Mecânica Quântica Avançada
Prova 1

Lucas Froguel
IFT

Prova 1

Exercício 1. *Considere uma molécula constituída de três átomos idênticos nos sítios (vértices) de um triângulo equilátero, conforme mostrado na figura. Vamos considerar que o íon desta molécula é formado adicionando-se um único elétron a ela; como vimos em aula, deve haver um efeito de delocalização, e o elétron deve se acomodar em um estado distribuído ao redor dos sítios. Suponha que o elemento de matriz da Hamiltoniana para o elétron em dois sítios adjacentes* i, j *é* $\langle i|H|j\rangle = -a, a > 0$*, para* $i \neq j$*; por simetria, os elementos diagonais são todos iguais,* $\langle i|H|i\rangle = E_0$*.*

Item 1. *Escreva a Hamiltoniana na forma matricial e calcule os níveis de energia.*
Resposta. A hamiltoniana é

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -a & -a \\ -a & E_0 & -a \\ -a & -a & E_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Diagonalizando a matriz (processo feito em aula), achamos que as autoenergias são

$$E_s = E_0 - 2a\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) \tag{2}$$

Assim, nossas energias são

$$E_0 = E_0 - 2a, \quad E_1 = E_0 - 2a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad E_2 = E_0 - 2a\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \tag{3}$$

Item 2. *Suponha que um campo elétrico na direção* z *é aplicado, de modo que a energia potencial para o elétron na posição rotulada por "1" diminui por uma parcela* b $(b > 0)$*. Calcule os níveis de energia e os autoestados de energia.*

Resposta. Agora quebramos a simetria que fazia com que os elementos das diagonais fossem E_0, pois podemos distinguir o estado 1 dos estados 2 e 3. Logo, a hamiltoniana modificada é

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - b & -a & -a \\ -a & E_0 & -a \\ -a & -a & E_0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Achar os autovalores e vetores de uma matriz 3×3 é um processo matemático bem definido e metódico. Fazendo essa operação, obtemos

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 + a + b, & |1'\rangle &= \frac{-|2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2}} \\ E_2 &= E_0 - \frac{1}{2}\left(a + b + \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2}\right), & |2'\rangle &= \frac{c_2|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2 + c_2^2}} \\ E_3 &= E_0 + \frac{1}{2}\left(-a - b + \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2}\right), & |3'\rangle &= \frac{c_3|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2 + c_3^2}} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{a - b - \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2}}{2a} \\ c_2 &= -\frac{a - b + \sqrt{9a^2 - 4ab + 4b^2}}{2a} \end{aligned}$$

Item 3. *Suponha que, no caso do item (b), o elétron está no estado fundamental. Quase instantaneamente, o campo roda de 120° e passa a apontar na direção rotulada como "2". Calcule a probabilidade do elétron permanecer no estado fundamental.*
Resposta. Podemos ver que estado 2 ocupa o antigo estado 1, o estado 3 ocupa o antigo 2 e o estado 1 o antigo 3. Notamos que o estado fundamental original é $|2'\rangle$ e o novo estado fundamental é $|3'\rangle$. Portanto

$$\begin{aligned} p &= |\langle 3'|2'\rangle|^2 \\ &= \left(\frac{2 + 2c_2c_3}{\sqrt{(2 + c_2^2)(2 + c_3^2)}}\right)^2 \\ &= \frac{4 + 8c_2c_3 + 4c_2^2c_3^2}{4 + 2(c_2^2 + c_3^2) + c_2^2c_3^2} \end{aligned}$$

Exercício 2. *Para cada estado $|\psi\rangle$ de dois spins 1/2 abaixo, escrito em termos dos autovetores de S_z, diga se o estado é emaranhado ou não (justificando sua resposta), calcule seu operador estado (matriz densidade) explicitamente, e calcule o operador estado reduzido referente à particula 1 (na notação $|1,2\rangle$).*

1. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$
   Resposta. Logo de cara vemos que esse é um estado de Bell, um estado que é notoriamente

emaranhado. Isso é verdade, pois é impossível escrever esse estado como um produto tensorial disjunto de dois estados de $|1\rangle$ e de $|2\rangle$. O operador de densidade é

$$\begin{aligned}
\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\
&= \frac{1}{2}(|{+-}\rangle - |{-+}\rangle)(\langle{+-}| - \langle{-+}|) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|{+-}\rangle\langle{+-}| - |{+-}\rangle\langle{-+}| - |{-+}\rangle\langle{+-}| + |{-+}\rangle\langle{-+}|\Big) \\
&\doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde usamos a sequência $\{|{++}\rangle, |{+-}\rangle, |{-+}\rangle, |{--}\rangle\}$. Tomando o traço parcial

$$\rho_1 = \mathrm{tr}_2(\rho) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

---

2. $|\psi\rangle = |{++}\rangle$
Resposta. O estado é claramente não emaranhado, pois podemos escrevê-lo como

$$|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle \tag{6}$$

Seu operador de estado é

$$\rho = |{++}\rangle\langle{++}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

e o operador de estado reduzido é

$$\rho_1 = \mathrm{tr}_2\,\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

---

3. $|\psi\rangle = \frac{1}{5\sqrt{2}}\big(|{++}\rangle + 3i\,|{+-}\rangle - 2i\,|{-+}\rangle + 6\,|{--}\rangle\big)$
Resposta. Podemos reescrever esse estado como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{5\sqrt{2}}\big(|+\rangle - 2i\,|-\rangle\big) \otimes \big(|+\rangle + 3i\,|-\rangle\big) \tag{9}$$

de modo que vemos que ele não é emaranhado. Seu operador de estado é

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{50} \\
&= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 1 & -3i & 2i & 6 \\ 3i & 9 & -6i & -18i \\ -2i & 6i & 4 & -12i \\ 6 & -18i & 12i & 36 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tomando o traço parcial

$$\rho_1 = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 10 & -16i \\ -20i & 40 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & -8i \\ -10i & 20 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Exercício 3. *Considere um ensemble estatístico de sistemas de um spin-*$1/2$.

Item 1. *Considere que o ensemble é um estado puro, apontando em uma direção $\hat{n}$ (ver figura), e descrito por um ket α. Suponha que os valores esperados $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_z \rangle$ são conhecidos, mas apenas o sinal de $\langle S_y \rangle$ é conhecido. Construa explicitamente a matriz densidade 2×2 que descreve o sistema.*

Resposta. Basicamente precisamos aplicar essas condições dos valores médios e montar um sistema de equações que nos darão as restrições necessárias sobre o estado puro

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle \tag{11}$$

Para S_z:

$$\frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\beta = \langle S_z \rangle \tag{12}$$

Para S_x:

$$\begin{aligned}
\langle S_x \rangle &= \langle \psi | S_x | \psi \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2}\langle \psi \left| \left(|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| \right) \right| \psi \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2}\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}\sin(\beta)\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\sin\beta\cos\alpha
\end{aligned}$$

Para S_y:

$$\begin{aligned}
\epsilon \langle S_y \rangle &= \langle \psi | S_y | \psi \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2}\langle \psi \left| \left(- |+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| \right) \right| \psi \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2}\left(-\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}\sin(\beta)\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) \\
&= \frac{i\hbar}{2}\sin\beta\sin\alpha
\end{aligned}$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Pela primeira,

$$\beta = \operatorname{acos}\left(\frac{2\langle S_z \rangle}{\hbar}\right) \tag{13}$$

Somando os quadrados da segunda e terceira expressões

$$
\begin{aligned}
\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 &= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta \left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \right) \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta \cos(2\alpha) \\
\alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{acos} \left(\frac{4(\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2)}{\hbar^2 \sin^2 \beta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{acos} \left(\frac{4(\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2)}{\hbar^2 \left(1 - \frac{4\langle S_z \rangle^2}{\hbar^2} \right)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{acos} \left(\frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\frac{\hbar^2}{4} - \langle S_z \rangle^2} \right)
\end{aligned}
$$

