Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Prof. Iury Igreja

1. A equação abaixo é conhecida como *Problema de Helmholtz*:

$$\frac{d^2p}{dx^2} + k^2p = 0, \quad p \in \Omega = [a, b] \tag{1}$$

$$p(a) = \alpha \quad \text{e} \quad p(b) = \beta. \tag{2}$$

O problema de Helmholtz modela uma onda plana, onde p descreve a variação do campo de pressão em um meio acústico em um tempo fixo e o número de onda k contém informações da frequência, medida do domínio e velocidade do som.

O problema em questão é de natureza fortemente oscilatória. Por conta disso, a solução numérica sofre consequências de efeitos de poluição e ressonância numérica. Assim, para assegurar a estabilidade numérica deste problema deve-se respeitar a seguinte relação:

$$kh < 1. \tag{3}$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$p(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \tag{4}$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Os valores de α e β (eq. (2)) são calculados a partir da solução (4).

Considerando apenas a parte real da solução (4) e utilizando o método de diferenças finitas:

a) Valide a relação (3) atarvés de estudos numéricos comparativos entre a solução exata e a aproximada para valores de $k = 10, 100, 1000$, em um domínio $\Omega = [0, 1]$;

b) Apresente um gráfico da ordem de convergência do método para os diferentes valores de k.

2. Seja o problema:

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2} + \kappa\frac{du}{dx} = 0, \quad u \in \Omega = [0, 1] \tag{5}$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 1 \quad \text{e} \quad u(1) = 1. \tag{6}$$

cuja solução geral é dada por:

$$u(x) = Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B \tag{7}$$

onde os coeficientes A e B são determinados pelas condições de contorno. Nas simulações computacionais adote $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\kappa = 1$.

a) A partir da solução geral (7), derive a solução exata que satisfaz o problema (5)-(6);

b) Apresente gráficos e comente os resultados, comparando a solução exata com a aproximada para diferentes valores de h, aplicando as seguintes metodologias para discretizar o termo convectivo:

- diferença central (aproximação de segunda ordem para a condição de Neumann);
- diferença regressiva;
- diferença progressiva;
- upwind de segunda ordem.

c) Aplique o método de estabilização baseado em *difusão artificial* para resolver o problema (5)-(6) adotando a seguinte metodologia

   * discretização por diferença central para a convecção;
   * aproximação de segunda ordem para a condição de Neumann;

   Faça gráficos comparando a solução exata com as seguintes metodologias

   * método **com** *difusão artificial*;
   * método **sem** *difusão artificial*;
   * upwind de primeira ordem;
   * upwind de segunda ordem;

   Coloque todas as metodologias no mesmo gráfico, e faça gráficos para diferentes h.

O trabalho deve ser escrito em LaTeX e enviado para o e-mail iury.igreja@ufjf.br, dentro do prazo determinado, juntamente com o código desenvolvido para gerar os resultados.