

Relatório da Atividade 02: Análise de Vigas e Trelças Isostáticas

Breno Montanha Costa - 202265513B
Lucas Henrique Nogueira - 202265515B

Fevereiro 2025

1 Introdução

Este relatório apresenta o desenvolvimento de rotinas computacionais para cálculo dos esforços internos em vigas isostáticas e para a representação da configuração deformada de treliças planas isostáticas. As implementações foram baseadas nos problemas 02 e 03 da Atividade 01 e incluem:

- Cálculo das equações de Momento Fletor $M(x)$ e Força Cortante $V(x)$;
- Geração dos diagramas de $M(x)$ e $V(x)$;
- Representação e o cálculo da configuração deformada de treliças isostáticas;
- Uso de um fator de escala para melhor visualização da deformada.

O código foi escrito em Python, utilizando bibliotecas como `numpy` e `matplotlib` para os cálculos e visualizações gráficas.



Figure 1: Interface inicial do programa desenvolvido.

2 Exercício 2: Cálculo de Esforços Internos em Vigas

Objetivo

Desenvolver uma rotina computacional para cálculo dos esforços internos isostáticos e representação dos diagramas em vigas isostáticas.

Metodologia

O programa foi implementado de forma a permitir o cálculo dos esforços em uma treliça biapoiada ou engastada com função de carregamento ou carregamento pontual. Suas etapas são:

1. **Definição do tamanho da barra e apoios:** Inserção do comprimento da barra e seleção do tipo de apoio na barra.
2. **Definição da posição dos apoios:** Inserção da posição dos apoios de acordo com o tipo de apoio selecionado na etapa anterior.
3. **Definição dos carregamentos:** Adição de quantos carregamentos pontuais quanto quiser ou função de carregamento para toda a barra.
4. **Cálculo das relações de apoio:** Cálculo usando a rotina escrita para o exercício 2 da Atividade 1
5. **Cálculo dos esforços em cada ponto da barra:** Cálculo do momento fletor e esforço cortante em cada posição da barra para plotagem dos gráficos

Limitações

O programa apresenta algumas limitações baseadas na implementação computacional:

- **Adição de momentos:** O código não permite a adição de momentos em cada posição da viga para interferir com o momento fletor.
- **Carregamentos pontuais ou função de carregamento:** Da forma que foi implementado, o código apenas aceita varias cargas pontuais ou uma função de carregamento(seja ela por partes ou em toda a barra), não podendo mesclar ambos.
- **Aproximações Numéricas:** Pequenos erros numéricos podem surgir devido à precisão do cálculo de deslocamentos.

Dados do Problema

Neste exemplo, analisamos os esforços em uma barra isostática submetida a um carregamento externo. Inicialmente, determinamos as relações de apoio da barra de acordo com o carregamento existente. Em seguida, determinamos os esforços em cada ponto da barra (cortante e fletor). A solução foi obtida usando o equilíbrio de forças e momentos.

- **Comprimento da barra:** $L = 10 \text{ m}$
- **Apoios:**
 - apoio de 2º gênero: $x = 0 \text{ N}$
 - apoio de 1º gênero: $x = 10 \text{ N}$
- **Carregamento:** $q = 10 \text{ N/m}$

Cálculo das Relações de apoio

Os esforços internos das barras já foram determinados na atividade anterior. Seus valores são:

$$\begin{aligned}R_{Ax} &= 0 \text{ N} \\R_{Ay} &= 50 \text{ N} \\R_B &= 50 \text{ N}\end{aligned}$$

Cálculo dos esforços internos

Os esforços são calculados usando a equação de equilíbrio estático para uma posição genérica de cada seção, para que assim possamos mostrar o gráfico ao final do código. Para esse exercício:

Esforço Cortante $V(x)$:

A função do esforço cortante é dada por:

$$\begin{aligned}V(x) &= R_{Ay} - q \cdot x \\V(x) &= 50 - 10x\end{aligned}$$

Momento Fletor $M(x)$:

