

Lista 1 - DCC190

Solução Numérica de Equações Diferenciais

Lucas Henrique Nogueira
202265515B

12 de Outubro de 2025

1 Exercício 1 — Decaimento Exponencial

1.1 Objetivo

O objetivo deste exercício é analisar o comportamento numérico da solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{du}{dt} = -au, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = b,$$

utilizando o **método**– θ e seus casos particulares (Euler Explícito, Euler Implícito e Crank–Nicolson), bem como os métodos complementares de Diferença Central (Leap–Frog) e Runge–Kutta de segunda e terceira ordem. O estudo busca comparar estabilidade, erro e taxa de convergência entre os diferentes esquemas, tendo como referência a solução analítica

$$u_{\text{exata}}(t) = be^{-at}.$$

1.2 Formulação do problema

O problema é linear e possui solução analítica de decaimento exponencial. Para aproximar numericamente, adota-se uma discretização temporal uniforme

$$t_n = n \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

com passo de tempo $\Delta t = T/N$ e aproximação discreta $u^n \approx u(t_n)$.

Substituindo a derivada temporal por uma diferença progressiva e aplicando a ponderação θ entre os instantes t_n e t_{n+1} , obtém-se o esquema geral de diferenças finitas:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a[(1 - \theta)u^{n+1} + \theta u^n] = 0.$$

A forma recursiva de atualização é

$$u^{n+1} = \frac{1 - a \Delta t \theta}{1 + a \Delta t (1 - \theta)} u^n.$$

O fator de amplificação G associado é

$$G = \frac{1 - a \Delta t \theta}{1 + a \Delta t (1 - \theta)},$$

e a estabilidade do método requer que $|G| < 1$.

1.3 Método- θ e casos particulares

A partir do esquema geral, distinguem-se três casos conforme o valor de θ :

- $\theta = 1.0$ — **Euler Explícito**: método de primeira ordem, condicionalmente estável;
- $\theta = 0.0$ — **Euler Implícito**: método de primeira ordem, incondicionalmente estável;
- $\theta = 0.5$ — **Crank–Nicolson**: método de segunda ordem, condicionalmente estável.

Adicionalmente, foram avaliados:

- **Diferença Central (Leap–Frog)**, de segunda ordem;
- **Runge–Kutta de 2^a ordem** (ponto médio);
- **Runge–Kutta de 3^a ordem** (Heun).

1.4 Estudo de estabilidade

Para o modelo de decaimento exponencial, a análise de estabilidade baseia-se no módulo do fator de amplificação $|G| < 1$. A Tabela 1 apresenta os limites de estabilidade para diferentes valores de θ , com $a = 5.0$.

θ	Método	Condição de Estabilidade
0.0	Euler Implícito	Incondicionalmente estável
0.1–0.4	—	Incondicionalmente estável para todo
0.5	Crank–Nicolson	$\Delta t < 0.4000$
0.6	—	$\Delta t < 2.0000$
0.7	—	$\Delta t < 1.0000$
0.8	—	$\Delta t < 0.6667$
0.9	—	$\Delta t < 0.5000$
1.0	Euler Explícito	$\Delta t < 0.4000$

Tabela 1: Condições de estabilidade para $\theta \in [0, 1]$ com $a = 5.0$.

Para $\theta = 0$ (Euler Implícito), o método é **incondicionalmente estável**, pois o fator de amplificação

$$G = \frac{1}{1 + a \Delta t}$$

é sempre menor que 1 para qualquer passo de tempo $\Delta t > 0$.

Para $0 < \theta < 0.5$, o método também é incondicionalmente estável, embora com menor amortecimento numérico.

No caso $\theta = 0.5$ (Crank–Nicolson), tem-se

$$G = \frac{2 - a \Delta t}{2 + a \Delta t},$$

o que leva à condição $\Delta t < 2/a$ para garantir $|G| < 1$. Quando Δt se aproxima desse limite, $|G|$ se aproxima de 1 e o método passa a apresentar oscilações não amortecidas. Por isso, o método é **condicionalmente estável**.

Para $\theta > 0.5$, a estabilidade continua sendo condicional, com limites cada vez mais restritivos à medida que θ cresce, atingindo a condição do Euler Explícito ($\theta = 1$):

$$\Delta t < \frac{1}{a}.$$

Esse comportamento reflete a transição de métodos fortemente dissipativos (como Euler Implícito) para métodos com menor dissipação (Crank-Nicolson e Euler Explícito), com impacto direto no controle de oscilações e na robustez numérica.

