y_t] \\
&= \mathbb{E}((\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \quad [\textit{En notant } \theta_0 = 1] \\
&= \mathbb{E}(\mu^2 + \mu(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i}) + \mu(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i}) + (\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \\
&= \mu^2 + \mathbb{E}((\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i})(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-h-i})) - \mu^2 \quad [\forall t \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_i \theta_j \mathbb{E}(\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-h-j}) \\
&= \sum_{i=h}^{\infty} \theta_i \theta_{i-h} \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2) \quad [\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \textit{ tel que } t - i \neq t - h - j, \epsilon_{t-i} \perp\!\!\!\perp \epsilon_{t-h-j} \textit{ donc } \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-h-j}) = 0] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=h}^{\infty} \theta_i \theta_{i-h} \quad [\textit{Soit } X \textit{ une v.a,} \quad var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2]
\end{aligned}$$

Donc nous venons de montrer que l'autocovariance de $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est bien indépendente de t.
Ainsi, notre processus $MA(\infty)$ est bien stationnaire (au second ordre).

De plus, on montre qu'une condition nécessaire à la stationnarité de Y_t est la convergence de la série

$$\sum_{i=h}^{\infty} \theta_i^2 \tag{5}$$

puisque la variance du processus, donnée par $var(Y_t) = cov(Y_t, Y_t)$, n'est bien définie que si cette série est convergente.

Maintenant que l'on à prouver qu'un processus $MA(\infty)$ est stationnaire, montrons que l'on peut réecrire un processus $ARMA(p,q)$ comme un processus $MA(\infty)$.

En réecrivant l'équation (2) avec les opérateurs de retard on obtient :

$$X_t - \alpha_1 L X_t - ... - \alpha_p L^p X_t = \epsilon_t + \beta_1 L \epsilon_t + ... + \beta_q L^q \epsilon_t \tag{6}$$

Ce qui est équivalent à :

$$A(L)X_t = B(L)\epsilon_t \tag{7}$$

En notant A et B les polynomes de retard qui à L associent :

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - ... - \alpha_p L^p \tag{8}$$

$$B(L) = 1 + \beta_1 L + ... + \beta_q L^q \tag{9}$$

Notons pour la suite A_c et B_c les polynomes caracteristique associé.

$$\begin{array}{rcl} A_c : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_p z^p \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} B_c : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1 + \beta_1 z + \cdots + \beta_q z^q \end{array}$$

On cherche ici à inverser le polynôme caractéristique A_c, c'est à dire à trouver une serie entiere Λ qui à z associe $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i z^i$ et qui vérifie $\forall z \in D_\Lambda, \quad A_c(z)\Lambda(z) = 1$ ($D_\Lambda := D(0, R_\Lambda)$ où R_Λ est le rayon de convergence de Λ).
En effet notre objectif est de réecrire notre processus $ARMA(p,q)$ sous la forme d'un processus $MA(\infty)$, pour cela il faut que $\Lambda(z)$ puisse s'écrire sous forme de série.
Pour cela, nous allons utiliser le théorème fondamental de l'algèbre qui permet de décomposer notre polynôme A_c en un polynôme scindé à racine complexe.

En notant $r_1, ..., r_p$ les racines de A_c, on peut réecrire notre polynôme ainsi :

$$A_c(z) = K(z - r_1)...(z - r_p) \tag{10}$$

où $K \in \mathbb{C}$.
Ainsi inverser notre polynôme revient à inverser chacun des polynômes de notre décomposition. Considérons notre premier polynôme simple $P_{r_1}(X) = (X - r_1)$, en notant $I_{r_1}(X)$ son inverse, on a:

$$\begin{aligned} \forall z \in D_{I_{r_1}} \cap D_{P_{r_1}}, \quad P_{r_1}(z) * I_{r_1}(z) &= 1 \\ I_{r_1}(z) &= \frac{1}{P_{r_1}(z)} \\ I_{r_1}(z) &= \frac{1}{z - r_1} \\ I_{r_1}(z) &= -\frac{1}{r_1}\frac{1}{1 - \frac{z}{r_1}} \end{aligned}$$

où $D_{I_{r_1}}$ et $D_{P_{r_1}}$ sont respectivement les domaines de définitions de I_{r_1} et de P_{r_1}.
Or on sait qu'on peut réecrire cette dernière ligne sous la forme d'une série géométrique si et seulement si $|\frac{z}{r_1}| < 1$.