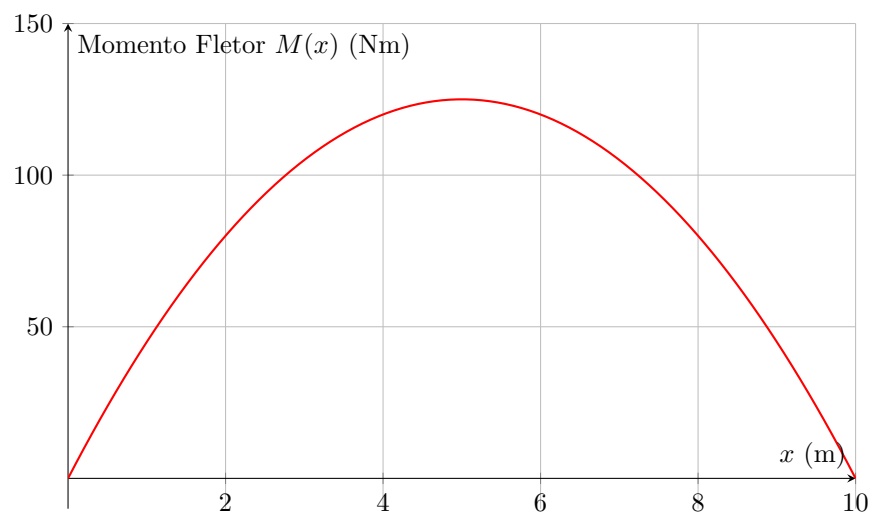
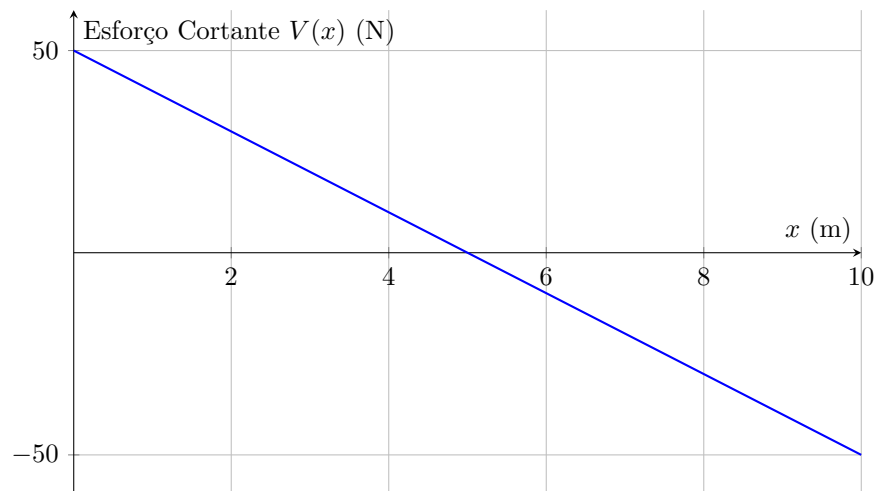
A função do momento fletor é obtida integrando o esforço cortante:

$$M(x) = \int V(x) dx = \int (50 - 10x) dx = 50x - 5x^2 + C$$

Como $M(0) = 0$, a constante $C = 0$. Assim, a expressão final para o momento fletor é:

$$M(x) = 50x - 5x^2$$

Gráficos do esforço cortante e momento fletor



Podemos ver que esses gráficos e o obtidos pelo código se diferenciam apenas pela deformação causada ao inserir ambos um do lado do outro e o fato de no nosso código, tratarmos o momento cortante obtido como negativo para adotar o momento positivo para baixo.

