

# Relatório da Atividade 01: Análise de Sistemas Mecânicos

Breno Montanha Costa - 202265513B  
Lucas Henrique Nogueira - 202265515B

Janeiro 2025

## 1 Introdução

Este relatório descreve o desenvolvimento de um programa em Python com interface gráfica (GUI) que resolve problemas mecânicos aplicados, incluindo:

- Cálculo de forças coplanares concorrentes.
- Determinação das reações de apoio em vigas apoiadas.
- Análise de treliças planas isostáticas.

O programa utiliza a biblioteca `Tkinter` para criar uma interface ao usuário e módulos como `matplotlib` para visualização gráfica. Este documento apresenta as funcionalidades, exemplos testados, e resultados obtidos com o software e suas possíveis limitações.



Figure 1: Interface inicial do programa desenvolvido.

## 2 Funcionalidades do Programa

O programa oferece as seguintes características:

1. **Interface Gráfica Amigável:** - Estruturada com botões, campos de entrada e menus claros. - Validações integradas para evitar erros de entrada do usuário.
2. **Visualizações Gráficas:** - Representação vetorial de forças no plano cartesiano. - Gráficos das soluções de problemas como reações em vigas e esforços em treliças.
3. **Cálculos Automatizados:** - Cálculo da resultante de forças concorrentes (intensidade e ângulo). - Determinação das reações de apoio em sistemas de vigas. - Análise de esforços internos em barras de treliças isostáticas.
4. **Modularidade:** - Arquitetura do código separada em módulos (`force.py`, `force_operations.py`, entre outros). - Facilita a manutenção e expansão do programa.
5. **Personalização e Edição:** - Permite ao usuário editar forças existentes, visualizar a solução em tempo real e alterar parâmetros.

### 3 Exercício 1: Forças Coplanares Concorrentes

Este exercício aborda o cálculo da intensidade e direção da força resultante de  $N$  forças coplanares concorrentes em um único ponto (nó). As forças podem ser definidas em duas formas:

- Por ângulo e intensidade.
- Por componentes cartesianas  $(X, Y)$  e intensidade (se necessário).

O programa permite visualizar as forças aplicadas e calcular a resultante, incluindo sua intensidade e direção.

#### Metodologia

1. O usuário insere o número total de forças que deseja adicionar.
2. Cada força é definida por: - Ângulo (em graus) e intensidade (em newtons), ou - Componentes cartesianas  $(X, Y)$ .
3. Todas as forças são representadas como vetores no plano cartesiano.
4. O cálculo da força resultante segue as equações vetoriais:

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \theta_R = \tan^{-1} \left( \frac{R_y}{R_x} \right)$$

## Exemplo 1 - Resolvido (Força e Ângulo)

Três forças coplanares concorrentes atuam sobre um nó. Deseja-se determinar:

- A intensidade da força resultante ( $F_R$ );
- A direção da força resultante ( $\theta_R$ ).

As forças são dadas por:

- $F_1 = 80 \text{ N}$ , com direção  $40^\circ$  (em relação ao eixo positivo  $x$ );
- $F_2 = 120 \text{ N}$ , com direção  $70^\circ$ ;
- $F_3 = 150 \text{ N}$ , com direção  $145^\circ$ .

### Resolução

Para resolver o problema, utilizaremos as componentes  $x$  e  $y$  de cada força e, em seguida, calcularemos a força resultante  $F_R$  e sua direção  $\theta_R$ .

