R4-04 Méthodes d'optimisation

Méthode exacte : Programmation linéaire

Hervé MANIER et Marie-Ange MANIER

M12-05 Mathématiques

Chapitre 2 : Programmation linéaire

Denis.franjou@u-psud.fr

Introduction générale

Définition

L'optimisation est une **branche des mathématiques**, dont le but est de trouver analytiquement ou numériquement, la meilleure solution (l'optimale) à un problème donné.
L'origine du mot *optimal* provient du Latin *optimum* qui signifie **le meilleur**.

En optimisation, on parle de la **fonction coût** (**objectif**). C'est la fonction à minimiser/maximiser, après formulation mathématique du problème.

Un **problème d'optimisation** consiste, étant donnée une fonction $f : S \rightarrow IR$, à trouver :

1) son minimum v (resp. son maximum) dans S
2) un point $x_0 \in S$ qui réalise ce minimum (resp. maximum) i.e. $f(x_0) = v$.

Vocabulaire

– f est la fonction objectif
– S = {solutions réalisables du problème}
– x_0 est la solution optimale
– v est la valeur optimale
– écriture du problème : $\min_{x \in S} f(x)$ resp. $\max_{x \in S} f(x)$

Pour **résoudre** un problème d'optimisation, on peut avoir recours à des méthodes de Recherche Opérationnelle.

Définition

La **Recherche Opérationnelle (RO)** est la discipline des **méthodes scientifiques** utilisables **pour faciliter la prise de décisions** face à des problématiques qui se rencontrent dans les grandes organisations publiques ou privées.

Discipline transverse associant **les mathématiques appliquées, les statistiques et l'informatique**, elle s'applique à des problèmes usuels et joue un rôle-clé dans la recherche de l'efficience.

La Recherche Opérationnelle permet notamment d'optimiser l'architecture et le fonctionnement des organisations.

Grâce à elle, les décideurs peuvent analyser et mieux comprendre des situations complexes ou de grande dimension, aux interactions nombreuses et donc, faire des choix pertinents en toute connaissance de cause.
Elle **participe à l'aide à la décision**.

La RO-AD (Recherche Opérationnelle-Aide à la Décision) est omniprésente dans des secteurs de plus en plus variés comme :

- l'informatique, l'industrie,
- le transport, la santé, les télécommunications, la distribution, la banque, la finance, l'assurance,
- …

Etapes d’une étude de Recherche Opérationnelle

- **modélisation du problème** :

à partir d'un problème concret, bâtir un **modèle scientifique** (en général mathématique, mais aussi graphique…) représentant schématiquement la réalité ;

- **résolution du problème** : résoudre le **modèle** ainsi construit.

résolution = mise en oeuvre de méthodes numériques permettant d'obtenir des réponses effectives, en général à l'aide d'ordinateurs, aux questions posées ;

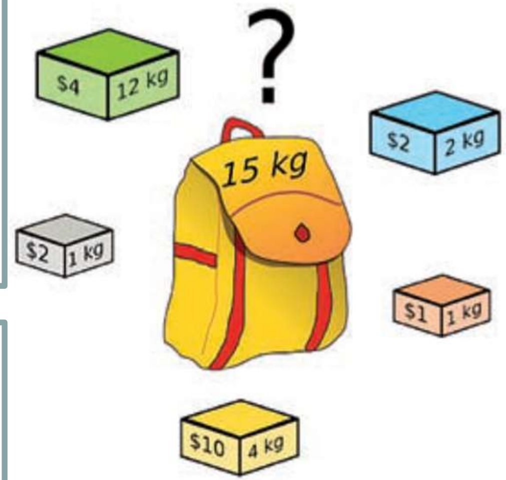
- **retour au problème pratique** et **confrontation** des résultats du modèle et de la réalité.

Les grandes classes de problèmes d'optimisation

Considérons deux cas assez différents:

1 Des marins malchanceux sont contraints d'abandonner leur navire qu'une voie d'eau destine aux profondeurs. Leur seule chance de survie est d'embarquer dans un canot pour tenter de croiser une route commerciale fréquentée. Ils doivent emmener de quoi survivre quelques jours : eau, nourriture, protection contre le froid, signaux de détresse, etc. Or le canot a une capacité limitée en volume et en poids. Ces marins vont donc devoir faire des choix pour charger leur canot, sinon ils n'iront pas loin.

2 Soit le responsable d'un budget. Considérant une espérance de revenus, comment répartir efficacement l'argent disponible entre différents projets sachant qu'ils ont une utilité différente ? Doit-il favoriser les gros projets à forte valeur ajoutée ou les petits projets un peu moins intéressants financièrement ?



Ces deux problèmes semblent différents tant dans leur formulation que dans leur portée, mais ils sont de même nature. Ils appartiennent à la catégorie de problèmes d'optimisation appelés « **sac à dos** », avec des **éléments de valeurs différentes** (matériels à charger dans le canot, projets à financer) qui se partagent une **capacité limitée** (le canot, le budget).

