

Lista 3 - DCC190

Solução Numérica de Equações Diferenciais

Lucas Henrique Nogueira
202265515B

30 de novembro de 2025

1 Exercício 1 — Problema Transiente Difusivo-Reativo

1.1 Objetivo

O objetivo deste exercício é resolver numericamente o problema transiente-difusivo-reactivo não linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{8}{\delta^2} u^2(1 - u) = 0, \quad (1)$$

definido no domínio $x \in [-10, 90]$, $t \in [0, T]$, com $T = 4$ e $\delta = 2$, sujeito às condições de contorno

$$u(-10, t) = 1, \quad u(90, t) = 0, \quad (2)$$

e condição inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{x}{2} \right) \right]. \quad (3)$$

A solução exata do problema é conhecida e dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{x - 2t/\delta}{\delta} \right) \right], \quad (4)$$

a qual será utilizada para comparação com a solução numérica.

Os objetivos são:

- Propor uma discretização implícita de primeira ordem no tempo com tratamento atrasado do termo não linear;
- Comparar graficamente a solução exata e a aproximada no tempo final $T = 4$ para diferentes valores de h ;
- Realizar um estudo de convergência na norma do máximo utilizando $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$.

1.2 Formulação numérica

Considere uma malha espacial uniforme $x_i = a + ih$, com $h = (b - a)/N$, e uma discretização temporal $t^n = n\Delta t$. A derivada temporal é aproximada pelo esquema implícito de primeira ordem:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^{n+1} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

A derivada espacial de segunda ordem é aproximada por diferenças finitas centrais:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^{n+1} \approx \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

O termo não linear é tratado de forma atrasada no tempo:

$$u^2(1 - u)|_i^{n+1} \approx (u_i^n)^2(1 - u_i^n).$$

Assim, o esquema totalmente discreto é dado por

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{8}{\delta^2} (u_i^n)^2(1 - u_i^n) = 0.$$

O sistema linear resultante em cada passo de tempo é tridiagonal e incorpora as condições de contorno de Dirichlet.

1.3 Resolução do sistema

Em cada passo de tempo, o sistema linear tridiagonal foi resolvido pelo **Algoritmo de Thomas**, que possui custo computacional linear e é adequado para problemas unidimensionais provenientes de discretizações por diferenças finitas.

1.4 Comparação entre soluções

As Figuras 1–3 apresentam a comparação entre a solução exata e a solução numérica no tempo final $T = 4$, para diferentes valores do espaçamento espacial h .

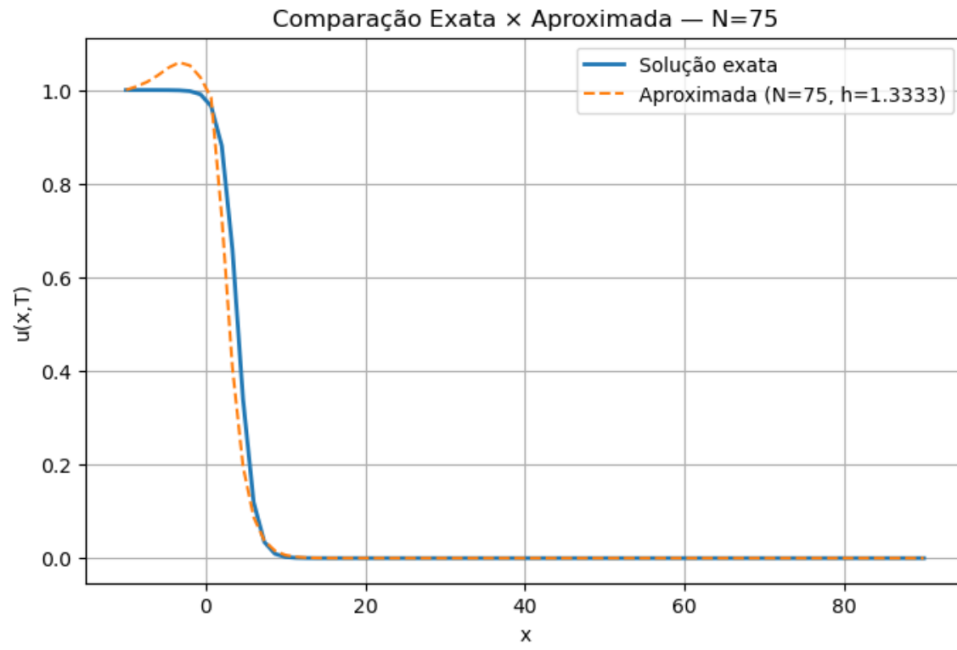


Figura 1: Comparação entre a solução exata e a aproximada para $N = 75$ no tempo final $T = 4$.

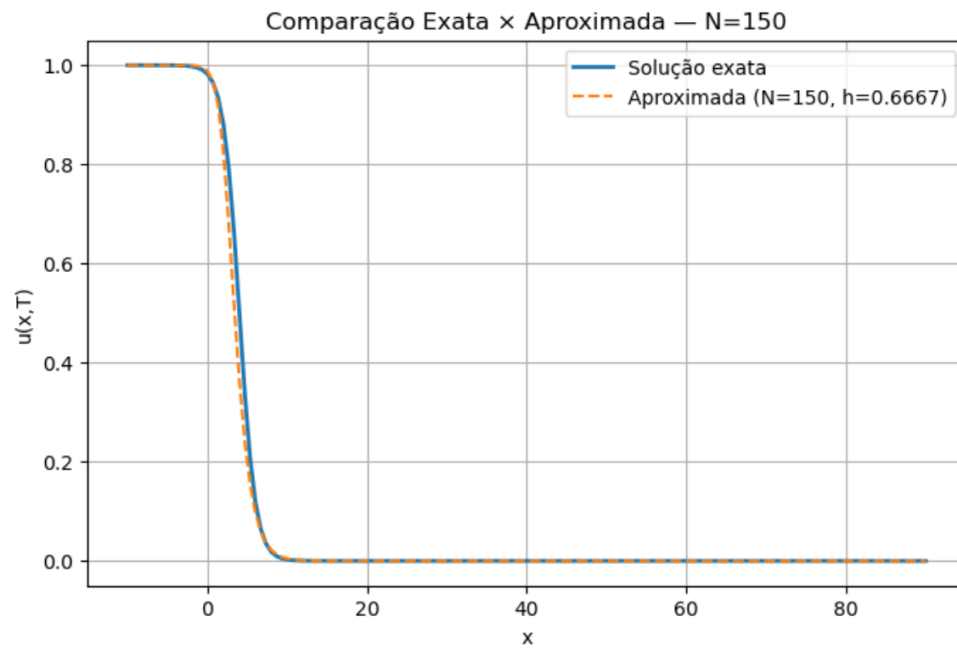


Figura 2: Comparação entre a solução exata e a aproximada para $N = 150$ no tempo final $T = 4$.