Ainsi en réecrivant tout nos polynômes simple sous forme de série géométrique, on peut écrire $\Lambda(z)$ *sous la forme :*

$$\begin{aligned}\forall z \in \bigcap_{i=1}^{p} D_{I_{r_i}}, \quad \Lambda(z) &= \frac{1}{K}\prod_{i=1}^{p} -\frac{1}{r_i}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{r_i})^k \\ &= \frac{1}{K(-r_1)...(-r_p)}\prod_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{r_i})^k \\ &= \prod_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{r_i})^k \quad [car \quad \frac{1}{K(-r_1)...(-r_p)} = \frac{1}{A_c(0)} = 1]\end{aligned}$$

En appliquant de manière récursive le produit de cauchy de deux séries on peut montrer qu'il existe une suite de coefficient $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *tel que :*

$$\forall z \in \bigcap_{i=1}^{p} D_{I_{r_i}}, \quad \Lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k z^k$$

On sait que le rayon de convergence de la série Λ *est le* $\min_{i\in\{1,...,p\}}|r_i|$*, pour la suite nous le noterons* R_Λ*.*

Notre formule (7) nous donne maintenant en inversant notre A_c *:*

$$X_t = \Lambda(L)B(L)\epsilon_t \tag{11}$$

On peut là encore réaliser le produit de cauchy des séries Λ *et* B_c *(en effet,* B_c *peut être vue comme une série avec des coefficient tous nul à partir d'un certain rang). Nous notons leur produit :*

$$\begin{aligned}\forall z \in D(0,R_\Lambda)\cap D_{B_c} \quad \Psi(z) &= \Lambda(z)B_c(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k z^k \quad [\textit{Produit de Cauchy des deux séries}]\end{aligned}$$

Où D_{B_c} *est le domaine de définition de* B_c *que nous prendrons comme égal à* $\mathbb{C}$ *(en effet, comme* B_c *est un polynôme, il est bien définit pour tout* $z\in\mathbb{C}$*).*
Il est important de noter que $D(0,R_\Lambda)\subset D_{B_c}$ *est donc que* Ψ *converge si et seulement si* Λ *converge.*

Maintenant on peut réecrire l'équation (11) sous la forme désiré d'un processus $MA(\infty)$*:*

$$\begin{aligned}X_t &= \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k L^k\epsilon_t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k\epsilon_{t-k}\end{aligned}$$

Pour montrer notre condition sur les r_i*, il nous manque une hypothèse, c'est celle que notre série* $\sum_{k=0}^{\infty}|\psi_k|$ *converge. En effet, cette condition (suffisante mais pas nécessaire) est introduite afin d'assurer la convergence presque sûr de notre processus i.e :*

$$\forall t\in\mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_t<\infty) = 1$$

Ceci nous permet de dire qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{aligned}\Psi(1) &= C \\ \Lambda(1)B_c(1) &= C\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\Lambda(1)B_c(1) = C &\Leftrightarrow \Lambda \textit{ converge en 1} \\ &\Leftrightarrow R_\Lambda > 1` \\ &\Leftrightarrow \min_{i \in \{1,\dots,p\}} |r_i| > 1\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien notre condition sur les racines de notre polynôme A_c qui doivent toutes se trouver à l'exterieur du cercle unité.

Cette conditions est aussi suffisante pour la stationnarité, en effet montrons que l'équation (5) est alors vérifié. On sait que $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|$ converge donc on sait que la suite $(|\psi_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0:

$$\begin{aligned}\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N &\Rightarrow |\psi_n| > |\psi_n|^2 \\ \textit{donc} \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k| &> \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2\end{aligned}$$

Ce qui implique bien que $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|^2$ converge, donc notre notre processus est bien stationnaire.

Il est à noté que le raisonnement ci-dessus à démontrer que la condition sur les racines du polynôme caractéristique n'est pas nécessaire pour l'existence d'un processus stationnaire vérifiant le model $ARMA(p,q)$.
En effet la seul condition nécessaire pour la stationnarité est que la série $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|^2$ converge.

Fin de démonstration

definition 7. *On appelle*

- ***moyenne empirique*** $\bar{X}_t = \sum_{t=1}^{T} X_t$
- ***fonction d'autocovariance empirique*** $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-h}(X_t - \bar{X}_t)(X_{t-h} - \bar{X}_t)$
- ***fonction d'autocorrélation empirique*** $\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$

On peut montrer que, sous des conditions assez générales (qui sont vérifiés en particulier par les processus ARMA), ces estimateurs sont consistants (c'est à dire qu'ils convergent en probabilité vers les quantités théoriques associés lorsque la longueur de la série observée T tend vers ∞) et asymptotiquement gaussiens.

Preuve pour la définition 7. Pour prouver que ces éstimateurs sont consistants, en pratique, il suffirait de montrer que l'éstimateur en moyenne quadratique converge vers 0 pour montrer que l'éstimateur est consistant (i.e qu'il converge en probabilité vers sa quantité théorique).

Mais pour faire une preuve théorique valide, cela nécessiterait (en posant $\hat{\theta}$ un éstimateur de θ, fonction de n observation) de :

- Prouver que $MSE(\hat{\theta}) = \mathbb{E}((\hat{\theta} - \theta)^2) = Var(\hat{\theta}) + Biais(\hat{\theta})^2$
- Prouver que $\forall c \in \mathbb{R}, \quad \hat{\theta} \xrightarrow{L^2} c$ (équivalent à $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|\hat{\theta} - c|^2)^{\frac{1}{2}}$) si est seulement si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}) = c$ et $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$

- Prouver que $\hat{\theta} \xrightarrow{L^2} c$ implique $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ (cette derniere preuve peut être réaliser de manière plus générale pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a et X une v.a en montrant que $\forall p \geqslant 1, \quad X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$).

Preuve à venir.

En attendant, des ébauches de preuves sont proposé sur cette page wikipédia

$\square$