Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Prof. Iury Igreja

1. Seja o problema:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -au, \quad t \in [0, T] \\ u(0) &= b. \end{aligned}$$

Estude o comportamento da aproximação por diferenças finitas a seguir

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a\left[(1-\theta)u^{n+1} + \theta u^n\right] = 0,$$

para valores de $\theta \in [0, 1]$ com $a > 0$. Sabendo que a solução exata para este problema é $u(t) = b\exp(-at)$, apresente:

(a) uma tabela com as condições de estabilidade com θ variando de 0 à 1 de 0.1 em 0.1;

(b) um gráfico com as taxas de convergência comparando os métodos listados na tabela do item (a). Utilize um refinamento do tipo 2^{j+1} para Δt. Deixe claro a sua escolha para os parâmetros a, b, T e Δt;

(c) um gráfico comparando os resultados obtidos no item (b) com as taxas de convergência dos métodos de diferença central e Runge-Kutta de segunda e terceira ordem;

2. Seja o problema de segunda ordem que descreve o movimento de um pêndulo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= -\sin(u), \quad t \in [0, T] \\ u(0) = \alpha \quad &\text{e} \quad \frac{du}{dt}(0) = \beta. \end{aligned}$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$u(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

Adotando $\alpha = 0$ e $\beta = 0.1$ em um domínio $[0, 2\pi]$, resolva o problema acima empregando as seguintes metodologias:

(a) aproximação de segunda ordem para a derivada no tempo

$$\frac{d^2u}{dt^2} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} = -\sin(u^n).$$

Descreva os passos de discretização do problema e apresente resultados comparando solução exata e aproximada.

(b) fazendo a seguinte troca de variável $v = \dfrac{du}{dt}$, podemos reescrever o problema do pêndulo como o seguinte sistema:

$$v = \frac{du}{dt} \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\sin(u) \tag{2}$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(0) = 0.1. \tag{3}$$

Aplique o método de Crank-Nicolson para aproximar a equação (2).

Descreva a metodologia empregada e apresente um gráfico comparando a solução exata e aproximada.

(c) apresente um gráfico comparando as taxas de convergência dos métodos desenvolvidos anteriormente (letras (a) e (b)).

O trabalho deve ser escrito em LaTeX e enviado para o e-mail iury.igreja@ufjf.br, dentro do prazo determinado, juntamente com o código desenvolvido para gerar os resultados.