Mecânica Quântica Avançada
Lista de Exercícios 2

Data de entrega: 25 de abril de 2023

Exercício 1: Exercício 6.5.1 do Le Bellac.

Exercício 2: *Representação matricial de produtos tensoriais.* Usando a representação matricial para os vetores da base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

o estado produto-tensorial de dois spins $|++\rangle = |+\otimes+\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$ é escrito na forma matricial nesta representação como

$$|++\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escreva os outros estados de dois spins $|+-\rangle, |-+\rangle$ e $|--\rangle$, e a dos estados de três spins $|+++\rangle, |+-+\rangle, \cdots, |---\rangle$ na forma matricial empregando a representação da Eq (1).

Exercício 3: Exercícios 6.5.2 e 6.5.3 do Le Bellac.

Exercício 4: Ao ter provado o item 2 do exercício 6.5.3 do Le Bellac, você provou que um operador de estado $\hat{\rho}$ correspondente a um estado puro não pode ser escrito como combinação linear de dois outros operadores de estado genéricos $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$:

$$\hat{\rho} = \lambda\hat{\rho}_1 + (1-\lambda)\hat{\rho}_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Esse resultado tem a ver com a seguinte observação: “A preparação de um estado puro é única enquanto que a preparação de um estado misto é sempre ambígua”. Você poderia explicar o que uma coisa tem a ver com a outra, isto é, o que o resultado que você provou tem a ver com a preparação de um estado físico e possíveis resultados de medida?

Exercício 5: Considere a seguinte matriz densidade de um spin 1/2:

$$\rho = \frac{1}{4}\mathbf{1} + \frac{1}{2}|+,\hat{a}\rangle\langle+,\hat{a}|$$

onde $|+,\hat{a}\rangle$ é o autoestado da projeção do operador de spin ao longo de um eixo a com autovalor $+h/2$. Calcule a probabilidade como função de θ de encontrar o valor $-h/2$ ao se medir o spin ao longo de um eixo b, em que θ é o ângulo entre a e b, i.e. $\hat{a}\cdot\hat{b} = \cos\theta$.

Exercício 6: Considere a seguinte matriz densidade de dois spins 1/2:

$$\rho = \frac{1}{8}\mathbf{1} + \frac{1}{2}\left|\Psi_{-}\right\rangle\left\langle\Psi_{-}\right|$$

onde $|\Psi_{-}\rangle$é o estado singleto (i.e. o estado de spin total igual a zero). Suponhamos que medimos um dos spins ao longo de um eixo a e o outro ao longo de um eixo b, em que $\hat{a}\cdot\hat{b} = \cos\theta$. Qual é a probabilidade (como função de θ) de encontramos $+\hbar/2$ para ambos spins nestas medidas?

Exercício 7: Considere um sistema bipartite descrito por um operador de estado $\hat{\rho}^{(AB)}$ que evolui unitariamente:

$$i\hbar\frac{d\hat{\rho}^{(AB)}}{dt} = \left[\hat{H}_{AB}, \hat{\rho}_{AB}\right]$$

com

$$\hat{H}_{AB} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}_{AB}$$

onde $\hat{H}_A$ depende somente das coordenadas do subsistema A, $\hat{H}_B$ depende somente das coordenadas do subsistema B e $\hat{V}_{AB}$ depende das coordenadas de ambos subsistemas. Mostre que o operador de densidade reduzido do sistema A, *i.e.* $\hat{\rho}^{(A)} = \mathrm{Tr}_B\,\hat{\rho}^{(AB)}$, obedece à seguinte equação de evolução temporal:

$$i\hbar\frac{d\hat{\rho}^{(A)}}{dt} = \left[\hat{H}_A, \hat{\rho}^{(A)}\right] + \mathrm{Tr}_B\left[\hat{V}_{AB}, \hat{\rho}^{(AB)}\right]$$

Você acabou de mostrar que enquanto o sistema bipartite evolui unitariamente, o subsistema A não evolui unitariamente em geral. No curso de Física Estatística você, muito provavelmente, vai provar esse resultado novamente.

Exercício 8: Mostre que sob evolução unitária (ou hamiltoniana, *i.e.* quando o operador densidade evolui de acordo com a Eq. (6.37) do Le Bellac) a entropia de emaranhamento é conservada no tempo.

Exercício 9: Considere os seguintes estados de dois spin-1/2:

$$|\Phi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$$
$$|\Phi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle)$$
$$|\Psi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$$
$$|\Psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

Estes estados são conhecidos como *estados de Bell*.

9.1 Escreva os estados de Bell e as correspondentes matrizes densidade na forma matricial na representação definida pela Eq. (1).

9.2 Mostre que estes estados são maximamente emaranhados (ou desordenados), isto é, as entropias de emaranhamento correspondentes aos spins individuais assumem o valor máximo $\ln 2$.

Exercício 10: Considere o seguinte vetor de estado de dois spins 1/2 :

$$|\Psi(1,2)\rangle = \cos\theta|+-\rangle - \sin\theta|-+\rangle$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Obtenha a matriz densidade reduzida de um dos spins e calcule a correspondente entropia de emaranhamento. Para que valor de θ essa entropia é máxima?

Exercício 11: Exercício 6.5.4 do Le Bellac.

Exercício 12: A dinâmica de um sistema de dois spins 1/2 é descrita pelo hamiltoniano:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_1 \cdot \sigma_2$$

onde $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}$, com $\sigma_x, \cdots$ sendo as matrizes de Pauli, e ω é uma constante. Supondo que em $t = 0$ o vetor de estado dos dois spins era $|+-\rangle$, obtenha a entropia de emaranhamento de um dos elétrons nos instantes $t = 0$ e $t = \pi/(2\omega)$.

Dica: use os resultados do exercício 6.5.4 do Le Bellac.