

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA

GUSTAVO LOPES OLIVEIRA	10335490
JOÃO AFONSO QUINTEIRO PEROSA	10335805
LUCAS HIDEKI TAKEUCHI OKAMURA	9274315
MATEUS ALVES MEDEIROS	10274307

**Controle de movimentos laterais de uma aeronave**

São Paulo

2020

GUSTAVO LOPES OLIVEIRA  
JOÃO AFONSO QUINTEIRO PEROSA  
LUCAS HIDEKI TAKEUCHI OKAMURA  
MATEUS ALVES MEDEIROS

## **Controle de movimentos laterais de uma aeronave**

### **Versão Original**

Relatório de controle para a disciplina de Controle e Aplicações, código PME 3381, do curso de engenharia mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Área de concentração: Engenharia Mecânica.

Professores: Agenor de Toledo Fleury e Décio Crisol Donha.

SÃO PAULO

2020

## **RESUMO**

Este relatório é a continuação daquele apresentado na primeira metade disciplina de Controle e Aplicações. No presente, se apresentará um estudo acerca do controle de uma aeronave Boeing 747 em regime de cruzeiro e seus movimentos laterais. Para isso, serão aplicados os conhecimentos obtidos nas aulas da disciplina de Controle e Aplicações, bem como a teoria de Mecânica dos Fluidos e Aeronáutica, consultando a bibliografia disponível dos acervos da Escola Politécnica. O resultado a ser adquirido é um sistema capaz de controlar o modelo satisfatoriamente.

**Palavras-chave:** Avião; aeronave; modelagem dinâmica; movimentos laterais; rolagem; guinada; superfícies de controle; dinâmica de voo; controle clássico.

## LISTAS DE FIGURAS

Figura 1 - Superfícies de controle.	9
Figura 2 - Sistemas de coordenadas adotados.	13
Figura 3 - Indicação do ângulo de rolagem.	13
Figura 4 - Indicação do ângulo de guinada.	13
Figura 5 - Polos do sistema sobre o plano imaginário.	18
Figura 6 - Gráficos das variações da velocidade v ( $\Delta v$ ) (esquerda) e da velocidade angular p ( $\Delta p$ ) (direita) para entrada em degrau em $t=4,0\text{s}$ nas deflexões dos ailerons e do leme.	20
Figura 7 - Gráficos das variações da velocidade angular r ( $\Delta r$ ) (esquerda) e do ângulo de rolagem $\phi$ ( $\Delta\phi$ ) para entrada em degrau em $t=4,0\text{s}$ nas deflexões dos ailerons e do leme.	20
Figura 8 - Diagrama de Bode para velocidade v e deflexão do aileron (esquerda) e do leme (direita).	21
Figura 9 - Diagrama de Bode para velocidade angular p e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita).	22
Figura 10 - Diagrama de Bode para velocidade angular r e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita).	23
Figura 11 - Diagrama de Bode para ângulo de rolagem e deflexão no aileron (esquerda) e no leme(direita).	24
Figura 12 - Diagrama de blocos para o sistema.	25
Figura 13 - Deflexão das superfícies leme e aileron - Alocação de Polos.	27
Figura 14 - Deflexão das superfícies leme e aileron - LQR.	28
Figura 15 - Resposta dos controladores por LQR e Alocação de Polos para as variáveis de estado (a) velocidade v (esquerda superior), (b) velocidade p (direita superior), (c) velocidade r (esquerda inferior), (d) ângulo phi (direita inferior).	29
Figura 16 - Comparação de erro de observação pelos métodos LQR e Alocação de Polos (a) velocidade v (esquerda superior), (b) velocidade p (direita superior), (c) velocidade r (esquerda inferior), (d) ângulo phi (direita inferior).	31
Figura 17 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por alocação de polos (a) velocidade v (esquerda superior), (b) velocidade p (direita superior), (c) velocidade r (esquerda inferior), (d) ângulo phi (direita inferior).	32
Figura 18 - Comparação de polos do observador e do controlador (a) por alocação de polos por LQR (b).	33
Figura 19 - Velocidade (a) lateral (esquerda), (b) de guinada (direita) seguindo de referência fixa.	34
Figura 20 - Resposta da saída da velocidade de guinada seguindo referência senoidal.	35
Figura 21 - Velocidade de guinada seguindo referência senoidal com distúrbio.	35
Figura 22 - Diagrama de blocos da entrada e saída a serem controladas.	36
Figura 23 - Polos e zeros do sistema em malha aberta.	37

Figura 24 - Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.	38
Figura 25 - Reta tangente no ponto de inflexão da resposta em degrau unitário em malha aberta.	39
Figura 26 - Resposta ao degrau unitário para o PID sintonizado por Ziegler-Nichols.	39
Figura 27 - Lugar das Raízes para ganho proporcional (direita) e com detalhe (esquerda).	40
Figura 28 - Resposta ao degrau unitário apenas com ganho proporcional.	41
Figura 29 - Resposta ao degrau unitário apenas com ganho proporcional e derivativo.	42
Figura 30 - Resposta ao degrau para os ganhos sintonizados por MMQ.	45
Figura 31 - Resposta ao degrau para os ganhos sintonizados por MMQ sem ganho integral.	45
Figura 32 - Resposta ao degrau para os ganhos sintonizados por MMQ com ganho integral.	46
Figura 33 - Métodos de Integral do Erro.	46
Figura 34 - Método de otimização do PID por ITAE.	47
Figura 35 - Resposta ao Degrau do sistema controlado por PID sintonizado por ITAE.	48
Figura 36 - Diagramas de Nyquist dos sistema controlados. Sintonia PID por: (a) Ziegler-Nichols (primeira), (b) Lugar das raízes (segunda), (c) Otimização ITAE (terceira), (d) Alocação de polos (quarta).	49
Figura 37 - Diagrama de Bode com margens do sistema controlado por Sintonia PID de Ziegler-Nichols.	50
Figura 38 - Diagrama de Bode com margens do sistema controlado por Sintonia PID de Lugar das Raízes.	50
Figura 39 - Diagrama de Bode com margens do sistema controlado por Sintonia PID com Otimização ITAE (direita) e por Alocação de polos (esquerda).	51
Figura 40 - Respostas ao degrau de valor 19,1 m/s do sistema com e sem controladores.	
	52
Figura 41 - Comparação da resposta para controle moderno e clássico.	54
Figura 42 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por LQR (a) velocidade v (esquerda superior), (b) velocidade p (direita superior), (c) velocidade r (esquerda inferior), (d) ângulo phi (direita inferior).	72
Figura 43 - Lugar das Raízes para ganho integral (direita) e com detalhe (esquerda).	72
Figura 44 - Lugar das Raízes para ganho derivativo (direita) e com detalhe (esquerda).	73

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aplicação do critério de Routh-Hurwitz.	19
Tabela 2 - Características das respostas dos controladores.	30
Tabela 3 - Ganhos e desvios-padrão para o PID sintonizado por Alocação de Polos.	44
Tabela 4 - Comparação entre métodos de sintonização PID e malha aberta.	52
Tabela 5- Parâmetros dimensionais e operacionais do BOEING 747.	63
Tabela 6 - Coeficientes longitudinais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar.	63
Tabela 7- Coeficientes laterais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar.	63
Tabela 8- Derivadas parciais em relação às velocidades.	64
Tabela 9 - Derivadas parciais em relação a deflexões das superfícies de controle.	64
Tabela 10 - Termos da matriz de transferência.	65
Tabela 11 - Sobrecarga do piloto, especificação MIL-F-8785C.	68
Tabela 12 - Classificação do avião, especificação MIL-F-8785C.	69
Tabela 13 - Categoria de voo.	69
Tabela 14 - Definição de classes de aviões.	70
Tabela 15 - Especificação da "spiral root".	70
Tabela 16 - Especificação da "roll root".	71
Tabela 17 - Especificação das "Dutch Roll Roots".	71

