

Mecânica Quântica Avançada

Prova 1

Lucas Froguel
IFT

Prova 1

1	Exercício	1
2	Exercício	2
3	Exercício	4
4	Exercício	7
5	Exercício	7

Exercício 1. Considere uma molécula constituída de três átomos idênticos nos sítios (vértices) de um triângulo equilátero, conforme mostrado na figura. Vamos considerar que o íon desta molécula é formado adicionando-se um único elétron a ela; como vimos em aula, deve haver um efeito de delocalização, e o elétron deve se acomodar em um estado distribuído ao redor dos sítios. Suponha que o elemento de matriz da Hamiltoniana para o elétron em dois sítios adjacentes i, j é $\langle i|H|j\rangle = -a, a > 0$, para $i \neq j$; por simetria, os elementos diagonais são todos iguais, $\langle i|H|i\rangle = E_0$.

Item 1. Escreva a Hamiltoniana na forma matricial e calcule os níveis de energia.

Resposta. A hamiltoniana é

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -a & -a \\ -a & E_0 & -a \\ -a & -a & E_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Diagonalizando a matriz (processo feito em aula), achamos que as autoenergias são

$$E_s = E_0 - 2a \cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) \quad (2)$$

Assim, nossas energias são

$$E_0 = E_0 - 2a, \quad E_1 = E_0 - 2a \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad E_2 = E_0 - 2a \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \quad (3)$$

Item 2. Suponha que um campo elétrico na direção z é aplicado, de modo que a energia potencial para o elétron na posição rotulada por “1” diminui por uma parcela b ($b > 0$). Calcule os níveis de energia e os autoestados de energia.

Resposta. Agora quebramos a simetria que fazia com que os elementos das diagonais fossem E_0 , pois podemos distinguir o estado 1 dos estados 2 e 3. Logo, a hamiltoniana modificada é

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - b & -a & -a \\ -a & E_0 & -a \\ -a & -a & E_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Achar os autovalores e vetores de uma matriz 3×3 é um processo matemático bem definido e metódico. Fazendo essa operação, obtemos

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 + a + b, & |1'\rangle &= \frac{-|2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2}} \\ E_2 &= E_0 - \frac{1}{2} \left(a + b + \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2} \right), & |2'\rangle &= \frac{c_2 |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2 + c_2^2}} \\ E_3 &= E_0 + \frac{1}{2} \left(-a - b + \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2} \right), & |3'\rangle &= \frac{c_3 |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2 + c_3^2}} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{a - b - \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2}}{2a} \\ c_3 &= -\frac{a - b + \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2}}{2a} \end{aligned}$$

Item 3. Suponha que, no caso do item (b), o elétron está no estado fundamental. Quase instantaneamente, o campo roda de 120° e passa a apontar na direção rotulada como “2”. Calcule a probabilidade do elétron permanecer no estado fundamental.

Resposta. Podemos ver que estado 2 ocupa o antigo estado 1, o estado 3 ocupa o antigo 2 e o estado 1 o antigo 3. Notamos que o estado fundamental original é $|2'\rangle$ e o novo estado fundamental é $|3'\rangle$. Portanto

$$\begin{aligned} p &= |\langle 3'|2'\rangle|^2 \\ &= \left(\frac{2 + 2c_2c_3}{\sqrt{(2 + c_2^2)(2 + c_3^2)}} \right)^2 \\ &= \frac{4 + 8c_2c_3 + 4c_2^2c_3^2}{4 + 2(c_2^2 + c_3^2) + c_2^2c_3^2} \end{aligned}$$

Exercício 2. Para cada estado $|\psi\rangle$ de dois spins $1/2$ abaixo, escrito em termos dos autovetores de S_z , diga se o estado é emaranhado ou não (justificando sua resposta), calcule seu operador estado (matriz densidade) explicitamente, e calcule o operador estado reduzido referente à partícula 1 (na notação $|1, 2\rangle$).

1. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$

Resposta. Logo de cara vemos que esse é um estado de Bell, um estado que é notoriamente

emaranhado. Isso é verdade, pois é impossível escrever esse estado como um produto tensorial disjunto de dois estados de $|1\rangle$ e de $|2\rangle$. O operador de densidade é

$$\begin{aligned}
\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\
&= \frac{1}{2}(|+- \rangle - |-+ \rangle)(\langle +-| - \langle -+|) \\
&= \frac{1}{2}\left(|+- \rangle\langle +-| - |+- \rangle\langle -+| - |-+ \rangle\langle +-| + |-+ \rangle\langle -+|\right) \\
&\doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde usamos a sequência $\{|++ \rangle, |+- \rangle, |-+ \rangle, |-- \rangle\}$. Tomando o traço parcial

$$\rho_1 = \text{tr}_2(\rho) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