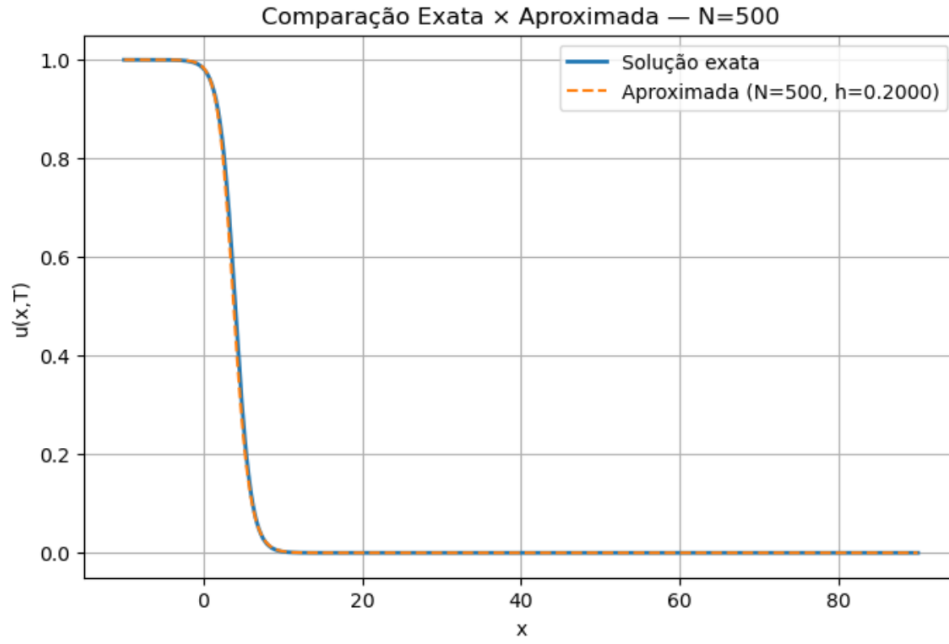


Figura 3: Compara o entre a soluço exata e a aproximada para $N = 500$ no tempo final $T = 4$.

Observa-se que o refinamento da malha espacial melhora significativamente a aproxima o da soluço numérica, reduzindo o erro global.

1.5 Estudo de convergência

O erro global foi avaliado pela norma do máximo no tempo final $T = 4$:

$$\|e\|_{\infty} = \max_i |u_i^{\text{num}} - u_i^{\text{exata}}|.$$

Foram consideradas as malhas $N = \{500, 1000, 2000, 4000, 8000\}$, utilizando duas escolhas para o passo temporal: $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$.

A Figura 4 apresenta o gráfico do erro em escala log-log, juntamente com retas de referência.

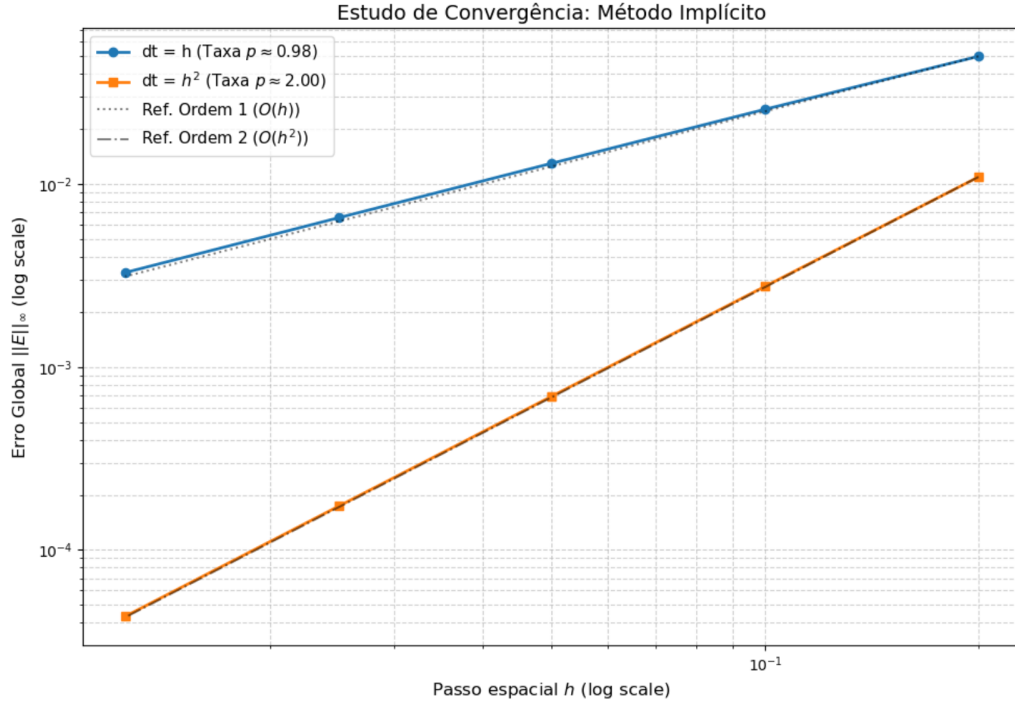


Figura 4: Estudo de convergência na norma do máximo para $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$.

1.6 Tabelas de erro

As Tabelas 1 e 2 apresentam os valores do erro máximo $\|e\|_\infty$ no tempo final $T = 4$ para diferentes refinamentos espaciais, considerando os passos temporais $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, respectivamente.

Tabela 1: Erro na norma do máximo para $\Delta t = h$.

N	h	$\ e\ _\infty$
500	2.00×10^{-1}	5.0055×10^{-2}
1000	1.00×10^{-1}	2.5693×10^{-2}
2000	5.00×10^{-2}	1.3015×10^{-2}
4000	2.50×10^{-2}	6.5512×10^{-3}
8000	1.25×10^{-2}	3.2864×10^{-3}

Tabela 2: Erro na norma do máximo para $\Delta t = h^2$.