#### 1. Componentes $x$ e $y$ das forças

Cada força  $F_i$  é decomposta em suas componentes  $x$  ( $F_{i,x}$ ) e  $y$  ( $F_{i,y}$ ), dadas por:

$$F_{i,x} = F_i \cos \theta_i, \quad F_{i,y} = F_i \sin \theta_i$$

**Para  $F_1 = 80 \text{ N}$  com  $\theta_1 = 40^\circ$ :**

$$F_{1,x} = 80 \cos 40^\circ \quad \text{e} \quad F_{1,y} = 80 \sin 40^\circ$$

$$F_{1,x} \approx 80 \cdot 0.766 = 61.28 \text{ N}, \quad F_{1,y} \approx 80 \cdot 0.643 = 51.44 \text{ N}$$

**Para  $F_2 = 120 \text{ N}$  com  $\theta_2 = 70^\circ$ :**

$$F_{2,x} = 120 \cos 70^\circ \quad \text{e} \quad F_{2,y} = 120 \sin 70^\circ$$

$$F_{2,x} \approx 120 \cdot 0.342 = 41.04 \text{ N}, \quad F_{2,y} \approx 120 \cdot 0.940 = 112.80 \text{ N}$$

**Para  $F_3 = 150 \text{ N}$  com  $\theta_3 = 145^\circ$ :**

$$F_{3,x} = 150 \cos 145^\circ \quad \text{e} \quad F_{3,y} = 150 \sin 145^\circ$$

$$F_{3,x} \approx 150 \cdot (-0.819) = -122.85 \text{ N}, \quad F_{3,y} \approx 150 \cdot 0.574 = 86.10 \text{ N}$$

#### 2. Somatório das componentes

O somatório das componentes  $x$  e  $y$  da força resultante é dado por:

$$\sum F_x = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x}, \quad \sum F_y = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y}$$

**Somatório das componentes  $x$ :**

$$\sum F_x = 61.28 + 41.04 - 122.85 \approx -20.53 \text{ N}$$

**Somatório das componentes  $y$ :**

$$\sum F_y = 51.44 + 112.80 + 86.10 \approx 250.34 \text{ N}$$

### 3. Intensidade da força resultante

A intensidade da força resultante  $F_R$  é obtida pela fórmula:

$$F_R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$

Substituindo os valores:

$$F_R = \sqrt{(-20.53)^2 + (250.34)^2}$$

$$F_R \approx \sqrt{421.49 + 62670.12} \approx \sqrt{63091.61} \approx 251.18 \text{ N}$$

### 4. Direção da força resultante

A direção  $\theta_R$  da força resultante é dada por:

$$\theta_R = \tan^{-1} \left( \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right)$$

Substituindo os valores:

$$\theta_R = \tan^{-1} \left( \frac{250.34}{-20.53} \right)$$

$$\theta_R \approx \tan^{-1}(-12.19) \approx -85.3^\circ$$

Como o somatório  $\sum F_x$  é negativo e  $\sum F_y$  é positivo, a força resultante está no segundo quadrante. Ajustando a direção:

$$\theta_R = 180^\circ - 85.3^\circ = 94.7^\circ$$

### Resumo dos Resultados

- Intensidade da força resultante:  $F_R \approx 251.18 \text{ N}$ ;
- Direção da força resultante:  $\theta_R \approx 94.7^\circ$  (em relação ao eixo positivo  $x$ ).



Figure 2: Visualização vetorial das forças concorrentes e sua resultante.

## Exemplo 2 - Resolvido (Força e Coordenadas Cartesianas)

### Limitações

O programa aplica a técnica de semelhança de triângulos para ajustar forças definidas por coordenadas quando a intensidade fornecida não coincide com o módulo  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Pequenas diferenças numéricas podem ocorrer devido ao arredondamento durante os cálculos.

### Descrição do Exercício

Determinar a intensidade e a direção resultante de  $n$  forças coplanares concorrentes em um nó. As forças fornecidas são:

- $F_1 = 800 \text{ N}$ ,  $X_1 = 800$ ,  $Y_1 = 600$
- $F_2 = 408 \text{ N}$ ,  $X_2 = 480$ ,  $Y_2 = -900$
- $F_3 = 424 \text{ N}$ ,  $X_3 = -560$ ,  $Y_3 = -900$

### Resolução

#### 1. Verificação das Intensidades

Para cada força, calculamos o módulo  $\sqrt{x^2 + y^2}$  para comparar com a intensidade fornecida:

$$\text{Módulo de } F_1 = \sqrt{800^2 + 600^2} = 1000$$

$$\text{Módulo de } F_2 = \sqrt{480^2 + (-900)^2} = 1020$$

$$\text{Módulo de } F_3 = \sqrt{(-560)^2 + (-900)^2} = 1064$$

Como os módulos diferem das intensidades fornecidas, aplicaremos a técnica de semelhança de triângulos.