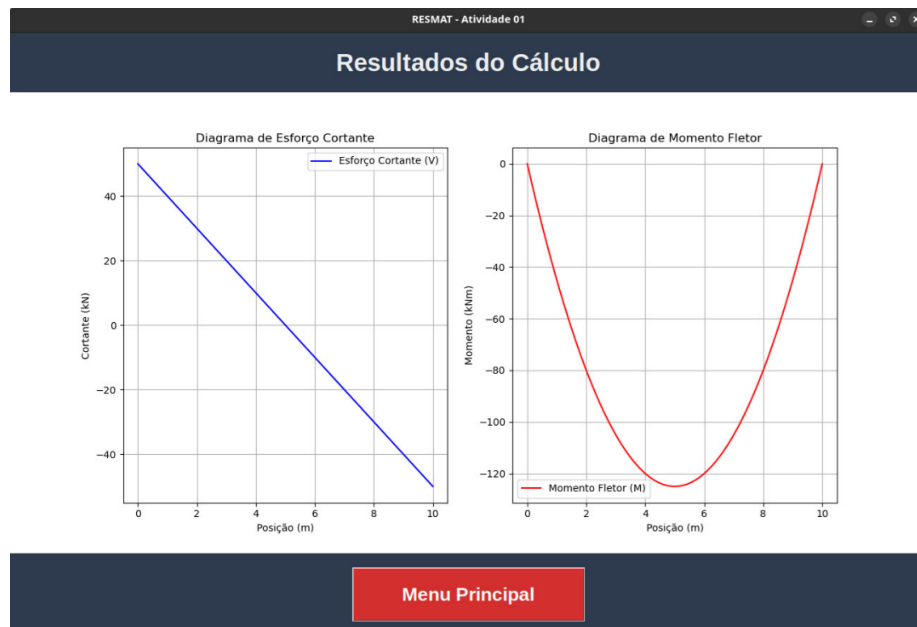


Figure 2: Valores obtidos pelo programa no exercício 1.

3 Exercício 2: Deformações em Treliças Planas Isostáticas

Objetivo

Desenvolver um programa para análise das deformações em treliças planas isostáticas. O objetivo principal é configurar corretamente uma treliça isostática e, a partir disso, calcular a deformação das barras, considerando os deslocamentos nodais e o alongamento das barras.

Metodologia

O programa foi implementado para permitir a configuração completa da treliça e a análise das deformações. As etapas incluem:

1. **Definição dos Nós:** Inserção das coordenadas (X, Y) de cada nó para estruturar a treliça.
2. **Definição das Barras:** Conexão entre os nós para formar as barras da treliça.
3. **Configuração dos Apoios:** Inserção das restrições da estrutura, determinando os apoios fixos e móveis.
4. **Aplicação de Forças:** Definição das forças aplicadas nos nós, considerando magnitude e direção.
5. **Cálculo das Deformações:** Utilização do método da rigidez para obtenção dos deslocamentos nodais e da variação do comprimento das barras.
6. **Visualização dos Resultados:** Geração de uma representação gráfica da treliça deformada, com um fator de escala adequado para melhor visualização.

O cálculo das deformações é realizado com base nas equações do equilíbrio estrutural e no método da rigidez, garantindo uma solução precisa para os deslocamentos e esforços internos.

Limitações

O programa apresenta algumas limitações baseadas na implementação computacional:

- **Validação da Isostaticidade:** O código assume que a treliça é isostática, sem verificação automática de redundâncias estruturais.
- **Condicionamento da Matriz de Rigidez:** Em algumas configurações de treliças, a matriz de rigidez pode ser mal-condicionada, dificultando a resolução numérica.

- **Aproximações Numéricas:** Pequenos erros numéricos podem surgir devido à precisão do cálculo de deslocamentos.
- **Restrições na Modelagem:** Todas as barras são tratadas com os mesmos valores de módulo de elasticidade E e área de seção transversal A , não considerando variações de materiais.

Dados do Problema

Neste exemplo, analisamos as deformações em uma treliça plana isostática submetida a um carregamento externo, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para calcular os deslocamentos dos nós e as deformações nas barras. Inicialmente, determinamos as características geométricas da estrutura, incluindo coordenadas dos nós, apoios e propriedades das barras. Em seguida, aplicamos a formulação da rigidez global, onde cada barra contribui com sua matriz de rigidez local, construída a partir do módulo de elasticidade, área da seção transversal e comprimento da barra. As condições de contorno foram impostas considerando os apoios fixos e móveis, reduzindo o sistema de equações. A solução foi obtida por meio da resolução do sistema de equações lineares da treliça, calculando os deslocamentos dos nós e os esforços internos em cada barra.