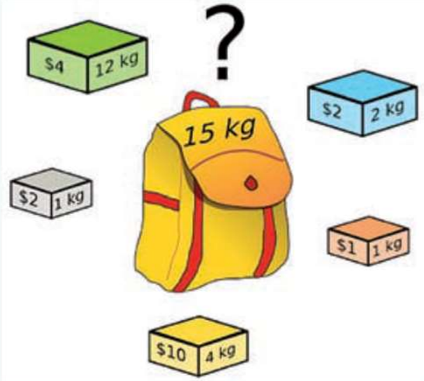
Le 1er problème est plus complexe que le second car il introduit un lien entre les éléments à charger: si les marins prennent des boîtes de conserve, il faut également prendre l'ouvre boîte.
Le 2nd problème peut être plus complexe quand certains projets sont réalisables seulement si d'autres le sont.

Les grandes classes de problèmes d’optimisation

Problèmes parmi les plus courants, qui couvrent la majeure partie des cas concrets pour lesquels la recherche opérationnelle est à même de donner une réponse pertinente :

- les problèmes de sac à dos, 1
- les problèmes de tournées, 2
- les problèmes d’affectation, 3
- les problèmes d’ordonnancement, 4
- les problèmes de file d’attente, 5
- les problèmes de flot. 6

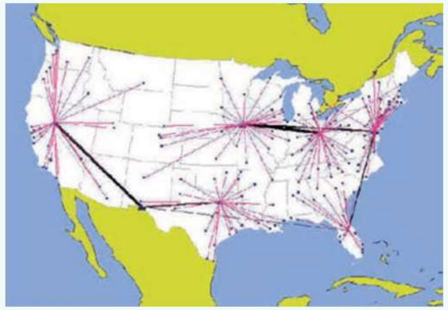
Exemples



1. Problème du sac à dos.

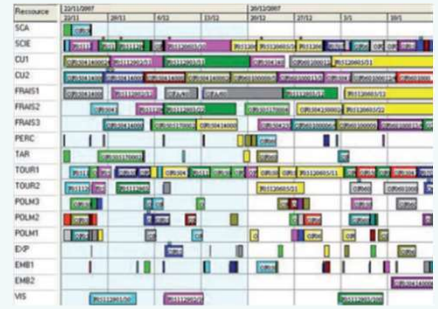
1. Chargement optimal d’un camion.

2. Livraison de colis



3. Positionnement aux USA

4. Chaîne d’assemblage d’avions



4. Ordonnancement de tâches.

5. Files d’attente de voitures.

6. Optimisation du trafic urbain

Les méthodes d’optimisation

Deux grandes familles de méthodes :

- Méthodes **exactes** *basées sur des principes mathématiques*

  => optimalité garantie

  programmation* mathématique (**programmation linéaire**, programmation dynamique…)
  procédures d’exploration arborescentes (*branch and bound…*),
  …

  * *initialement, <u>programmation</u> signifiait planification et ordonnancement*

