

# Lista 2 - DCC190

## Solução Numérica de Equações Diferenciais

Lucas Henrique Nogueira  
202265515B

02 de Novembro de 2025

### 1 Exercício 1 — Problema de Helmholtz

#### 1.1 Objetivo

O objetivo deste exercício é resolver numericamente o **Problema de Helmholtz** unidimensional:

$$\frac{d^2p}{dx^2} + k^2 p = 0, \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

com condições de contorno de Dirichlet

$$p(a) = \alpha, \quad p(b) = \beta, \quad (2)$$

utilizando o **método de diferenças finitas**. O domínio considerado foi  $\Omega = [0, 1]$ , e os valores do número de onda foram  $k = \{10, 100, 1000\}$ .

A solução analítica é conhecida e dada por

$$p(x) = \cos(kx),$$

a qual será usada para comparação com a solução numérica obtida.

Os objetivos principais são:

- validar o critério de estabilidade do método:

$$kh < 1; \quad (3)$$

- determinar a ordem de convergência a partir do erro máximo  $\|e\|_\infty$ .

#### 1.2 Formulação numérica

Considerando uma malha uniforme com espaçamento  $h = (b - a)/N$  e pontos nodais  $x_i = a + i h$ , tem-se a aproximação por diferenças finitas centrais para a segunda derivada:

$$\left. \frac{d^2p}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2}.$$

Substituindo na equação diferencial, obtém-se a **equação de diferenças finitas**:

$$-p_{i-1} + (2 - k^2 h^2)p_i - p_{i+1} = 0.$$

O sistema resultante é tridiagonal de dimensão  $(N - 1) \times (N - 1)$ :

$$A\mathbf{p} = \mathbf{b},$$

onde  $A$  contém os coeficientes do esquema e  $\mathbf{b}$  incorpora os valores de contorno  $p(a) = \alpha$  e  $p(b) = \beta$ .

O vetor  $\mathbf{b}$  incorpora os efeitos das condições de contorno. Em particular, os termos referentes a  $p(a)$  e  $p(b)$  são adicionados às primeiras e últimas posições de  $\mathbf{b}$ , garantindo que as condições de Dirichlet sejam corretamente impostas no sistema discreto.

### 1.3 Resolução do sistema

O sistema linear tridiagonal foi resolvido pelo **Algoritmo de Thomas**. Esse algoritmo realiza eliminação direta com custo computacional  $O(N)$  e é adequado para matrizes tridiagonais provenientes de discretizações unidimensionais.

### 1.4 Escolha dos parâmetros de discretização

O espaçamento da malha é dado por  $h = (b - a)/N$ , e o parâmetro adimensional  $kh$  é utilizado para avaliar a qualidade da discretização. De acordo com o critério de estabilidade, o método fornece resultados precisos quando  $kh < 1$ .

Dessa forma, para cada valor de  $k$ , foram selecionados valores de  $N$  que permitem observar três regimes distintos:

$N_{ruim}$ :  $kh > 1$  (instável);

$N_{limite}$ :  $kh \approx 1$  (limite de estabilidade);

$N_{bom}$ :  $kh < 1$  (estável).

## 1.5 Comparação entre soluções

As Figuras 1–6 mostram as comparações entre as soluções analítica e numérica para os diferentes pares  $(k, N)$ .

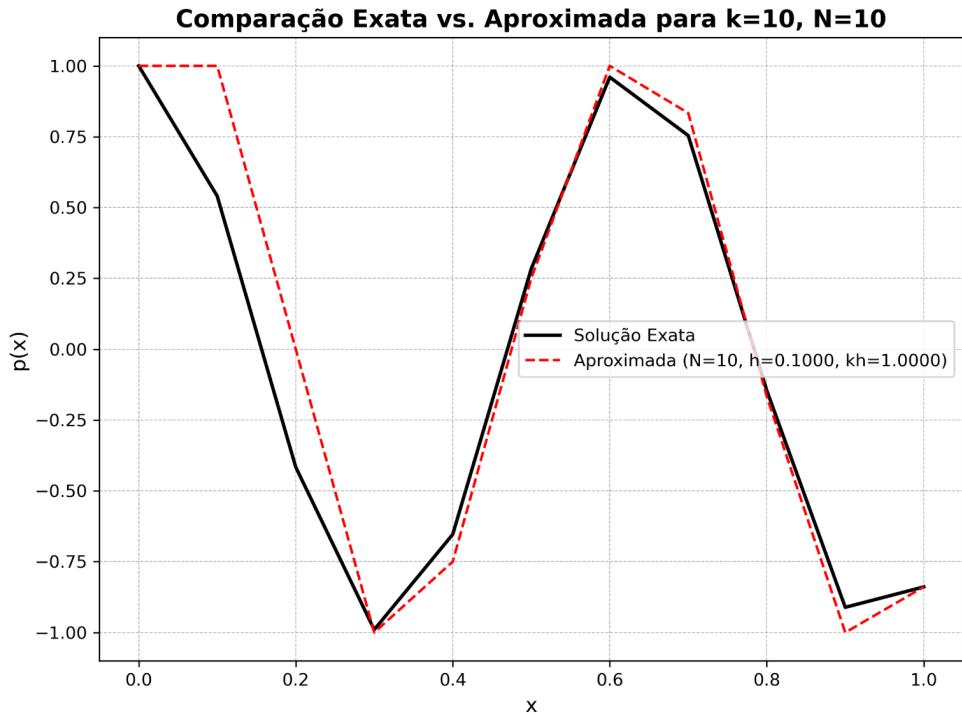


Figura 1: Solução numérica e analítica para  $k = 10$ ,  $N = 10$  ( $kh = 1$ ).