N	h	$\ e\ _\infty$
500	2.00×10^{-1}	1.0958×10^{-2}
1000	1.00×10^{-1}	2.7656×10^{-3}
2000	5.00×10^{-2}	6.9298×10^{-4}
4000	2.50×10^{-2}	1.7334×10^{-4}
8000	1.25×10^{-2}	4.3342×10^{-5}

Para o caso $\Delta t = h$, observa-se um comportamento aproximadamente linear do erro em função de h , indicando convergência de primeira ordem. Já para $\Delta t = h^2$, o erro decresce quadraticamente com o refinamento da malha, evidenciando o predomínio do erro espacial.

1.7 Conclusões

O esquema implícito de primeira ordem no tempo com tratamento atrasado do termo não linear mostrou-se estável e convergente para o problema considerado. Os resultados numéricos indicam:

- convergência de primeira ordem quando $\Delta t = h$;
- comportamento de convergência de segunda ordem no erro global quando $\Delta t = h^2$;
- excelente concordância entre a solução numérica e a solução exata para malhas suficientemente refinadas.

2 Exercício 2 — Problema Reação–Difusão via Problemas A e B

2.1 Objetivo

O objetivo deste exercício é resolver numericamente o problema transiente-difusivo-reativo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{8}{\delta^2} u^2(1 - u) = 0, \quad (5)$$

reescrevendo-o como a composição dos dois problemas

$$\text{Problema A: } \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{8}{\delta^2} u^2(1 - u) = 0, \quad (6)$$

$$\text{Problema B: } \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

A estratégia numérica consiste em, a cada passo de tempo $[t^n, t^{n+1}]$:

- resolver primeiro o Problema A, obtendo uma solução intermediária u^* ;
- em seguida, usar u^* como condição inicial do Problema B, obtendo u^{n+1} .

O domínio espacial é $x \in [-10, 90]$, o tempo final é $T = 4$ e considera-se $\delta = 2$, com as mesmas condições de contorno e inicial do Exercício 1:

$$u(-10, t) = 1, \quad u(90, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{2} [1 - \tanh(x/2)].$$

Os objetivos principais são:

- propor uma discretização **explícita** para o Problema A e **implícita** (Crank–Nicolson) para o Problema B;
- realizar um estudo de convergência na norma do máximo com $N = \{500, 1000, 2000, 4000, 8000\}$ e $\Delta t = h$;
- comparar a curva de erro obtida com a curva correspondente ao Exercício 1 (esquema implícito com termo atrasado);
- comparar, no tempo final $T = 4$, a solução aproximada obtida pela decomposição em A e B com a solução exata e com a solução aproximada do problema original.

2.2 Formulação Numérica

Considera-se uma malha uniforme no intervalo $[a, b] = [-10, 90]$,

$$x_j = a + jh, \quad h = \frac{b - a}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

e discretização temporal

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N_t,$$

com Δt escolhido conforme o enunciado.

Discretização Explícita para o Problema A

O Problema A pode ser escrito como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u), \quad f(u) = \frac{8}{\delta^2} u^2(1 - u).$$

Para este problema é utilizado o esquema explícito de Euler progressivo, como apresentado em aula:

$$u_j^* = u_j^n + \Delta t f(u_j^n), \quad j = 1, \dots, N - 1,$$

com as condições de contorno impostas em todos os passos:

$$u_0^* = 1, \quad u_N^* = 0.$$

Discretização Implícita (Crank–Nicolson) para o Problema B

O Problema B é dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para este problema é adotado o método de Crank–Nicolson, conforme visto nos slides:

$$u_j^{n+1} - \frac{\sigma}{2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^* + \frac{\sigma}{2} (u_{j+1}^* - 2u_j^* + u_{j-1}^*),$$

com

$$\sigma = \frac{\Delta t}{h^2}, \quad j = 1, \dots, N - 1,$$

e condições de contorno

$$u_0^{n+1} = 1, \quad u_N^{n+1} = 0.$$

O sistema linear resultante é tridiagonal e é resolvido pelo *Algoritmo de Thomas*, como no Exercício 1.

Procedimento em Cada Passo de Tempo

Em cada passo de tempo $t^n \rightarrow t^{n+1}$, o procedimento adotado é:

1. dado u^n , resolver explicitamente o Problema A e obter u^* no tempo t^{n+1} ;
2. em seguida, resolver o Problema B com o método de Crank–Nicolson, usando u^* como condição inicial no tempo t^{n+1} , obtendo u^{n+1} .

Esse procedimento é repetido até alcançar o tempo final $T = 4$.

2.3 Estudo de Convergência

O erro global foi avaliado no tempo final $T = 4$ por meio da norma do máximo:

$$\|e\|_\infty = \max_j |u_j^{\text{num}} - u_j^{\text{exata}}|.$$

Foram utilizadas as malhas $N = \{500, 1000, 2000, 4000, 8000\}$ com

$$\Delta t = h,$$

como especificado no enunciado. A Tabela 3 apresenta os valores obtidos para o método baseado nos Problemas A e B.

Tabela 3: Erro $\|e\|_\infty$ para o método A+B no tempo final $T = 4$ com $\Delta t = h$.

N	h	Δt	$\ e\ _\infty$
500	2.0×10^{-1}	2.0×10^{-1}	3.5359×10^{-2}
1000	1.0×10^{-1}	1.0×10^{-1}	1.8261×10^{-2}
2000	5.0×10^{-2}	5.0×10^{-2}	9.2845×10^{-3}
4000	2.5×10^{-2}	2.5×10^{-2}	4.6809×10^{-3}
8000	1.25×10^{-2}	1.25×10^{-2}	2.3501×10^{-3}

A Figura 5 mostra o gráfico de $\|e\|_\infty$ em função de h em escala log-log. Observa-se um comportamento aproximadamente linear, indicando taxa de convergência próxima de primeira ordem quando $\Delta t = h$.