#### 2. Ajuste das Componentes

Para cada força, usamos o fator de escala:

$$\text{Escala} = \frac{\text{intensidade fornecida}}{\text{módulo calculado}}$$

- $F_1$ : Escala =  $\frac{800}{1000} = 0.8$

$$X'_1 = 800 \times 0.8 = 640.0$$

$$Y'_1 = 600 \times 0.8 = 480.0$$

- $F_2$ : Escala =  $\frac{408}{1020} = 0.4$

$$X'_2 = 480 \times 0.4 = 192.0$$

$$Y'_2 = -900 \times 0.4 = -360.0$$

- $F_3$ : Escala =  $\frac{424}{1064} \approx 0.3985$

$$X'_3 = -560 \times 0.3985 \approx -223.2$$

$$Y'_3 = -900 \times 0.3985 \approx -358.7$$

### 3. Cálculo das Componentes Resultantes

Somamos as componentes ajustadas:

$$X_{\text{resultante}} = X'_1 + X'_2 + X'_3 = 640.0 + 192.0 - 223.2 = 608.8$$

$$Y_{\text{resultante}} = Y'_1 + Y'_2 + Y'_3 = 480.0 - 360.0 - 358.7 = -238.7$$

### 4. Intensidade e Ângulo Resultantes

- Intensidade:

$$\text{Intensidade} = \sqrt{X_{\text{resultante}}^2 + Y_{\text{resultante}}^2} = \sqrt{608.8^2 + (-238.7)^2} \approx 652.2 \text{ N}$$

- Ângulo:

$$\hat{\text{Ângulo}} = \text{atan2}(Y_{\text{resultante}}, X_{\text{resultante}}) = \text{degrees}(\text{atan2}(-238.7, 608.8)) \approx -21.4^\circ$$



## 5. Resultado Final

- $X_{\text{resultante}} = 608.8$
- $Y_{\text{resultante}} = -238.7$
- Intensidade = 652.2 N
- $\hat{\text{Ângulo}} = -21.4^\circ$



Figure 3: Visualização vetorial das forças concorrentes e sua resultante.

## 4 Exercício 2: Reações de Apoio em Vigas Apoiadas

Este exercício aborda a análise de vigas submetidas a carregamentos pontuais ou distribuídos, considerando diferentes tipos de apoio:

- Biapoiada: Contém um apoio fixo e um apoio móvel.
- Engastada: Possui restrições totais em uma extremidade.

O objetivo é determinar as reações de apoio com base nos carregamentos fornecidos.

### Metodologia

1. O usuário insere os dados da viga: comprimento e tipo de apoio.
2. As cargas são definidas como:
  - Pontuais, com intensidade e posição.
  - Distribuídas, descritas por funções em intervalos específicos.
3. Utilizam-se as equações de equilíbrio para o cálculo:

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_A = 0.$$

4. As reações de apoio são calculadas por:
  - Integração (para cargas distribuídas).
  - Resolução de sistemas de equações lineares (para vigas biapoiadas).

### Limitações

O programa apresenta as seguintes limitações:

- Para cargas distribuídas, é necessário inserir funções válidas e bem definidas.
- A precisão dos resultados pode ser afetada por arredondamentos numéricos, especialmente em cálculos envolvendo funções por partes.
- As cargas devem ser inseridas em unidades consistentes (e.g., metros, newtons).

## Enunciado 1 - Viga Biapoiada

Uma viga biapoiada de comprimento  $L = 10$  m possui os seguintes apoios:

- Na extremidade  $A$ : apoio fixo (2º gênero);
- Na extremidade  $B$ : apoio móvel (1º gênero).