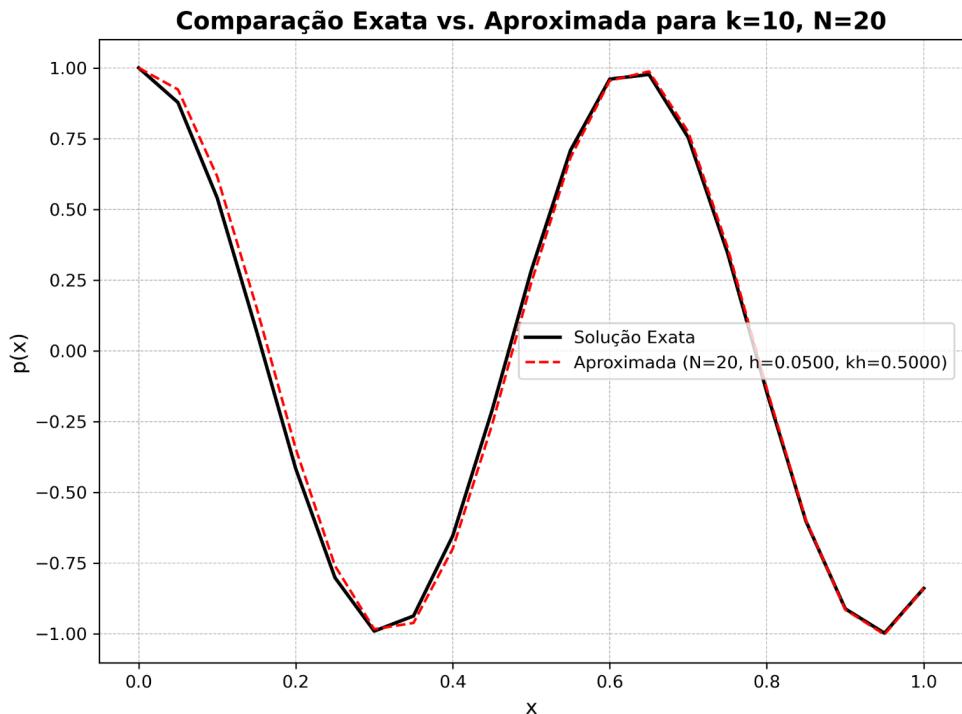


Figura 2: Solução numérica e analítica para  $k = 10$ ,  $N = 20$  ( $kh < 1$ ).

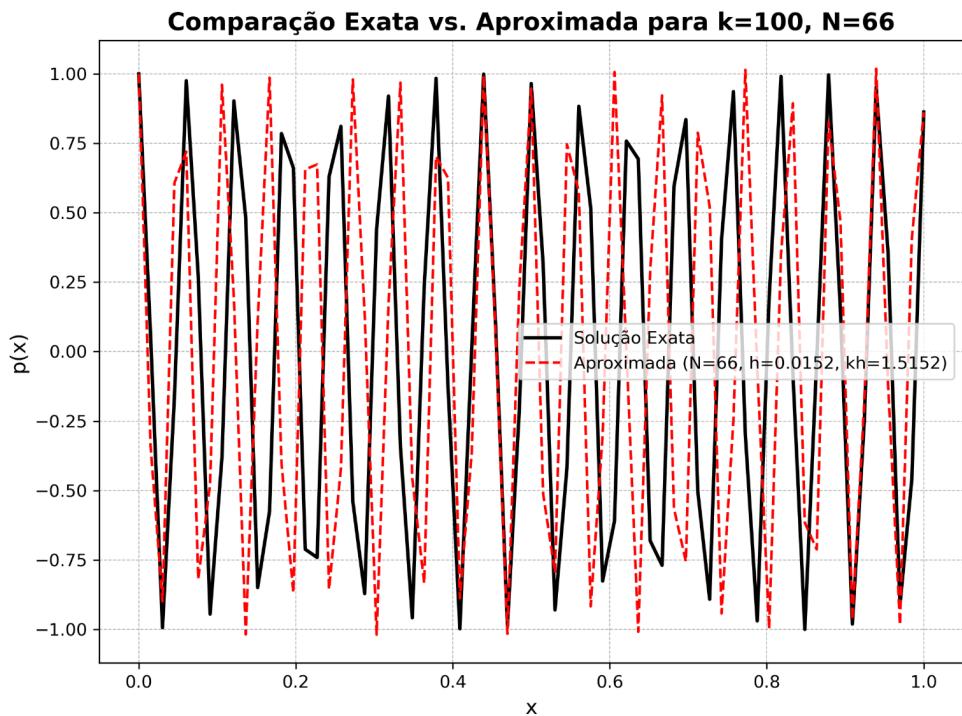


Figura 3: Solução numérica e analítica para  $k = 100$ ,  $N = 66$  ( $kh > 1$ ).