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
1.1. Motivação e Objetivos do Trabalho	8
1.2. Revisão Bibliográfica	8
1.3. Metodologia	10
<b>2. SENSORES</b>	<b>11</b>
2.1. Tubos de Pitot	11
2.2. Giroscópios	11
2.3. Utilização dos Sensores	12
<b>3. ATUADORES</b>	<b>12</b>
<b>4. MODELAGEM DO SISTEMA EM MALHA ABERTA</b>	<b>13</b>
4.1. Modelagem Física e Hipóteses Simplificadoras	13
4.2. Modelagem Matemática	14
4.3. Linearização das Equações	15
4.4. Espaço de Estados	16
4.5. Parâmetros e Coeficientes Adimensionais	16
4.6. Matriz de Transferência	17
4.7. Pólos Do Sistema Em Malha Aberta	18
4.8. Análise de Estabilidade em Malha Aberta	19
4.9. Matriz de Transição e Matriz Relativa ao Termo Forçante	19
4.10. Simulações do Sistema em Malha Aberta	20
4.10.1. Análise no domínio do tempo	20
4.10.2. Análise no domínio da frequência	21
4.11. Distúrbios	24
<b>5. CONTROLE MODERNO</b>	<b>26</b>
5.1. Análise de Controlabilidade e Observabilidade	26
5.2. Controle por Alocação de Polos	27
5.3. Controle Linear Quadrático	28
5.4. Comparação de Controladores	29
5.5. Alocação de Polos dos Observadores	30
5.6. LQR dos Observadores	30
5.7. Comparação de Observadores	31
5.8. Princípio da Separação	32
5.9. Análise de Estabilidade dos Sistemas Controlados	33
5.10. Acompanhamento de Referência	33
<b>6. CONTROLE CLÁSSICO</b>	<b>36</b>
6.1 Polos e zeros em malha aberta	36
6.2 Análise de tipo e erro em regime permanente	37

6.3 Resposta em Malha Aberta	38
6.4 Sintonia PID pelo Método de Ziegler-Nichols	38
6.5 Sintonia PID por Lugar das Raízes	40
6.5.1 Ganho Proporcional Ótimo	40
6.5.2 Ganho Integral Ótimo	41
6.5.3 Ganho Derivativo Ótimo	42
6.6 Sintonia PID pelo Método de Alocação de Polos	43
6.7 Sintonia PID por Otimização ITAE	46
6.8 Análises de estabilidade Absoluta e Relativa	48
6.8.1 Análise por Nyquist	48
6.8.2 Estabilidade Relativa usando Bode	49
6.9 Seguidores de sinal e rejeição de distúrbios	52
6.10 Comparação entre sistemas sem controle e com controle	52
<b>7. COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NO DOMÍNIO DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA</b>	<b>53</b>
<b>8. CONCLUSÃO</b>	<b>55</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>56</b>
<b>APÊNDICE A - Conjunto de Hipóteses Simplificadoras</b>	<b>57</b>
<b>APÊNDICE B - Desenvolvimento da Modelagem Matemática</b>	<b>58</b>
<b>APÊNDICE C - Parâmetros Dimensionais</b>	<b>63</b>
<b>APÊNDICE D - Funções de Transferência</b>	<b>65</b>
<b>APÊNDICE E - Matrizes de Transição e de Termo Forçante</b>	<b>66</b>
<b>APÊNDICE F - Matrizes de Controlabilidade e Observabilidade</b>	<b>67</b>
<b>APÊNDICE G - Exigências de Qualidade de Voo</b>	<b>68</b>
<b>APÊNDICE H - Gráficos Extras</b>	<b>72</b>
<b>APÊNDICE I - Códigos</b>	<b>74</b>

# **1. INTRODUÇÃO**

## **1.1. Motivação e Objetivos do Trabalho**

O fascínio pelo voo é algo que acompanha a sociedade há muitos séculos. Registrado em inúmeros relatos de tentativas malsucedidas, o desejo de voar sempre teve quem o tentasse sanar. É seguro dizer que, após seu nascimento em 1906 com Santos Dumont, o avião se tornou a forma mais consagrada de transporte aéreo existente.

Um dos maiores ícones da aviação moderna é o modelo de aeronave Boeing 747, um verdadeiro gigante da aviação, e a inspiração para este trabalho. Podendo comportar até 660 passageiros, dependendo do modelo, a importância deste veículo para a aviação comercial é tremenda. Impulsionado pelo fascínio deste enorme mercado e dessa incrível criação da engenharia, este trabalho tem como objetivo realizar o controle de uma aeronave Boeing 747 realizando movimentos laterais.

Sua propulsão se dá por um sistema com quatro turbinas, nas quais a expansão dos gases provenientes da queima do combustível propulsiona o avião. Além disso, um sistema de comando que controla um conjunto de superfícies móveis (superfícies de controle), gera os demais movimentos do avião em regime de voo. Conforme o aviador deflete esses elementos, as diversas forças (arrasto e sustentação) que atuam sobre a aeronave variam, possibilitando o controle dos movimentos do veículo.

É justamente a dinâmica que compreende o controle de aeronaves que esse trabalho se propõe a estudar. Tal estudo deriva sua importância das inúmeras fases de desenvolvimento de aeronaves as quais dependem dele. Além disso, esse tipo de análise está presente em diversos setores importantes da indústria de aviação. Assim, o presente documento tem como objetivo o estudo e controle dos movimentos de rolagem, guinada e translação lateral (movimentos laterais) de um Boeing 747.

## **1.2. Revisão Bibliográfica**

A fim de estudar e adotar modelos simplificados coerentes com os regimes reais, o grupo buscou diversas fontes conceituadas para embasar as hipóteses e modelagens feitas. Os três principais textos utilizados como referências e fontes foram Etkin (1996), Nelson (1998), e Rodrigues (2014).

Etkin (1996) e Nelson (1998) apresentam métodos e meios de se realizar a modelagem de uma aeronave, além de apresentar um estudo dos cálculos dos esforços aerodinâmicos. Rodrigues

(2014), por outro lado, apresenta um estudo de como as superfícies de controle atuam em uma aeronave em regime de voo, e quais as suas influências no movimento do veículo.

A respeito da modelagem do sistema referente à aeronave, Etkin (1996) e Nelson (1998) adotam a hipótese de que o corpo pode ser tratado como um corpo rígido. Dessa maneira, a deflexão física das superfícies de controle (Figura 2) mencionadas acima passa a ser representada por um conjunto de forças e momentos aplicados ao próprio corpo do avião.

