Relatório da Atividade 01: Análise de Sistemas Mecânicos

Breno Montanha Costa - 202265513B
Lucas Henrique Nogueira - 202265515B

Janeiro 2025

1 Introdução

Este relatório descreve o desenvolvimento de um programa em Python com interface gráfica (GUI) que resolve problemas mecânicos aplicados, incluindo:

- Cálculo de forças coplanares concorrentes.
- Determinação das reações de apoio em vigas apoiadas.
- Análise de treliças planas isostáticas.

O programa utiliza a biblioteca `Tkinter` para criar uma interface ao usuário e módulos como `matplotlib` para visualização gráfica. Este documento apresenta as funcionalidades, exemplos testados, e resultados obtidos com o software e suas possíveis limitações.

Figure 1: Interface inicial do programa desenvolvido.

2 Funcionalidades do Programa

O programa oferece as seguintes características:

1. **Interface Gráfica Amigável**: - Estruturada com botões, campos de entrada e menus claros. - Validações integradas para evitar erros de entrada do usuário.

2. **Visualizações Gráficas**: - Representação vetorial de forças no plano cartesiano. - Gráficos das soluções de problemas como reações em vigas e esforços em treliças.

3. **Cálculos Automatizados**: - Cálculo da resultante de forças concorrentes (intensidade e ângulo). - Determinação das reações de apoio em sistemas de vigas. - Análise de esforços internos em barras de treliças isostáticas.

4. **Modularidade**: - Arquitetura do código separada em módulos (`force.py`, `force_operations.py`, entre outros). - Facilita a manutenção e expansão do programa.

5. **Personalização e Edição**: - Permite ao usuário editar forças existentes, visualizar a solução em tempo real e alterar parâmetros.

3 Exercício 1: Forças Coplanares Concorrentes

Este exercício aborda o cálculo da intensidade e direção da força resultante de N forças coplanares concorrentes em um único ponto (nó). As forças podem ser definidas em duas formas:

- Por ângulo e intensidade.
- Por componentes cartesianas (X, Y) e intensidade (se necessário).

O programa permite visualizar as forças aplicadas e calcular a resultante, incluindo sua intensidade e direção.

Metodologia

1. O usuário insere o número total de forças que deseja adicionar.
2. Cada força é definida por: - Ângulo (em graus) e intensidade (em newtons), ou - Componentes cartesianas $(X,\ Y)$. 3. Todas as forças são representadas como vetores no plano cartesiano. 4. O cálculo da força resultante segue as equações vetoriais:

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

Exemplo 1 - Resolvido (Força e Ângulo)

Três forças coplanares concorrentes atuam sobre um nó. Deseja-se determinar:

- A intensidade da força resultante (F_R);
- A direção da força resultante (θ_R).

As forças são dadas por:

- $F_1 = 80\,\mathrm{N}$, com direção 40° (em relação ao eixo positivo x);
- $F_2 = 120\,\mathrm{N}$, com direção 70°;
- $F_3 = 150\,\mathrm{N}$, com direção 145°.

Resolução

Para resolver o problema, utilizaremos as componentes x e y de cada força e, em seguida, calcularemos a força resultante F_R e sua direção θ_R.

1. Componentes x e y das forças

Cada força F_i é decomposta em suas componentes x ($F_{i,x}$) e y ($F_{i,y}$), dadas por:

$$F_{i,x} = F_i \cos\theta_i, \quad F_{i,y} = F_i \sin\theta_i$$

Para $F_1 = 80\,\mathrm{N}$ com $\theta_1 = 40^\circ$:

$$F_{1,x} = 80\cos 40^\circ \quad \text{e} \quad F_{1,y} = 80\sin 40^\circ$$

$$F_{1,x} \approx 80 \cdot 0.766 = 61.28\,\mathrm{N}, \quad F_{1,y} \approx 80 \cdot 0.643 = 51.44\,\mathrm{N}$$

Para $F_2 = 120\,\mathrm{N}$ com $\theta_2 = 70^\circ$:

$$F_{2,x} = 120\cos 70^\circ \quad \text{e} \quad F_{2,y} = 120\sin 70^\circ$$

$$F_{2,x} \approx 120 \cdot 0.342 = 41.04\,\mathrm{N}, \quad F_{2,y} \approx 120 \cdot 0.940 = 112.80\,\mathrm{N}$$