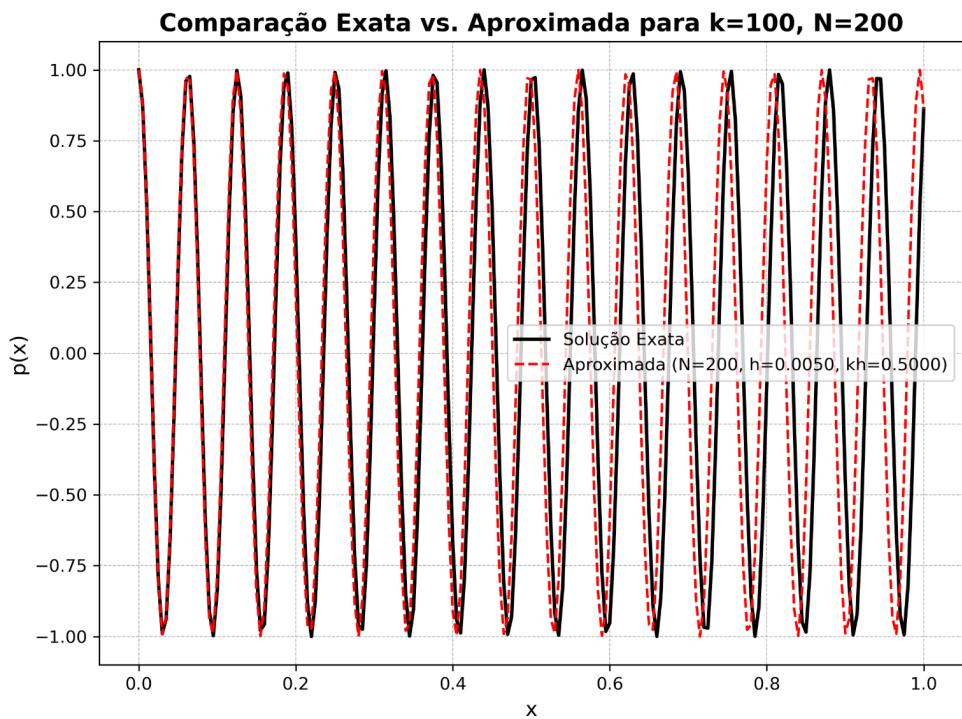


Figura 4: Solução numérica e analítica para  $k = 100$ ,  $N = 200$  ( $kh < 1$ ).

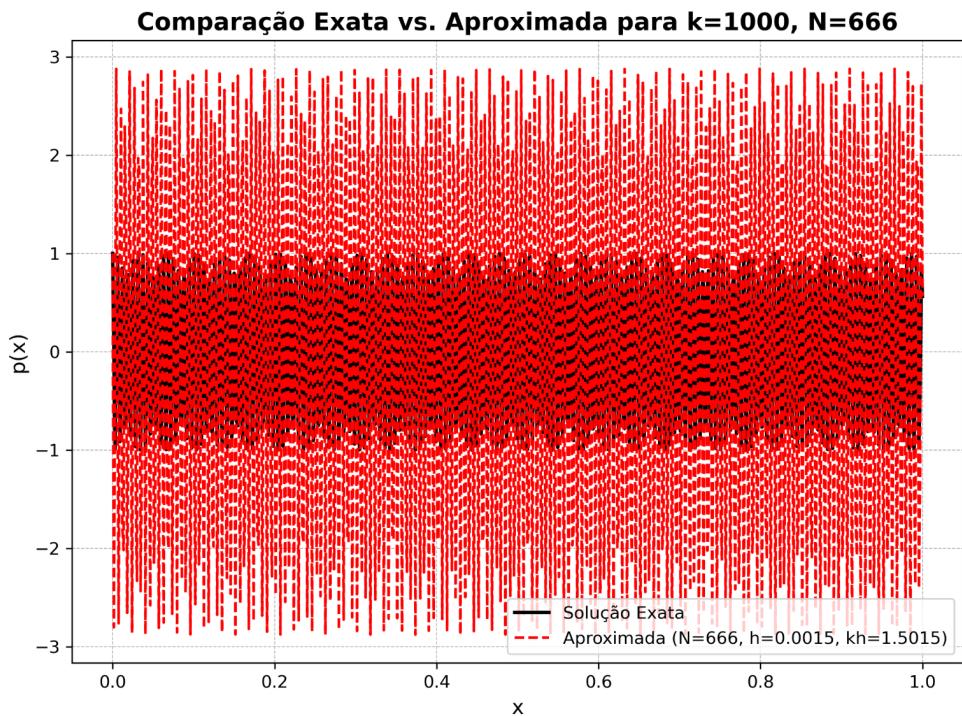


Figura 5: Solução numérica e analítica para  $k = 1000$ ,  $N = 666$  ( $kh > 1$ ).

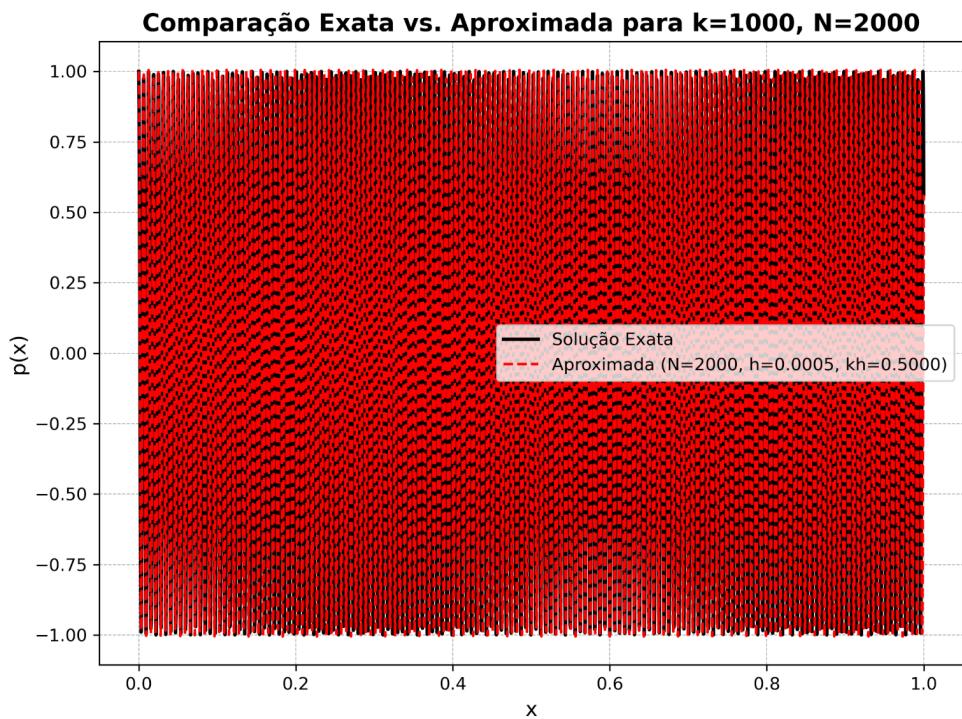


Figura 6: Solução numérica e analítica para  $k = 1000$ ,  $N = 2000$  ( $kh < 1$ ).

## 1.6 Tabela de erros e análise do critério de estabilidade

A Tabela 1 apresenta os valores do erro máximo  $\|e\|_\infty$  e do parâmetro  $kh$  para diferentes discretizações.

Tabela 1: Tabela de Erros e  $kh$  para diferentes  $N$  e  $k$ .