Segundo também Etkin (1996) e Nelson (1998), o estudo dos movimentos de uma aeronave pode ser subdividido em dois estudos diferentes: o estudo dos movimentos longitudinais, e o estudo dos movimentos laterais. Dado que o intuito deste trabalho é controlar os movimentos laterais de uma aeronave, o principal material de consulta está contido nas subdivisões responsáveis por apresentar a modelagem de tais movimentos. Em especial, destaca-se o capítulo 5 “Lateral Motion” de Nelson (1998). Cabe destacar que serão considerados, então, apenas os movimentos de rolagem, guinada, e translação lateral, em regime de voo.

Os estudos e meios de dividir a estrutura da modelagem podem ser encontrados por meio de Rodrigues (2014), que a divide em cinco principais grupos. São eles:

- Asas.
- Trem de pouso, que permite a manobrabilidade do avião enquanto em solo.
- Fuselagem, que contém o compartimento de carga e a própria cabine, sendo a estrutura nas quais os demais componentes são fixados.
- Empenagem de cauda, responsável pela estabilidade durante regime de voo, subdividida em horizontal e vertical.
- Grupo moto-propulsor, que gera tração e impulso.

As superfícies de controle de interesse (Figura 1) são compostas por ailerons, profundor e leme. Os ailerons se localizam nas asas, enquanto o profundor e o leme na empunidade de cauda.

Figura 1 - Superfícies de controle.



(fonte: Formação de Pilotos, 2014)

Os ailerons, localizados mais especificamente nos bordos de fuga das extremidades das asas são encarregados de controlar o movimento de rolagem (Figura 1) da aeronave. Seu funcionamento

se dá pois, quando um aileron é defletido para cima, sua respectiva asa perde força de sustentação; enquanto que, quando o outro aileron é defletido para baixo (de forma simultânea), sua respectiva asa ganha força de sustentação. Essa diferença de forças gera um momento que promove o movimento de rolagem do avião.

O profundor, localizado na superfície horizontal da empenagem de cauda, age de forma similar aos ailerons. Ao ser defletido para cima, a empenagem de cauda perde força de sustentação, enquanto, se defletido para baixo, ganha força de sustentação. Esse controle de força atuante permite a atuação de um momento que promove o movimento de arfagem do avião.

O leme é o responsável por controlar o direcionamento do avião. Localizado também na empenagem de cauda, seu funcionamento se dá, pois, ao ser defletido para um dos lados, a força de sustentação que age sobre a superfície vertical da empenagem de cauda aumenta no outro sentido, o que causa um momento que rotaciona a aeronave, gerando o movimento de guinada.

Outras duas superfícies de controle existentes que não serão abordadas neste trabalho são os flapes e os spoilers. Os flapes, tais quais os ailerons, atuam no controle das forças de sustentação do avião, entretanto, são acionados durante regime de pouso e decolagem da aeronave. Os spoilers, localizados sobre o extradorso das asas, podem auxiliar a realização de curvas em conjunto com os ailerons, entretanto, são acionados principalmente em movimentos de descida e pouso. Para efeitos de simplificação, estes não serão abordados neste estudo.

Os coeficientes adimensionais e parâmetros necessários para a modelagem e representação do modelo de aeronave Boeing 747 foram retirados de Nelson (1998). Demais textos e fontes pontuais utilizadas como referências podem ser vistas na seção de bibliografia deste trabalho.

### **1.3. Metodologia**

O grupo optou por seguir a metodologia semelhante a de Etkin (1996) e a de Nelson (1998), que definem dois sistemas de coordenadas: um solidário ao corpo, e um sistema fixo. É importante ressaltar que o primeiro é não inercial.

Para a obtenção das equações que regem os movimentos de interesse, o Teorema do Movimento do Baricentro e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular foram desenvolvidos no primeiro referencial, e então, transferidos para o segundo. Todavia, das seis equações resultantes dos teoremas supracitados, foram utilizadas somente as três equações referentes ao movimento lateral. Uma quarta equação é proveniente da transferência entre os dois referenciais utilizados.

As equações, então, foram escritas na abordagem de Espaço de Estados, que transforma as equações obtidas (de ordens superiores) em um conjunto de equações de 1<sup>a</sup> ordem. A partir desse

formato, análises de estabilidade puderam ser feitas. Ainda, essa modelagem permitiu o desenvolvimento do sistema de controle, objetivo principal deste trabalho, utilizando técnicas do chamado “controle moderno”, como as análises de controlabilidade e observabilidade do sistema, e o controle propriamente dito, pelos métodos de Alocação de Polos e Controle Linear Quadrático. A eficiência de ambos os sistemas pode ser simulada através da adição de uma perturbação ao sistema.

## 2. SENsoRES

Para o perfeito funcionamento de um avião, são necessários diversos tipos de sensores, muitas vezes usados para conferir as medições, as quais são utilizadas para garantir maior segurança de vôo e um maior conforto para os passageiros e tripulação. Como o intuito deste projeto é apenas o controle da posição de um avião, serão necessários poucos sensores, que realizam a medição de determinados parâmetros para a avaliação do comportamento do avião. Dentre tais parâmetros, destacam-se a velocidade vertical, altitude, velocidade do ar e a variação na direção do movimento, que podem ser medidos a partir de dois tipos de sensores principais: os Tubos de Pitot e os sensores giroscópicos.

### 2.1. Tubos de Pitot

Os Tubos de Pitot são sensores instalados paralelamente ao vento relativo que medem a variação de pressão em relação a uma pressão estática. Com o aumento da pressão do ar, somada à pressão estática, a cápsula se expande, fazendo com que os ponteiros do velocímetro se movimentem, indicando assim a velocidade do avião.

Especificações técnicas:

- Material em aço inox;
- Medição até 500 nós (~926 km/h);
- Precisão de  $\pm 1\%$ .

### 2.2. Giroscópios

Resumidamente, os sensores giroscópicos medem a variação da velocidade angular do avião em relação a um referencial estável, através da leitura de dados de um rotor suspenso. Seu funcionamento se baseia no princípio da inércia, opondo-se a qualquer tentativa de alterar sua direção, mas não conseguindo medir variações que ocorram no eixo de giro do giroscópio. Para calcular tais variações, é necessário utilizar mais de um giroscópio, com eixos não paralelos.

Especificações técnicas:

- Giroscópio de 3 eixos 6 DOF MPU-6050;

- Medições precisas de  $250^\circ$  por segundo;
- Dimensões:  $20 \times 16 \times 1\text{mm}$ .

### 2.3. Utilização dos Sensores

Como dito anteriormente, em um avião são utilizados diversos tipos e grande número de sensores, mas, para o caso específico de avaliação do movimento lateral de um avião, serão utilizados apenas um tubo de Pitot e um sensor giroscópio. Tais sensores serão utilizados para medir a velocidade lateral do avião e sua velocidade angular de guinada, respectivamente. Com o uso destes sensores e o conhecimento de uma posição qualquer do avião, é possível descobrir sua trajetória através do Espaço de Estados, utilizando uma matriz adequada. Assim, tem-se para o sistema a seguinte matriz C, contida na Equação 1 e 2.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 3. ATUADORES

Para realizar as ações de controle, são necessários atuadores, que são essenciais para o bom funcionamento de um avião. Para o estudo do movimento lateral, são importantes os seguintes atuadores:

- **Dois atuadores para os ailerons:** Estes atuadores devem funcionar em sentidos oposto, e são responsáveis pelas manobras de rolagem. Seu controle é realizado através do manche, que quando comandado para a direita, o aileron da asa direita é defletido para cima e o aileron da asa esquerda é defletido para baixo, executando um rolamento para a direita.
- **Atuador para o leme:** O atuador para o leme controla as manobras de guinada. Seu controle é realizado através dos pedais. Ao pisar no pedal direito, sua deflexão permite tenha um movimento de guinada para a direita, e vice-versa.