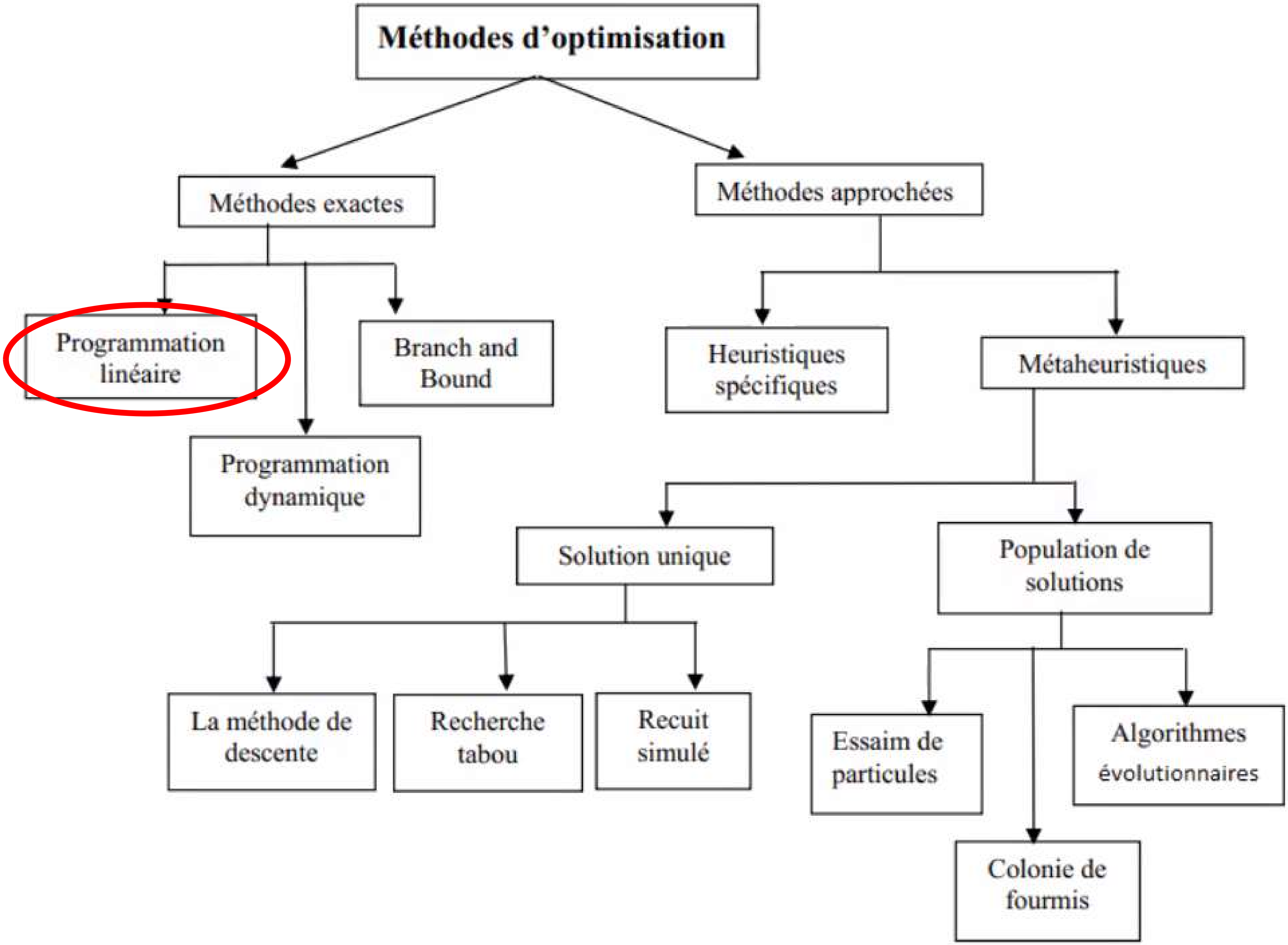
- Méthodes **approchées** ou heuristiques
  souvent stochastiques (utilisation du hasard) : quand les méthodes exactes ne sont pas disponibles ou sont trop coûteuses) - souvent le cas !

  => problèmes de grande taille, problèmes difficiles

  => optimalité non garantie, recherche d’une bonne solution réalisable en un temps raisonnable

  heuristiques, méthodes déterministes et stochastiques, hybridation de méthodes, …
  (tabou, recuit simulé, algorithmes génétiques, colonies de fourmis,…)

Les méthodes d'optimisation



Plan du Chapitre 2

2.1 **Exemple introductif**

2.2 **Formalisation du programme**

2.3 **Méthode graphique**

2.1 Exemple introductif

Gestion de la production

Cas Production

1 lingot Acier LQ (300€)

2kg

4kWh

3h

1 lingot Acier HQ (800€)

1kg

5kWh

10h

Production par lot de 1000 lingots.

Les contraintes de l'entreprise sont sur **les ressources** :

8 000kg

20 000kWh

30 000h

Pb : Combien de lots de lingots de chaque type faut-il produire pour maximiser le chiffre d'affaires ?

2.2 Formalisation du programme

- Variable de décisions
- Contraintes
- Fonction-objectif

Formalisation du problème (1/3)

1) Variables de décision

On cherche :

- x_1= nb de lots de 1000 lingots de type LQ
- x_2= nb de lots de 1000 lingots de type HQ

Les variables x_1 et x_2 sont appelées **« variables de décision »**, et le couple (x_1, x_2) est appelé **« un programme »**

Formalisation du problème (2/3)

2) Contraintes

Le programme (x_1, x_2) doit vérifier **« les contraintes »** :

- Matière première $\Longrightarrow 2x_1 + x_2 \leq 8$
- Energie $\Longrightarrow 4x_1 + 5x_2 \leq 20$
- Laminage $\Longrightarrow 3x_1 + 10x_2 \leq 30$

Il y a aussi des **contraintes logiques** : on produit des quantités positives !