Para $F_3 = 150\,\mathrm{N}$ com $\theta_3 = 145^\circ$:

$$F_{3,x} = 150\cos 145^\circ \quad \text{e} \quad F_{3,y} = 150\sin 145^\circ$$

$$F_{3,x} \approx 150 \cdot (-0.819) = -122.85\,\mathrm{N}, \quad F_{3,y} \approx 150 \cdot 0.574 = 86.10\,\mathrm{N}$$

2. Somatório das componentes

O somatório das componentes x e y da força resultante é dado por:

$$\sum F_x = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x}, \quad \sum F_y = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y}$$

Somatório das componentes x:

$$\sum F_x = 61.28 + 41.04 - 122.85 \approx -20.53\,\mathrm{N}$$

Somatório das componentes y:

$$\sum F_y = 51.44 + 112.80 + 86.10 \approx 250.34\,\mathrm{N}$$

3. Intensidade da força resultante

A intensidade da força resultante F_R é obtida pela fórmula:

$$F_R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$

Substituindo os valores:

$$F_R = \sqrt{(-20.53)^2 + (250.34)^2}$$

$$F_R \approx \sqrt{421.49 + 62670.12} \approx \sqrt{63091.61} \approx 251.18\,\mathrm{N}$$

4. Direção da força resultante

A direção θ_R da força resultante é dada por:

$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x}\right)$$

Substituindo os valores:

$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{250.34}{-20.53}\right)$$

$$\theta_R \approx \tan^{-1}(-12.19) \approx -85.3^\circ$$

Como o somatório $\sum F_x$ é negativo e $\sum F_y$ é positivo, a força resultante está no segundo quadrante. Ajustando a direção:

$$\theta_R = 180^\circ - 85.3^\circ = 94.7^\circ$$

Resumo dos Resultados

- Intensidade da força resultante: $F_R \approx 251.18\,\mathrm{N}$;
- Direção da força resultante: $\theta_R \approx 94.7^\circ$ (em relação ao eixo positivo x).

Figure 2: Visualização da Resultante 1.1.

Exemplo 2 - Resolvido (Força e Coordenadas Cartesianas)

Limitações

O programa aplica a técnica de semelhança de triângulos para ajustar forças definidas por coordenadas quando a intensidade fornecida não coincide com o módulo $\sqrt{x^2+y^2}$. Pequenas diferenças numéricas podem ocorrer devido ao arredondamento durante os cálculos.

Descrição do Exercício

Determinar a intensidade e a direção resultante de n forças coplanares concorrentes em um nó. As forças fornecidas são:

- $F_1 = 800\,\mathrm{N},\ X_1 = 800,\ Y_1 = 600$
- $F_2 = 408\,\mathrm{N},\ X_2 = 480,\ Y_2 = -900$
- $F_3 = 424\,\mathrm{N},\ X_3 = -560,\ Y_3 = -900$

Resolução

1. Verificação das Intensidades

Para cada força, calculamos o módulo $\sqrt{x^2+y^2}$ para comparar com a intensidade fornecida:

$$\begin{aligned}
\text{Módulo de } F_1 &= \sqrt{800^2 + 600^2} = 1000 \\
\text{Módulo de } F_2 &= \sqrt{480^2 + (-900)^2} = 1020 \\
\text{Módulo de } F_3 &= \sqrt{(-560)^2 + (-900)^2} = 1064
\end{aligned}$$

Como os módulos diferem das intensidades fornecidas, aplicaremos a técnica de semelhança de triângulos.

