Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Departamento de Ciência da Computação
Prof. Iury Igreja

1. Seja o problema transiente-difusivo-reativo não linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{8}{\delta^2} u^2(1-u) = 0, \quad (x,t) \in [a,b] \times [0,T] \tag{1}$$

$$u(a,t) = 1 \quad \text{e} \quad u(b,t) = 0. \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{3}$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{x - 2t/\delta}{\delta}\right)\right]. \tag{4}$$

Supondo o domínio $x \in [-10, 90]$, o tempo final $T = 4$ e velocidade da frente de onda $\delta = 2$, a condição inicial (3) é dada por:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{5}$$

a) Proponha uma discretização implícita de primeira ordem no tempo e trate o termo não linear "atrasado", ou seja, no passo de tempo n.

b) Apresente gráficos comparando a solução exata com a aproximada, para diferentes valores de h no tempo final $T = 4$.

c) Apresente um estudo de convergência na norma do máximo utilizando malhas de 500, 1000, 2000, 4000 e 8000 elementos no tempo final $T = 4$, utilize $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$.

2. O problema definido em (1) pode ser reescrito como:

$$\textit{Problema A}: \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{8}{\delta^2} u^2(1-u) = 0 \tag{6}$$

$$\textit{Problema B}: \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

A estratégia de resolução deste problema se dá em dois passos:

Para $n = 1$, resolve-se o Problema A (6) utilizando a condição inicial (3). A solução do Problema A é usado como condição inicial do problema B (7). No passo de tempo seguinte, a solução do problema B é usada como condição inicial do problema A e repete-se estes procedimentos até alcançar o tempo final.

Neste contexto:

a) proponha uma discretização **explícita** para o problema A e **implícita** para o problema B.

b) apresente um estudo de convergência na norma do máximo para o método proposto no item (a), utilizando malhas $500, 1000, 2000, 4000, 8000$ elementos e $\Delta t = h$ no tempo final $T = 4$.

c) faça um gráfico comparando a curva do item 2(b) com a curva obtida na questão 1(b).

d) apresente gráficos comparando a solução exata com a aproximada obtida pela aproximação do problema (1) e do problema (6)-(7) para diferetens valores de h no tempo final $T = 4$.

3. Seja a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \kappa \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{8}$$

com $\kappa > 0$ suplementada por condições inicial e de contorno. Considere a seguinte discretização para este problema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \kappa \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad \text{FTCS Implícito} \tag{9}$$

a) Analise a estabilidade da metodologias (9) utilizando o critério de Von Neumann.

b) Escolha um dos problemas apresentados em aula ou da literatura e gere resultados comparando o método (9) adotando 400 elementos com a solução exata.

c) inclua na comparação do item (b) os métodos upwind explícito e Lax Friedrichs adotando 400 elementos e $\Delta t = 1.1h$ e $\Delta t = h/2$. Comente os resultados.

4. Seja o problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{10}$$

cuja solução exata é dada por:

$$u(x,t) = \exp(-\varepsilon t)\sin(x - \kappa t).$$

Aplique as condições de contorno com base na solução exata, escolha os valores de ε e κ e simule todos os casos até $T = 1$. Neste contexto:

a) Proponha um método upwind implícito para o problema (10) e compare graficamente a solução exata com a aproximada para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, escolhendo diferentes valores de h.

b) Proponha um método implícito de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço para o problema (10) e compare graficamente a solução exata com a aproximada para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, escolhendo diferentes valores de h.

c) Proponha um método implícito de segunda ordem no tempo e segunda ordem no espaço para o problema (10) e compare graficamente a solução exata com a aproximada para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, escolhendo diferentes valores de h.

d) Analise a ordem de convergência dos métodos propostos e verifique se estão de acordo com o esperado $O(\Delta t, h^2, h)$ para o item (a), $O(\Delta t, h^2, h^2)$ para o item (b) e $O(\Delta t^2, h^2, h^2)$ para o item (c). Faça esse estudo para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$.

O trabalho deve ser escrito em LaTeX e enviado para o e-mail iury.igreja@ufjf.br, dentro do prazo determinado, juntamente com o código desenvolvido para gerar os resultados.