$N$	Erro $k = 10$	$kh$	Erro $k = 100$	$kh$	Erro $k = 1000$	$kh$
32	3.351e-02	3.125e-01	9.975e-01	3.125e+00	9.999e-01	3.125e+01
64	8.572e-03	1.562e-01	2.378e+00	1.562e+00	9.999e-01	1.562e+01
128	2.154e-03	7.812e-02	2.343e+00	7.812e-01	9.999e-01	7.812e+00
256	5.394e-04	3.906e-02	1.737e+00	3.906e-01	1.000e+00	3.906e+00
512	1.349e-04	1.953e-02	1.891e-01	1.953e-01	2.782e+00	1.953e+00
1024	3.373e-05	9.766e-03	4.062e-02	9.766e-02	2.228e+00	9.766e-01
2048	8.432e-06	4.883e-03	9.867e-03	4.883e-02	2.070e+00	4.883e-01
4096	2.108e-06	2.441e-03	2.450e-03	2.441e-02	5.729e+00	2.441e-01
8192	5.270e-07	1.221e-03	6.115e-04	1.221e-02	5.861e-01	1.221e-01
16384	1.318e-07	6.104e-04	1.528e-04	6.104e-03	1.487e-01	6.104e-02
32768	3.297e-08	3.052e-04	3.820e-05	3.052e-03	3.826e-02	3.052e-02
65536	8.136e-09	1.526e-04	9.549e-06	1.526e-03	9.655e-03	1.526e-02
131072	2.171e-09	7.629e-05	2.387e-06	7.629e-04	2.420e-03	7.629e-03

## 1.7 Análise do erro e regimes de convergência

A análise dos dados da Tabela 1 evidencia três comportamentos distintos conforme o valor de  $kh$ :

- (i) **Região instável** ( $kh > 1$ ): o método não satisfaz a condição de estabilidade. A solução numérica torna-se divergente e com erro elevado.
- (ii) **Região de poluição numérica** ( $0.1 \lesssim kh \lesssim 1$ ): o método é formalmente estável, porém o erro não decresce de forma uniforme com o refinamento da malha. Esse comportamento indica que a discretização ainda não é suficientemente fina para representar corretamente as oscilações da solução.
- (iii) **Regime assintótico quadrático** ( $kh \ll 1$ ): o erro segue o comportamento teórico de segunda ordem, decaindo com  $O(h^2)$ .

**Caso  $k = 100$ :** Para  $N = 32$  até aproximadamente  $N = 128$ , o produto  $kh > 1$ , e o método viola a condição de estabilidade, resultando em grandes erros (ver Figura 3). A partir de  $N = 256$  até  $N = 1024$ , o valor de  $kh$  cai para a faixa  $[0.4, 0.1]$ , e o erro ainda se mantém elevado, caracterizando a **poluição numérica**. Somente a partir de  $N \geq 4096$  ( $kh < 0.025$ ), o erro passa a decrescer de forma quadrática, atingindo o **regime assintótico de convergência**.

**Caso  $k = 1000$ :** Para  $N = 32$  até  $N = 512$ , o produto  $kh > 1$ , e o método é completamente instável — as soluções numéricas tornam-se não representativas fisicamente. Entre  $N = 1024$  e  $N = 4096$ , embora  $kh < 1$ , o erro permanece elevado e irregular. Essa faixa caracteriza o regime de **poluição numérica**. A discretização não é capaz de representar adequadamente as variações de alta frequência do termo  $k^2 p$ . Somente para  $N > 4096$  ( $kh < 0.25$ ), observa-se que o erro passa a decrescer aproximadamente com  $O(h^2)$ , recuperando o comportamento esperado do esquema de diferenças finitas centradas.

Portanto, observa-se que, à medida que  $k$  aumenta, o intervalo de  $N$  necessário para alcançar o regime assintótico também cresce, reforçando o efeito de **poluição numérica** e a necessidade de **malhas mais refinadas** para problemas com altas frequências.

## 1.8 Ordem de convergência

As taxas de convergência numérica foram estimadas por ajuste linear em escala log–log entre  $\log(\|e\|_\infty)$  e  $\log(h)$ , resultando em:

$$k = 10 \Rightarrow p \approx 1.9961, \quad k = 100 \Rightarrow p \approx 2.0578, \quad k = 1000 \Rightarrow p \approx 1.5632.$$

Os resultados confirmam que o método possui **ordem de convergência próxima de 2**, conforme o esperado para o esquema de diferenças finitas centradas.