2. $|\psi\rangle = |++\rangle$

Resposta. O estado é claramente não emaranhado, pois podemos escrevê-lo como

$$|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle \quad (6)$$

Seu operador de estado é

$$\rho = |++\rangle\langle++| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

e o operador de estado reduzido é

$$\rho_1 = \text{tr}_2 \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

3. $|\psi\rangle = \frac{1}{5\sqrt{2}}(|++\rangle + 3i|+-\rangle - 2i|-+\rangle + 6|--\rangle)$

Resposta. Podemos reescrever esse estado como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{5\sqrt{2}}(|+\rangle - 2i|-\rangle) \otimes (|+\rangle + 3i|-\rangle) \quad (9)$$

de modo que vemos que ele não é emaranhado. Seu operador de estado é

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{50} \\
&= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 1 & -3i & 2i & 6 \\ 3i & 9 & -6i & -18i \\ -2i & 6i & 4 & -12i \\ 6 & -18i & 12i & 36 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tomando o traço parcial

$$\rho_1 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 10 & -16i \\ -20i & 40 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & -8i \\ -10i & 20 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Exercício 3. Considere um ensemble estatístico de sistemas de um spin-1/2.

Item 1. Considere que o ensemble é um estado puro, apontando em uma direção \hat{n} (ver figura), e descrito por um ket α . Suponha que os valores esperados $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_z \rangle$ são conhecidos, mas apenas o sinal de $\langle S_y \rangle$ é conhecido. Construa explicitamente a matriz densidade 2×2 que descreve o sistema.

Resposta. Basicamente precisamos aplicar essas condições dos valores médios e montar um sistema de equações que nos darão as restrições necessárias sobre o estado puro

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |+\rangle + e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) |-\rangle \quad (11)$$

Para S_z :

$$\frac{\hbar}{2} \left(\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) = \frac{\hbar}{2} \cos \beta = \langle S_z \rangle \quad (12)$$

Para S_x :

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \langle \psi | S_x | \psi \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \langle \psi | (|+\rangle \langle -| + |- \rangle \langle +|) | \psi \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} \sin(\beta) (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

Para S_y :

$$\begin{aligned} \epsilon \langle S_y \rangle &= \langle \psi | S_y | \psi \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \langle \psi | (-|+\rangle \langle -| + |- \rangle \langle +|) | \psi \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \left(-\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} \sin(\beta) (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \\ &= \frac{i\hbar}{2} \sin \beta \sin \alpha \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Pela primeira,

$$\beta = \arccos\left(\frac{2 \langle S_z \rangle}{\hbar}\right) \quad (13)$$

Somando os quadrados da segunda e terceira expressões

$$\begin{aligned}
\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 &= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta \cos(2\alpha) \\
\alpha &= \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{4(\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2)}{\hbar^2 \sin^2 \beta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{4(\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2)}{\hbar^2 \left(1 - \frac{4\langle S_z \rangle^2}{\hbar^2}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\frac{\hbar^2}{4} - \langle S_z \rangle^2} \right)
\end{aligned}$$

Assim, fomos capazes de calcular α e β explicitamente em função apenas dos valores médios dados. A matriz de densidade geral é

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2(\beta/2) & e^{i\alpha} \sin(\beta)/2 \\ e^{-i\alpha} \sin(\beta)/2 & \sin^2(\beta/2) \end{pmatrix} \quad (14)$$

que possui determinante notoriamente igual a 0, típico de estados puros, como esperado. Notamos que o que temos até agora é

$$\begin{aligned}
\cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) &= \frac{1}{2} + \frac{\langle S_z \rangle}{\hbar} \\
\sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) &= \frac{1}{2} - \frac{\langle S_z \rangle}{\hbar} \\
\sin \beta &= \sqrt{1 - \frac{4\langle S_z \rangle^2}{\hbar^2}} \\
e^{\pm i\alpha} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\frac{\hbar^2}{4} - \langle S_z \rangle^2}} \pm i \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\frac{\hbar^2}{4} - \langle S_z \rangle^2}}
\end{aligned}$$

Podemos melhorar isso. Subtraindo os quadrados da segunda e terceira expressões:

$$\begin{aligned}
\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2 &= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta \cos(2\alpha) \\
\sin \beta &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2}
\end{aligned}$$

Ora, usando isso:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2} \right) \quad (15)$$

Logo,

$$e^{\pm i\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2}} \quad (16)$$

Portanto, agora temos uma expressão elegante para o produto:

$$e^{\pm i\alpha} \sin \beta = \frac{2}{\hbar} (\langle S_x \rangle \mp |\langle S_y \rangle|) \quad (17)$$