Assim, fomos capazes de calcular α e β explicitamente em função apenas dos valores médios dados. A matriz de densidade geral é

$$
\rho = \begin{pmatrix} \cos^2(\beta/2) & e^{i\alpha} \sin(\beta)/2 \\ e^{-i\alpha} \sin(\beta)/2 & \sin^2(\beta/2) \end{pmatrix} \tag{14}
$$

que possui determinante notoriamente igual a 0, típico de estados puros, como esperado. Notamos que o que temos até agora é

$$
\begin{aligned}
\cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) &= \frac{1}{2} + \frac{\langle S_z \rangle}{\hbar} \\
\sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) &= \frac{1}{2} - \frac{\langle S_z \rangle}{\hbar} \\
\sin \beta &= \sqrt{1 - \frac{4 \langle S_z \rangle^2}{\hbar^2}} \\
e^{\pm i\alpha} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\frac{\hbar^2}{4} - \langle S_z \rangle^2}} \pm i \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\frac{\hbar^2}{4} - \langle S_z \rangle^2}}
\end{aligned}
$$

Podemos melhorar isso. Subtraindo os quadrados da segunda e terceira expressões:

$$
\begin{aligned}
\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2 &= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta \left(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \sin^2 \beta \\
\sin \beta &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2}
\end{aligned}
$$

Ora, usando isso:

$$
\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{acos} \left(\frac{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2}{\langle S_x \rangle^2 - \langle S_y \rangle^2} \right) \tag{15}
$$

Logo,

$$e^{\pm i\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\langle S_x\rangle^2 + \langle S_y\rangle^2}{\langle S_x\rangle^2 - \langle S_y\rangle^2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\langle S_x\rangle^2 + \langle S_y\rangle^2}{\langle S_x\rangle^2 - \langle S_y\rangle^2}} \tag{16}$$

Portanto, agora temos uma expressão elegante para o produto:

$$e^{\pm i\alpha}\sin\beta = \frac{2}{\hbar}\left(\langle S_x\rangle \mp |\langle S_y\rangle|\right) \tag{17}$$

Agora podemos escrever de maneira explícita a matrix:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} \langle S_z\rangle & \langle S_x\rangle - |\langle S_y\rangle| \\ \langle S_x\rangle + |\langle S_y\rangle| & -\langle S_z\rangle \end{pmatrix} \tag{18}$$

com a restrição de que $\det\rho = 0$. Ela é satisfeita quando

$$\begin{aligned} \hbar\det\rho &= \left(\frac{\hbar}{2} + z\right)\left(\frac{\hbar}{2} - z\right) - (x-y)(x+y) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} - z^2 - x^2 + y^2 \\ &= 0 \\ \frac{\hbar^2}{4} &= \langle S_x\rangle^2 - |\langle S_y\rangle^2| + \langle S_z\rangle^2 \end{aligned}$$

Item 2. *Considere agora que o ensemble é misturado, de uma maneira genérica (note que não estamos dizendo que ele é o estado de máxima entropia!). Suponha agora que os três valores médios $\langle S_x\rangle, \langle S_y\rangle, \langle S_z\rangle$ são todos conhecidos. Construa explicitamente a matriz densidade 2×2 que descreve o sistema.*

Resposta. Sabemos que

$$\langle S_x\rangle = \mathrm{tr}(\rho S_x), \quad \langle S_y\rangle = \mathrm{tr}(\rho S_y), \quad \langle S_z\rangle = \mathrm{tr}(\rho S_z) \tag{19}$$

Ademais

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{b}\cdot\vec{\sigma}\right) \tag{20}$$

Como mostramos em sala, vale que

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{\hbar}{2}\vec{b} \tag{21}$$

Portanto,

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \frac{2\langle S_x\rangle}{\hbar}\sigma_x + \frac{2\langle S_y\rangle}{\hbar}\sigma_y + \frac{2\langle S_z\rangle}{\hbar}\sigma_z\right) \tag{22}$$

Abrindo de maneira explícita:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} \langle S_z\rangle & \langle S_x\rangle - i\langle S_y\rangle \\ \langle S_x\rangle + i\langle S_y\rangle & -\langle S_z\rangle \end{pmatrix} \tag{23}$$