- **Coordenadas dos Nós:**
 - Nó A : $(0, 0)$
 - Nó B : $(4, 0)$
 - Nó C : $(2, 3)$
- **Apoios:**
 - Nó A : apoio de 2º gênero (fixo)
 - Nó B : apoio de 1º gênero (móvel, permitindo deslocamento horizontal)
- **Barras:**
 - B_1 : Conecta A a B
 - B_2 : Conecta B a C
 - B_3 : Conecta A a C
- **Propriedades das Barras:**
 - Área da Seção Transversal (A): $5.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 - Módulo de Elasticidade (E): 200 GPa
- **Forças Aplicadas:**
 - No nó C : $F_y = -10,000 \text{ N}$

Comprimento das Barras

Antes de calcular as deformações, determinamos os comprimentos das barras utilizando a fórmula da distância entre dois pontos:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$L_{AB} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 4 \text{ m}$$

$$L_{BC} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{4 + 9} = 3.6056 \text{ m}$$

$$L_{AC} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{4 + 9} = 3.6056 \text{ m}$$

Cálculo das Forças Internas (Equilíbrio)

Os esforços internos das barras já foram determinados na atividade anterior. Seus valores são:

$$N_{AB} = 3333.33 \text{ N} \quad (\text{Tração})$$

$$N_{BC} = 6009.25 \text{ N} \quad (\text{Compressão})$$

$$N_{AC} = 6009.25 \text{ N} \quad (\text{Compressão})$$

Cálculo das Deformações Utilizando o Princípio do Trabalho Virtual (PTV)

A deformação em uma barra pode ser determinada pela expressão do PTV:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{A \cdot E}$$

Substituindo os valores para cada barra:

$$\begin{aligned} \Delta L_{AB} &= \frac{3333.33 \times 4}{(5.0 \times 10^{-4}) \times (200 \times 10^9)} \\ &= \frac{13333.33}{10^8} = 1.33 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (\text{Tração}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta L_{BC} &= \frac{6009.25 \times 3.6056}{(5.0 \times 10^{-4}) \times (200 \times 10^9)} \\ &= \frac{21665.8}{10^8} = 2.16 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (\text{Compressão}) \end{aligned}$$

$$\Delta L_{AC} = \Delta L_{BC} = 2.16 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (\text{Compressão})$$

Cálculo dos Deslocamentos dos Nós

Os deslocamentos dos nós da treliça são obtidos resolvendo o sistema de equações da matriz de rigidez global. A seguir, detalhamos os cálculos.

Montagem da Matriz de Rigidez Global

Cada barra contribui com uma matriz de rigidez local, dada por:

$$k = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{bmatrix}$$

Onde $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$, sendo θ o ângulo da barra com o eixo horizontal.

Para cada barra:

- **Barra AB:**

$$c = 1, \quad s = 0$$

$$k_{AB} = \frac{(200 \times 10^9)(5.0 \times 10^{-4})}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Barra BC:**

$$c = \frac{2}{3.6056} = 0.5547, \quad s = \frac{3}{3.6056} = 0.8321$$

$$k_{BC} = \frac{(200 \times 10^9)(5.0 \times 10^{-4})}{3.6056} \begin{bmatrix} 0.3086 & 0.4629 & -0.3086 & -0.4629 \\ 0.4629 & 0.6914 & -0.4629 & -0.6914 \\ -0.3086 & -0.4629 & 0.3086 & 0.4629 \\ -0.4629 & -0.6914 & 0.4629 & 0.6914 \end{bmatrix}$$

- **Barra AC:**

$$c = \frac{2}{3.6056} = 0.5547, \quad s = \frac{3}{3.6056} = 0.8321$$

$$k_{AC} = \frac{(200 \times 10^9)(5.0 \times 10^{-4})}{3.6056} \begin{bmatrix} 0.3086 & 0.4629 & -0.3086 & -0.4629 \\ 0.4629 & 0.6914 & -0.4629 & -0.6914 \\ -0.3086 & -0.4629 & 0.3086 & 0.4629 \\ -0.4629 & -0.6914 & 0.4629 & 0.6914 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez global é obtida somando as contribuições das barras nos graus de liberdade correspondentes.