1.5 Resultados numéricos

Configuração e cálculo do erro

Os parâmetros utilizados foram

$$a = 5.0, \quad b = 1.0, \quad T = 1.0.$$

O refinamento temporal adotou

$$N = 2^{j+1}, \quad j = 3, 4, \dots, 9, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

O erro máximo foi calculado segundo a norma

$$\|e\|_\infty = \max_t |u_{\text{num}}(t) - u_{\text{exata}}(t)|.$$

As taxas de convergência p foram estimadas por regressão linear em escala log–log:

$$\log(\|e\|_\infty) \approx p \log(\Delta t) + C.$$

Taxas de convergência

A Tabela 2 apresenta as ordens numéricas estimadas. Os resultados mostram excelente concordância com as ordens teóricas esperadas.

Método	Ordem estimada (p)
Euler Implícito ($\theta = 0.0$)	0.97
Crank–Nicolson ($\theta = 0.5$)	2.00
Euler Explícito ($\theta = 1.0$)	1.03
Diferença Central	1.97
RK2 (Ponto Médio)	2.05
RK3 (Heun)	3.05

Tabela 2: Taxas de convergência obtidas por ajuste log–log.

As Figuras 1 e 2 exibem os gráficos de convergência para os métodos- θ e para todos os métodos considerados, respectivamente.

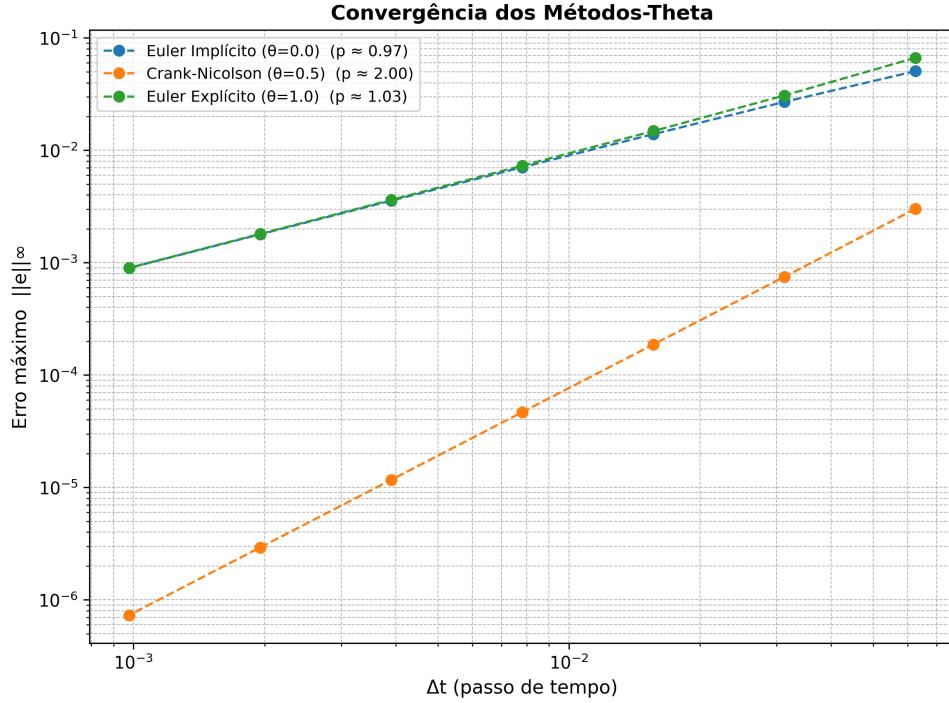


Figura 1: Convergência dos métodos- θ (Euler Implícito, Crank–Nicolson e Euler Explícito).

