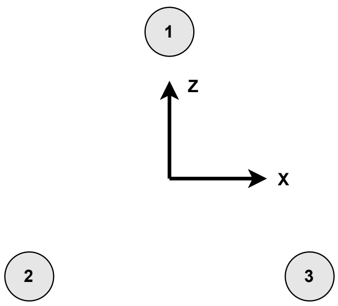
Mecânica Quântica Avançada
Prova 01
27 de abril–08 de maio

Exercício 1: considere uma molécula constituída de três átomos idênticos nos sítios (vértices) de um triângulo equilátero, conforme mostrado na figura. Vamos considerar que o íon desta molécula é formado adicionando-se um único elétron a ela; como vimos em aula, deve haver um efeito de delocalização, e o elétron deve se acomodar em um estado distribuído ao redor dos sítios. Suponha que o elemento de matriz da Hamiltoniana para o elétron em dois sítios adjacentes i, j é $\langle i|H|j\rangle = -a, a > 0$, para $i \neq j$; por simetria, os elementos diagonais são todos iguais, $\langle i|H|i\rangle = E_0$.



(a) Escreva a Hamiltoniana na forma matricial e calcule os níveis de energia.

(b) Suponha que um campo elétrico na direção z é aplicado, de modo que a energia potencial para o elétron na posição rotulada por "1" diminui por uma parcela b ($b > 0$). Calcule os níveis de energia e os autoestados de energia.

(c) Suponha que, no caso do item (b), o elétron está no estado fundamental. Quase-instantaneamente, o campo roda de 120º e passa a apontar na direção rotulada como "2". Calcule a probabilidade do elétron permanecer no estado fundamental.

Exercício 2: para cada estado $|\psi\rangle$ de dois spins-$\frac{1}{2}$ abaixo, escrito em termos dos autovetores de S_z, diga se o estado é emaranhado ou não (justificando sua resposta), calcule seu operador estado (matriz densidade) explicitamente, e calcule o operador estado reduzido referente à particula 1 (na notação $|1, 2\rangle$).

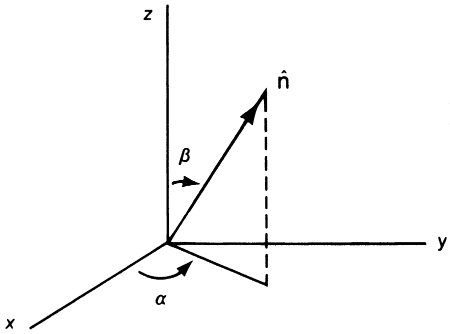
(a) $|\psi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$.

(b) $|\psi\rangle = |++\rangle$.

(c) $|\psi\rangle = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\left(|++\rangle + 3i\,|+-\rangle - 2i\,|-+\rangle + 6\,|--\rangle\right)$.

Exercício 3: Considere um *ensemble* estatístico de sistemas de um spin-$\frac{1}{2}$.

(a) Considere que o ensemble é um estado puro, apontando em uma direção $\hat{n}$ (ver figura), e descrito por um ket α. Suponha que os valores esperados $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_z \rangle$ são conhecidos, mas apenas o *sinal* de $\langle S_y \rangle$ é conhecido. Construa explicitamente a matriz densidade 2×2 que descreve o sistema.



Estado puro apontando na direção $\hat{n}$:

$$|\alpha\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle$$

(b) Considere agora que o ensemble é misturado, de uma maneira genérica (note que não estamos dizendo que ele é o estado de máxima entropia!). Suponha agora que os três valores médios $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, $\langle S_z \rangle$ são todos conhecidos. Construa explicitamente a matriz densidade 2×2 que descreve o sistema.

Exercício 4: Considere a seguinte matriz densidade de dois spins-$\frac{1}{2}$:

$$\rho = \frac{1}{8}\mathbb{1} + \frac{1}{2}|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|$$

onde $|\Psi_-\rangle$ é o estado singleto (*i.e.* o estado de spin total igual a zero). Suponhamos que medimos um dos spins ao longo de um eixo a e o outro ao longo de um eixo b, em que $\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos\theta$. Qual é a probabilidade (como função de θ) de encontramos $+\hbar/2$ para ambos spins nestas medidas?

Exercício 5: Interferometria de Ramsey. Suponha que um sistema de dois níveis tem estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, análogo ao spin-$\frac{1}{2}$

(a) Vamos considerar a chamada interação de *beam splitter (BS)*. Suponha que o sistema é sujeito a um Hamiltoniano $H = \epsilon\sigma_y$ por um tempo τ tal que $\epsilon\tau/\hbar = \pi/4$. Mostre que se o sistema estava inicialmente em $|+\rangle$ ou $|-\rangle$, então ele é levado (a menos de uma fase global) para os estados:

$$|+\rangle \to \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \quad , \quad |-\rangle \to \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

(b) Agora, consideremos a chamada *phase shift gate (PS)*. Suponha agora que o sistema é sujeito a um Hamiltoniano $H = \epsilon\sigma_z$ por um tempo τ tal que $\epsilon\tau/\hbar = \phi/2$. Mostre que isso leva os vetores (a menos de uma fase global) em

$$|+\rangle \to |+\rangle \quad , \quad |-\rangle \to \exp(i\phi)|-\rangle.$$

(c) Considere um sistema inicialmente preparado em $|\psi_0\rangle = |+\rangle$. Suponha agora que esse sistema evolui por um beam splitter, seguido de um phase shift, seguido de outro beam splitter, evoluindo até um estado $|\psi\rangle$. (Note que isto é possível em laboratório, usando exatamente um sistema de spin-$\frac{1}{2}$ e um campo magnético dependente do tempo.)

$$|\psi_0\rangle \to BS \to PS \to BS \to |\psi\rangle$$

Calcule o estado final $|\psi\rangle$.

(d) Mostre que a probabilidade P_1 de encontrar o sistema no estado $|-\rangle$ depois da evolução é dada por

$$P_- = |\langle -|\psi\rangle|^2 = \sin^2(\phi/2).$$

Essa é a ideia principal por trás da interferometria de Ramsey: a probabilidade oscila dependendo da fase do phase shift.