2. Ajuste das Componentes

Para cada força, usamos o fator de escala:

$$\text{Escala} = \frac{\text{intensidade fornecida}}{\text{módulo calculado}}$$

- F_1: Escala $= \frac{800}{1000} = 0.8$

$$\begin{aligned}
X_1' &= 800 \times 0.8 = 640.0 \\
Y_1' &= 600 \times 0.8 = 480.0
\end{aligned}$$

- F_2: Escala $= \frac{408}{1020} = 0.4$

$$X_2' = 480 \times 0.4 = 192.0$$
$$Y_2' = -900 \times 0.4 = -360.0$$

- F_3: Escala $= \frac{424}{1064} \approx 0.3985$

$$X_3' = -560 \times 0.3985 \approx -223.2$$
$$Y_3' = -900 \times 0.3985 \approx -358.7$$

3. Cálculo das Componentes Resultantes

Somamos as componentes ajustadas:

$$X_{\text{resultante}} = X_1' + X_2' + X_3' = 640.0 + 192.0 - 223.2 = 608.8$$
$$Y_{\text{resultante}} = Y_1' + Y_2' + Y_3' = 480.0 - 360.0 - 358.7 = -238.7$$

4. Intensidade e Ângulo Resultantes

- Intensidade:

$$\text{Intensidade} = \sqrt{X_{\text{resultante}}^2 + Y_{\text{resultante}}^2} = \sqrt{608.8^2 + (-238.7)^2} \approx 652.2\,\text{N}$$

- Ângulo:

$$\text{Ângulo} = \text{atan2}(Y_{\text{resultante}}, X_{\text{resultante}}) = \text{degrees}(\text{atan2}(-238.7, 608.8)) \approx -21.4^\circ$$

5. Resultado Final

- $X_{\text{resultante}} = 608.8$
- $Y_{\text{resultante}} = -238.7$
- Intensidade $= 652.2\,\text{N}$
- Ângulo $= -21.4°$

Figure 3: Visualização da resultante$_1$.2.

4 Exercício 2: Reações de Apoio em Vigas Apoiadas

Este exercício aborda a análise de vigas submetidas a carregamentos pontuais ou distribuídos, considerando diferentes tipos de apoio:

- Biapoiada: Contém um apoio fixo e um apoio móvel.
- Engastada: Possui restrições totais em uma extremidade.

O objetivo é determinar as reações de apoio com base nos carregamentos fornecidos.

Metodologia

1. O usuário insere os dados da viga: comprimento e tipo de apoio.
2. As cargas são definidas como:
- Pontuais, com intensidade e posição.
- Distribuídas, descritas por funções em intervalos específicos.

3. Utilizam-se as equações de equilíbrio para o cálculo:

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_A = 0.$$

4. As reações de apoio são calculadas por:
- Integração (para cargas distribuídas).
- Resolução de sistemas de equações lineares (para vigas biapoiadas).

Limitações

O programa apresenta as seguintes limitações:
- Para cargas distribuídas, é necessário inserir funções válidas e bem definidas.
- A precisão dos resultados pode ser afetada por arredondamentos numéricos, especialmente em cálculos envolvendo funções por partes.
- As cargas devem ser inseridas em unidades consistentes (e.g., metros, newtons).

Exemplo 1 - Resolvido (Viga Biapoiada)

Uma viga biapoiada de comprimento $L = 10\,\text{m}$ possui os seguintes apoios:

- Na extremidade A: apoio fixo (2º gênero);
- Na extremidade B: apoio móvel (1º gênero).

O carregamento é dado por uma função $f(x)$ em unidades de força por metro (N/m):

$$f(x) = \begin{cases} 100x, & 0 \leq x < 3\,\text{m} \\ 300, & 3 \leq x < 5\,\text{m} \\ 400, & 5 \leq x \leq 10\,\text{m} \end{cases}$$

Deseja-se determinar:

1. As reações de apoio F_1 (no apoio A) e F_2 (no apoio B);
2. A posição do $\bar{x}$, o ponto de aplicação da força resultante F_R;
3. A verificação do equilíbrio usando a somatória dos momentos em A.