O carregamento é dado por uma função  $f(x)$  em unidades de força por metro (N/m):

$$f(x) = \begin{cases} 100x, & 0 \leq x < 3 \text{ m} \\ 300, & 3 \leq x < 5 \text{ m} \\ 400, & 5 \leq x \leq 10 \text{ m} \end{cases}$$

Deseja-se determinar:

1. As reações de apoio  $F_1$  (no apoio  $A$ ) e  $F_2$  (no apoio  $B$ );
2. A posição do  $\bar{x}$ , o ponto de aplicação da força resultante  $F_R$ ;
3. A verificação do equilíbrio usando a somatória dos momentos em  $A$ .

### Resolução

#### 1. Força Resultante ( $F_R$ )

A força resultante é a integral da carga ao longo do comprimento da viga:

$$F_R = \int_0^{10} f(x) dx$$

Dividindo o cálculo por intervalos:

$$F_R = \int_0^3 100x dx + \int_3^5 300 dx + \int_5^{10} 400 dx$$

Para o intervalo  $0 \leq x < 3$ :

$$\int_0^3 100x dx = [50x^2]_0^3 = 50(3^2) - 50(0^2) = 450 \text{ N}$$

Para o intervalo  $3 \leq x < 5$ :

$$\int_3^5 300 dx = [300x]_3^5 = 300(5) - 300(3) = 600 \text{ N}$$

Para o intervalo  $5 \leq x \leq 10$ :

$$\int_5^{10} 400 dx = [400x]_5^{10} = 400(10) - 400(5) = 2000 \text{ N}$$

Somando as contribuições:

$$F_R = 450 + 600 + 2000 = 3050 \text{ N}$$

## 2. Posição do Centróide ( $\bar{x}$ )

O ponto de aplicação da força resultante  $\bar{x}$  é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{F_R} \int_0^{10} x f(x) dx$$

Dividindo por intervalos:

$$\int_0^{10} x f(x) dx = \int_0^3 x(100x) dx + \int_3^5 x(300) dx + \int_5^{10} x(400) dx$$

Para  $0 \leq x < 3$ :

$$\int_0^3 100x^2 dx = \left[ \frac{100}{3} x^3 \right]_0^3 = \frac{100}{3} (3^3) - \frac{100}{3} (0^3) = 900 \text{ m.N}$$

Para  $3 \leq x < 5$ :

$$\int_3^5 300x dx = [150x^2]_3^5 = 150(5^2) - 150(3^2) = 2400 \text{ m.N}$$

Para  $5 \leq x \leq 10$ :

$$\int_5^{10} 400x dx = [200x^2]_5^{10} = 200(10^2) - 200(5^2) = 15000 \text{ m.N}$$

Somando:

$$\int_0^{10} x f(x) dx = 900 + 1800 + 15000 = 18300 \text{ m.N}$$

Portanto:

$$\bar{x} = \frac{18300}{3050} = 6 \text{ m}$$

## 3. Reações de Apoio

Usando equilíbrio estático:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = F_R = 3050 \text{ N}$$

Somatória dos momentos em A ( $\sum M_A = 0$ ):

$$\sum M_A = F_2 \cdot L - F_R \cdot \bar{x} = 0$$

Substituindo os valores:

$$F_2 \cdot 10 = 3050 \cdot 6 \Rightarrow F_2 = \frac{3050 \cdot 6}{10} = 1830 \text{ N}$$

Com  $F_2$  calculado, usamos  $F_1 + F_2 = 3050$  para obter:

$$F_1 = 3050 - 1830 = 1220 \text{ N}$$

#### 4. Verificação do Equilíbrio

A somatória dos momentos em  $A$ :

$$\sum M_A = F_2 \cdot L - F_R \cdot \bar{x} = 1830 \cdot 10 - 3050 \cdot 6 = 0 \text{ N.m (OK)}$$

#### Resumo dos Resultados

- $F_R = 3050 \text{ N}$ ;
- $\bar{x} = 6 \text{ m}$ ;
- Reações:
  - $F_1 = 1220 \text{ N}$  (em  $A$ );
  - $F_2 = 1830 \text{ N}$  (em  $B$ ).