$$x_1 \geq 0 \;\; ; \;\; x_2 \geq 0$$

Solutions

Solutions admissibles

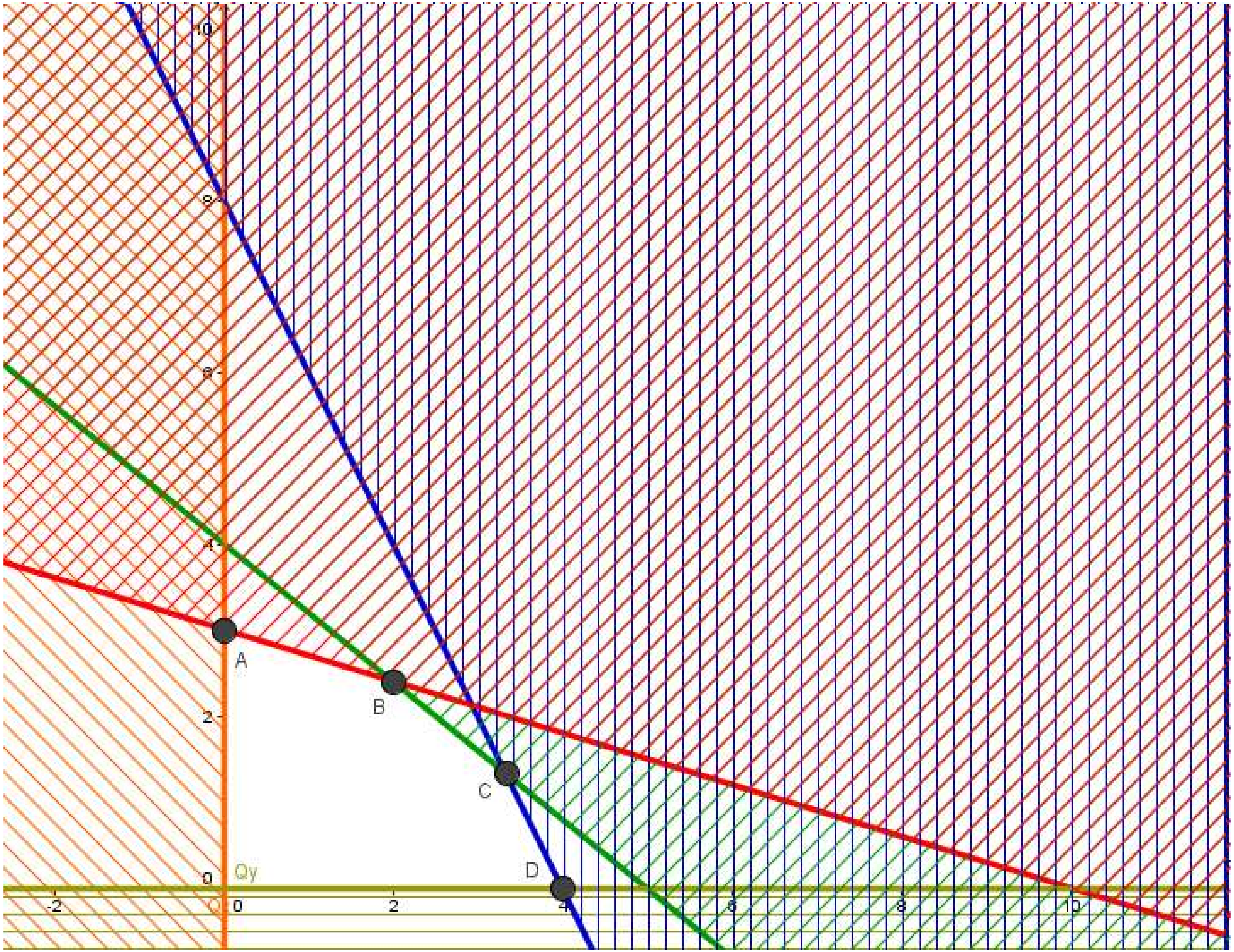
On appelle **solution admissible** tout programme (x_1, x_2) vérifiant les contraintes :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ \leq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 \ \leq 20 \\ 3x_1 + 10x_2 \ \leq 30 \\ x_1 \geq 0 \, , x_2 \ \geq 0 \end{cases}$$

Par exemple $(x_1 = \mathbf{0}, x_2 = \mathbf{0})$ est ici une solution admissible.

L'ensemble des solutions admissibles est, en général, infini : c'est un polygone convexe = **un « simplexe »**

Représentation graphique



1)Matière premières

2)Energie

3)Laminage

4)Logique

Formalisation du problème (3/3)

3) Critère d'optimisation – Fonction-objectif

Le programme (x_1, x_2) doit **maximiser** le chiffre d'affaires :

$$\max_{(x_1, x_2)} Z = 300x_1 + 800x_2$$

La fonction-objectif étant linéaire, et les contraintes étant des inéquations linéaires, on parle d'une **programmation linéaire**.

Solutions

Solution optimale

On appelle **solution optimale** toute solution admissible (x_1^*, x_2^*) **optimisant** la fonction-objectif :

$$\forall\ (x_1, x_2),\ Z = \ 300x_1 + 800x_2 \leq Z^* = 300x_1^* + 800x_2^*$$

Théorème

S'il existe une solution optimale, **alors elle est égale à un sommet du simplexe** de l'ensemble des solutions admissibles.