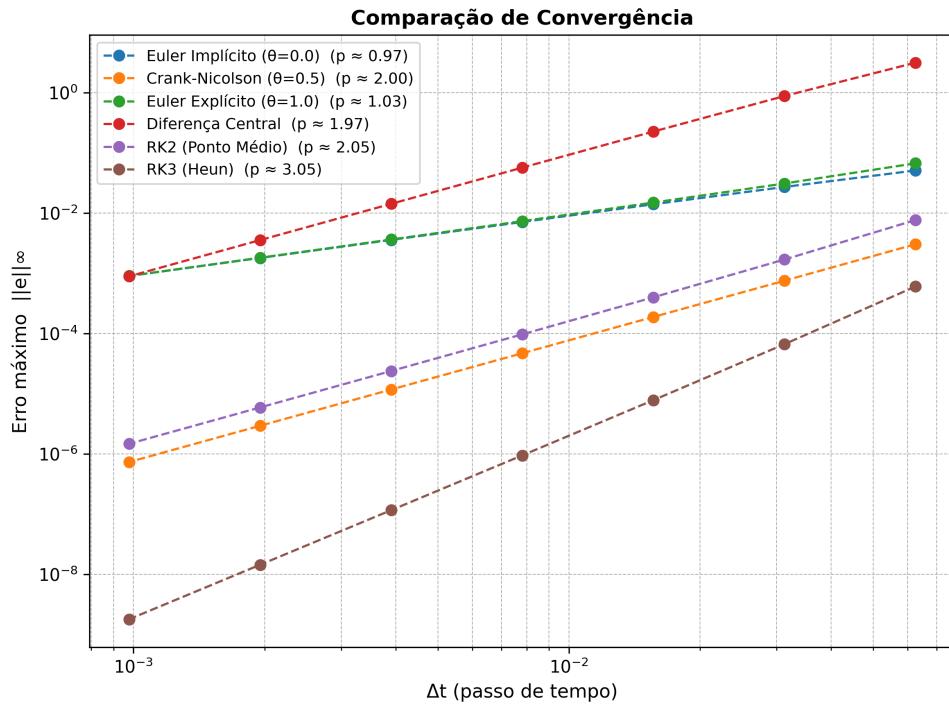


Figura 2: Comparação geral de convergência entre métodos- θ , Diferença Central e Runge–Kutta.

Comparação das soluções numéricas

A Tabela 3 mostra os valores de $u(T)$ obtidos numericamente para $T = 1$, e a Figura 3 ilustra a comparação entre a solução exata e as aproximações para $N = 64$.

Método	$u(T)$
Solução Exata	0.006738
Euler Implícito ($\theta = 0.0$)	0.008113
Crank–Nicolson ($\theta = 0.5$)	0.006721
Euler Explícito ($\theta = 1.0$)	0.005483
Diferença Central	0.231050
RK2 (Ponto Médio)	0.006774
RK3 (Heun)	0.006737

Tabela 3: Comparação do valor final $u(T)$ para $T = 1$.