No trabalho as deflexões para os ailerons e para o leme serão referidas como  $\delta a$  e  $\delta r$ , respectivamente. Dessa forma, tem-se a seguinte matriz B para os atuadores (Equação 3).

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Fy_{sr}}{m} \\ \frac{Mx_{\delta a}}{Ix} & \frac{Mx_{\delta r}}{Ix} \\ \frac{Mz_{\delta a}}{Iz} & \frac{Mz_{\delta r}}{Iz} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

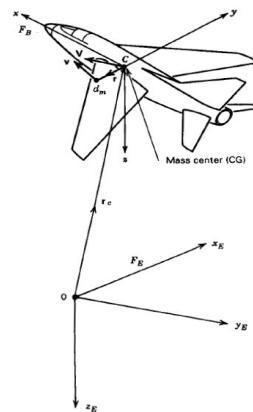
A obtenção dos termos da matriz segue a bibliografia de Nelson (1998) e será especificada na seção 4.

## 4. MODELAGEM DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

### 4.1. Modelagem Física e Hipóteses Simplificadoras

O modelo físico da aeronave é feito baseando-se nos textos de Rodrigues (2014) e Nelson (1998), que recomendam tratar o avião como um corpo rígido. Os sistemas de coordenadas do modelo tratado são, também, os mesmos indicados em Etkin (1996), e podem ser vistos na Figura 2. Cabe ressaltar que são dois sistemas de coordenadas: um solidário à aeronave e outro fixo.

Figura 2 - Sistemas de coordenadas adotados.

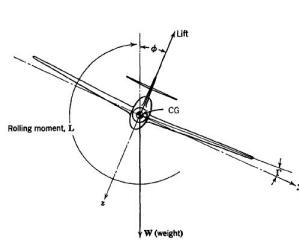


(fonte: ETKIN, 1996)

A fim de simplificar a modelagem do problema, são necessárias algumas hipóteses simplificadoras, que foram amplamente discutidas nos textos de modelagem correspondentes aos trabalhos feitos no semestre anterior. Todas as hipóteses adotadas podem ser revistas no Apêndice A.

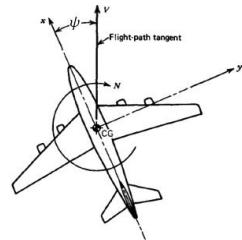
Além disso, cabe ressaltar que, como este trabalho tem como foco o estudo e controle dos movimentos laterais de um avião (representados parcialmente nas Figuras 3 e 4), não serão abordados de forma profunda outros movimentos, como a translação longitudinal, ou o movimento de arfagem, por exemplo.

Figura 3 - Indicação do ângulo de rolagem.



(fonte: Etkin, 1996)

Figura 4 - Indicação do ângulo de guinada.



(fonte: Etkin, 1996, modificada)

## 4.2. Modelagem Matemática

A modelagem matemática do sistema tem como finalidade a obtenção de equações e relações matemáticas que descrevem o comportamento do sistema dada a modelagem física adotada. Tais equações relacionam as chamadas entradas (parâmetros variáveis que afetam o comportamento do sistema como um todo) com as saídas (respostas de interesse de estudo cujo comportamento é dependente das entradas).

As entradas do sistema que são fornecidas são a deflexão angular dos ailerons ( $\delta a$ ) e a deflexão angular do leme ( $\delta r$ ), enquanto que as saídas são a velocidade de translação lateral ( $v$ ), a velocidade angular de rolagem ( $p$ ), a velocidade angular de guinada ( $r$ ) e o ângulo de rolagem ( $\phi$ ).

A aplicação da segunda Lei de Newton, mais especificamente a aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), resultam em equações que descrevem o sistema no tempo. O equacionamento foi realizado com base nas instruções explicitadas no capítulo 3 de Nelson (1998). Contudo, para a obtenção das equações que regem o sistema, primeiramente foram consideradas as decomposições vetoriais da velocidade (Equação 4), da velocidade angular (Equação 5) e dos momentos (Equação 6).

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (4)$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad (5)$$

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \quad (6)$$

Aplicando o Teorema do Movimento do Baricentro e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular, adicionando a força gravitacional e utilizando as decomposições presentes nas Equações 4, 5 e 6, obteve-se as Equações 7, 8 e 9.

$$M_x = I_x \dot{p} + qr(I_z - I_y) \quad (7)$$

$$M_z = I_z \dot{r} + pq(I_y - I_x) \quad (8)$$

$$F_y + mg \cos\theta \sin\phi = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (9)$$

As Equações 7, 8 e 9 referem-se a um referencial solidário ao avião. Todavia, o estudo das respostas do sistema demanda que as saídas deste sejam analisados a partir de um referencial solidário ao solo. Dessa forma, há a necessidade da transferência do sistema do primeiro referencial para o segundo, o que é possível graças às Equações 10, 11 e 12.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (11)$$

Tal que:

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Vale destacar que todo o desenvolvimento matemático que possibilitou chegar às equações anteriores foi ocultado no item 4.2. do presente relatório, mas está completo e pode ser visualizado no Apêndice B.

### 4.3. Linearização das Equações

Para realizar a linearização, foi utilizada a hipótese de pequenos distúrbios (NELSON, 1998), em que o movimento do avião consiste em pequenos desvios na condição de voo estável. Visto isso, todas as variáveis de saída da equação possuem um ponto de referência e uma determinada perturbação em relação a esse ponto.

Aplicando-se os métodos de linearização que são exibidos e explicados no Apêndice B às equações de movimento do item anterior, obtém-se as Equações 13, 14 e 15.

$$\left(\frac{Fy_p}{m} \cdot \Delta v - \Delta \dot{v}\right) + \frac{Fy_p}{m} \cdot \Delta p + \left(\frac{Fy_r}{m} - u_0\right) \cdot \Delta r + \frac{Fy_{\delta r}}{m} \Delta \delta r + g \cdot \cos\theta_0 \cdot \Delta \phi = 0 \quad (13)$$

$$\frac{Mx_v}{Ix} \cdot \Delta v + \left(\frac{Mx_p}{Ix} \cdot \Delta p - \Delta \dot{p}\right) + \frac{Mx_r}{Ix} \cdot \Delta r + \frac{Mx_{\delta a}}{Ix} \Delta \delta a + \frac{Mx_{\delta r}}{Ix} \Delta \delta r = 0 \quad (14)$$

$$\frac{Mz_v}{Iz} \cdot \Delta v + \frac{Mz_p}{Iz} \cdot \Delta p + \left(\frac{Mz_r}{Iz} \cdot \Delta r - \Delta \dot{r}\right) + \frac{Mz_{\delta a}}{Iz} \Delta \delta a + \frac{Mz_{\delta r}}{Iz} \Delta \delta r = 0 \quad (15)$$

Por fim, tem-se um sistema de três equações e quatro incógnitas ( $\Delta v$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta r$  e  $\Delta \phi$ ). Resta, portanto, determinar uma nova equação que torne o sistema possível. Essa equação deriva da relação dos ângulos de Euler (NELSON, 1998), e pode ser visualizada na Equação 16.

$$p_0 + \Delta p = \Delta \dot{\phi} - \sin(\theta_0 + \Delta \theta) \cdot (\dot{\psi}_0 + \Delta \dot{\psi}) \quad (16)$$

Desenvolvendo a equação e zerando termos de acordo com simplificações adotadas, tem-se a Equação 17:

$$\Delta p = \Delta \dot{\phi} \quad (17)$$

Com isso, têm-se as quatro equações linearizadas do sistema.