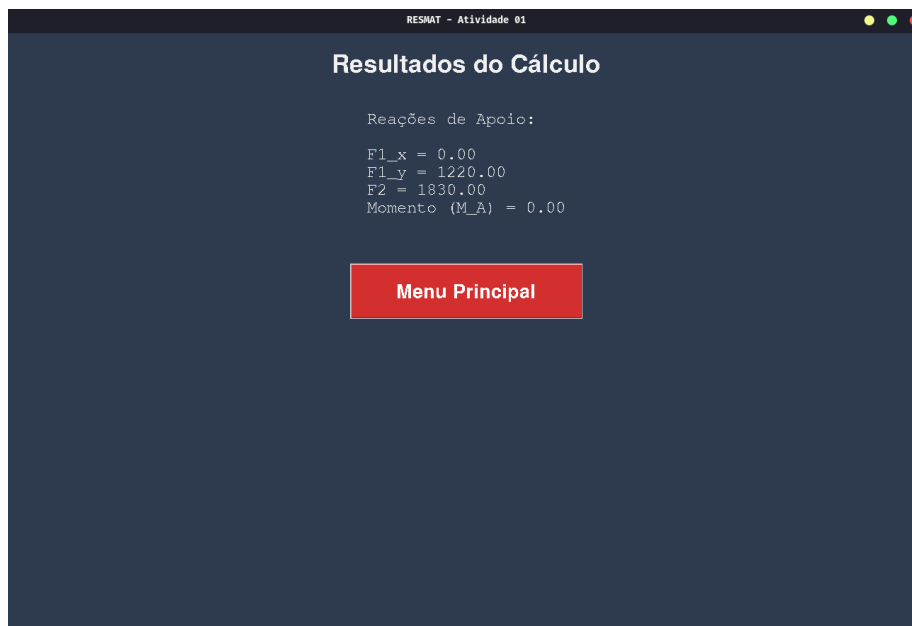


Figure 4: Diagrama das reações de apoio na viga.

## Enunciado 2 - Viga Engastada

Uma viga engastada possui as seguintes características:

- Comprimento total da viga:  $L = 10, \text{ m}$ ;
- Ponto de apoio:  $X = 0$  (engastada);
- Carga pontual:  $500, \text{ N}$  a  $6, \text{ m}$  do apoio.

Calcule as seguintes reações de apoio:

1.  $F_{1x}$ : Força horizontal no apoio;
2.  $F_{1y}$ : Força vertical no apoio;
3. Momento ( $M$ ) no apoio.

## Resolução

Utilizando as equações de equilíbrio estático:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\text{Equilíbrio horizontal})$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (\text{Equilíbrio vertical})$$

$$\Sigma M = 0 \quad (\text{Equilíbrio de momentos no apoio})$$

### Cálculo de $F_{1x}$

Não há forças horizontais aplicadas na viga, logo:

$$F_{1x} = 0.$$

### Cálculo de $F_{1y}$

A única força vertical aplicada é a carga pontual de  $500, \text{ N}$ , logo a reação vertical no apoio deve equilibrar essa força:

$$F_{1y} = 500, \text{ N}.$$

### Cálculo do Momento ( $M$ )

O momento é calculado em relação ao apoio engastado (em  $X = 0$ ). A carga pontual gera um momento devido à sua distância de  $6, \text{ m}$  do apoio:

$$M = -\text{Força} \times \text{Distância}$$

$$M = -500 \times 6$$

$$M = -3000, \text{ N} \cdot \text{ m}.$$

O momento é negativo porque atua no sentido horário.

## Resultados Finais

As reações de apoio são:

- $F_{1x} = 0$ ;
- $F_{1y} = 500, \text{N}$ ;
- Momento no apoio:  $M = -3000, \text{N} \cdot \text{m}$ .