Aplicação das Condições de Contorno

Os apoios impõem restrições nos deslocamentos:

- Nó A : Apoio fixo ($u_A = 0, v_A = 0$)
- Nó B : Apoio móvel ($v_B = 0$)

Resolução do Sistema de Equações

A matriz reduzida de rigidez K_{red} e o vetor de forças aplicadas F resultam em:

$$K_{\text{red}} \cdot U = F$$

onde:

$$K_{\text{red}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \\ v_C \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10,000 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$U = \begin{bmatrix} 1.02 \times 10^{-4} \text{ m} \\ 0.51 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -2.45 \times 10^{-4} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Determinação dos Deslocamentos

Os deslocamentos dos nós são:

- Nó A : $(0, 0)$ (fixo, sem deslocamento)
- Nó B : $(4 + 1.02 \times 10^{-4}, 0)$
- Nó C : $(2 + 0.51 \times 10^{-4}, 3 - 2.45 \times 10^{-4})$

Tabela de Deformações e Deslocamentos

Deformações nas Barras

Barra	Deslocamento (m)	Tipo
AB	1.33×10^{-4}	Tração
BC	2.16×10^{-4}	Compressão
AC	2.16×10^{-4}	Compressão

Deslocamentos dos Nós

Nó	Posição Anterior (m)	Novo Ponto (m)	Deslocamento (m)
A	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
B	(4, 0)	$(4 + 1.02 \times 10^{-4}, 0)$	$(1.02 \times 10^{-4}, 0)$
C	(2, 3)	$(2 + 0.51 \times 10^{-4}, 3 - 2.45 \times 10^{-4})$	$(0.51 \times 10^{-4}, -2.45 \times 10^{-4})$



Figure 3: Valores obtidos pelo programa no exercício 2.

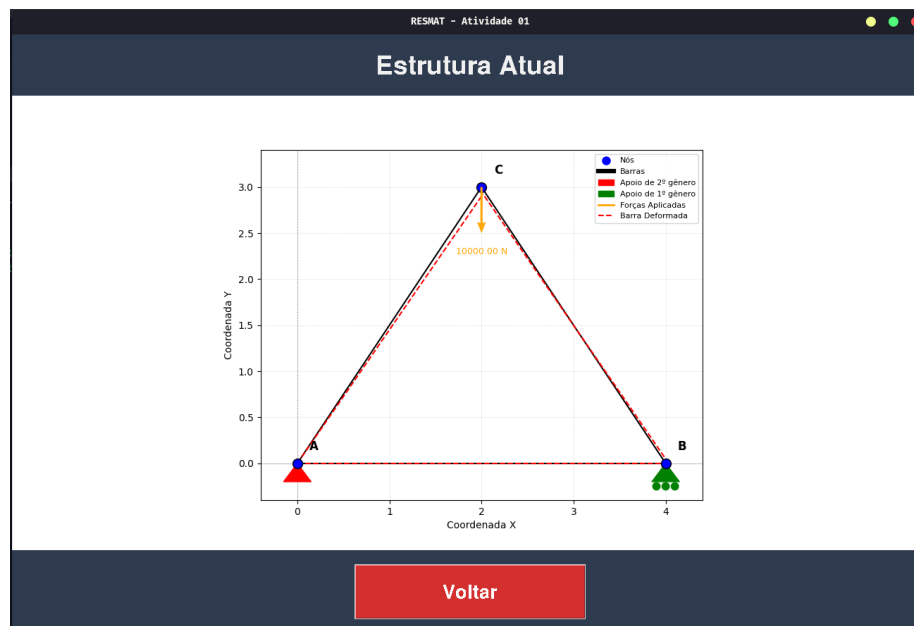


Figure 4: Treliça deformada no exercício 2

4 Conclusão

O desenvolvimento das rotinas computacionais permitiu calcular e visualizar os esforços internos em vigas e a configuração e o cálculo de treliças deformadas. Os resultados obtidos foram validados por comparação com soluções analíticas e apresentam coerência diante dos valores. Possíveis melhorias incluem a implementação de um método interativo para edição dos carregamentos e melhorias na interface gráfica.

5 Referências

- Material do curso de Resistência dos Materiais, conforme proposto pelo professor.
- Repositório GitHub: Acesse aqui o link.