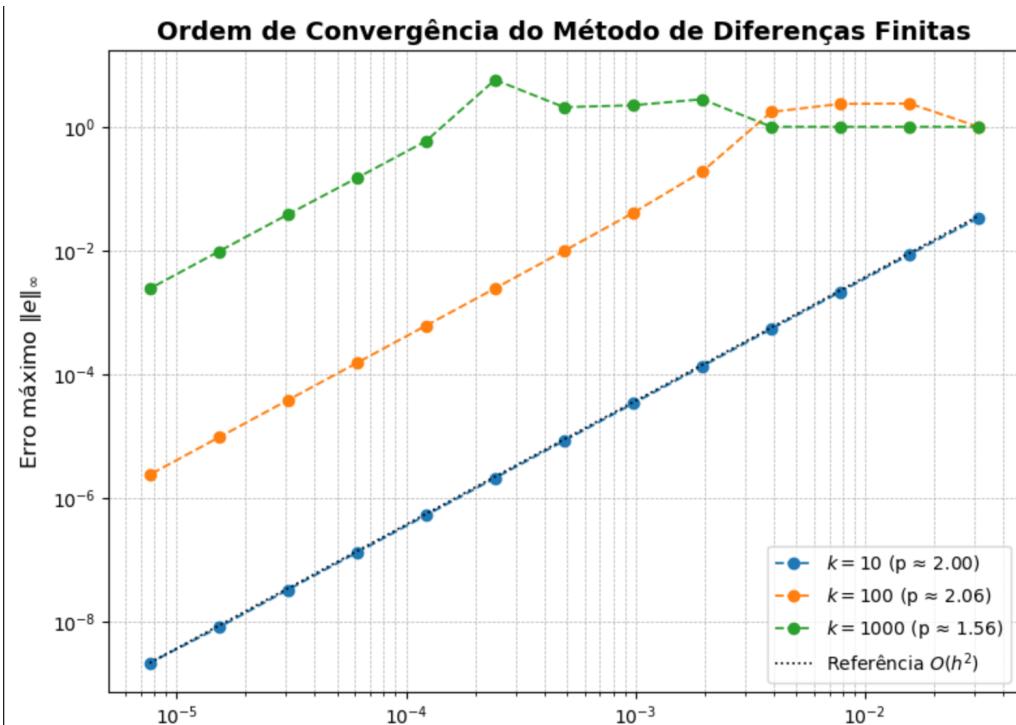


Figura 7: Taxas de convergência estimadas para diferentes valores de  $k$ .

## 1.9 Conclusões

O método de diferenças finitas aplicado ao problema de Helmholtz apresentou:

- convergência de segunda ordem para  $kh \ll 1$ ;
- perda de precisão e instabilidade para  $kh > 1$ ;
- presença de poluição numérica em malhas intermediárias ( $0.1 \lesssim kh \lesssim 1$ );

## 2 Exercício 2 — Problema Difusivo-Convectivo

### 2.1 Introdução

Esse exercício tem como objetivo resolver numericamente o **problema difusivo-convectivo** unidimensional:

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4)$$

com condições de contorno mistas do tipo

$$\frac{du}{dx}(0) = 1, \quad u(1) = 1. \quad (5)$$

Esse problema está associado à formulação geral de transporte unidimensional, em que coexistem efeitos de **difusão** (termo proporcional a  $\varepsilon$ ) e de **convecção** (termo proporcional a  $\kappa$ ). A relação entre esses dois fenômenos pode ser expressa pelo **número de Peclet de malha**:

$$Pe_h = \frac{|\kappa| h}{\varepsilon},$$

o qual indica o regime de escoamento predominante:

- regime **difusivo**, quando  $Pe_h < 1$  ( $\varepsilon > \kappa$ );
- regime **convectivo**, quando  $Pe_h > 1$  ( $\kappa > \varepsilon$ ).

Neste exercício, foram adotados os valores  $\varepsilon = 10^{-2}$  e  $\kappa = 1$ , caracterizando um **regime fortemente convectivo** ( $Pe_h \gg 1$ ).

O problema é resolvido utilizando o **método de diferenças finitas**, discretizando o domínio  $\Omega = [0, 1]$  com espaçamento  $h = 1/N$ . Serão aplicadas, em etapas posteriores, diferentes formulações para o termo convectivo: diferença central, regressiva, progressiva e esquema upwind.

### 2.2 Derivação da solução exata

A partir da equação diferencial (4), pode-se escrever:

$$\varepsilon u''(x) + \kappa u'(x) = 0.$$

Dividindo ambos os lados por  $\varepsilon$ , obtém-se:

$$u''(x) + \frac{\kappa}{\varepsilon} u'(x) = 0.$$

Definindo  $r = \frac{\kappa}{\varepsilon}$ , a equação se torna

$$u''(x) + r u'(x) = 0.$$

Integrando uma vez em relação a  $x$ :

$$u'(x) = C_1 e^{-rx},$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração. Integrando novamente:

$$u(x) = -\frac{C_1}{r} e^{-rx} + C_2.$$

Denotando  $A = -\frac{C_1}{r}$  e  $B = C_2$ , obtém-se a **solução geral**:

$$u(x) = A e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B.$$

Aplicando as condições de contorno (5):

$$\begin{cases} u'(0) = 1, \\ u(1) = 1, \end{cases}$$

temos:

$$u'(x) = -\frac{\kappa}{\varepsilon}A e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x}.$$

Logo, em  $x = 0$ :

$$u'(0) = -\frac{\kappa}{\varepsilon}A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\varepsilon}{\kappa}.$$

Substituindo em  $u(1) = 1$ :

$$1 = -\frac{\varepsilon}{\kappa}e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}} + B \quad \Rightarrow \quad B = 1 + \frac{\varepsilon}{\kappa}e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}}.$$

Portanto, a **solução exata** que satisfaz o problema (4)–(5) é:

$$u(x) = 1 + \frac{\varepsilon}{\kappa} \left( e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} \right).$$

(6)

Essa expressão será utilizada para comparação com as soluções numéricas obtidas nas próximas etapas do relatório.

## 2.3 Discretizações do termo convectivo e implementação

Nesta etapa foi implementada a formulação numérica do problema difusivo–convectivo.

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 0, \quad \kappa > 0.$$

### 2.3.1 Discretização da difusão

Em todos os esquemas, o termo difusivo foi aproximado por diferenças centrais de segunda ordem:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_j} \approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}.$$

O termo correspondente na matriz é, portanto,

$$\frac{\varepsilon}{h^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}),$$

### 2.3.2 Convecção — Diferença central (2<sup>a</sup> ordem)

O termo convectivo foi discretizado pela diferença central de segunda ordem:

$$u'(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h},$$

resultando na contribuição

$$\kappa \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}.$$

Na matriz, adiciona-se:

$$A_{j,j-1} \leftarrow A_{j,j-1} - \frac{\kappa}{2h}, \quad A_{j,j+1} \leftarrow A_{j,j+1} + \frac{\kappa}{2h}.$$

Esse esquema é de **segunda ordem** e foi resolvido pelo Algoritmo de Thomas. Ele é formalmente estável para baixos números de Peclet, mas pode apresentar oscilações quando o termo convectivo predomina.