Resolução

1. Força Resultante (F_R)

A força resultante é a integral da carga ao longo do comprimento da viga:

$$F_R = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

Dividindo o cálculo por intervalos:

$$F_R = \int_0^3 100x\,dx + \int_3^5 300\,dx + \int_5^{10} 400\,dx$$

Para o intervalo $0 \leq x < 3$:

$$\int_0^3 100x\,dx = \left[50x^2\right]_0^3 = 50(3^2) - 50(0^2) = 450\,\text{N}$$

Para o intervalo $3 \leq x < 5$:

$$\int_3^5 300\,dx = [300x]_3^5 = 300(5) - 300(3) = 600\,\text{N}$$

Para o intervalo $5 \leq x \leq 10$:

$$\int_5^{10} 400\,dx = [400x]_5^{10} = 400(10) - 400(5) = 2000\,\text{N}$$

Somando as contribuições:

$$F_R = 450 + 600 + 2000 = 3050\,\text{N}$$

2. Posição do Centroide ($\bar{x}$)

O ponto de aplicação da força resultante $\bar{x}$ é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{F_R} \int_0^{10} x f(x)\, dx$$

Dividindo por intervalos:

$$\int_0^{10} x f(x)\, dx = \int_0^3 x(100x)\, dx + \int_3^5 x(300)\, dx + \int_5^{10} x(400)\, dx$$

Para $0 \le x < 3$:

$$\int_0^3 100x^2\, dx = \left[\frac{100}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{100}{3}(3^3) - \frac{100}{3}(0^3) = 900\,\mathrm{m.N}$$

Para $3 \le x < 5$:

$$\int_3^5 300x\, dx = \left[150x^2\right]_3^5 = 150(5^2) - 150(3^2) = 2400\,\mathrm{m.N}$$

Para $5 \le x \le 10$:

$$\int_5^{10} 400x\, dx = \left[200x^2\right]_5^{10} = 200(10^2) - 200(5^2) = 15000\,\mathrm{m.N}$$

Somando:

$$\int_0^{10} x f(x)\, dx = 900 + 1800 + 15000 = 18300\,\mathrm{m.N}$$

Portanto:

$$\bar{x} = \frac{18300}{3050} = 6\,\mathrm{m}$$

3. Reações de Apoio

Usando equilíbrio estático:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 = F_R = 3050\,\mathrm{N}$$

Somatória dos momentos em A ($\sum M_A = 0$):

$$\sum M_A = F_2 \cdot L - F_R \cdot \bar{x} = 0$$

Substituindo os valores:

$$F_2 \cdot 10 = 3050 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{3050 \cdot 6}{10} = 1830\,\mathrm{N}$$

Com F_2 calculado, usamos $F_1 + F_2 = 3050$ para obter:

$$F_1 = 3050 - 1830 = 1220\,\mathrm{N}$$

4. Verificação do Equilíbrio

A somatória dos momentos em A:

$$\sum M_A = F_2 \cdot L - F_R \cdot \bar{x} = 1830 \cdot 10 - 3050 \cdot 6 = 0\,\text{N.m (OK)}$$

Resumo dos Resultados

- $F_R = 3050\,\text{N}$;
- $\bar{x} = 6\,\text{m}$;
- Reações:
  - $F_1 = 1220\,\text{N}$ (em A);
  - $F_2 = 1830\,\text{N}$ (em B).