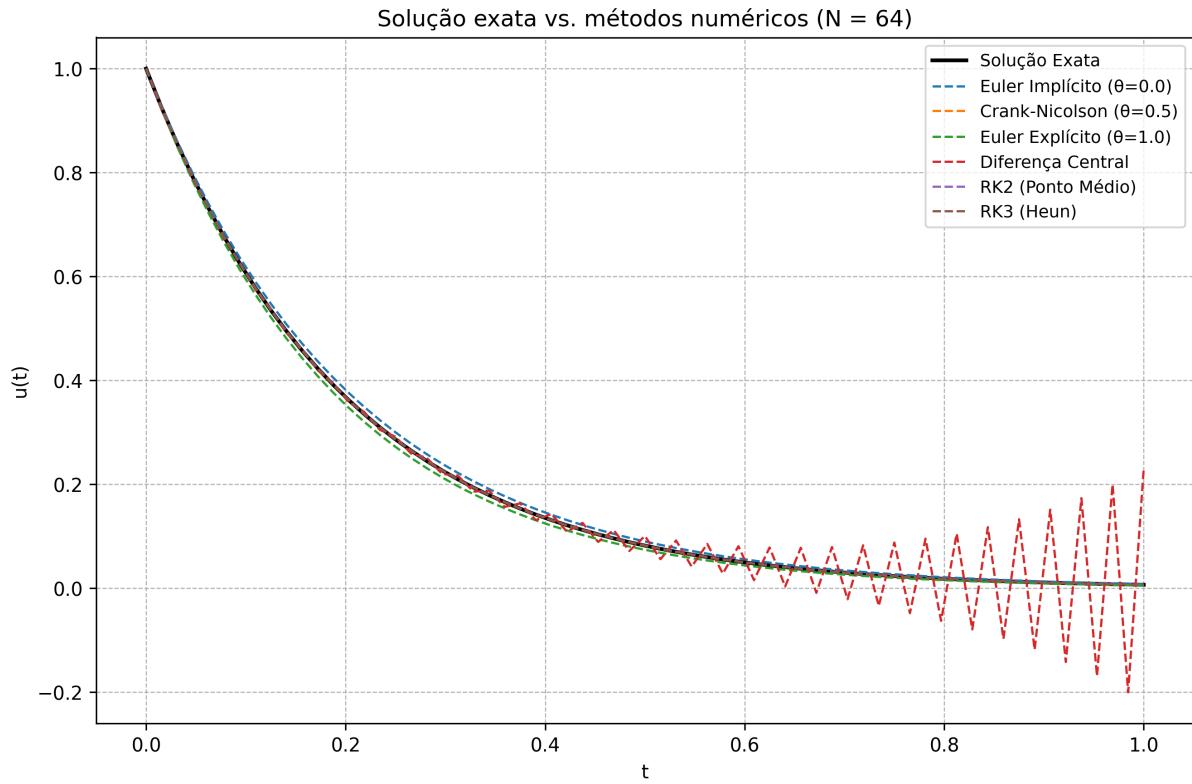


Figura 3: Comparação entre solução exata e soluções numéricas para $N = 64$.

Influência do parâmetro a

A variação de a foi estudada para observar o efeito da taxa de decaimento. A Tabela 4 resume os valores da solução exata em $T = 1$.

a	$u(T) = be^{-aT}$
1.0	0.367879
5.0	0.006738
10.0	0.000045

Tabela 4: Influência do parâmetro a na solução exata.

Observa-se que, para valores crescentes de a , a solução decai mais rapidamente a zero, caracterizando um processo de amortecimento exponencial mais intenso.

1.6 Discussão e conclusões

- O método de Crank–Nicolson apresentou segunda ordem de convergência e boa precisão, mantendo estabilidade em um intervalo de passos relativamente amplo.
- Os métodos de Euler (Explícito e Implícito) apresentaram primeira ordem de convergência, com o Implícito sendo incondicionalmente estável.
- O método de Diferença Central (Leap–Frog), embora de segunda ordem, mostrou-se inadequado para este problema dissipativo, produzindo resultados instáveis.
- Os métodos de Runge–Kutta de 2^a e 3^a ordem apresentaram as ordens teóricas esperadas e excelente concordância com a solução analítica.

Conclui-se que, para o problema de decaimento exponencial, o método de Crank–Nicolson oferece um bom equilíbrio entre precisão e estabilidade, enquanto os esquemas de Runge–Kutta representam alternativas de maior ordem com excelente desempenho para passos moderados.

2 Exercício 2 — Pêndulo Simples

2.1 Objetivo

O objetivo principal deste exercício é implementar e comparar esquemas numéricos de segunda ordem no tempo para o problema do pêndulo, *comparando-os com a solução exata fornecida no enunciado*, que corresponde à solução do **modelo linearizado**:

$$u_{\text{exata}}(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t.$$

Adicionalmente, para avaliação da versão não linear do problema (equação com $-\sin(u)$), foi computada uma solução de referência numérica por Runge–Kutta de 4^a ordem (RK4) com passo muito refinado. Essa solução RK4 foi incluída *apenas* como verificação extra da implementação não-linear — a comparação principal exigida pelo enunciado continua sendo com a solução exata do linearizado.

2.2 Formulação do problema

Considere

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\sin(u), \quad u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Sob a hipótese de pequenas amplitudes ($|u| \ll 1$) pode-se aproximar $\sin(u) \approx u$, obtendo

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0, \quad (2)$$

cuja solução exata é

$$u_{\text{exata}}(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t,$$

que é a referência analítica usada nas comparações.

2.3 Discretizações empregadas e deduções formais

Tomamos uma partição uniforme do intervalo $[0, T]$ com N subintervalos e passo $\Delta t = T/N$. Denotando $u^n \approx u(t_n)$, $t_n = n\Delta t$.

Diferenças centrais (segunda ordem)

A segunda derivada temporal é aproximada por diferença central:

$$\left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t_n} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}.$$

Aplicando na equação não linear obtemos o esquema explícito

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} = -\sin(u^n). \quad (3)$$

Para o primeiro passo é conveniente obter u^1 por expansão de Taylor até segunda ordem:

$$u(t_1) = u(0) + \Delta t u'(0) + \frac{1}{2} \Delta t^2 u''(0) + O(\Delta t^3),$$

ou seja

$$u^1 = u^0 + \Delta t \beta + \frac{1}{2} \Delta t^2 (-\sin(u^0)), \quad (4)$$

no caso não linear, e com $-\sin(u^0)$ substituído por $-u^0$ na versão linearizada.