### 2.3.3 Convecção — Diferença regressiva (1<sup>a</sup> ordem)

A diferença regressiva (backward) de primeira ordem é dada por:

$$u'(x_j) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h},$$

e a discretização do termo convectivo é

$$\kappa \frac{u_j - u_{j-1}}{h}.$$

Na matriz, isso resulta em:

$$A_{j,j-1} \leftarrow A_{j,j-1} - \frac{\kappa}{h}, \quad A_{j,j} \leftarrow A_{j,j} + \frac{\kappa}{h}.$$

Esse esquema é de **primeira ordem** e foi implementado, porém os resultados numéricos apresentaram valores extremamente altos, motivo pelo qual os gráficos dessa discretização não foram incluídos no relatório principal. (Não identifiquei o motivo do erro).

### 2.3.4 Convecção — Diferença progressiva (1<sup>a</sup> ordem)

A diferença progressiva (forward) de primeira ordem segue o estêncil:

$$u'(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{h},$$

o que leva às contribuições:

$$A_{j,j} \leftarrow A_{j,j} - \frac{\kappa}{h}, \quad A_{j,j+1} \leftarrow A_{j,j+1} + \frac{\kappa}{h}.$$

Esse esquema também é de **primeira ordem** e foi incluído nas comparações gráficas. Nos testes realizados, o método progressivo apresentou menor instabilidade em comparação ao método de diferenças centrais.

### 2.3.5 Convecção — Upwind de segunda ordem

Para  $\kappa > 0$ , o estêncil upwind de segunda ordem, conforme os slides, é:

$$u'(x_j) \approx \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2h},$$

que gera as contribuições:

$$A_{j,j-2} \leftarrow A_{j,j-2} + \frac{\kappa}{2h}, \quad A_{j,j-1} \leftarrow A_{j,j-1} - \frac{2\kappa}{h}, \quad A_{j,j} \leftarrow A_{j,j} + \frac{3\kappa}{2h}.$$

Esse sistema foi resolvido pelo solucionador direto `numpy.linalg.solve` em vez do Algoritmo de Thomas. Durante os testes, observou-se instabilidade e crescimento excessivo dos valores, motivo pelo qual este método também não foi incluído nos gráficos comparativos. (Não identifiquei o problema também).

### 2.3.6 Tratamento da condição de Neumann em $x = 0$

A condição de contorno  $u'(0) = 1$  foi implementada pelo **método do ponto fantasma**. A EDO  $(\varepsilon u'' + \kappa u' = 0)$  foi mantida no nó  $j = 0$ .

Para isso, a derivada na fronteira foi aproximada por diferenças centrais de segunda ordem para definir o ponto fantasma  $u_{-1}$ :

$$u'(0) \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 1 \quad \Rightarrow \quad u_{-1} = u_1 - 2h$$

Este valor de  $u_{-1}$  foi substituído na discretização do **termo difusivo**  $\varepsilon u''(0)$ :

$$\varepsilon u''(0) \approx \varepsilon \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{h^2} = \varepsilon \frac{u_1 - 2u_0 + (u_1 - 2h)}{h^2}$$

Isso gera as seguintes contribuições para a linha  $j = 0$  do sistema:

$$\left(-\frac{2\varepsilon}{h^2}\right)u_0 + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2}\right)u_1 - \frac{2\varepsilon}{h}$$

O termo constante  $-\frac{2\varepsilon}{h}$  é movido para o vetor  $f$  (resultando em  $f[0] = \frac{2\varepsilon}{h}$ ). O termo convectivo  $\kappa u'(0)$ , discretizado por cada esquema, é então somado a esta mesma linha  $j = 0$ .

### 2.3.7 Resolução dos sistemas lineares

Para os métodos de diferenças centrais, progressivas e regressivas, o sistema resultante é tridiagonal e foi resolvido pelo **Algoritmo de Thomas**, implementado na função `tridiag_solve`. Para o esquema `upwind2`, cuja matriz tem banda adicional, utilizou-se a função `numpy.linalg.solve`. Em todos os casos, o vetor de contorno  $f_N$  foi ajustado de forma a impor  $u(1) = 1$ .

### 2.3.8 Comparação gráfica dos resultados

Foram geradas comparações entre a solução exata (6) e as soluções numéricas para diferentes espaçamentos de malha ( $h = 0.1, 0.05, 0.005$ ), correspondentes a  $N = \{10, 20, 200\}$ . As metodologias apresentadas são:

- Diferença central (2<sup>a</sup> ordem);
- Diferença progressiva (1<sup>a</sup> ordem).

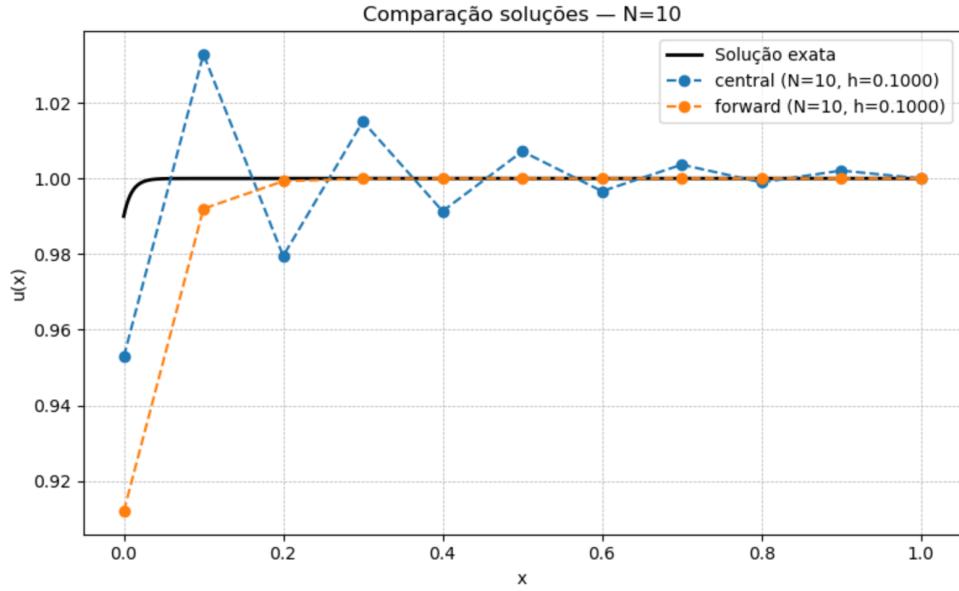


Figura 8: Comparação entre solução exata e diferença central para  $N = 10$  ( $h = 0,1$ ).