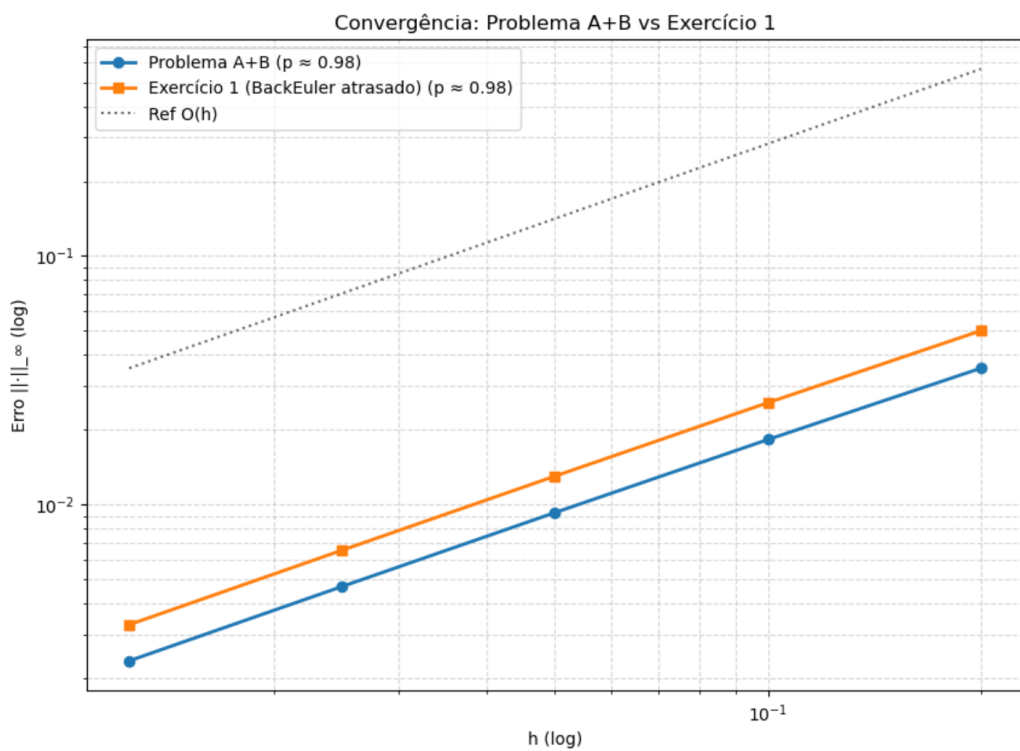


Figura 5: Estudo de convergência na norma do máximo para o método A+B com $\Delta t = h$.

2.4 Comparação com o Exercício 1

Para efeito de comparação, foi repetido o estudo de convergência do Exercício 1 (esquema implícito com termo não linear atrasado) utilizando as mesmas malhas e $\Delta t = h$. A tabela de erros obtida é:

Tabela 4: Erro $\|e\|_\infty$ para o método do Exercício 1 com $\Delta t = h$.

N	h	Δt	$\ e\ _\infty$
500	2.0×10^{-1}	2.0×10^{-1}	5.0055×10^{-2}
1000	1.0×10^{-1}	1.0×10^{-1}	2.5693×10^{-2}
2000	5.0×10^{-2}	5.0×10^{-2}	1.3015×10^{-2}
4000	2.5×10^{-2}	2.5×10^{-2}	6.5512×10^{-3}
8000	1.25×10^{-2}	1.25×10^{-2}	3.2864×10^{-3}

A Figura 6 apresenta as curvas de erro em função de h para os dois métodos.

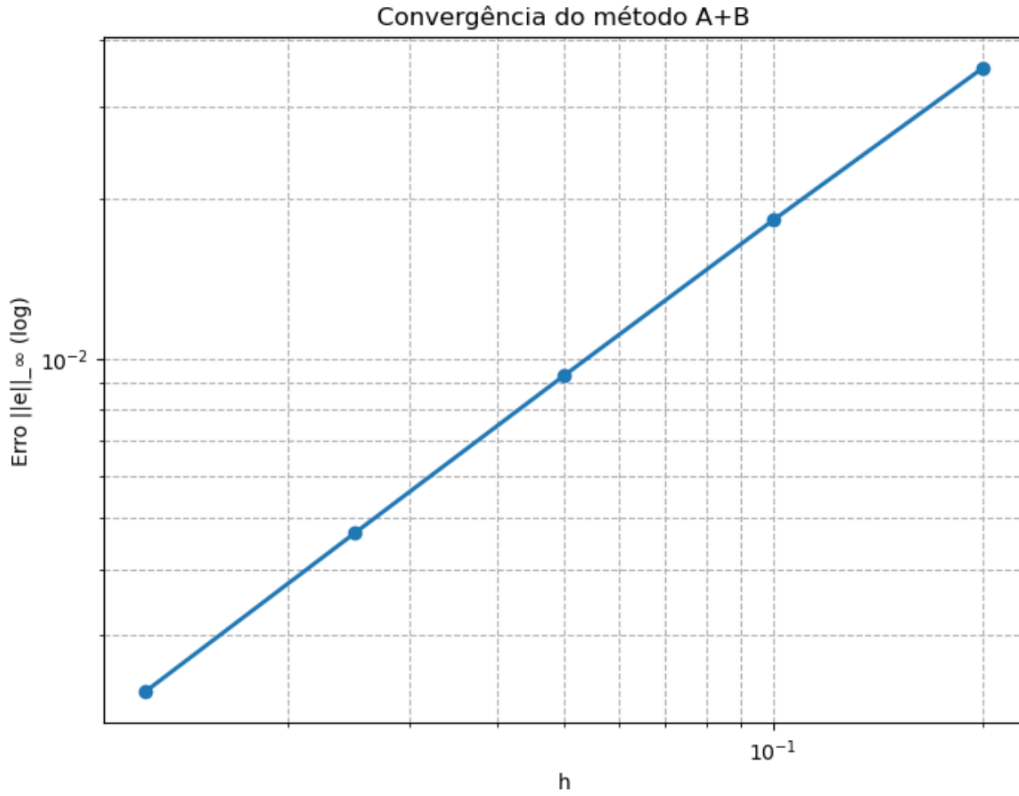


Figura 6: Comparação das curvas de erro em norma do máximo entre o método A+B e o método do Exercício 1, ambos com $\Delta t = h$.

Observa-se que:

- ambos os métodos apresentam convergência aproximadamente linear em h ;
- para todos os valores de N considerados, o erro do método A+B é menor que o erro do método do Exercício 1.