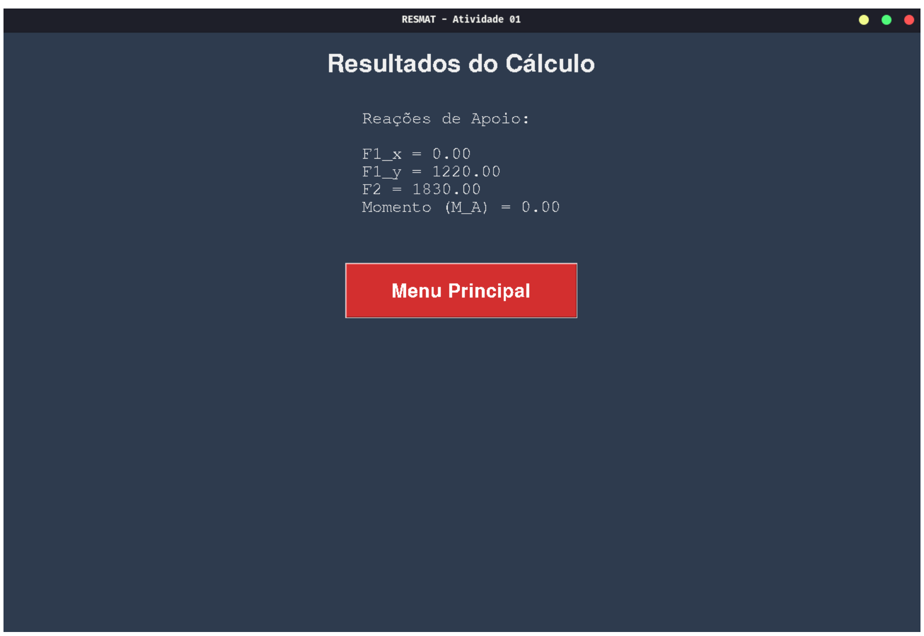

Figure 4: Diagrama das reações de apoio na viga.

Exemplo 2 - Resolvido (Viga Engastada)

Uma viga engastada possui as seguintes características:

- Comprimento total da viga: $L = 10, \mathrm{m}$;
- Ponto de apoio: $X = 0$ (engastada);
- Carga pontual: 500N a 6m do apoio.

Resolução

Utilizando as equações de equilíbrio estático:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \quad \text{(Equilíbrio horizontal)} \\ \Sigma F_y &= 0 \quad \text{(Equilíbrio vertical)} \\ \Sigma M &= 0 \quad \text{(Equilíbrio de momentos no apoio)} \end{aligned}$$

Cálculo de F_{1x}

Não há forças horizontais aplicadas na viga, logo:

$$F_{1x} = 0.$$

Cálculo de F_{1y}

A única força vertical aplicada é a carga pontual de 500N, logo a reação vertical no apoio deve equilibrar essa força:

$$F_{1y} = 500\text{N}.$$

Cálculo do Momento (M)

O momento é calculado em relação ao apoio engastado (em $X = 0$). A carga pontual gera um momento devido à sua distância de 6m do apoio:

$$\begin{aligned} M &= -\text{Força} \times \text{Distância} \\ M &= -500 \times 6 \\ M &= -3000\text{N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

O momento é negativo porque atua no sentido horário.

Resultados Finais

As reações de apoio são:

- $F_{1x} = 0$;
- $F_{1y} = 500, \mathrm{N}$;
- Momento no apoio: $M = -3000\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

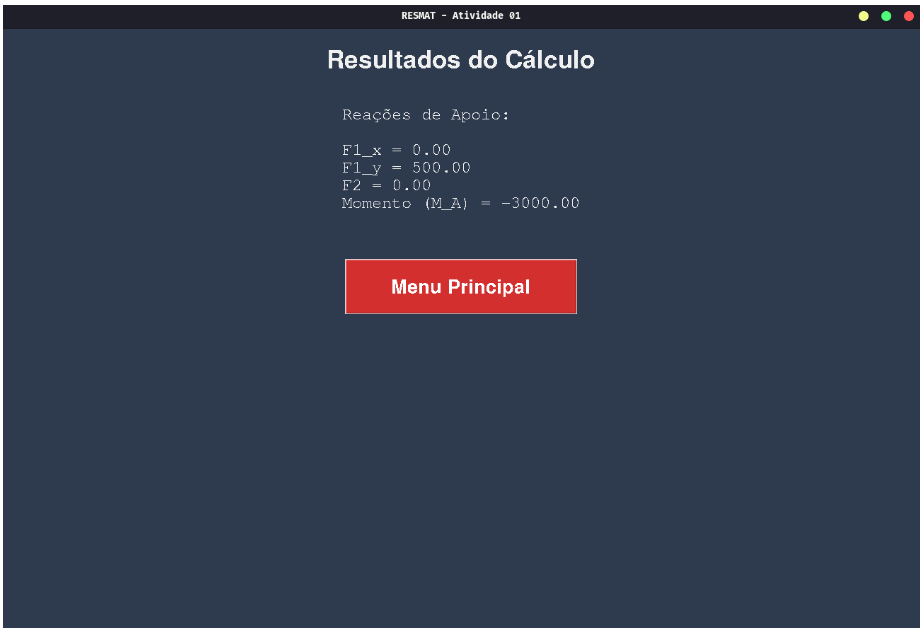

Figure 5: Diagrama das reações de apoio na viga.