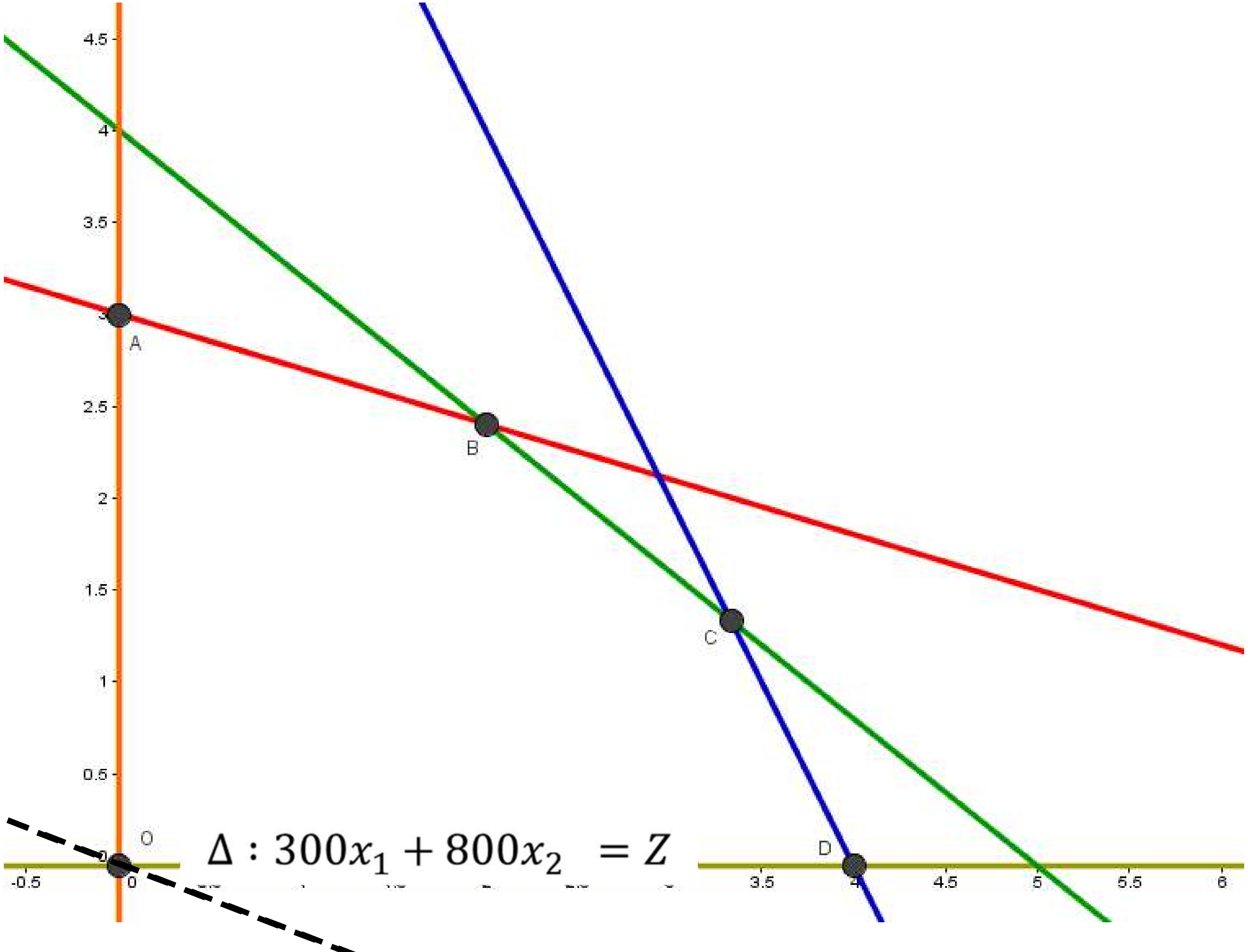
2.3 Méthode graphique

- Sommets du simplexe
- Droite isoprofit
- Fonction-objectif

Méthode graphique

On trace les droites **isoprofit** : $\Delta : 300x_1 + 800x_2 \ = Z$

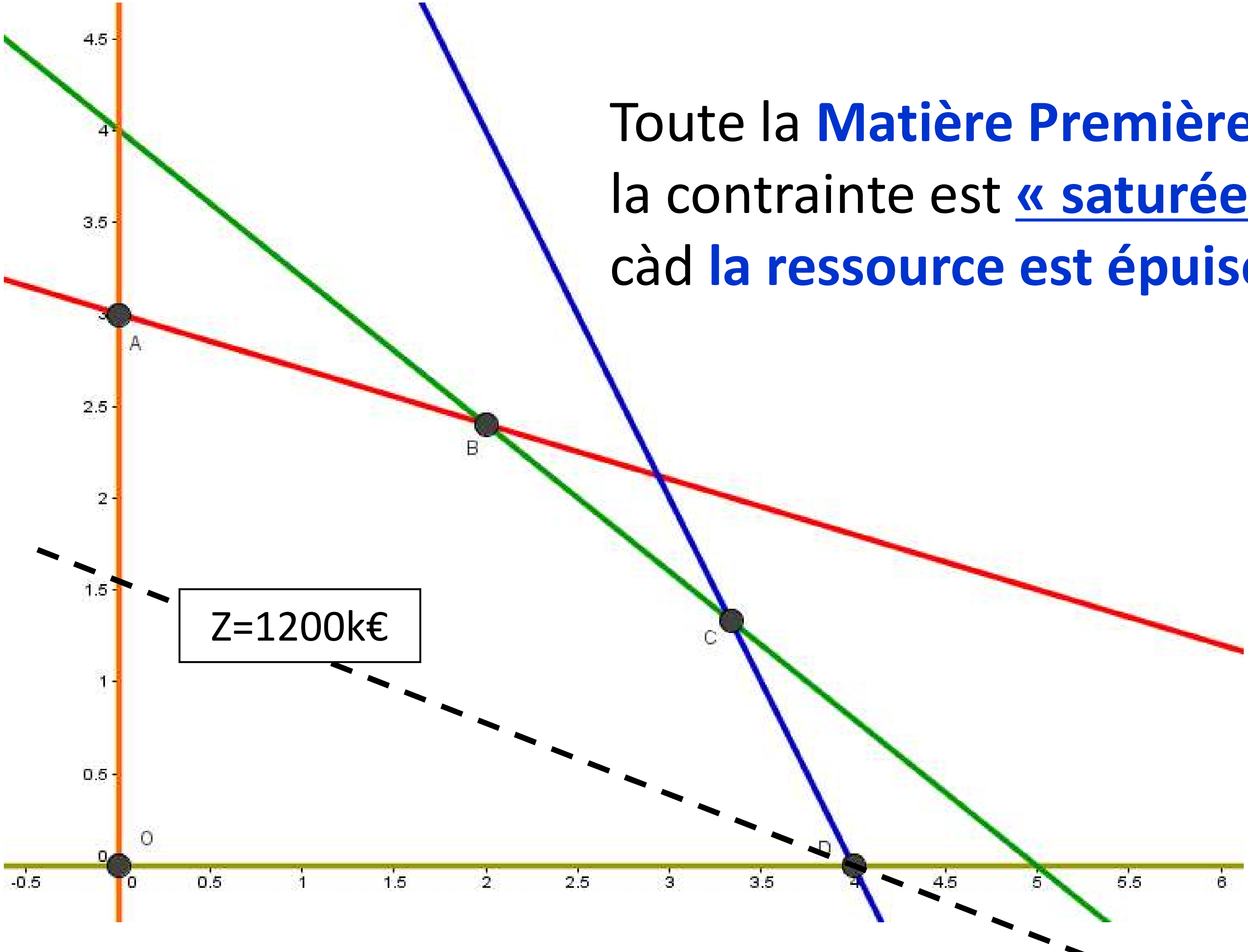
Point O : $\begin{cases} \boldsymbol{x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 = 0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 0$



Méthode graphique

Point D, solution de :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 1\,200\ K€$$



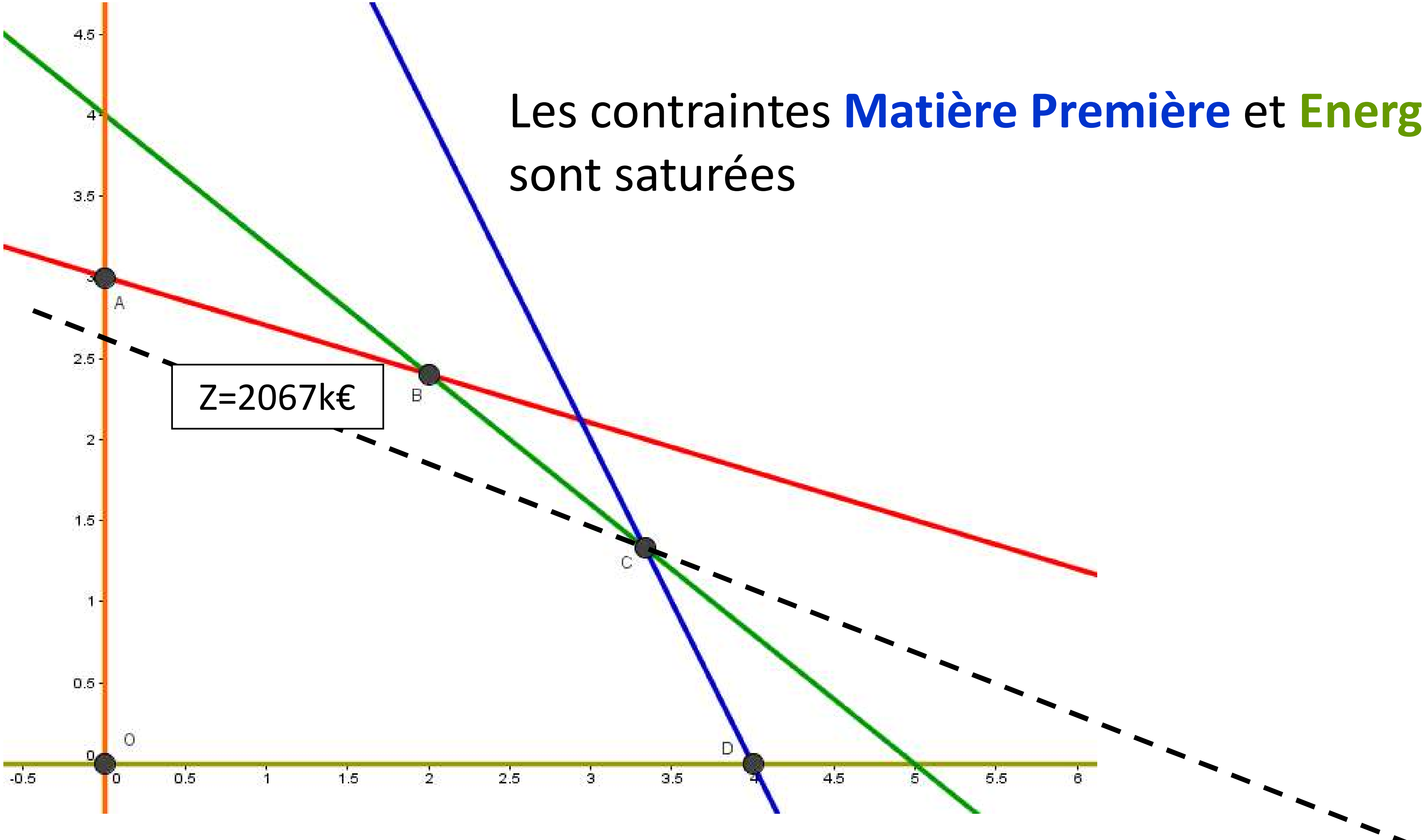
Toute la **Matière Première** est utilisée :
la contrainte est **« saturée »**
càd **la ressource est épuisée**