#### 4.4. Espaço de Estados

Para uma resolução mais fácil do sistema de equações diferenciais, utiliza-se a notação de Espaço de Estados para o sistema estudado, como dado no formato abaixo (Equação 18).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x + D u \end{aligned} \quad (18)$$

Dessa forma, de acordo com a bibliografia, com os atuadores e sensores pré-definidos, reescrevem-se as equações para o sistema na forma matricial e, posteriormente, para a notação de Espaço de Estados. Dessa forma, obtém-se as Equações 19 e 20.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{Fy_v}{m} & \frac{Fy_p}{m} & (\frac{Fy_r}{m} - u_0) & g \cdot \cos\theta_0 \\ \frac{Mx_v}{Ix} & \frac{Mx_p}{Ix} & \frac{Mx_r}{Ix} & 0 \\ \frac{Mz_v}{Iz} & \frac{Mz_p}{Iz} & \frac{Mz_r}{Iz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Fy_{\delta r}}{m} \\ \frac{Mx_{\delta a}}{Ix} & \frac{Mx_{\delta r}}{Ix} \\ \frac{Mz_{\delta a}}{Iz} & \frac{Mz_{\delta r}}{Iz} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} \quad (20)$$

#### 4.5. Parâmetros e Coeficientes Adimensionais

A fim de estudar como um modelo específico de aeronave se comporta dada a modelagem apresentada, é necessário substituir os parâmetros e coeficientes das equações com os valores referentes ao modelo do avião. Além dos parâmetros físicos, são importantes também as condições sob as quais o avião está sujeito e alguns parâmetros adimensionais, que facilitam os cálculos de forças e momentos aplicados ao sistema pelo ar. Como o foco deste trabalho é o modelo Boeing 747, serão utilizados os dados deste modelo, os quais foram coletados de Nelson (1998). Suas propriedades são fornecidas na Tabela 3, no Apêndice C, e os coeficientes adimensionais estão presentes nas Tabelas 4 e 5. Foram utilizados valores de coeficientes considerando manobras de emergência em baixa altitude do avião, onde o Mach é igual a 0,25.

Para o cálculo dos valores das matrizes, utilizam-se as fórmulas contidas nas Tabelas 6 e 7 no mesmo apêndice, utilizando os dados para o modelo de referência. Atribuindo valores, obtém-se as Equações 21 e 22.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,0265 & 0 & -1 & 0,1144 \\ -0,0043 & -0,2585 & 0,0580 & 0 \\ 0,00105 & -0,0254 & -0,0631 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,4143 \\ 0,076 & 0,0115 \\ 0,0038 & -0,666 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} \quad (22)$$

#### 4.6. Matriz de Transferência

Utilizando a matriz obtida no cálculo do Espaço de Estados, é possível encontrar uma matriz de funções de transferência  $G(s)$ , a qual transforma as entradas do sistema nas saídas desejadas. Então, para tal, aplica-se a Transformada de Laplace nas equações de estado (Equações 23 e 24).

$$s \cdot X = A \cdot X + B \cdot U \quad (23)$$

$$Y = C \cdot X + D \cdot U \quad (24)$$

E, rearranjando de modo a obter a razão  $Y/U$ , têm-se as Equações 25, 26 e 27.

$$X = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U \quad (25)$$

$$Y = [C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D]U \quad (26)$$

$$G(s) = [C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B] \quad (27)$$

Por fim, substituindo as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  na Equação 27, obtém-se a matriz de transferência (Equação 28).

$$G(s) = \begin{bmatrix} H(s)/P(s) & L(s)/P(s) \\ I(s)/P(s) & M(s)/P(s) \\ J(s)/P(s) & N(s)/P(s) \\ K(s)/P(s) & O(s)/P(s) \end{bmatrix} \quad (28)$$

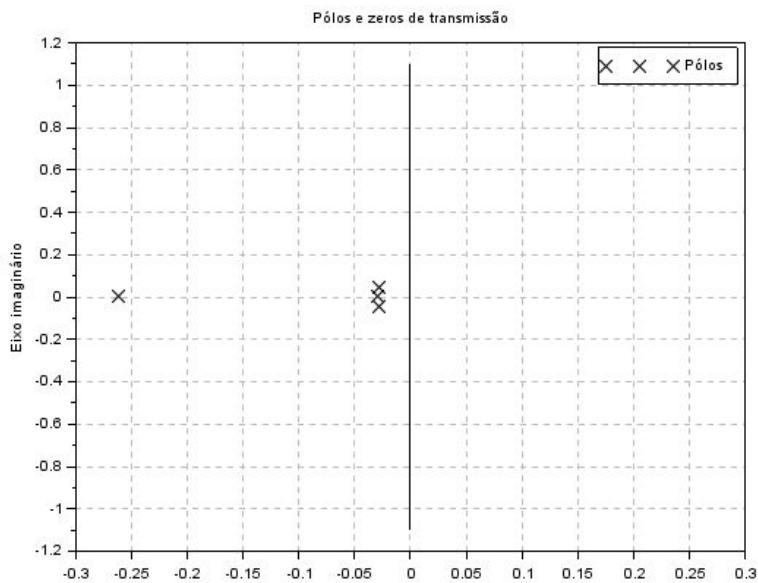
Em que os polinômios representados acima estão descritos no Apêndice D.

A multiplicação entre a matriz de transferência e a matriz de entradas, composta pelas deflexões do aileron e leme, resulta na matriz de saídas, compostas pela velocidade lateral, velocidades angulares de rolagem e guinada e ângulo de rolagem.

#### 4.7. Pólos Do Sistema Em Malha Aberta

O sistema em malha aberta será tratado como nada mais que o próprio sistema do avião modelado na disciplina PME 3380. Seus polos serão os autovalores da matriz A obtida na seção 4.5. Assim, seus valores, inferidos por meio do software SciLab, são apresentados na Figura 5.

Figura 5 - Polos do sistema sobre o plano imaginário.



Para encontrar o valor absoluto dos polos, será avaliada o polinômio característico do sistema, que pode ser visualizado nas Equações 29 e 30:

$$P(s) = |s \cdot I - A| = \det(s \cdot I - A) \quad (29)$$

$$P(s) = 0,0000237 + 0,0013412s + 0,0273880s^2 + 0,3482239s^3 + s^4 \quad (30)$$

E, assim, encontra-se os seguintes polos:

$$s_1 = -0,02915 \quad s_2 = -0,26187$$

$$s_3 = -0,028597 - 0,04785i \quad s_4 = -0,028597 + 0,04785i$$

#### 4.8. Análise de Estabilidade em Malha Aberta

A análise de estabilidade do sistema em malha aberta pode ser obtida de duas maneiras. A primeira, e mais simples delas, é analisar os polos do sistema e perceber que nenhum deles possui parte real positiva, o que se verifica nos polos acima. Na segunda, que será feita por meio da Tabela 1, é pelo método de Routh-Hurwitz.