2.5 Comparação entre Soluções Aproximadas e Exata

Para ilustrar o comportamento das soluções aproximadas, foram considerados alguns valores de N e, para cada um, comparou-se a solução exata com:

- a solução numérica do Exercício 1;
- a solução numérica obtida pelos Problemas A e B.

As Figuras 7–9 mostram a comparação entre a solução exata e a solução aproximada pelo método A+B para $N = 75$, $N = 150$ e $N = 500$.

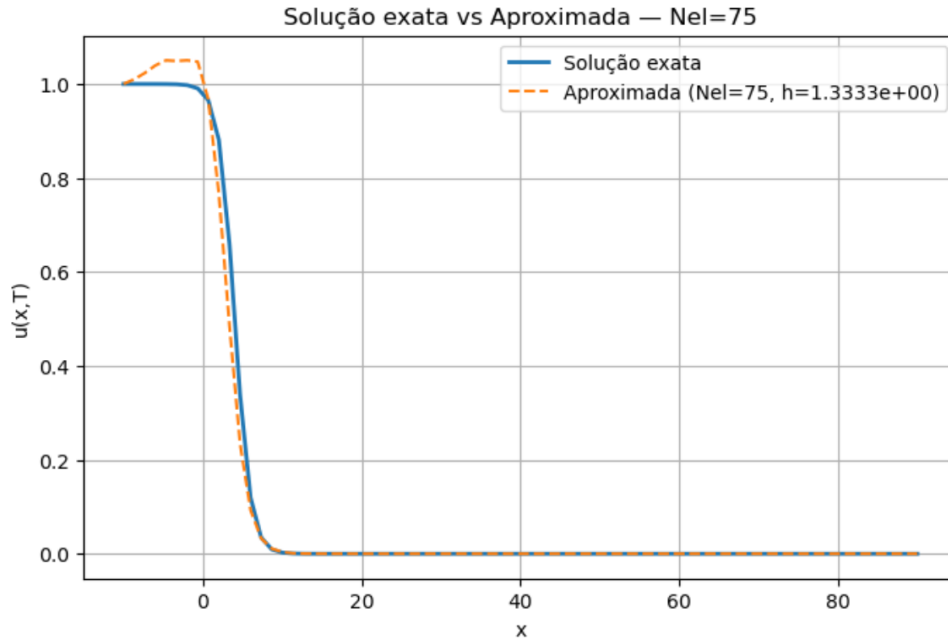


Figura 7: Solução exata e numérica pelo método A+B para $N = 75$.

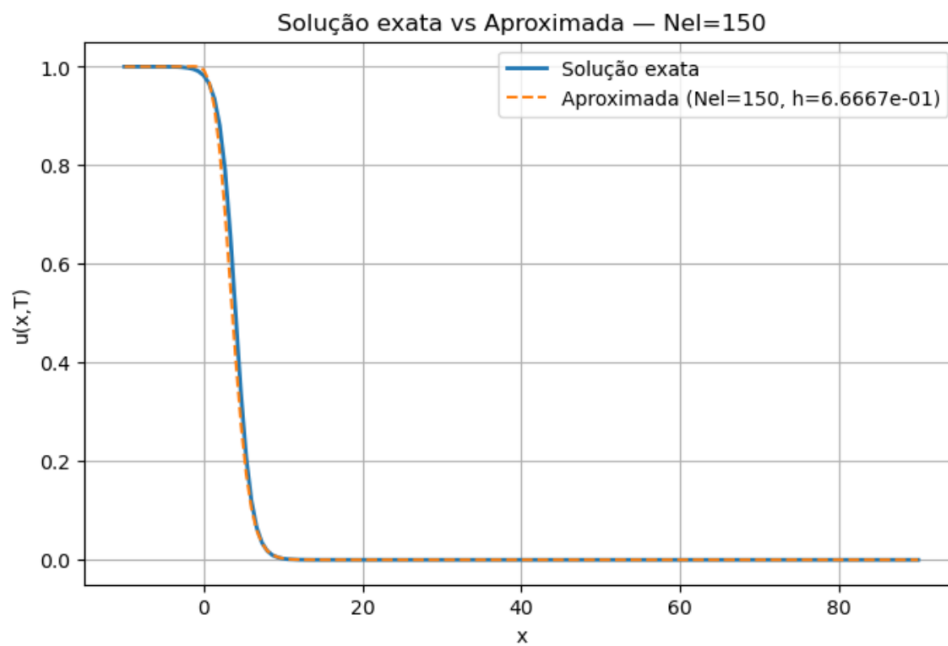


Figura 8: Solução exata e numérica pelo método A+B para $N = 150$.

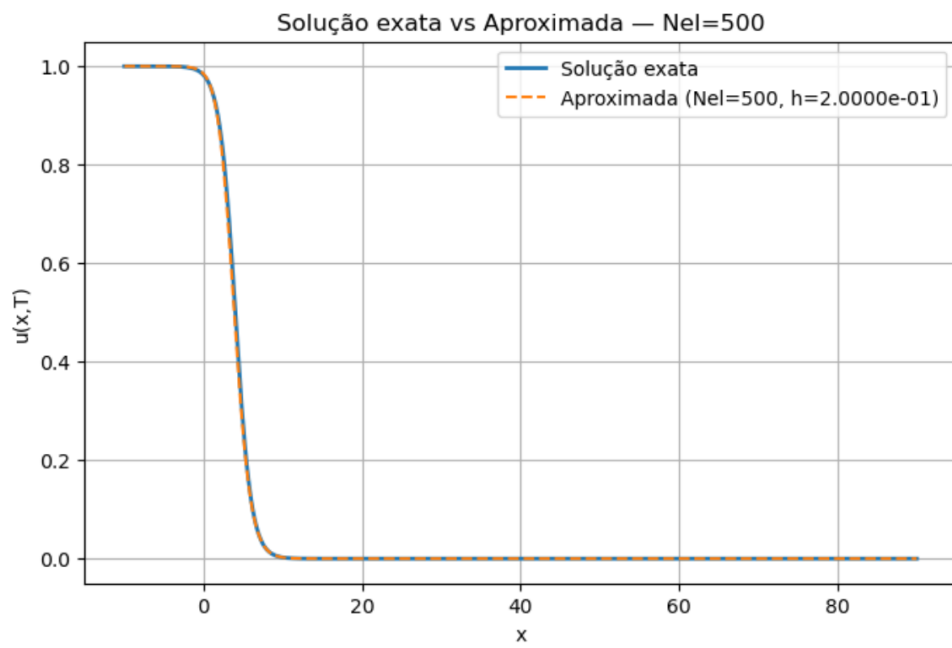


Figura 9: Solução exata e numérica pelo método A+B para $N = 500$.