Méthode graphique

Point C, solution de :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 \\ x_2 = 4/3 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 2\,067\ K€$$

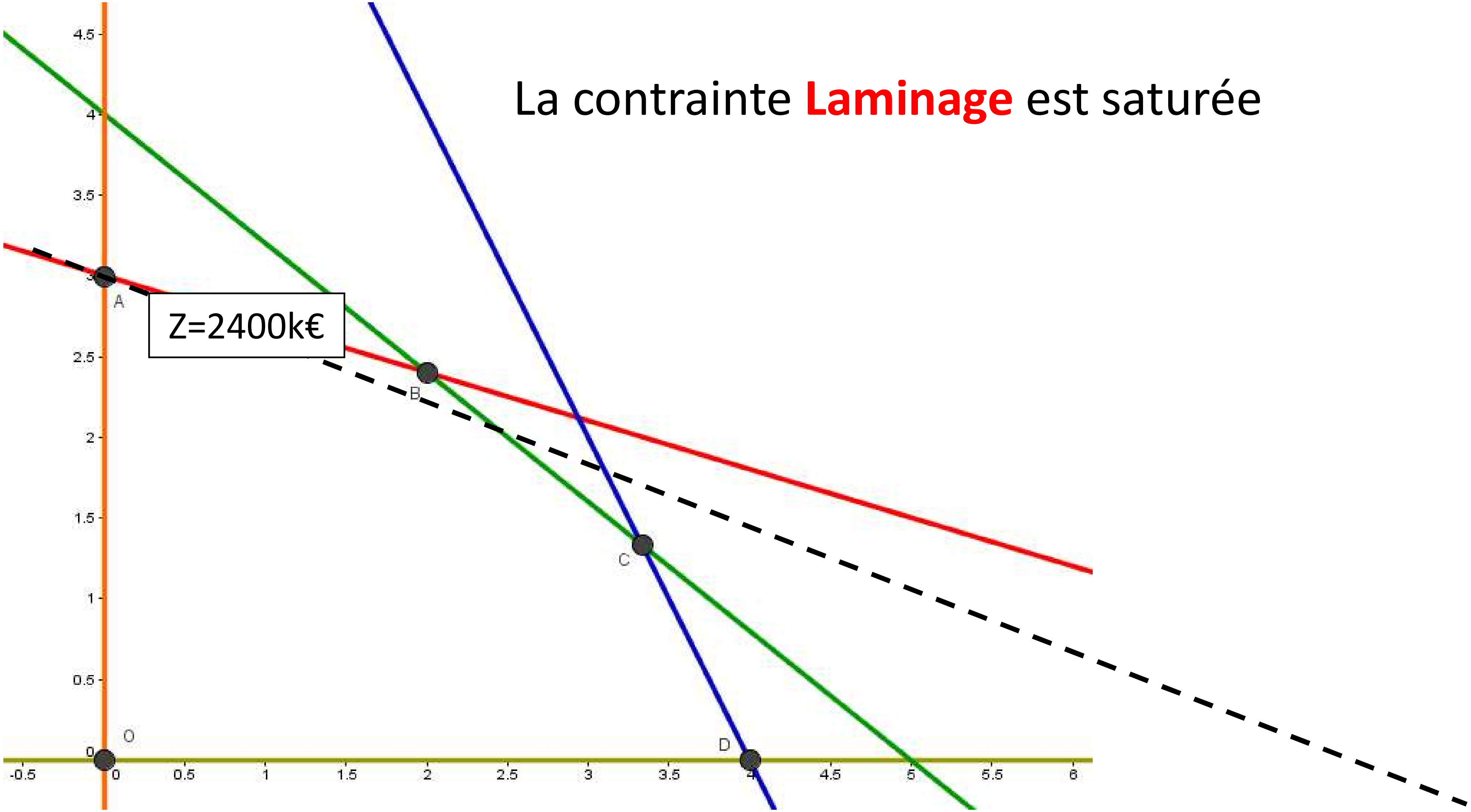
Les contraintes **Matière Première** et **Energie** sont saturées