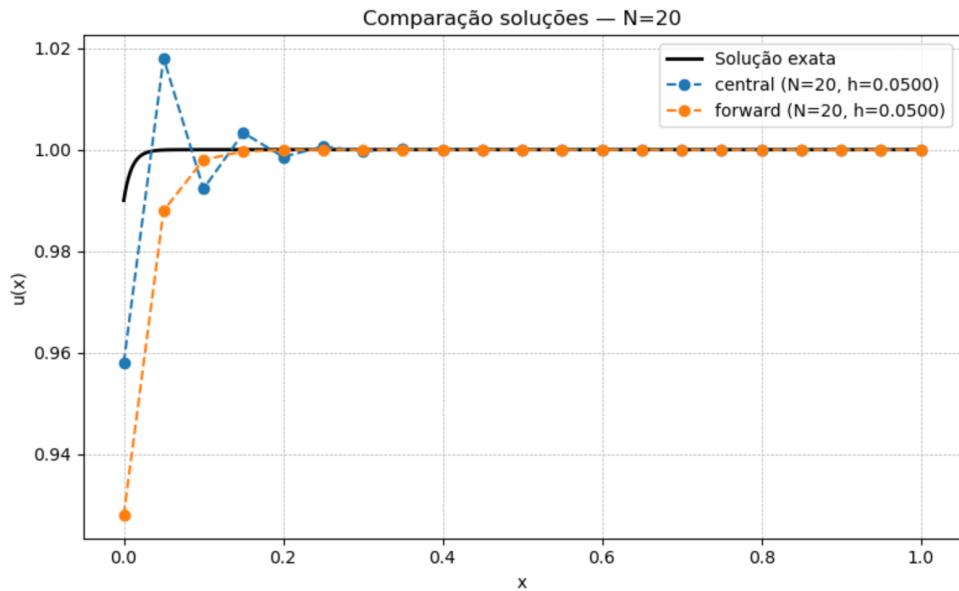


Figura 9: Comparação entre solução exata e diferença central para  $N = 20$  ( $h = 0,05$ ).

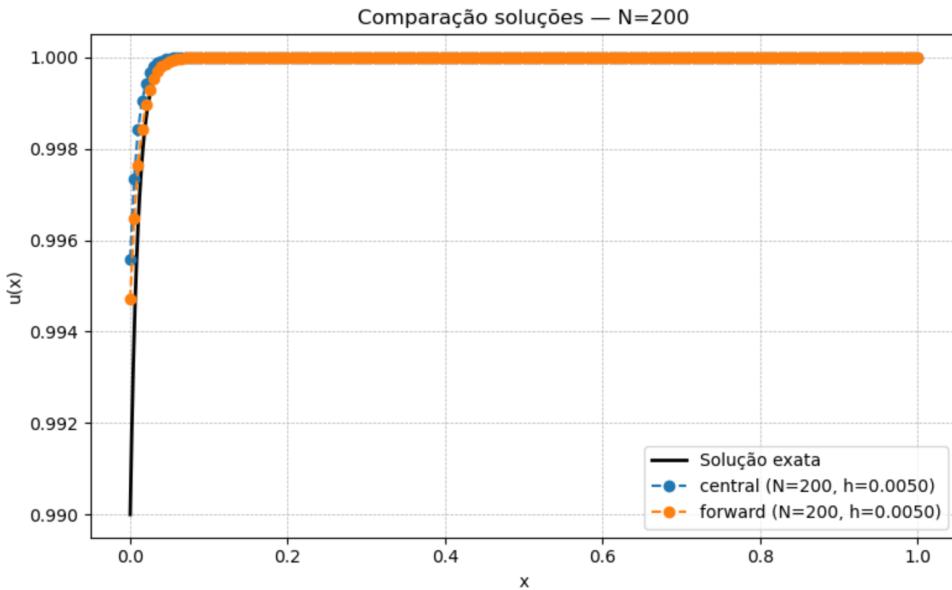


Figura 10: Comparação entre solução exata e diferença central para  $N = 500$  ( $h = 0,005$ ).

### 2.3.9 Análise dos resultados

Nos testes realizados:

- O método de **diferenças centrais** apresentou instabilidade para  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$ , com oscilações acentuadas próximas à fronteira  $x = 0$ .
- O método de **diferenças progressivas** mostrou comportamento mais estável, com menor amplitude de oscilações nos casos de malhas mais grossas, embora apresente difusão numérica mais intensa.
- Os métodos **upwind de segunda ordem** e **diferença regressiva** não produziram resultados estáveis — os valores numéricos cresceram rapidamente, inviabilizando sua inclusão nas comparações.

Essas observações estão de acordo com o comportamento previsto para regimes convectivos ( $\text{Pe}_h \gg 1$ ), os esquemas centrados tornam-se instáveis e é necessário empregar técnicas de estabilização, que serão abordadas na próxima subseção.

## 2.4 Método de estabilidade (Difusão Artificial)

Nesta etapa foi implementado o **método de estabilidade por difusão artificial**. O objetivo é introduzir um termo difusivo adicional que compense os efeitos numéricos de instabilidade.

### 2.4.1 Formulação teórica

A ideia consiste em adicionar ao termo difusivo original  $\varepsilon$  um incremento  $\varepsilon_{\text{art}}$ , proporcional à convecção e ao tamanho da malha, de forma que:

$$\varepsilon_{\text{ef}} = \varepsilon + \gamma \kappa h$$

### 2.4.2 Implementação no código

A implementação no código segue exatamente a formulação anterior. Durante a montagem do sistema linear, o coeficiente de difusão é redefinido como:

$$\varepsilon_{\text{ef}} = \varepsilon + \gamma \kappa h,$$

sendo  $\gamma$  calculado numericamente a partir de  $\text{Pe}_h$  em cada simulação.

