Chap 3
Lois de probabilité discrètes

I) Notion de variable aléatoire

Définition Variable aléatoire
Soir (Ω ;P) un espace probabilisé.
Une variable aléatoire est une fonction X définie sur Ω, et qui à chaque issue associe un nombre réel : $X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$

Exemple
On lance un dé à 6 faces. On gagne 5€ si on obtient un 6, 1€ si on tombe sur un nombre impair, et on perd 3€ sinon.
Soit X la variable aléatoire qui à un résultat associe le gain (algébrique) correspondante
on a donc X\left(2\right)=X\left(4\right)=-3,X\left(1\right)=X\left(3\right)=X\left(5\right)=1\ et\ X\left(6\right)=5

Définition événement (X = x)
Soit X une variable aléatoire et $x \in \mathbb{R}$. On note (X = x) l'événement constitué des issues ω tels que X(ω) = x. Autrement dit : (X = x) = { $\omega \in /X(\omega) = x$ }. La probabilité de l'événement (X = x) se note P(X =x).

Remarque
Lorsque la variable aléatoire prend des valeurs « isolées », on parle de variable aléatoire discrète. Dans ce chapitre, toutes les variables aléatoires seront discrètes.

Ex1
1)(X = -3) = { $\omega \in /X(\omega) = -3$ } = {2 , 4}
(X =1) = {1,3,5}
(X=5) = {6}

2) P(X = -3) = P(2 , 4}) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P(X = 1) = P({1,3,5}) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
P(X = 5) = P({6}) = $\frac{1}{6}$

Définition loi de probabilité
La loi de probabilité d'un variable aléatoire discrète X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, et qui à chaque nombre réel x associe la probabilité de l'événement (X=x) : $x \in \mathbb{R} \mapsto P(X = x)$

Lorsque la valirable aléatoire X ne prend q'un nombre fini de valeur x1, x2, … xn, on résume la loi de probabilité de X dans un tableau :

x	x1	x2	…	xn
P(X = x)	p1	p2	…	pn

Ex 2

x	-3	4	5
P(X = x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Définition espérance, variance et écart-type
Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs x1, x2, … xn

- On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre noté E(X) par :
  $E(X) = \sum_{k=1}^{n} xk \times P(X = xk)$
- On appelle variance de la variable aléatoire X le nombre noté V(x) et défini par :
  $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (xk - E(X)) \times P(X = xk)$
- On appelle écart-type de la variable aléatoire X le nombre noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Ex 3
E(X) = x1 * P(X = x1) + x2 * P(X = x2) + … + xn * P(X = xn)

1) E(X) = -3 * $\frac{1}{3}$ + 4 * $\frac{1}{2}$ + 5 * $\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{3}$

2) V(X) = $\frac{100}{3}$ * $\frac{1}{3}$ + $\frac{4}{9}$ * $\frac{1}{2}$ + $\frac{196}{9}$ * $\frac{1}{6}$ = $\frac{68}{9}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{68}{3}} = \frac{2\sqrt{17}}{3} \approx 2,7$

(x-E(X))²	$\frac{100}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{196}{9}$
x-E(X)	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
x	-3	4	5
P(X = x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ex4

1)
```
def esperence(V, P):
	somme = 0
	for i in range(len(V)):
		somme += V[i]*P[i]
	return somme
```

2)
```
def variance(V, P):
	m = esperence(V,P)
	somme = 0
	for i in range(len(V)):
		somme += P[i]*(V[i]-m)**2
	return somme
```

```
def ecart_type(V, P):
	return variance(V,P)**0.5
```

Ex5

1) X prend les valeurs 0,100,500 et 1500

x	0	100	500	1000
P(X=x)	0,55	0,3	0,1	0,05

2) E(X) = 0*0.55 + 100*0,3 + 500*0.1 + 1000*0,05 = 155

L'assureur doit rembourser en moyenne 155 par assuré

3) 160€

Propriété : linéarité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire et soit a et b réels.

Alors $E\left(a \times X + b\right) = a \times E\left(X\right) + betV(A \times X + b = a^2 \times V(X)$

Ex6

Avant :

E(X) = 8

σ(X) = 4

Après :

E(aX + b) = 10 = aE(X) + b = 8a + b

σ (aX + b) = 3 = |a|σ (X) = 4|a|

$$\begin{array}{r} 8a + b = 10 \\ 4|a| = 3 \end{array}$$

Si a ≥ 0

$$\begin{array}{r} 8a + b = 10 \\ 4a = 10 \end{array} = \begin{array}{r} b = 4 \\ a = \frac{3}{4} \end{array} \qquad \frac{3}{4}X + 4$$

Si a < 0

$$\begin{array}{c} 8a + b = 10 \\ -4a = 10 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} b = 16 \\ a = -\frac{3}{4} \end{array} \quad -\frac{3}{4} + 16$$

Notes	7	18
$\frac{3}{4}X + 4$	9,25	17,5
$-\frac{3}{4} + 16$	10,75	2,5