Ordem e estabilidade: o esquema (3) é de ordem $O(\Delta t^2)$ (consistência por expansão de Taylor). Por ser explícito, é condicionalmente estável; em problemas oscilatórios deve-se tomar Δt pequeno o suficiente para evitar crescimento numérico.

Crank–Nicolson (sistema de primeira ordem)

Definindo $v = \frac{du}{dt}$, reescreve-se o problema como o sistema

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\sin(u). \end{cases}$$

Aplicando Crank–Nicolson (método do trapézio) às duas equações:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} (v^n + v^{n+1}), \quad (5)$$

$$v^{n+1} = v^n - \frac{\Delta t}{2} (\sin(u^n) + \sin(u^{n+1})). \quad (6)$$

As equações (5)–(6) formam um sistema *não linear* em (u^{n+1}, v^{n+1}) quando a versão não linear é usada.

No caso linearizado (substituindo $\sin(u) \approx u$) o sistema é linear e reduz-se a resolver um 2×2 em cada passo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2} & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^n + \frac{\Delta t}{2} v^n \\ v^n - \frac{\Delta t}{2} u^n \end{bmatrix}.$$

Resolução por Newton (CN não linear)

Para o sistema não linear definimos as funções residuais

$$F_1(u^{n+1}, v^{n+1}) = u^{n+1} - u^n - \frac{\Delta t}{2}(v^n + v^{n+1}),$$

$$F_2(u^{n+1}, v^{n+1}) = v^{n+1} - v^n + \frac{\Delta t}{2}(\sin(u^n) + \sin(u^{n+1})).$$

O jacobiano analítico é

$$J = \begin{bmatrix} \partial_{u^{n+1}} F_1 & \partial_{v^{n+1}} F_1 \\ \partial_{u^{n+1}} F_2 & \partial_{v^{n+1}} F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2} \cos(u^{n+1}) & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de Newton atualiza (u^{n+1}, v^{n+1}) resolvendo em cada iteração

$$J \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

com critério de parada $\max(|\Delta u|, |\Delta v|) < 10^{-10}$ e máximo de 30 iterações.

Solução de referência (RK4)

A equação não linear não admite solução elementar simples; portanto, para validar numericamente a implementação não linear foi integrada a EDO com RK4 usando um passo muito pequeno ($N_{\text{ref}} = 2^{14}$). Os valores obtidos por RK4 são tratados como *referência numérica* e interpolados para os nós analisados.

2.4 Critérios de erro e convergência

O erro máximo empregado foi

$$\|e\|_\infty = \max_{0 \leq n \leq N} |u_{\text{num}}(t_n) - u_{\text{ref}}(t_n)|,$$

onde, por definição, $u_{\text{ref}} = u_{\text{exata}}$ para os casos linearizados; para os casos não lineares u_{ref} é a solução RK4 interpolada. A ordem p foi obtida por ajuste linear em escala log–log:

$$\log(\|e\|_\infty) \approx p \log(\Delta t) + C.$$

2.5 Resultados

Os testes foram executados com

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.1, \quad T = 2\pi,$$

e refinamentos $N = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$. A Tabela 5 resume os erros máximos:

N	Δt	DC – lin.	DC – n.lin.	CN – lin.	CN – n.lin.
16	3.927e-01	4.189e-03	4.160e-03	7.885e-03	7.874e-03
32	1.963e-01	1.019e-03	1.012e-03	2.007e-03	2.004e-03
64	9.817e-02	2.529e-04	2.512e-04	5.039e-04	5.033e-04
128	4.909e-02	6.312e-05	6.268e-05	1.261e-04	1.260e-04
256	2.454e-02	1.577e-05	1.566e-05	3.154e-05	3.150e-05
512	1.227e-02	3.943e-06	3.916e-06	7.885e-06	7.875e-06
1024	6.136e-03	9.857e-07	9.789e-07	1.971e-06	1.969e-06

Tabela 5: Erro máximo $\|e\|_\infty$ para diferentes valores de N .