Em todos os casos, observa-se que o perfil de frente de onda é bem capturado, e que o refinamento da malha reduz o erro na vizinhança da transição, tanto para o método do Exercício 1 quanto para o método baseado nos Problemas A e B.

2.6 Conclusões

Com base nos resultados numéricos obtidos, conclui-se que:

- a combinação de um esquema explícito para o Problema A com o método de Crank–Nicolson para o Problema B é adequada para o problema transiente-difusivo-reativo considerado;
- o método A+B apresenta convergência aproximadamente de primeira ordem quando $\Delta t = h$, em concordância com a presença de um passo explícito no tempo;
- a comparação com o Exercício 1 mostra que, para as malhas consideradas, o método A+B produz erros menores na norma do máximo;
- as soluções aproximadas convergem para a solução exata à medida que h e Δt são refinados.

3 Exercício 3 — Equação de Advecção Linear

3.1 Objetivo

O objetivo deste exercício é resolver numericamente a equação de advecção linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \kappa \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

com $\kappa = 1$ e tempo final $T = 0.25$.

Adota-se como condição inicial o caso *W-shape*, proposto na dissertação de Rafael Alves Bonfim, dado por

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.2], \\ 4x - 0.6, & x \in (0.2, 0.4], \\ -4x + 2.6, & x \in (0.4, 0.6], \\ 1, & x \in (0.6, 0.8], \\ 0, & x \in [-1, 0) \cup (0.8, 1], \end{cases} \quad (9)$$

e condições de contorno

$$u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (10)$$

Os objetivos são:

- realizar a análise de estabilidade de Von Neumann do esquema FTCS implícito;
- implementar e comparar numericamente a solução exata com a aproximação obtida pelo FTCS implícito;
- incluir na comparação os métodos Upwind explícito e Lax–Friedrichs, adotando $N = 400$ elementos e dois passos de tempo distintos: $\Delta t = 1.1h$ e $\Delta t = h/2$.

3.2 Estabilidade via Análise de Von Neumann

Considerando a solução de Fourier $u_j^n = \lambda^n e^{ij\xi}$ e substituindo no esquema FTCS implícito

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \kappa \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0,$$

obtém-se o fator de amplificação

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{1 + i\rho \sin \xi}, \quad \rho = \frac{\kappa \Delta t}{h}.$$

Seu módulo é dado por

$$|\lambda(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho \sin \xi)^2}} \leq 1, \quad \forall \xi,$$

o que demonstra que o esquema FTCS implícito é **incondicionalmente estável**. Apesar disso, o método apresenta comportamento altamente **dispersivo**, o que resulta na formação de oscilações não físicas próximas a descontinuidades.

3.3 Configuração Numérica

A malha espacial foi construída no intervalo $[-1, 1]$ com $N = 400$ elementos, resultando em passo $h = (b - a)/N$. A condição inicial adotada foi o perfil do tipo *W-shape* descrito anteriormente.

A solução exata utilizada para comparação, desconsiderando a influência das condições de contorno, é dada pela translação do perfil inicial:

$$u(x, T) = u_0(x - \kappa T).$$

Nos experimentos numéricos, foram impostas condições de contorno

$$u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

em todos os instantes de tempo, de forma compatível com o problema da literatura considerado.

Os métodos FTCS implícito, Upwind explícito e Lax–Friedrichs foram implementados e integrados no tempo até $T = 0.25$, permitindo a comparação gráfica entre a solução exata e as soluções numéricas obtidas.

3.4 Comparação entre Métodos

Foram incluídos os métodos Upwind explícito e Lax–Friedrichs para os dois passos de tempo solicitados:

$$\Delta t_1 = 1.1 h, \quad \Delta t_2 = \frac{h}{2},$$

correspondendo, respectivamente, a números de Courant $\rho_1 = 1.1$ e $\rho_2 = 0.5$.

A Tabela 5 apresenta os valores do erro na norma do máximo obtidos no tempo final $T = 0.25$:

Tabela 5: Erro global $\|e\|_\infty$ para os métodos comparados.

Método	Δt	$\rho = \Delta t/h$	$\ e\ _\infty$
FTCS Implícito	$1.1h$	1.10	1.0000×10^0
Upwind Explícito	$1.1h$	1.10	1.8168×10^2
Lax–Friedrichs	$1.1h$	1.10	7.4930×10^0
FTCS Implícito	$h/2$	0.50	1.0000×10^0
Upwind Explícito	$h/2$	0.50	1.0000×10^0
Lax–Friedrichs	$h/2$	0.50	1.0000×10^0

Os resultados mostram que:

- para $\rho = 1.1$, os métodos explícitos Upwind e Lax–Friedrichs violam a condição de estabilidade de CFL, resultando em erros muito elevados, em particular para o esquema Upwind;
- o FTCS implícito permanece estável para ambos os valores de ρ , confirmando a estabilidade incondicional obtida pela análise de Von Neumann;

- para $\rho = 0.5$, os três métodos produzem soluções estáveis, porém o erro na norma do máximo permanece da ordem da unidade, concentrado na vizinhança das descontinuidades e das bordas do domínio;
- o esquema Lax–Friedrichs apresenta comportamento mais difusivo, enquanto o Upwind introduz uma suavização moderada do perfil *W-shape*;
- o FTCS implícito, por ser um esquema centrado, exibe oscilações numéricas próximas aos saltos, em concordância com o caráter dispersivo indicado na análise teórica.

3.5 Apresentação dos Resultados Gráficos

As Figuras 10–13 apresentam a comparação entre a solução exata e as soluções aproximadas pelos três métodos considerados, para os valores de passo temporal $\Delta t = 1.1h$ e $\Delta t = h/2$, bem como um zoom na região crítica, facilitando a análise do comportamento dispersivo e difusivo dos métodos.