Tabela 1 - Aplicação do critério de Routh-Hurwitz.

$s^4$	1	<b>0,0273880</b>	<b>0,0000237</b>
$s^3$	0,3482239	0,0013412	0
$s^2$	0,023536	0,0000237	0
$s^1$	0,000991	0	0
$s^0$	0,0000237	0	0

A primeira entrada para esse método é a verificação de que nenhum dos coeficientes do denominador da função de transferência é negativo. Após isso, a verificação da estabilidade do sistema se dá pela verificação da ocorrência de trocas de sinais entre os termos da primeira coluna da tabela. Dado que ela não ocorreu, é possível inferir que o sistema é estável.

#### 4.9. Matriz de Transição e Matriz Relativa ao Termo Forçante

A matriz de transição é a solução da equação diferencial homogênea (com  $B.u = 0$ ). Assim, como a matriz do sistema  $A$  é conhecida, pode-se obter a matriz transição  $\Phi$  por meio da Equação 31.

$$\Phi(t) = I + A \cdot t + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) & \Phi_{14}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) & \Phi_{24}(t) \\ \Phi_{31}(t) & \Phi_{32}(t) & \Phi_{33}(t) & \Phi_{34}(t) \\ \Phi_{41}(t) & \Phi_{42}(t) & \Phi_{43}(t) & \Phi_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Os valores de cada termo da matriz de transição, bem como os termos da matriz relativa ao termo forçante, vista na sequência, serão especificados no Apêndice E.

A matriz relativa ao termo forçante representa a solução particular da equação diferencial (isto é,  $B.u \neq 0$ ) e pode ser obtida por meio da Equação 32, sendo que a sua representação é feita por  $\Gamma$ .

$$\Gamma(t) \cdot B = \left( I \cdot t + A \cdot \frac{t^2}{2!} + A^2 \cdot \frac{t^3}{3!} + A^3 \cdot \frac{t^4}{4!} \right) B = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(t) & \Gamma_{12}(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22}(t) \\ \Gamma_{31}(t) & \Gamma_{32}(t) \\ \Gamma_{41}(t) & \Gamma_{42}(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

## 4.10. Simulações do Sistema em Malha Aberta

### 4.10.1. Análise no domínio do tempo

Com o espaço de estados pronto, pode-se utilizar o programa “Scilab” para simular a resposta do sistema no tempo. Por meio das funções “ode” e “csim” pode-se utilizar dois métodos distintos para simular o sistema. O primeiro resolve o sistema de equações diferenciais por meio de métodos numéricos, já o último utiliza da teoria de funções de transferência para simular o problema.

Os resultados expostos aqui são fruto do uso da função ode, sendo os resultados obtidos a partir da função csim utilizados apenas para validação. As simulações foram feitas no intervalo de tempo de 50s devido ao fato de a aeronave ter movimentos lentos por conta de seu tamanho. O código utilizado para se obter as simulações encontra-se no Apêndice I.

Será imposto entradas do tipo degrau, com início em  $t = 4,0\text{s}$  e com amplitude de  $\pi/4 \text{ rad}$  para as deflexões do aileron e do leme. Ou seja, para  $t < 4,0\text{s}$ ,  $\Delta\alpha = \Delta\delta r = 0$ . Para  $t > 4,0\text{s}$ ,  $\Delta\alpha = \Delta\delta r = \pi/4 \text{ rad}$ . A simulação para tal entrada pode ser visualizada pelas Figuras 6 e 7.

Figura 6 - Gráficos das variações da velocidade v ( $\Delta v$ ) (esquerda) e da velocidade angular p ( $\Delta p$ ) (direita) para entrada em degrau em  $t=4,0\text{s}$  nas deflexões dos ailerons e do leme.

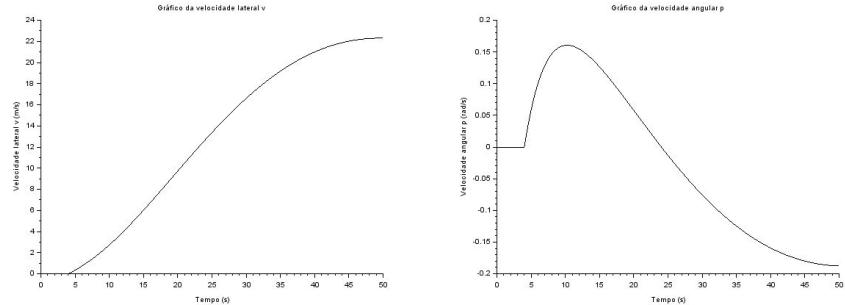
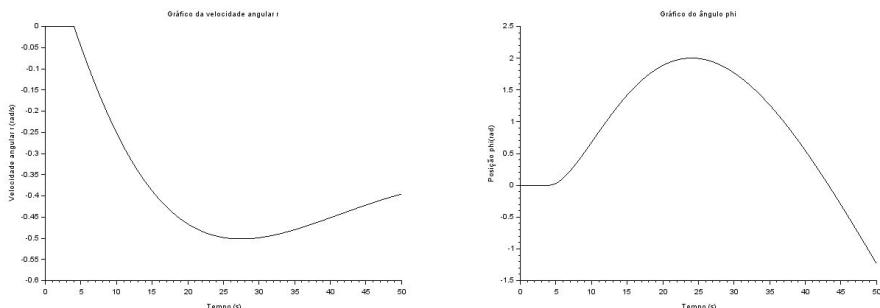


Figura 7 - Gráficos das variações da velocidade angular r ( $\Delta r$ ) (esquerda) e do ângulo de rolagem  $\phi$  ( $\Delta\phi$ ) para entrada em degrau em  $t=4,0\text{s}$  nas deflexões dos ailerons e do leme.



Os resultados estão dentro do esperado, uma vez que, enquanto as entradas são nulas, o sistema permanece na posição de equilíbrio e inicia-se a perturbação no instante em que o degrau inicial. A partir desse instante, as saídas reagem de acordo com as deflexões continuamente aplicadas nos ailerons e no leme.

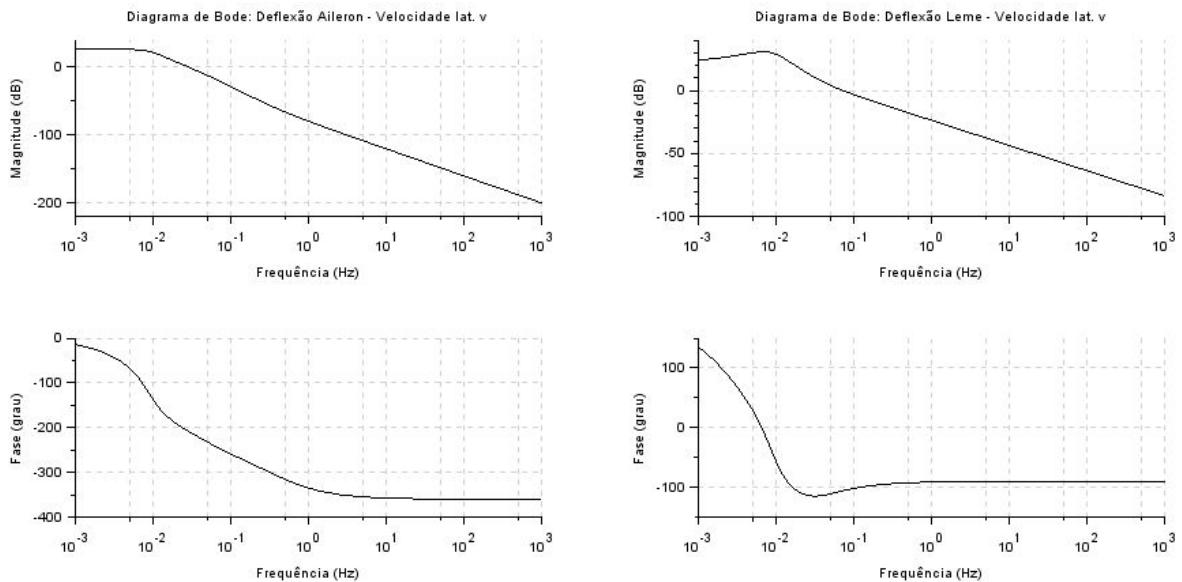
#### 4.10.2. Análise no domínio da frequência