As ordens estimadas por ajuste log–log foram:

$$p_{\text{DC}} \approx 2.0068, \quad p_{\text{CN}} \approx 1.9957,$$

o que confirma a ordem esperada $O(\Delta t^2)$ para ambos os esquemas.

Gráficos obtidos:

- **Figura 4** — comparação entre a solução exata (linear), a referência RK4 (não linear) e as soluções numéricas (DC e CN).
- **Figura 5** — gráfico log-log de convergência.
- **Figura 6** — evolução temporal do erro absoluto para $N = 128$.

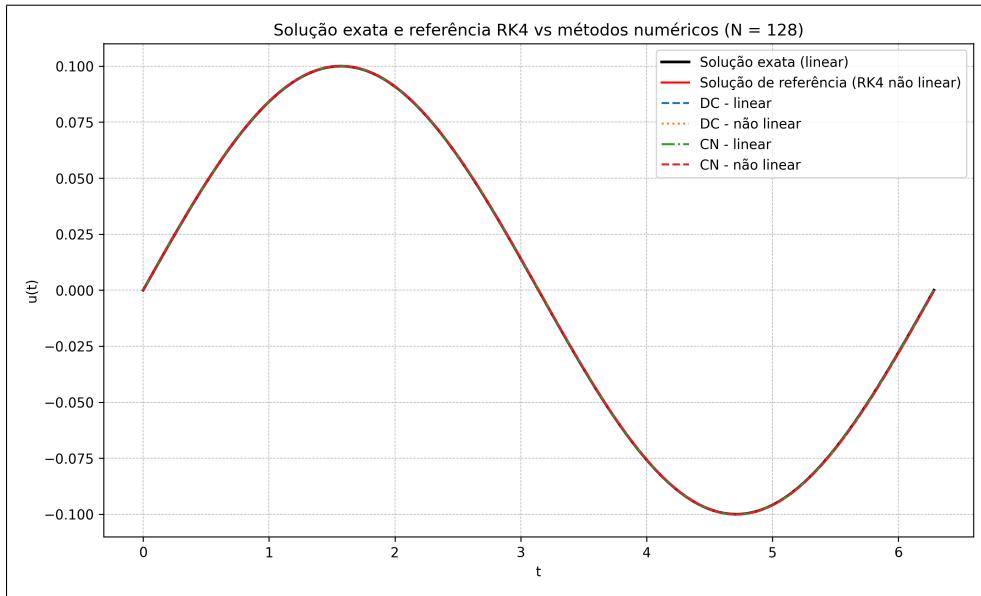


Figura 4: Comparação entre solução exata (linear), referência RK4 e métodos numéricos.