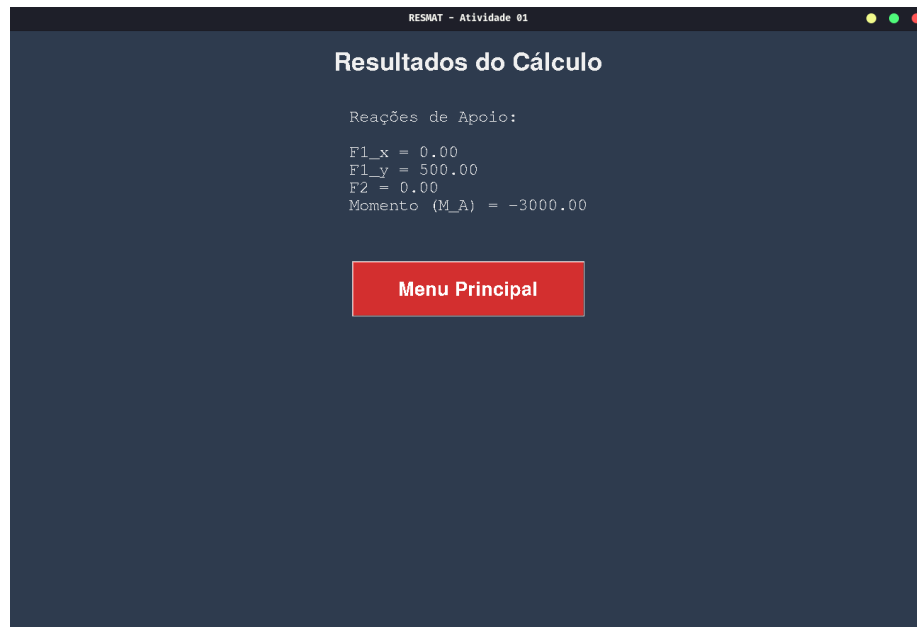


Figure 5: Diagrama das reações de apoio na viga.

## 5 Exercício 3: Análise de Treliças Planas Isostáticas

### Dados do Problema

- **Coordenadas dos nós:**
  - Nó  $A$ :  $(0, 0)$
  - Nó  $B$ :  $(4, 0)$
  - Nó  $C$ :  $(2, 3)$
- **Barras:**
  - $B_1$ : Conecta  $A$  a  $B$
  - $B_2$ : Conecta  $B$  a  $C$
  - $B_3$ : Conecta  $A$  a  $C$
- **Apoios:**
  - Nó  $A$ : Apoio fixo ( $2^o$  gênero)  $\rightarrow u_x = u_y = 0$
  - Nó  $B$ : Apoio móvel ( $1^o$  gênero)  $\rightarrow u_y = 0$
- **Forças aplicadas:**
  - No nó  $C$ :  $F_y = -10,000\text{ N}$

### Cálculo dos Comprimentos e Ângulos das Barras

$$L_{B_1} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = 4\text{ m}, \quad \cos \theta = 1, \quad \sin \theta = 0$$

$$L_{B_2} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = 3.61\text{ m}, \quad \cos \theta = -0.5547, \quad \sin \theta = 0.8321$$

$$L_{B_3} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = 3.61\text{ m}, \quad \cos \theta = 0.5547, \quad \sin \theta = 0.8321$$

### Montagem da Matriz de Conectividade ( $\mathbf{A}$ )

A matriz de conectividade é montada como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{B_1} & \cos \theta_{B_2} & \cos \theta_{B_3} \\ \sin \theta_{B_1} & \sin \theta_{B_2} & \sin \theta_{B_3} \\ -\cos \theta_{B_1} & -\cos \theta_{B_2} & 0 \\ -\sin \theta_{B_1} & \sin \theta_{B_2} & 0 \\ 0 & \cos \theta_{B_2} & -\cos \theta_{B_3} \\ 0 & \sin \theta_{B_2} & -\sin \theta_{B_3} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5547 & 0.5547 \\ 0 & 0.8321 & 0.8321 \\ -1 & -0.5547 & 0 \\ 0 & 0.8321 & 0 \\ 0 & 0.5547 & -0.5547 \\ 0 & -0.8321 & -0.8321 \end{bmatrix}$$



