TD 4 – Lois continues

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(t) = \begin{cases} 0,5 \text{ si } t \in [0\,;2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Démontrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X la variable aléatoire continue de densité f. On dit que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;2]$.
   (a) Calculer $\mathrm{P}(0 \leqslant X \leqslant 1)$ et $\mathrm{P}(X = 1)$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(X < 0)$.
   (c) On choisit un nombre réel au hasard compris entre 0 et 2. Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 1,6 et 1,7 ?
   (d) On choisit un nombre réel au hasard compris entre 0 et 2. Sachant qu'il est supérieur à 0,5, quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 1,6 et 1,7 ?

Exercice 2. Visionner, à l'aide d'un outil graphique, la représentation graphique de la fonction densité d'une loi exponentielle pour différentes valeurs du paramètre λ.

Exercice 3. On considère un composant électronique et on appelle X sa durée de vie, exprimée en année. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,15$.

1. Quelle est la probabilité que la durée de vie de ce composant électronique soit comprise entre 5 à 9 ans ?
2. Quelle est la probabilité que la durée de vie de ce composant électronique soit inférieure à 9 ans ?
3. Quelle est la probabilité que la durée de vie de ce composant électronique soit supérieure à 5 ans ?
4. On choisit un composant électronique qui a déjà 4 ans. Quelle est la probabilité que ce composant fonctionne encore dans 5 ans ?
5. Interpréter les résultats des deux questions précédentes.

Exercice 4. En reprenant les données de l'exercice 3, à combien d'années peut-on estimer la durée moyenne d'un tel composant électronique ?

Exercice 5. On a observé qu'un routeur d'une certaine marque tombait en panne pour la première fois en moyenne au bout de 8 ans. On modélisé le moment de la première panne, en années, de ce routeur par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle.

1. Quel est le paramètre λ de cette loi exponentielle ?
2. Quelle est la probabilité que la première panne soit intervenue dans les 8 premières années ?
3. Au bout de combien de temps est-on sûr avec une probabilité de 95 % que la première panne aura eu lieu ?

Exercice 6. Barnabé vend des appareils électro-ménagers. On admet que le temps T de fonctionnement sans panne d'un appareil, exprimé en années, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,11$.
Les appareils électro-ménagers de Barnabé sont garantis 2 ans à partir de la date d'achat.

1. Quelle est la probabilité qu'un appareil pris au hasard tombe en panne pendant la garantie ?
2. En moyenne, au bout de combien de temps peut-on s'attendre à une panne ?
3. Barnabé propose en option une extension de garantie de 1 an supplémentaire. Pour vendre cette extension à ses clients, il leur affirme que si un appareil n'a pas eu de panne durant la durée de garantie de 2 ans, il y a environ une chance sur 2 pour que l'appareil tombe en panne durant l'année suivante. A-t-il raison ? Est-il plus prudent de prendre cette extension de garantie ?

Exercice 7. Visionner, à l'aide d'un outil graphique, la représentation graphique de la fonction densité d'une loi normale pour différentes valeur des paramètres μ et σ.

Exercice 8. Une entreprise fabrique des rondelles métalliques. Une rondelle est conforme si son diamètre est compris entre 5 et 7 millimètres.
Le réglage de la machine qui fabrique les rondelles permet de supposer que le diamètre d'une rondelle, en millimètres, suit la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 0,5$.

1. Déterminer la probabilité qu'une rondelle soit conforme.
2. Dans un stock de 500 000 rondelles, à combien de rondelles non conformes peut-on s'attendre ?
3. On souhaite que la probabilité qu'une rondelle soit non conforme soit de 2 %. Le réglage de la machine permet de jouer sur le paramètre σ. Quel nouveau paramètre σ doit-on utiliser pour parvenir à cet objectif? *On demande la valeur arrondie au centième.*

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Á l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de a telle que :

1. $\mathrm{P}(X < a) = 0,95$;
2. $\mathrm{P}(-a < X < a) = 0,95$.

Exercice 10. On décide de modéliser la durée de vie d'une ampoule en heures par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de paramètres μ et σ.

Statistiquement, on a observé que :

- $\mathrm{P}(X > 2\,000) = 0,925\,1$
- $\mathrm{P}(X > 3\,000) = 0,857\,7$

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$?
2. Déterminer un système d'équations vérifiées par μ et σ.
3. En déduire les valeurs de μ et σ.
4. Calculer $\mathrm{P}(X < 1\,000)$ et $\mathrm{P}(X > 5\,000)$.

Exercice 11. Une machine remplit des flacons de produit de nettoyage pour lentilles de contact. Dans la production d'une journée, on prélève au hasard un flacon et on note V la variable aléatoire qui, à chaque flacon prélevé associe le volume de produit contenu dans ce flacon, exprimé en millilitre.

On admet que la variable aléatoire V suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que le volume de produit contenu dans le flacon prélevé soit compris entre 245 et 255 mL.
2. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{V-250}{4}$.
   (a) Quelle est la loi suivie par Z ?
   (b) Déterminer un nombre u tel que $P(-u \leqslant Z \leqslant u) = 0,95$.
   (c) En déduire un intervalle I centré en 250, tel que la probabilité que le volume de produit contenu dans le flacon prélevé appartienne à cet intervalle I soit de 0,95.