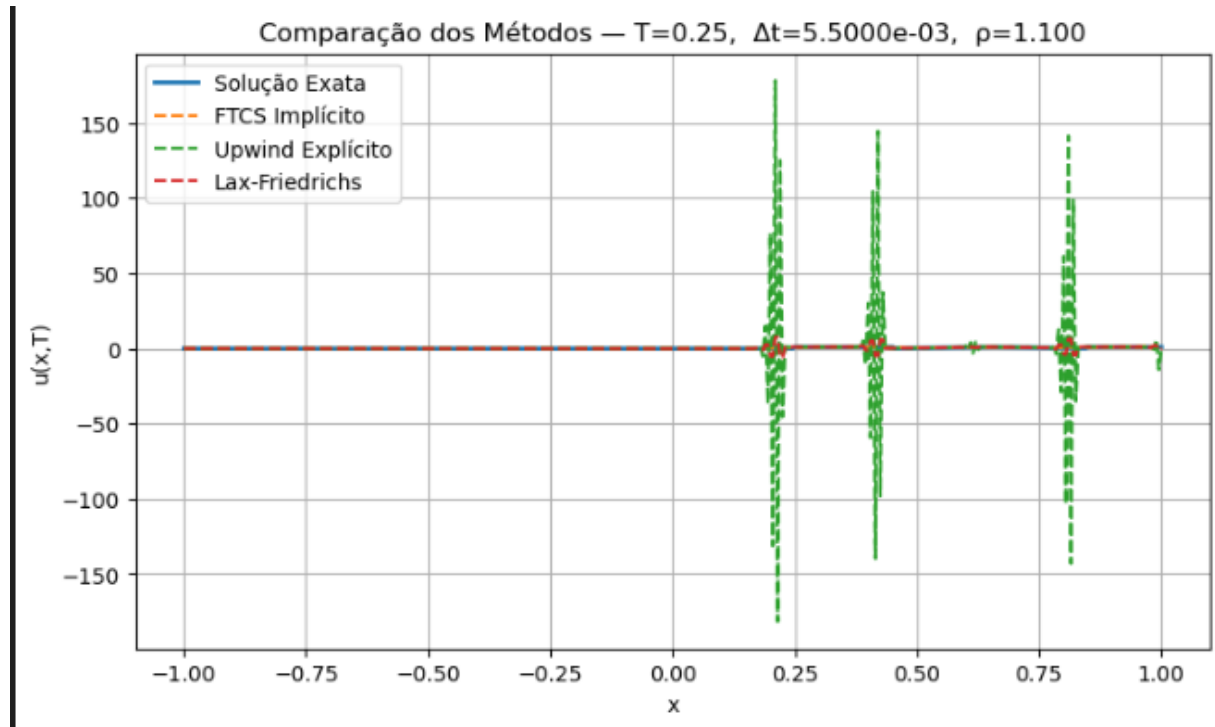


Figura 10: Comparação dos métodos para $\Delta t = 1.1h$ no tempo final $T = 0.25$.

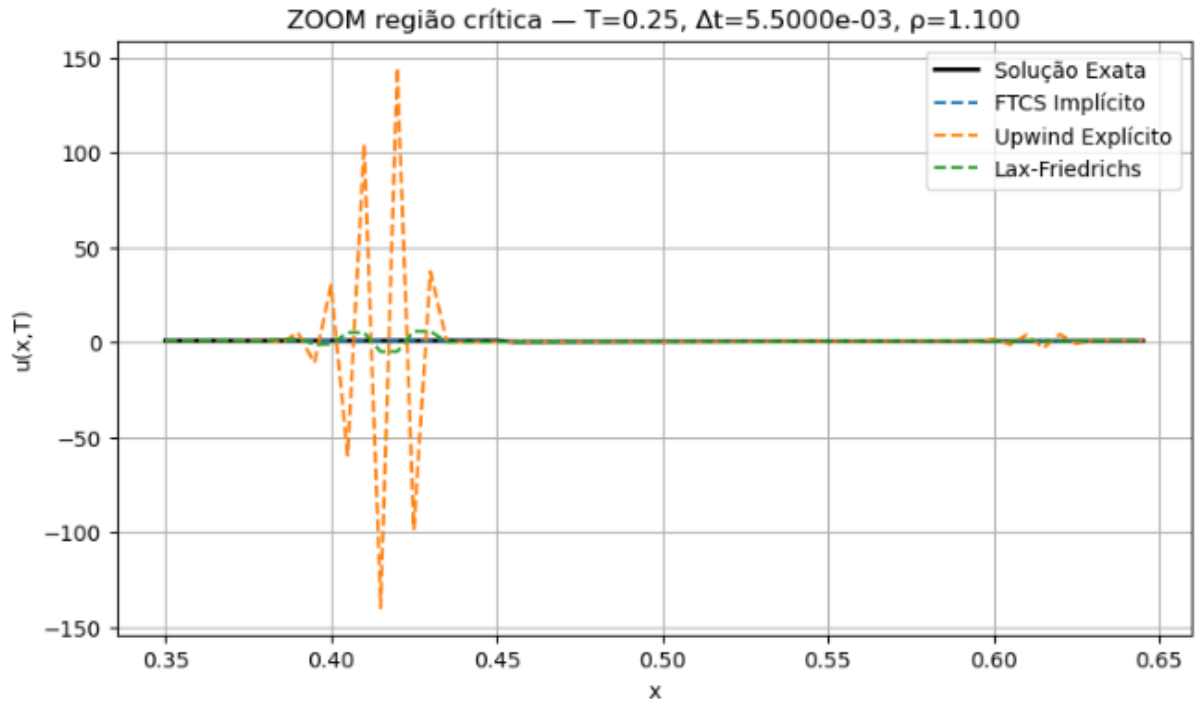


Figura 11: Zoom da região crítica para $\Delta t = 1.1h$.