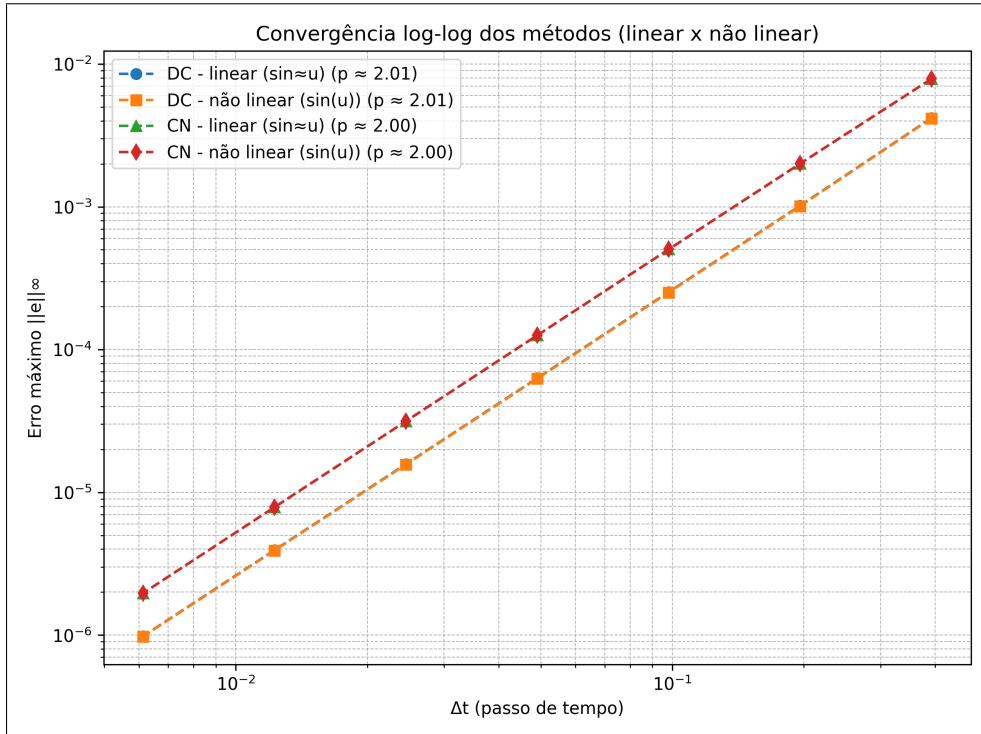


Figura 5: Convergência log-log dos métodos (guia $O(\Delta t^2)$).

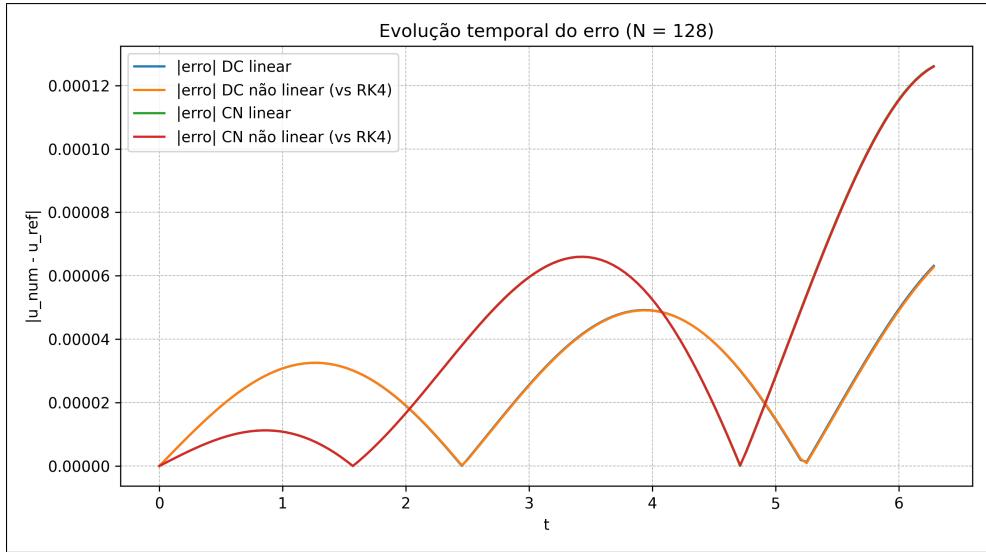


Figura 6: Evolução temporal do erro absoluto ($N = 128$).

2.6 Discussão e justificativas das escolhas

- **Comparação com a solução exata do linear:** o enunciado fornece explicitamente $u_{\text{exata}}(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$; portanto, a comparação principal e a estimativa de ordem foram feitas em relação a essa solução.
- **Inclusão da referência RK4:** foi adicionada como verificação da implementação do caso não linear. A RK4 com passo muito pequeno fornece uma aproximação numérica de alta precisão que permite avaliar a discrepância causada pela linearização $\sin u \approx u$.
- **Uso de Taylor para u^1 :** a fórmula (4) garante compatibilidade de ordem com o esquema central de segunda ordem e evita erros de partida de ordem inferior.
- **Estimativa da ordem:** o ajuste log–log é padrão e robusto; os valores obtidos (próximos de 2) confirmam a consistência e a ordem teórica dos esquemas.

2.7 Conclusões

- A comparação com a solução exata do linear mostra que ambos os esquemas (DC e CN) são de segunda ordem e apresentam erros muito pequenos para os passos testados.
- A inclusão da referência RK4 confirma que, para $\beta = 0.1$, a linearização $\sin u \approx u$ é válida (diferenças numéricas quase desprezíveis).
- Em problemas com amplitude maior a comparação com RK4 torna-se essencial, mas para o escopo do exercício (pequena amplitude) a comparação com a solução analítica do linearizado é suficiente e adequada.

Referências

- [1] I. Igreja. *Métodos de Diferenças Finitas para Problemas de Valor Inicial*. Notas de aula da disciplina DCC190 — Solução Numérica de Equações Diferenciais na UFJF.
- [2] L. H. Nogueira. *Implementações da Lista 1 — DCC190: Solução Numérica de EDOs*. Repositório GitHub, 2025. Disponível em: [Link](#).