Com o intuito de analisar o comportamento do sistema no campo das frequências, serão utilizados diagramas de Bode. Sua função é representar a resposta de cada saída do sistema à uma entrada harmônica em cada uma das suas possíveis entradas. No caso do problema modelado, têm-se 2 entradas e 4 saídas, resultando num total de 8 diagramas de Bode, e cada um deles é desenvolvido a partir da função de transferência em malha aberta que relaciona a entrada com a saída.

Os resultados a seguir refletem a resposta das componentes do movimento lateral de uma aeronave modelo Boeing 747 às entradas de deflexão no aileron e no leme. Os diagramas de Bode das velocidades  $v$ ,  $p$ ,  $r$  e do ângulo  $\phi$  são representados pelas Figuras 8, 9, 10 e 11, respectivamente.

#### Velocidade $v$

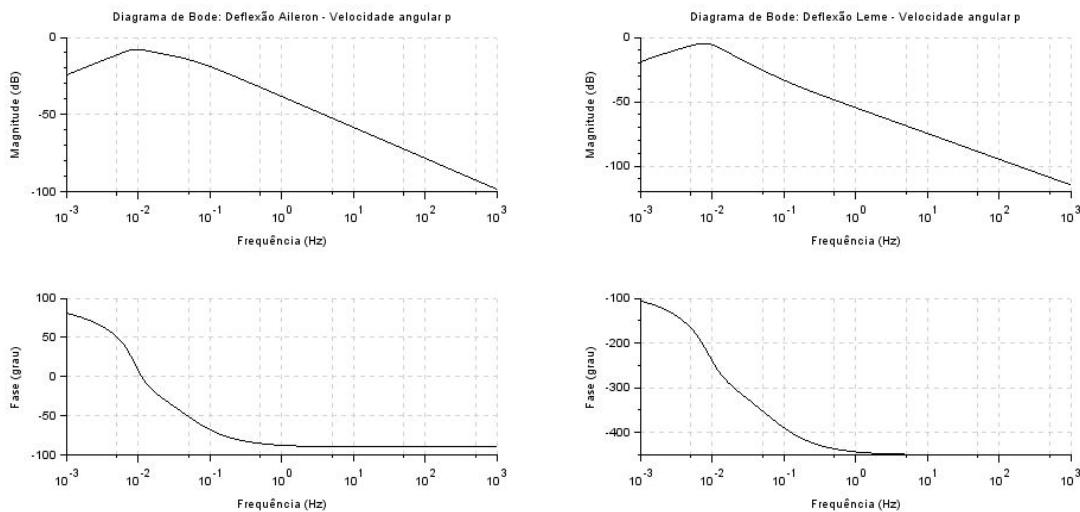
Figura 8 - Diagrama de Bode para velocidade  $v$  e deflexão do aileron (esquerda) e do leme (direita).



Os diagramas de ganho encontrados para a saída de velocidade indicam que o efeito de uma deflexão no leme para a variação da velocidade lateral  $v$  é superior que o efeito de uma deflexão no aileron. Verificou-se, também, que, para as duas entradas, há ganho em baixas frequências, sendo que, a partir de frequências próximas de 0,01 Hz, ocorre um decaimento de cerca de 40 dB por década no caso da entrada de aileron e de 20 dB por década para a entrada de leme.

### Velocidade angular p

Figura 9 - Diagrama de Bode para velocidade angular p e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita).

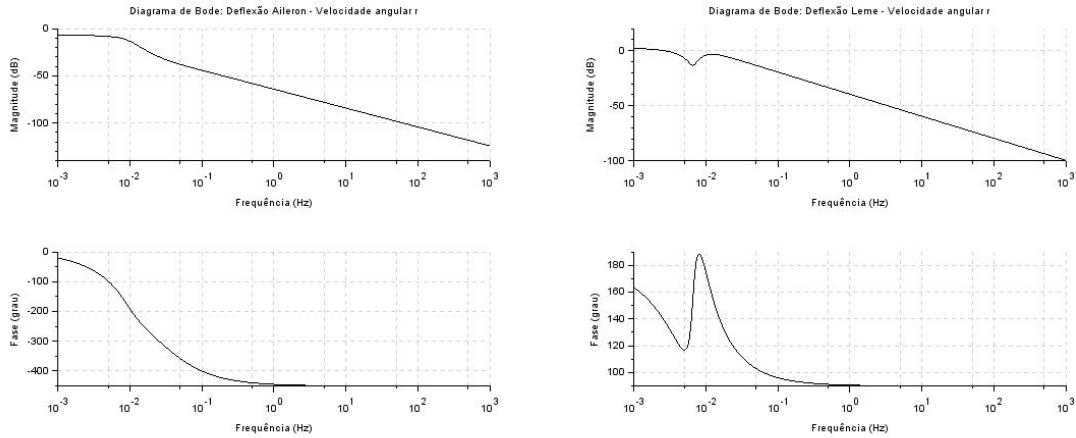


Analizando os diagramas de Bode para a velocidade angular p (velocidade de rolagem) novamente verificaram-se respostas cujo ganho tende a decrescer conforme se aumenta a frequência da entrada. A atenuação após a frequência de 0,01 Hz é observada novamente, porém agora ambas as entradas trazem um decaimento de 20 dB por década após essa frequência.

Pelo diagrama de fases é visível que no caso da entrada de leme o atraso cresce conforme se aumenta a frequência da entrada. Já para a entrada de aileron, a fase se estabiliza em cerca de  $-90^\circ$  após a frequência de corte, indicando atraso em altas frequências.

## Velocidade angular r

Figura 10 - Diagrama de Bode para velocidade angular r e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita).

