Mecânica Quântica Avançada
Lista 2

Lucas Froguel
IFT

List of Exercises

Exercise 1 (6.5.1 - Independence of the tensor product from the choice of basis)**.** *Verify that the definition (6.3) of the tensor product of two vectors is independent of the choice of basis in $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$.*

Answer. Let $|n'\rangle$ and $|m'\rangle$ be two other basis of the Hilbert spaces one and two, respectively. Then, it is true that

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \sum a_{n'} |n'\rangle \\ |m\rangle &= \sum b_{m'} |m'\rangle \end{aligned} \tag{1}$$

Thus, we can write

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle &= \sum_{n,m} c_n d_m |n\rangle \otimes |m\rangle \\ &= \sum_{n,m} c_n d_m \left(\sum_{n'} a_{n'} |n'\rangle\right) \otimes \left(\sum_{m'} b_{m'} |m'\rangle\right) \\ &= \sum_{n',m'} a_{n'} b_{m'} \left(\sum_{n} c_n\right) \left(\sum_{m} d_m\right) |n'\rangle \otimes |m'\rangle \\ &= \sum_{n',m'} e_{n'} f_{m'} |n'\rangle \otimes |m'\rangle \end{aligned}$$

This shows that the tensor product does not depend on the choice of basis.

Exercise 2 (2 - Representação matricial de produtos tensoriais)**.** *Calculate the tensor products of two-level systems.*

Answer. We can calculate the tensor products of $|+\rangle$ and $|-\rangle$ as follows:

$$
\begin{aligned}
|+\rangle \otimes |-\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|-\rangle \otimes |+\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|-\rangle \otimes |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Now for the three dimension qubits, we will write the answers directly:

$$\begin{aligned} |{+}{+}{+}\rangle &= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad |{+}{+}{-}\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \\ |{+}{-}{+}\rangle &= \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad |{+}{-}{-}\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \\ |{-}{+}{+}\rangle &= \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad |{-}{+}{-}\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \\ |{-}{-}{+}\rangle &= \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad |{-}{-}{-}\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercise 3 (6.5.2)**.** *Write down explicitly the 4×4 matrix $A \otimes B$, the tensor product of the 2×2 matrices A and B:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{2}$$

Answer. It is very easy do perform this calculation:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

We just multiply each element of the first matrix by the whole second matrix.

Exercise 4 (6.5.3 - Properties of state operators)**.** ***Part 1.*** *Show that* $\rho_{ii} \geq 0$, $\rho_{jj} \geq 0$, *and* $\det A \geq 0$, *from which* $|\rho_{ij}|^2 \leq \rho_{ii}\rho_{jj}$ *. Also deduce that if* $\rho_{ii} = 0$*, then* $\rho_{ij} = \rho_{ji}^* = 0$*.*
Answer. We can always write

$$\rho = \sum a_n \left|\phi_n\right\rangle \left\langle\phi_n\right| \tag{4}$$

for some states $|\phi_n\rangle$ and $a_n \geq 0$. Thus, the diagonal matrix elements are

$$\begin{aligned} \rho_{ii} &= \left\langle\phi_i\right| \left(\sum a_n \left|\phi_n\right\rangle \left\langle\phi_n\right|\right) \left|\phi_i\right\rangle \\ &= a_i \end{aligned}$$

Hence, $\rho_{ii} \geq 0$. We also note that

$$\det A = \rho_{ii}\rho_{jj} - |\rho_{ij}|^2 \tag{5}$$

where we used the fact that A is hermitian. This implies that

$$\det A \geq 0 \iff |\rho_{ij}|^2 \leq \rho_{ii}\rho_{jj} \tag{6}$$

Using this inequality, if $\rho_i i = 0$, then

$$0 \leq \rho_{ij}\rho_{ji} \leq 0 \tag{7}$$

Obviously, $\rho_{ij} = 0$ or $\rho_{ji} = 0$, but is does not matter, because they are the complex conjugate of each other, so if one is zero, the other is zero as well.

Part 2. *Show that if there exists a maximal test giving 100% probability for the quantum state described by a state operator* ρ*, then this state is a pure state. Also show that if* ρ *describes a pure state, and if it can be written as*

$$\rho = \lambda\rho' + (1-\lambda)\rho'', 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{8}$$

then $\rho = \rho' = \rho''$ *. Hint: first demonstrate that if* ρ' *and* ρ'' *are generic state operators, then* ρ *is a state operator. The state operators form a convex subset of Hermitian operators.*
Answer. Let us suppose the state in which there is a probability of 1 is $|\psi\rangle$ and let $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. Then having a probability of one means:

$$\mathrm{tr}\,(P_\psi \rho) = 1 \tag{9}$$

In general, we could write

$$\rho = \sum_i c_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \tag{10}$$

where we define $\psi_0 \equiv \psi$. Then, if we use this definition into the expression above, we can easily see that both equations together imply

$$c_0 = 1 \tag{11}$$

However, as $\sum_i |c_i|^2 = 1$, we must have $c_i = 0 \;\forall\; i > 0$. Hence, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ is a pure state. We will suppose that $\rho \neq \rho' \neq \rho''$. If that is the case, then the state ρ can be described as a statistical mixture of ρ' (with $p = \lambda$) and ρ'' (with $p = 1-\lambda$). As we know ρ is a pure state, it is false the assertion that $\rho \neq \rho' \neq \rho''$. Thus, we prove the result asked.