Exercício 4. *Considere a seguinte matriz densidade de dois spins-1/2:*

$$\rho = \frac{1}{8}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\left|\Psi_-\right\rangle\left\langle\Psi_-\right| \tag{24}$$

onde $|\Psi_-\rangle$ é o estado singleto (i.e. o estado de spin total igual a zero). Suponhamos que medimos um dos spins ao longo de um eixo a e o outro ao longo de um eixo b, em que $\hat{a}\cdot\hat{b} = \cos\theta$. Qual é a probabilidade (como função de θ) de encontramos $\hbar/2$ para ambos spins nestas medidas?

Resposta. Começamos notando que o estado de singleto é

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\left|+-\right\rangle - \left|-+\right\rangle\big) \tag{25}$$

Em seguida, percebemos que calcular a probabilidades de $+\hbar/2$ em ambas as medidas é

$$p_{++} = \mathrm{tr}(\left|+\right\rangle_a \left|+\right\rangle_b \left\langle+\right|_a \left\langle+\right|_b \rho) \tag{26}$$

Assim, sem perda de generalidade, vamos supor que $\hat{a} = \hat{z}$ e que b mora no plano x-z. Então podemos escrever os kets em b em função da base de a:

$$\left|+\right\rangle_b = \cos\frac{\theta}{2}\left|+\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\left|-\right\rangle, \quad \left|-\right\rangle_b = \sin\frac{\theta}{2}\left|+\right\rangle \cos\theta 2\left|-\right\rangle \tag{27}$$

Portanto, o projetor se escreve:

$$\begin{aligned}
P_{++} &= \left|+\right\rangle\left(\cos\frac{\theta}{2}\left|+\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\left|-\right\rangle\right)\left\langle+\right|\left(\cos\frac{\theta}{2}\left\langle+\right| + \sin\frac{\theta}{2}\left\langle-\right|\right) \\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\left|++\right\rangle\left\langle++\right| + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left|++\right\rangle\left\langle+-\right| + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left|+-\right\rangle\left\langle++\right| + \sin^2\frac{\theta}{2}\left|+-\right\rangle\left\langle+-\right| \\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\left|++\right\rangle\left\langle++\right| + \frac{1}{2}\sin\theta\left|++\right\rangle\left\langle+-\right| + \frac{1}{2}\sin\theta\left|+-\right\rangle\left\langle++\right| + \sin^2\frac{\theta}{2}\left|+-\right\rangle\left\langle+-\right|
\end{aligned}$$

Consequentemente, a probabilidade é

$$\begin{aligned}
p_{++} &= \mathrm{tr}\, P_{+}+\rho) \\
&= \frac{1}{8}\mathrm{tr}(P_{++}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P_{++}\left|\Psi_-\right\rangle\left\langle\Psi_-\right|) \\
&= \frac{1}{8}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exercício 5. *Suponha que um sistema de dois níveis tem estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, análogo ao spin-1/2.*

Item 1. *Vamos considerar a chamada interação de beam splitter (BS). Suponha que o sistema é sujeito a um Hamiltoniano $H = \varepsilon\sigma_y$ por um tempo τ tal que $\varepsilon\tau/\hbar = \pi/4$. Mostre que se o sistema estava inicialmente em $|+\rangle$ ou $|-\rangle$, então ele é levado (a menos de uma fase global) para os estados:*

$$\left|+\right\rangle \to \frac{\left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \left|-\right\rangle \to \frac{\left|+\right\rangle - \left|-\right\rangle}{\sqrt{2}} \tag{28}$$

Resposta. Primeiramente, notamos que a evolução temporal é dada por

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \tag{29}$$

Além disso, sabemos que

$$\begin{aligned} |+\rangle_y &= \frac{|+\rangle + i\,|-\rangle}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle_y &= \frac{|+\rangle - i\,|-\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Assim, somando e subtraindo essas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle &= -i\frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

onde lembramos que a ausência de índices implica que os vetores apontam na direção $\hat{z}$. Agora podemos fazer a projeção temporal:

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar}\,|+\rangle &= e^{-i\pi\sigma_y/4}\left(\frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\pi/4}\,|+\rangle_y + e^{i\pi/4}\,|-\rangle_y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|+\rangle_y - i\,|+\rangle_y + |-\rangle_y + i\,|-\rangle_y\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} - i\frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

que é a evolução temporal desejada. Para o outro vetor, segue processo análogo:

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar}\,|-\rangle &= -ie^{-i\pi\sigma_y/4}\left(\frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\pi/4}\,|+\rangle_y - e^{i\pi/4}\,|-\rangle_y\right) \\ &= -\frac{i}{2}\left(|+\rangle_y - i\,|+\rangle_y - |-\rangle_y - i\,|-\rangle_y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-i\,|+\rangle_y - |+\rangle_y + i\,|-\rangle_y - |-\rangle_y\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} - i\frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{-\,|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= e^{i\pi}\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

onde ignoramos uma fase global.

Item 2. *Agora, consideremos a chamada phase shift gate (PS). Suponha agora que o sistema é sujeito a um Hamiltoniano $H = \varepsilon\sigma_z$ por um tempo τ tal que $\varepsilon\tau/\hbar = \phi/2$. Mostre que isso leva os vetores (a menos de uma fase global) em*

$$|+\rangle \to |+\rangle\,, \qquad |-\rangle \to e^{i\phi}\,|-\rangle \tag{30}$$

Resposta. Como o hamiltoniano possui autoestados $|+\rangle\,, |-\rangle$, não precisamos fazer nenhuma projeção de spin, de modo que é imediato o resultado. Vejamos

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar}\,|+\rangle &= e^{-i\sigma_z\phi/2}\,|+\rangle \\ &= e^{-i\phi/2}\,|+\rangle \end{aligned}$$

Já o outro:

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau/\hbar}\,|-\rangle &= e^{-i\sigma_z\phi/2}\,|-\rangle \\ &= e^{i\phi/2}\,|-\rangle \end{aligned}$$

Como fazes globais não afetam medições, podemos multiplicar ambos os estados por $e^{i\phi/2}$ para obter os estados desejados

$$|+\rangle\,, \qquad e^{i\phi}\,|-\rangle \tag{31}$$

a menos de alguma fase global.

Item 3. *Considere um sistema inicialmente preparado em $|\Psi_0\rangle = |+\rangle$. Suponha agora que esse sistema evolui por um beam splitter, seguido de um phase shift, seguido de outro beam splitter, evoluindo até um estado $|\Psi\rangle$. Note que isto é possível em laboratório, usando exatamente um sistema de spin-1/2 e um campo magnético dependente do tempo. Calcule o estado final $|\Psi\rangle$.*
Resposta. Vamos calcular diretamente passo-a-passo, começando do começo:

$$\begin{aligned} |+\rangle \;\; &\to_{BS} \;\; \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &\to_{PS} \;\; \frac{|+\rangle + e^{i\phi}\,|-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &\to_{BS} \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \;\; \frac{1}{2}\left(\left(1 + e^{i\phi}\right)|+\rangle + \left(1 - e^{i\phi}\right)|-\rangle\right) \end{aligned}$$

que é o estado final desejado.

Item 4. *Mostre que a probabilidade P_1 de encontrar o sistema no estado $|-\rangle$ depois da evolução é dada por*

$$P_- = |\langle -|\psi\rangle|^2 = \sin^2(\phi/2) \tag{32}$$

Essa é a ideia principal por trás da interferometria de Ramsey: a probabilidade oscila dependendo da fase do phase shift.
Resposta. Ora, a probabilidade é trivial de se calcular nesse caso:

$$\begin{aligned} P_- &= \left|1 - e^{i\phi}\right|^2 \\ &= \left|(1 - \cos\phi) - i\sin\phi\right|^2 \\ &= (1 - \cos\phi)^2 + \sin^2\phi \\ &= 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi \\ &= 2 - 2\cos\phi \\ &= \sin^2(\phi/2) \end{aligned}$$