## Vetor de Forças Externas ( $\mathbf{F}$ )

O vetor de forças externas é dado por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ F_{xC} \\ F_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10,000 \end{bmatrix}$$

## Consideração de Restrições

As restrições nos apoios ajustam a matriz  $\mathbf{A}$  e o vetor  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{A}_{\text{ajustada}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.5547 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5547 & -0.5547 \\ 0 & -0.8321 & -0.8321 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\text{ajustado}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10,000 \end{bmatrix}$$

## Resolução do Sistema

O sistema a ser resolvido é:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

Resolvendo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{B_1} \\ T_{B_2} \\ T_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,333.33 \\ -6,009.25 \\ -6,009.25 \end{bmatrix} N$$

## Resultados Finais

Os esforços internos nas barras são apresentados na tabela abaixo:

Barra	Esforço (N)	Tipo (Tração/Compressão)
$B1(AB)$	+3,333.33	Tração
$B2(BC)$	-6,009.25	Compressão
$B3(AC)$	-6,009.25	Compressão

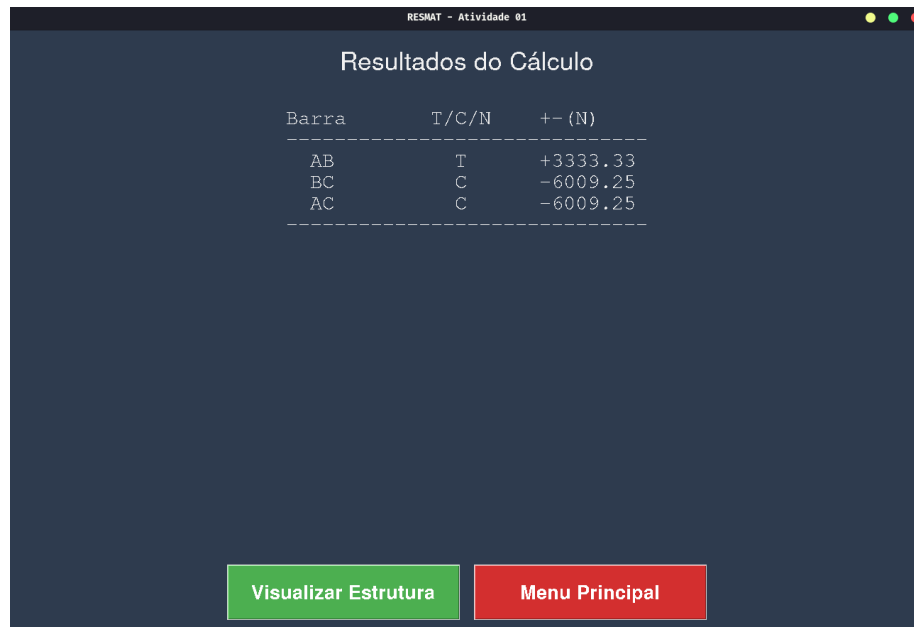


Figure 6: Treliça analisada com os esforços internos nas barras.

## 6 Conclusão

O código desenvolvido se mostrou bem próximo dos valores calculados manualmente e, em alguns casos, o valor calculado pelo programa bateu exatamente com o valor manual. Isso demonstra a precisão do algoritmo e sua capacidade de reproduzir corretamente as condições de equilíbrio estático da viga engastada. A ferramenta oferece uma maneira rápida e eficiente de realizar esses cálculos, evitando erros humanos e permitindo uma análise mais ágil dos sistemas mecânicos. A implementação também proporciona uma ótima base para futuras melhorias, como a inclusão de novos tipos de carregamentos ou apoios.

## 7 Referências

- Material do curso de Resistência dos Materiais, conforme proposto pelo professor.
- Repositório GitHub: Acesse aqui o link.