Agora podemos escrever de maneira explícita a matrix:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} \langle S_z \rangle & \langle S_x \rangle - |\langle S_y \rangle| \\ \langle S_x \rangle + |\langle S_y \rangle| & -\langle S_z \rangle \end{pmatrix} \quad (18)$$

com a restrição de que $\det \rho = 0$. Ela é satisfeita quando

$$\begin{aligned} \hbar \det \rho &= \left(\frac{\hbar}{2} + z \right) \left(\frac{\hbar}{2} - z \right) - (x - y)(x + y) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} - z^2 - x^2 + y^2 \\ &= 0 \\ \frac{\hbar^2}{4} &= \langle S_x \rangle^2 - |\langle S_y \rangle|^2 + \langle S_z \rangle^2 \end{aligned}$$

Item 2. Considere agora que o ensemble é misturado, de uma maneira genérica (note que não estamos dizendo que ele é o estado de máxima entropia!). Suponha agora que os três valores médios $\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle$ são todos conhecidos. Construa explicitamente a matriz densidade 2×2 que descreve o sistema.

Resposta. Sabemos que

$$\langle S_x \rangle = \text{tr}(\rho S_x), \quad \langle S_y \rangle = \text{tr}(\rho S_y), \quad \langle S_z \rangle = \text{tr}(\rho S_z) \quad (19)$$

Ademais

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} + \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (20)$$

Como mostramos em sala, vale que

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\hbar}{2} \vec{b} \quad (21)$$

Portanto,

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} + \frac{2\langle S_x \rangle}{\hbar} \sigma_x + \frac{2\langle S_y \rangle}{\hbar} \sigma_y + \frac{2\langle S_z \rangle}{\hbar} \sigma_z \right) \quad (22)$$

Abrindo de maneira explícita:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} \langle S_z \rangle & \langle S_x \rangle - i \langle S_y \rangle \\ \langle S_x \rangle + i \langle S_y \rangle & -\langle S_z \rangle \end{pmatrix} \quad (23)$$

Exercício 4. Considere a seguinte matriz densidade de dois spins-1/2:

$$\rho = \frac{1}{8}\mathbb{I} + \frac{1}{2}|\Psi_{-}\rangle\langle\Psi_{-}| \quad (24)$$

onde $|\Psi_{-}\rangle$ é o estado singleto (i.e. o estado de spin total igual a zero). Suponhamos que medimos um dos spins ao longo de um eixo a e o outro ao longo de um eixo b , em que $\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos\theta$. Qual é a probabilidade (como função de θ) de encontramos $\hbar/2$ para ambos spins nestas medidas?

Resposta. Começamos notando que o estado de singleto é

$$|\Psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \quad (25)$$

Em seguida, percebemos que calcular a probabilidades de $+\hbar/2$ em ambas as medidas é

$$p_{++} = \text{tr}(|+\rangle_a |+\rangle_b \langle +|_a \langle +|_b \rho) \quad (26)$$

Assim, sem perda de generalidade, vamos supor que $\hat{a} = \hat{z}$ e que b mora no plano x - z . Então podemos escrever os kets em b em função da base de a :

$$|+\rangle_b = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle, \quad |-\rangle_b = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle \cos\theta - \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle \quad (27)$$

Portanto, o projetor se escreve:

$$\begin{aligned} P_{++} &= |+\rangle \left(\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle \right) \langle +| \left(\cos\frac{\theta}{2}\langle +| + \sin\frac{\theta}{2}\langle -| \right) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}|++\rangle\langle ++| + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|++\rangle\langle +-| + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|+-\rangle\langle ++| + \sin^2\frac{\theta}{2}|+-\rangle\langle +-| \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}|++\rangle\langle ++| + \frac{1}{2}\sin\theta|++\rangle\langle +-| + \frac{1}{2}\sin\theta|+-\rangle\langle ++| + \sin^2\frac{\theta}{2}|+-\rangle\langle +-| \end{aligned}$$

Consequentemente, a probabilidade é

$$\begin{aligned} p_{++} &= \text{tr}(P_{++}\rho) \\ &= \frac{1}{8}\text{tr}(P_{++}) + \frac{1}{2}\text{tr}(P_{++}|\Psi_{-}\rangle\langle\Psi_{-}|) \\ &= \frac{1}{8}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Exercício 5. Suponha que um sistema de dois níveis tem estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, análogo ao spin-1/2.