Méthode graphique

Point A, solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{3x_1 + 10x_2 = 30} \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 2400K€$$



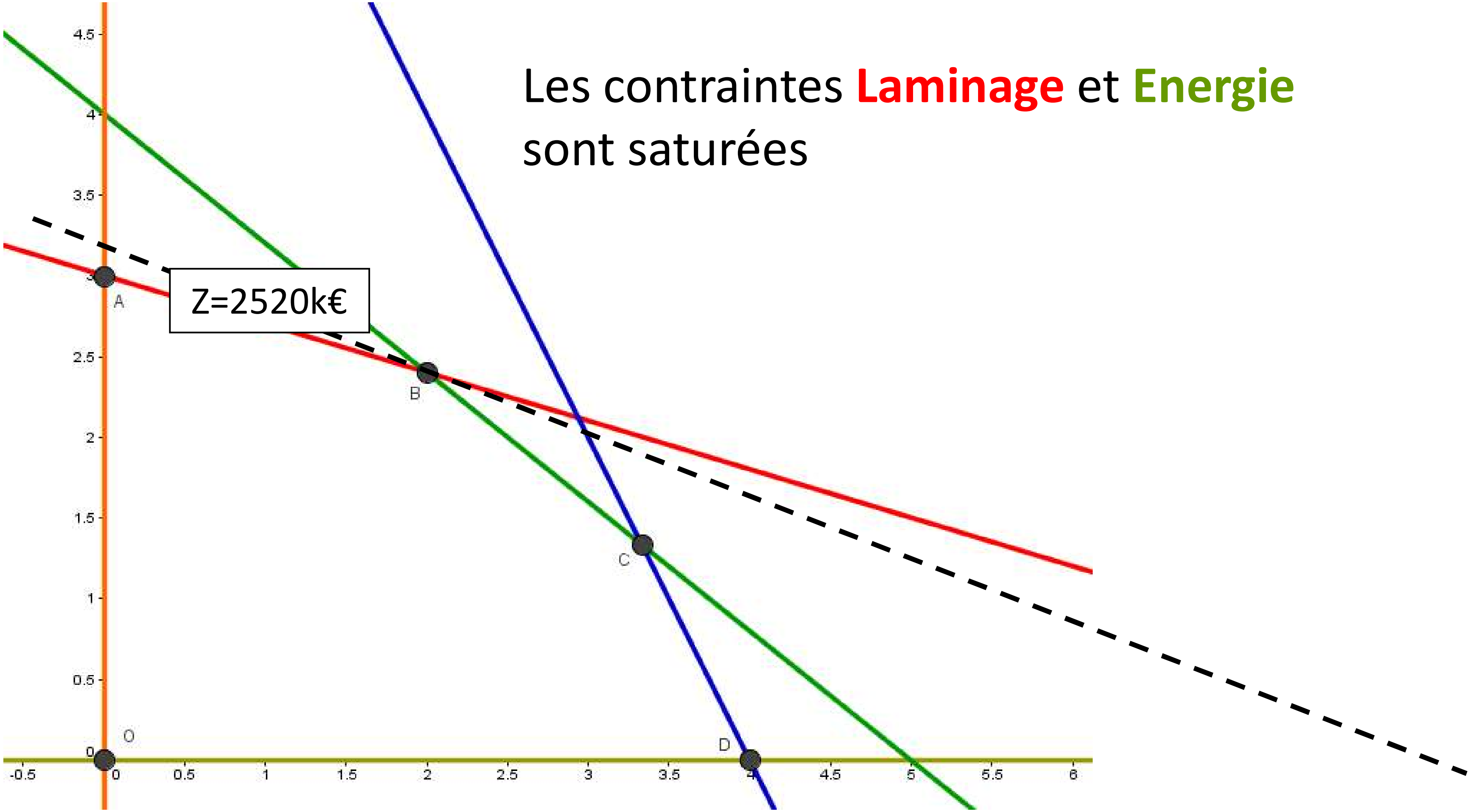
La contrainte **Laminage** est saturée

Méthode graphique

Point B, solution de :

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 20 \\ 3x_1 + 10x_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2,4 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = 2\ 520K€$$

Les contraintes **Laminage** et **Energie** sont saturées



Méthode graphique

Au delà $\boldsymbol{Z \geq 2520}$ mais programme **hors contraintes**