5 Exercício 3: Análise de Treliças Planas Isostáticas

Objetivo

Desenvolver um programa para análise e cálculo de treliças planas isostáticas. O objetivo principal é determinar os esforços internos nas barras, verificando sua estabilidade e classificando-as como em tração ou compressão.

Metodologia

O programa foi desenvolvido utilizando uma interface gráfica, que orienta o usuário a configurar corretamente os parâmetros da treliça. As etapas do processo incluem:

1. **Definição dos Nós:** Inserir as coordenadas (X, Y) de cada nó, formando a estrutura da treliça.
2. **Definição das Barras:** Determinar as conexões entre os nós, respeitando a condição de isostaticidade $B = 2N - 3$, onde B é o número de barras e N o número de nós.
3. **Configuração dos Apoios:** Especificar os apoios (fixos, móveis ou engastes), incluindo sua localização e tipo.
4. **Inserção de Forças:** Adicionar os carregamentos nos nós, informando sua magnitude e direção.
5. **Montagem e Resolução do Sistema:** Construir a matriz de conectividade, ajustar o vetor de forças externas e resolver o sistema linear para determinar os esforços internos.
6. **Visualização e Resultados:** Apresentar os resultados em forma de tabela, indicando os esforços internos e suas classificações (tração ou compressão).

O cálculo é realizado com base no Método dos Nós, utilizando as equações de equilíbrio para resolver os sistemas de forças.

Limitações

Apesar de atender aos objetivos gerais, o programa apresenta algumas limitações que devem ser consideradas:

- **Verificação de Isostaticidade:** O programa verifica apenas a condição básica $B = 2N - 3$, mas não valida a ausência de redundâncias ou a formação de subestruturas hiperestáticas.
- **Dimensionalidade:** O cálculo é restrito a estruturas planas, não suportando treliças espaciais.
- **Precisão Numérica:** Para treliças com dimensões extremas ou forças muito grandes, podem ocorrer erros numéricos devido ao arredondamento.

Exemplo 1 - Resolvido (Treliça Plana Isostática)

Dados do Problema

- **Coordenadas dos nós:**
  - Nó A: $(0, 0)$
  - Nó B: $(4, 0)$
  - Nó C: $(2, 3)$
- **Barras:**
  - B_1: Conecta A a B
  - B_2: Conecta B a C
  - B_3: Conecta A a C
- **Apoios:**
  - Nó A: Apoio fixo (2º gênero) $\rightarrow u_x = u_y = 0$
  - Nó B: Apoio móvel (1º gênero) $\rightarrow u_y = 0$
- **Forças aplicadas:**
  - No nó C: $F_y = -10,000\,N$

Cálculo dos Comprimentos e Ângulos das Barras

$$L_{B_1} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = 4\,m, \qquad \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = 0$$

$$L_{B_2} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = 3.61\,m, \quad \cos\theta = -0.5547, \quad \sin\theta = 0.8321$$

$$L_{B_3} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = 3.61\,m, \quad \cos\theta = 0.5547, \quad \sin\theta = 0.8321$$

Montagem da Matriz de Conectividade (A)

A matriz de conectividade é montada como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{B_1} & \cos\theta_{B_2} & \cos\theta_{B_3} \\ \sin\theta_{B_1} & \sin\theta_{B_2} & \sin\theta_{B_3} \\ -\cos\theta_{B_1} & -\cos\theta_{B_2} & 0 \\ -\sin\theta_{B_1} & \sin\theta_{B_2} & 0 \\ 0 & \cos\theta_{B_2} & -\cos\theta_{B_3} \\ 0 & \sin\theta_{B_2} & -\sin\theta_{B_3} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5547 & 0.5547 \\ 0 & 0.8321 & 0.8321 \\ -1 & -0.5547 & 0 \\ 0 & 0.8321 & 0 \\ 0 & 0.5547 & -0.5547 \\ 0 & -0.8321 & -0.8321 \end{bmatrix}$$