Item 1. Vamos considerar a chamada interação de beam splitter (BS). Suponha que o sistema é sujeito a um Hamiltoniano $H = \varepsilon\sigma_y$ por um tempo τ tal que $\varepsilon\tau/\hbar = \pi/4$. Mostre que se o sistema estava inicialmente em $|+\rangle$ ou $|-\rangle$, então ele é levado (a menos de uma fase global) para os estados:

$$|+\rangle \rightarrow \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle \rightarrow \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \quad (28)$$

Resposta. Primeiramente, notamos que a evolução temporal é dada por

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \quad (29)$$

Além disso, sabemos que

$$\begin{aligned} |+\rangle_y &= \frac{|+\rangle + i|-\rangle}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle_y &= \frac{|+\rangle - i|-\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Assim, somando e subtraindo essas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle &= -i \frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

onde lembramos que a ausência de índices implica que os vetores apontam na direção \hat{z} . Agora podemos fazer a projeção temporal:

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar} |+\rangle &= e^{-i\pi\sigma_y/4} \left(\frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi/4} |+\rangle_y + e^{i\pi/4} |-\rangle_y \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|+\rangle_y - i|+\rangle_y + |-\rangle_y + i|-\rangle_y \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} - i \frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

que é a evolução temporal desejada. Para o outro vetor, segue processo análogo:

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar} |-\rangle &= -ie^{-i\pi\sigma_y/4} \left(\frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi/4} |+\rangle_y - e^{i\pi/4} |-\rangle_y \right) \\ &= -\frac{i}{2} \left(|+\rangle_y - i|+\rangle_y - |-\rangle_y - i|-\rangle_y \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-i|+\rangle_y - |+\rangle_y + i|-\rangle_y - |-\rangle_y \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} - i \frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{-|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= e^{i\pi} \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

onde ignoramos uma fase global.

Item 2. Agora, consideremos a chamada *phase shift gate (PS)*. Suponha agora que o sistema é sujeito a um Hamiltoniano $H = \varepsilon \sigma_z$ por um tempo τ tal que $\varepsilon \tau / \hbar = \phi/2$. Mostre que isso leva os vetores (a menos de uma fase global) em

$$|+\rangle \rightarrow |+\rangle, \quad |-\rangle \rightarrow e^{i\phi} |-\rangle \quad (30)$$

Resposta. Como o hamiltoniano possui autoestados $|+\rangle, |-\rangle$, não precisamos fazer nenhuma projeção de spin, de modo que é imediato o resultado. Vejamos

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar} |+\rangle &= e^{-i\sigma_z \phi/2} |+\rangle \\ &= e^{-i\phi/2} |+\rangle \end{aligned}$$

Já o outro:

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar} |-\rangle &= e^{-i\sigma_z \phi/2} |-\rangle \\ &= e^{i\phi/2} |-\rangle \end{aligned}$$

Como fases globais não afetam medições, podemos multiplicar ambos os estados por $e^{i\phi/2}$ para obter os estados desejados

$$|+\rangle, \quad e^{i\phi} |-\rangle \quad (31)$$

a menos de alguma fase global.

Item 3. Considere um sistema inicialmente preparado em $|\Psi_0\rangle = |+\rangle$. Suponha agora que esse sistema evolui por um beam splitter, seguido de um phase shift, seguido de outro beam splitter, evoluindo até um estado $|\Psi\rangle$. Note que isto é possível em laboratório, usando exatamente um sistema de spin-1/2 e um campo magnético dependente do tempo. Calcule o estado final $|\Psi\rangle$.

Resposta. Vamos calcular diretamente passo-a-passo, começando do começo:

$$\begin{aligned} |+\rangle &\xrightarrow{BS} \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &\xrightarrow{PS} \frac{|+\rangle + e^{i\phi} |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &\xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + e^{i\phi}) |+\rangle + (1 - e^{i\phi}) |-\rangle) \end{aligned}$$

que é o estado final desejado.

Item 4. Mostre que a probabilidade P_1 de encontrar o sistema no estado $|-\rangle$ depois da evolução é dada por

$$P_- = |\langle - | \psi \rangle|^2 = \sin^2(\phi/2) \quad (32)$$

Essa é a ideia principal por trás da interferometria de Ramsey: a probabilidade oscila dependendo da fase do phase shift.

Resposta. Ora, a probabilidade é trivial de se calcular nesse caso:

$$\begin{aligned} P_- &= |1 - e^{i\phi}|^2 \\ &= |(1 - \cos \phi) - i \sin \phi|^2 \\ &= (1 - \cos \phi)^2 + \sin^2 \phi \\ &= 1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\ &= 2 - 2 \cos \phi \\ &= \sin^2(\phi/2) \end{aligned}$$