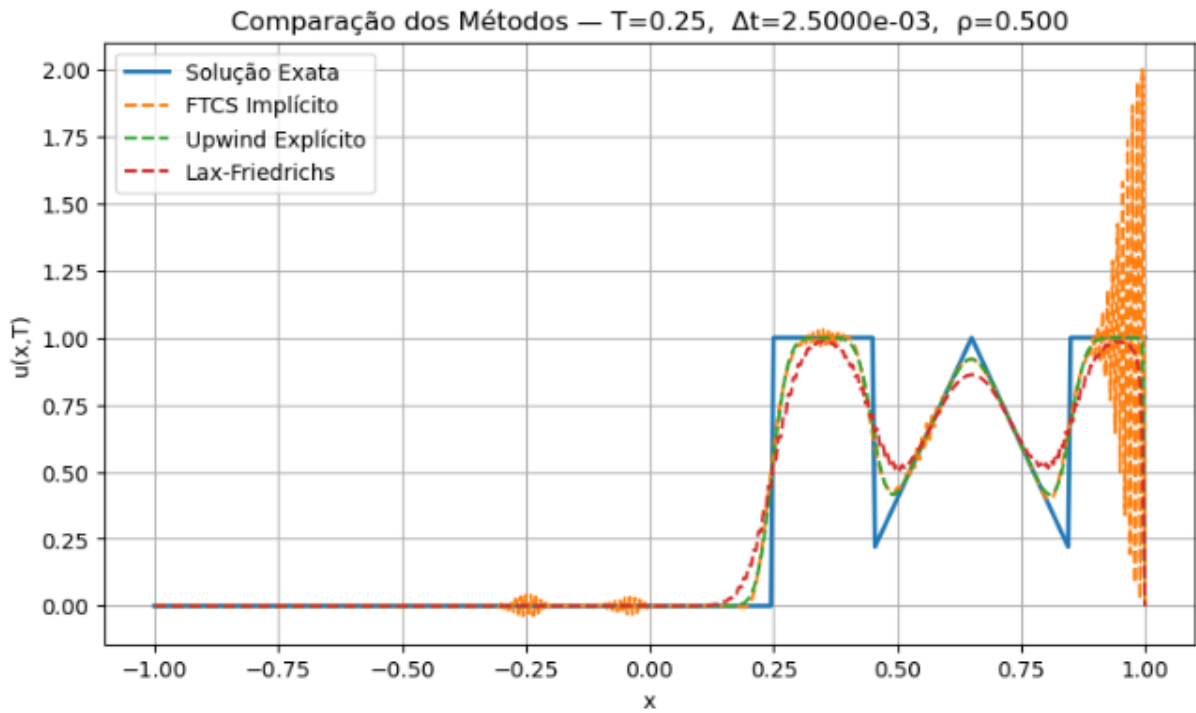


Figura 12: Comparação dos métodos para $\Delta t = h/2$ no tempo final $T = 0.25$.

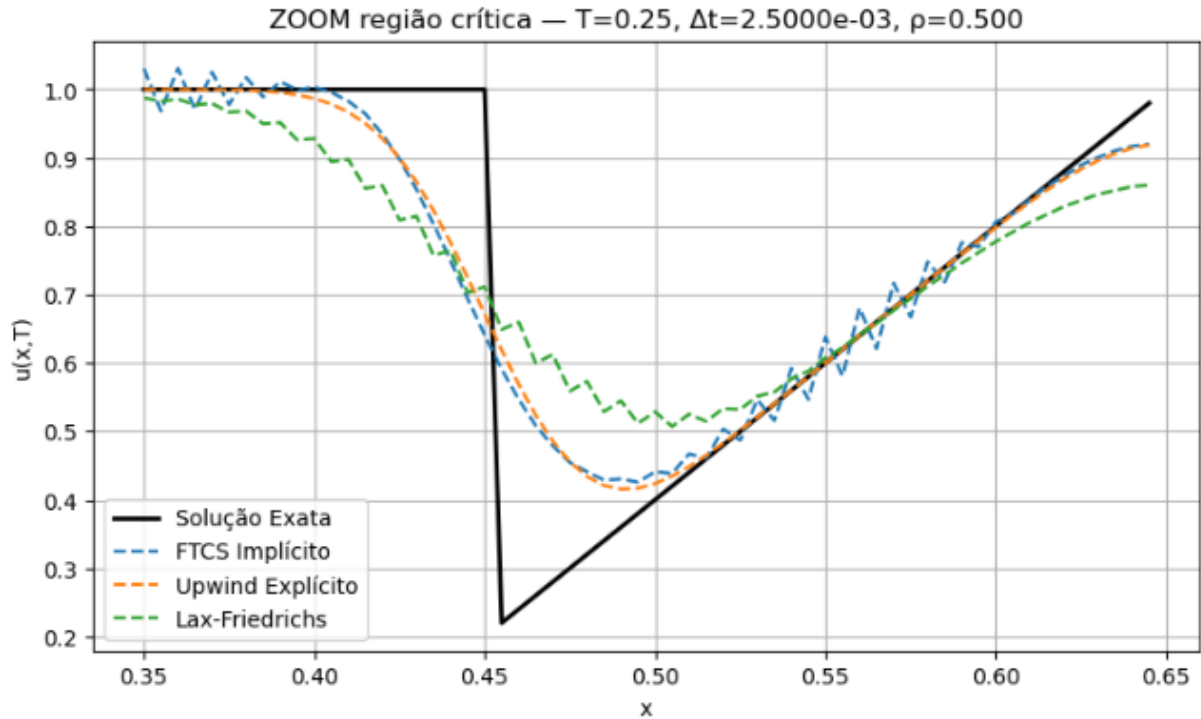


Figura 13: Zoom da região crítica para $\Delta t = h/2$.

3.6 Conclusões

Conclui-se que:

- o esquema FTCS implícito é incondicionalmente estável para a equação de advecção linear, como previsto pela análise de Von Neumann, mas apresenta forte dispersão numérica em presença de descontinuidades;
- os esquemas explícitos Upwind e Lax-Friedrichs exigem a condição de estabilidade de CFL, isto é, $\rho \leq 1$; para $\rho = 1.1$ observam-se erros muito grandes, caracterizando instabilidade numérica;
- para $\rho = 0.5$, os três métodos produzem soluções estáveis, com diferenças de comportamento: o Upwind suaviza o perfil e o Lax-Friedrichs é ainda mais difusivo, enquanto o FTCS implícito mantém melhor definição das frentes, mas com oscilações;
- a comparação numérica confirma as previsões teóricas sobre estabilidade, difusão e dispersão dos esquemas considerados.

Observação

O Exercício 4 não foi desenvolvido neste relatório. Não consegui terminar :(

Referências

- [1] I. Igreja. *Métodos de Diferenças Finitas para Problemas de Valor Inicial e Contorno*. Notas de aula da disciplina DCC190 — Solução Numérica de Equações Diferenciais na UFJF.
- [2] L. H. Nogueira. *Implementações da Lista 3 — DCC190: Solução Numérica de EDOs*. Repositório GitHub, 2025. Disponível em: [Link](#).