Vetor de Forças Externas (F)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ F_{xC} \\ F_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10,000 \end{bmatrix}$$

Consideração de Restrições

As restrições nos apoios ajustam a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{A}_{\text{ajustada}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.5547 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5547 & -0.5547 \\ 0 & -0.8321 & -0.8321 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\text{ajustado}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10,000 \end{bmatrix}$$

Resolução do Sistema

O sistema a ser resolvido é:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

Resolvendo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{B_1} \\ T_{B_2} \\ T_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,333.33 \\ -6,009.25 \\ -6,009.25 \end{bmatrix} N$$

Resultados Finais

Barra	Esforço (N)	Tipo (Tração/Compressão)
$B1(AB)$	$+3,333.33$	Tração
$B2(BC)$	$-6,009.25$	Compressão
$B3(AC)$	$-6,009.25$	Compressão

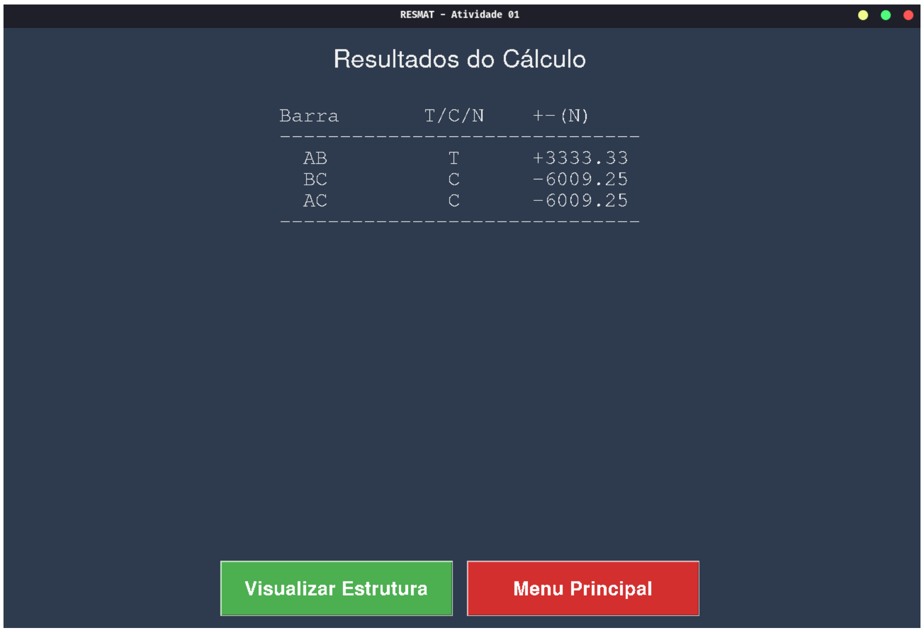

Figure 6: Treliça analisada com os esforços internos nas barras.

6 Conclusão

O código desenvolvido demonstrou alta precisão na análise de sistemas mecânicos, com resultados que, em diversos casos, coincidiram exatamente com os valores calculados manualmente. Essa precisão reflete a robustez do algoritmo utilizado, bem como sua capacidade de reproduzir corretamente as condições de equilíbrio estático em diferentes cenários, como vigas engastadas e treliças planas isostáticas.

Além de oferecer uma abordagem rápida e eficiente para cálculos mecânicos, a ferramenta minimiza erros humanos e possibilita uma análise ágil e confiável de estruturas. A interface gráfica amigável facilita a inserção de dados, enquanto os resultados são apresentados de forma clara e intuitiva, permitindo ao usuário validar os cálculos e compreender os esforços internos com facilidade.

A modularidade da implementação também constitui um ponto forte, fornecendo uma base sólida para aprimoramentos futuros. Entre as possíveis extensões, destacam-se a inclusão de novos tipos de carregamentos, apoios adicionais, e suporte para estruturas mais complexas, como treliças espaciais. Além disso, melhorias na verificação de isostaticidade e na precisão numérica poderiam ampliar ainda mais a aplicabilidade do programa.

7 Referências

- Material do curso de Resistência dos Materiais, conforme proposto pelo professor.
- Repositório GitHub: Acesse aqui o link.