A forma geral do sistema resultante permanece:

$$\varepsilon_{\text{ef}} u''(x) + \kappa u'(x) = 0,$$

porém o aumento de  $\varepsilon_{\text{ef}}$  atua como um amortecimento artificial que elimina as oscilações observadas (no item b)) nas soluções obtidas com o esquema centrado puro.

### 2.4.3 Resultados numéricos e análise de estabilidade

Foram realizadas simulações comparando a solução exata (6) com as soluções numéricas obtidas pelo esquema de diferenças centrais com e sem a difusão artificial. As malhas utilizadas foram  $N = 10, 20, 200$ , correspondendo a  $h = 0,1, 0,05, 0,005$ .

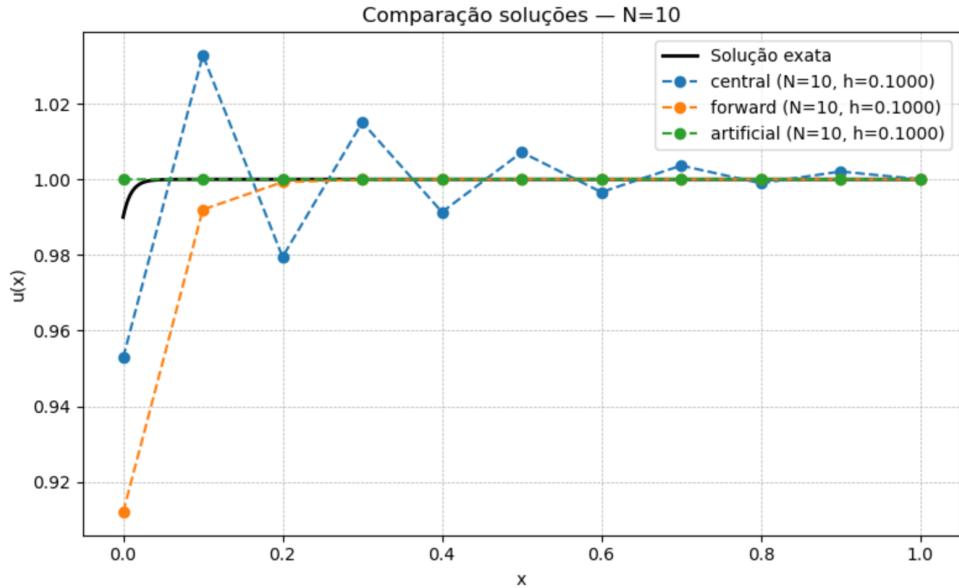


Figura 11: Solução exata e método de difusão artificial para  $N = 10$  ( $h = 0,1$ ).

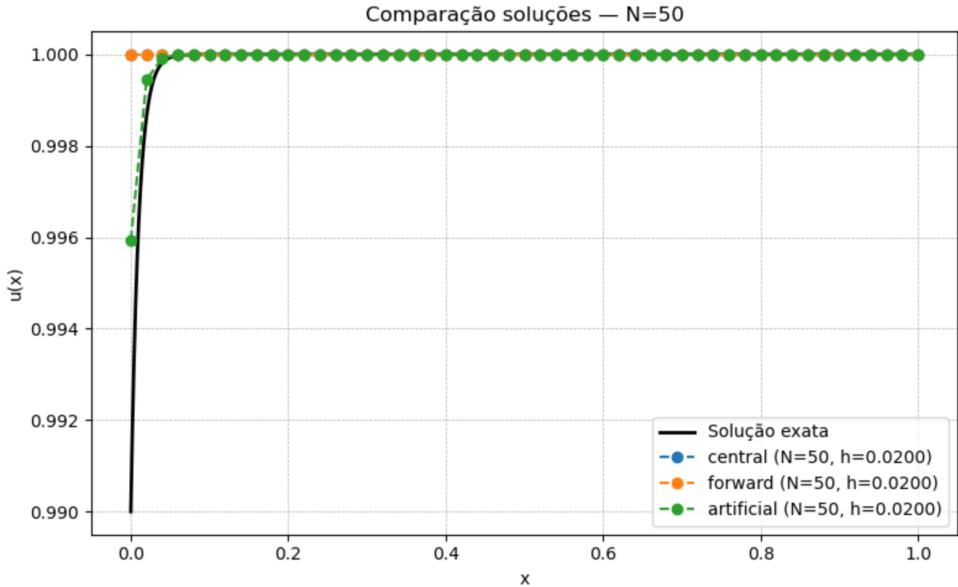


Figura 12: Solução exata e método de difusão artificial para  $N = 50$  ( $h = 0,02$ ).

#### 2.4.4 Discussão dos resultados

Os resultados obtidos demonstram claramente o efeito estabilizador da difusão artificial:

- Para  $h = 0,1$  e  $h = 0,05$ , o método centrado sem estabilização apresentou oscilações intensas e valores não físicos próximos a  $x = 1$ ;
- Com a inclusão da difusão artificial, as soluções tornaram-se suaves e fisicamente coerentes mesmo para malhas grossas;
- Para  $h = 0,005$ , a solução estabilizada praticamente coincide com a solução exata, confirmando a manutenção da precisão quando o termo artificial se torna desprezível ( $\gamma \rightarrow 0$ ).

Portanto, o método de difusão artificial mostrou-se eficaz em eliminar as instabilidades de convecção pura e recuperar a estabilidade numérica do esquema de diferenças centrais.

## Referências

- [1] I. Igreja. *Métodos de Diferenças Finitas para Problemas de Valor de Contorno*. Notas de aula da disciplina DCC190 — Solução Numérica de Equações Diferenciais na UFJF.
- [2] L. H. Nogueira. *Implementações da Lista 2 — DCC190: Solução Numérica de EDOs*. Repositório GitHub, 2025. Disponível em: [Link](#).