Exercise 5 (4)**.** *Ao ter provado o item 2 do exercício 6.5.3 do Le Bellac, você provou que um operador de estado ρ correspondente a um estado puro não pode ser escrito como combinação linear de dois outros operadores de estado genéricos ρ_1 e ρ_2. Esse resultado tem a ver com a seguinte observação: "A preparação de um estado puro é única enquanto que a preparação de um estado misto é sempre ambígua". Você poderia explicar o que uma coisa tem a ver com a outra, isto é, o que o resultado que você provou tem a ver com a preparação de um estado físico e possíveis resultados de medida?*

Answer. Dado um operador de estado puro, existe uma e apenas uma maneira de prepará-lo, que é coloca-lo no estado $|\psi\rangle\langle\psi|$. No entanto, para um estado misto, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre existirão operadores ρ_1, ρ_2 tais que ρ seja uma combinação linear deles ponderada por λ, de modo que é impossível saber exatamente qual foi usada na preparação do estado.

Exercise 6 (5)**.** *Considere a seguinte matriz densidade de um spin 1/2:*

$$\rho = \frac{1}{4}\mathbb{I} + \frac{1}{2}|+,\hat{a}\rangle\langle+,\hat{a}| \tag{12}$$

onde $|+,\hat{a}\rangle$ é o autoestado da projeção do operador de spin ao longo de um eixo a com autovalor $+\hbar/2$. Calcule a probabilidade como função de θ de encontrar o valor $-\hbar/2$ ao se medir o spin ao longo de um eixo b, em que θ é o ângulo entre a e b, i.e. $\hat{a}\cdot\hat{b} = \cos\theta$.

Answer. Queremos calcular:

$$\begin{aligned} p(-\hbar/2, \hat{b}) &= \operatorname{tr}\left(\rho\,|-,\hat{b}\rangle\langle-,\hat{b}|\right) \\ &= \frac{|\langle-,\hat{b}|-,\hat{b}\rangle|^2}{4} + \frac{|\langle+,\hat{a}|-,\hat{b}\rangle|^2}{2} \end{aligned}$$

Precisamos, então, considerar o termo $\langle+,\hat{a}|-,\hat{b}\rangle$. Pela Fig(1), vemos que o produto interno dos

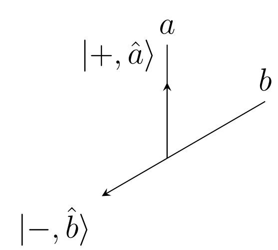

Figure 1: The vectors $\hat{a}$ and $\hat{b}$.

vetores pode ser escrito como $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$. Portanto,

$$p(-\hbar/2, \hat{b}) = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2\theta}{2} \tag{13}$$

*

Exercise 7 (6). *Considere a seguinte matriz densidade de dois spins 1/2:*

$$\rho = \frac{\mathbb{I}}{8} + \frac{1}{2}\left|\Psi_-\right\rangle\left\langle\Psi_-\right| \tag{14}$$

onde $|\Psi_-\rangle$ *é o estado singleto (i.e. o estado de spin total igual a zero). Suponhamos que medimos um dos spins ao longo de um eixo* a *e o outro ao longo de um eixo* b*, em que* $\hat{a}\cdot\hat{b} = \cos\theta$*. Qual é a probabilidade (como função de* θ*) de encontramos* $+\hbar/2$ *para ambos spins nestas medidas?*

Answer. O estado de singleto é

$$|\Psi_-\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

Portanto,

$$\rho = \frac{1}{8}\mathbb{I} + \frac{1}{4}\left(|+-\rangle\langle+-| - |+-\rangle\langle-+| - |-+\rangle\langle+-| + |-+\rangle\langle-+|\right) \tag{16}$$

O estado que queremos medir é

$$|\phi\rangle = |+\rangle_a |+\rangle_b \tag{17}$$

onde o índice significa o eixo em relação ao qual estamos considerando. Sejam θ_a e θ_b os ângulos que os eixos a e b fazem com o eixo z. Então,

$$\begin{aligned}
|+\rangle_a &= \cos(\theta_a/2)\,|+\rangle + \sin(\theta_a/2)\,|-\rangle \\
|+\rangle_b &= \cos(\theta_b/2)\,|+\rangle + \sin(\theta_b/2)\,|-\rangle
\end{aligned}$$
