Mecânica Quântica Avançada
Prova 02
28 de junho – 07 de julho

Exercício 1:

Os boosts de Galileu formam um subgrupo de um grupo maior, de 10 dimensões chamado grupo de Galileu de transformações de espaço-tempo:

$$\begin{aligned} \vec{x} \to \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}t \\ t \to t' &= t + s \end{aligned}$$

onde além do deslocamento $\vec{a}$ e da velocidade do boost $\vec{v}$ já estudados, também temos uma rotação espacial R e um deslocamento temporal s. Seja $g = (R, \vec{a}, \vec{v}, s)$ uma transformação desse tipo.

Mostre que a lei de composição para $g_3 = g_2 g_1$, com $g_3 = (R_3, a_3, v_3, s_3)$ é:

$$\begin{aligned} R_3 &= R_2 R_1 \\ \vec{a}_3 &= \vec{a}_2 + R_2\vec{a}_1 + \vec{v}_2 s_1 \\ \vec{v}_3 &= \vec{v}_2 + R_2\vec{v}_1 \\ s_3 &= s_2 + s_1 \end{aligned}$$

Exercício 2:

(a) Use as relações

$$\begin{aligned} \langle j'm'|\vec{J}^2|jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,\delta_{j'j}\delta_{m'm} \\ \langle j'm'|J_0|jm\rangle &= m\hbar\,\delta_{j'j}\,\delta_{m'm} \\ \langle j'm'|J_\pm|jm\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m\pm 1} \end{aligned}$$

para encontrar os operadores S_x, S_y, and S_z para spin 1/2 – obviamente nós sabemos a resposta de cor, mas **calcule explicitamente**!

(b) Novamente usando essas relações, calcule as representações de matriz 3×3 de J_x, J_y, e J_z para momento angular $j = 1$.

(c) Mostre que para $j = 1$, J_x, J_y, and J_z estão relacionados aos geradores infinitesimais T_x, T_y, e T_z

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_z = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por uma transformação unitária que leva as componentes Cartesianas do vetor unitário $\hat{r}$ às suas componentes esféricas

$$\hat{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$
$$Y_1^0 = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\hat{r}_0, \quad Y_1^{\pm} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\tfrac{\hat{r}_x \pm \mathrm{i}\hat{r}_y}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\hat{r}_{\pm 1} \quad ,$$

i.e. $J_i = U^\dagger T_i U$ com

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Calcule a matriz de rotação $d^{(1)}(\theta)$:

$$d^{(1)}(\theta) = \exp\left(-\mathrm{i}\theta J_y\right)$$

e verifique que ela tem a forma.

$$d^{(1)}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \end{pmatrix}.$$

Dica: Mostre que $J_y^3 = J_y$.

Exercício 3:

Considere o oscilador harmônico quântico unidimensional, com potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

No limite não-relativístico, sabemos que a energia cinética T e o momento p são relacionados como

$$T = \frac{p^2}{2M},$$

os autoestados são bem conhecidos, e a energia do estado fundamental é $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Lembrando agora que a energia cinética relativística $T = E - mc^2$, faça uma correção relativística na relação entre T e p, e use teoria de perturbação para calcular a mudança ΔE na energia do estado fundamental até ordem $1/c^2$.

Exercício 4:

Considere três partículas idênticas, não-interagentes, de spin-1.

(a) Suponha que a parte espacial do vetor de estado seja simétrica sob troca de qualquer par. Vamos usar a notação $|m\rangle$ para um estado de uma partícula, com a projeção $m = \{+, 0, -\}$ Se possível, construa o estado de três partículas nos seguintes casos:

(i) Todas as partículas no estado $|+\rangle$. Este estado pode ser escrito como um autoestado do spin total $\vec{S}^2$? Se sim, construa esse autoestado e diga qual o spin total.

(ii) Duas partículas no estado $|+\rangle$ e uma no estado $|0\rangle$. Este estado pode ser escrito como um autoestado do spin total $\vec{S}^2$? Se sim, construa esse autoestado e diga qual o spin total.

(iii) As três partículas em estados de spin diferentes. Este estado pode ser escrito como um autoestado do spin total $\vec{S}^2$? Se sim, construa esse autoestado e diga qual o spin total.

(b) Repita o item (a), mas agora suponha que a parte espacial do vetor de estado seja antissimétrica sob troca de qualquer par.

Exercício 5:

Considere o hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} T_{\alpha} \hat{a}^{\dagger}_{\alpha} \hat{a}_{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} V_{\alpha\beta\gamma} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\alpha} \hat{a}_{\beta} \hat{a}_{\gamma} + \hat{a}^{\dagger}_{\alpha} \hat{a}^{\dagger}_{\beta} \hat{a}_{\gamma} \right)$$

onde $T^*_{\alpha} = T_{\alpha}$, $V^*_{\alpha\beta\gamma} = V_{\alpha\beta\gamma}$ é simétrico em todos os índices, e os operadores a_{α} e $a^{\dagger}_{\alpha}$ satisfazem regras de comutação bosônicas.

(a) Este hamiltoniano é hermiteano? Prove sua resposta.

(b) Este hamiltoniano conserva o número de partículas $N = \sum_{\alpha} a^{\dagger}_{\alpha} a_{\alpha}$? Prove sua resposta.