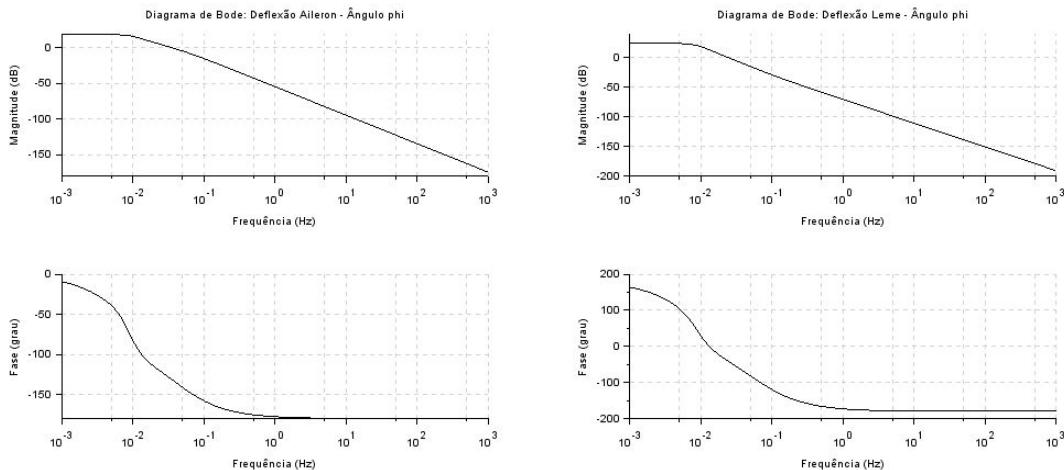


Para a saída de velocidade angular r (velocidade de guinada) verificou-se, novamente, atenuação do ganho em altas frequências, muito notável a partir da frequência de 0,01 Hz, próxima do pico de ganho para as duas entradas. Como esperado, o sistema responde melhor à entradas de baixa frequência. Novamente os decaimentos em alta frequência se estabilizaram em cerca de 20 dB por década. Vale notar também que os ganhos para entrada de leme são levemente superiores aos ganhos observados para entrada de aileron.

Para a entrada do aileron, verifica-se que há um aumento de atraso a medida que sua frequência cresce. Além disso, para a entrada do leme sua fase possui um pico de pouco mais de  $180^\circ$  na frequência de 0,01 Hz e para altas frequências sua fase se estabiliza em  $90^\circ$ .

## Ângulo de rolagem $\phi$

Figura 11 - Diagrama de Bode para ângulo de rolagem e deflexão no aileron (esquerda) e no leme(direita).



Como em todos os outros casos, foi verificado ganho em baixas frequências com atenuação de 40 dB por década em altas frequências, e o ganho para os ailerons é maior quando comparado com o ganho do leme. Verifica-se que as fases se tornam constantes a partir da frequência de 1 Hz.

Vale ressaltar que não há picos de fase nos diagramas, o que evidencia a ausência de ressonância do sistema.

De forma geral, os Diagramas de Bode evidenciam bem o comportamento do sistema em determinadas faixas de frequência, com o aileron sendo mais influente nos movimentos de rolagem e o leme nos movimentos de guinada. Esse destaque é tênue, devido a grande dimensão do avião e consequente alto valor de inércia, o que impossibilita ganhos muito grandes.

### 4.11. Distúrbios

Para a seção em questão, serão simuladas algumas situações em que as condições de vôo não são ideais, havendo frequentemente vento, rajadas e turbulências. Assim, é necessário modificar as equações de movimento com termos das velocidades iniciais ( $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ ), velocidades angulares iniciais ( $\Delta p$ ,  $\Delta q$ ,  $\Delta r$ ), velocidades de rajada ( $u_g$ ,  $v_g$ ,  $w_g$ ) e velocidades angulares de rajada ( $p_g$ ,  $q_g$ ,  $r_g$ ). Tais termos podem ser visualizados pelas Equações 33 a 38.

$$\Delta u_a = \Delta u - u_g \quad (33)$$

$$\Delta v_a = \Delta v - v_g \quad (34)$$

$$\Delta w_a = \Delta w - w_g \quad (35)$$

$$\Delta p_a = \Delta p - p_g \quad (36)$$

$$\Delta q_a = \Delta q - q_g \quad (37)$$

$$\Delta r_a = \Delta r - r_g \quad (38)$$

Dessa forma, retomando as contas do espaço de estados para a equação do movimento lateral de um avião, substituindo as velocidades pelos novos termos e considerando  $\xi$  como vetor de perturbações da rajada, têm-se as Equações 39 e 40.

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + B' \cdot \xi \quad (39)$$

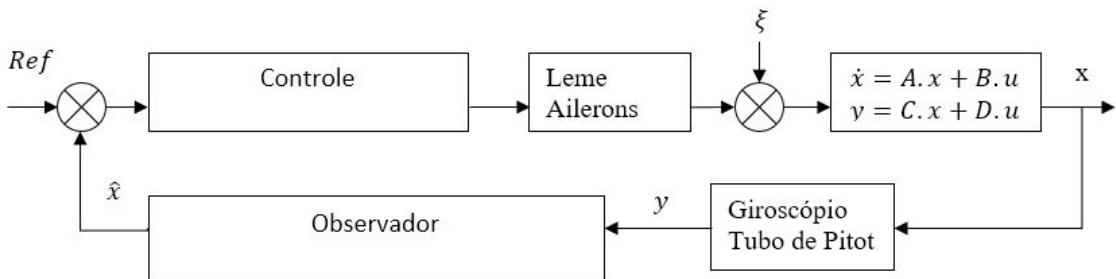
$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta p} \\ \dot{\Delta r} \\ \dot{\Delta \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fy_v}{m} & \frac{Fy_p}{m} & (\frac{Fy_r}{m} - u_0) & g \cdot \cos\theta_0 \\ \frac{Mx_v}{Ix} & \frac{Mx_p}{Ix} & \frac{Mx_r}{Ix} & 0 \\ \frac{Mz_v}{Iz} & \frac{Mz_p}{Iz} & \frac{Mz_r}{Iz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Fy_{\delta r}}{m} \\ \frac{Mx_{\delta a}}{Ix} & \frac{Mx_{\delta r}}{Ix} \\ \frac{Mz_{\delta a}}{Iz} & \frac{Mz_{\delta r}}{Iz} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -\frac{Fy_v}{m} & -\frac{Fy_p}{m} & 0 \\ -\frac{Mx_v}{Ix} & -\frac{Mx_p}{Ix} & -\frac{Mx_r}{Ix} \\ -\frac{Mz_v}{Iz} & -\frac{Mz_p}{Iz} & -\frac{Mz_r}{Iz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_g \\ p_g \\ r_g \end{bmatrix} \quad (40)$$

E atribuindo os valores para o avião estudado, tem-se a Equação 41.

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta p} \\ \dot{\Delta r} \\ \dot{\Delta \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0265 & 0 & -1 & 0,1144 \\ -0,0043 & -0,2585 & 0,0580 & 0 \\ 0,00105 & -0,0254 & -0,0631 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,4143 \\ 0,076 & 0,0115 \\ 0,0038 & -0,666 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0,0265 & 0 & 0 \\ 0,0043 & 0,2585 & -0,0580 \\ -0,00105 & 0,0254 & 0,0631 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_g \\ p_g \\ r_g \end{bmatrix} \quad (41)$$

Dessa forma, atribuídos os sensores, atuadores e distúrbios ao sistema, é possível fechar a malha, de modo a controlar o sistema da forma necessária, o que será abordado na seção 5. O diagrama de blocos para a malha fechada está apresentada na Figura 12.

Figura 12 - Diagrama de blocos para o sistema.



## 5. CONTROLE MODERNO

Até aqui, o trabalho feito foi, em grande parte, uma reedição daquilo estudado em modelagem, com a adição de algumas pequenas mudanças. Todavia, o foco principal desta seção está na teoria de Controle Moderno. Essa teoria surgiu em meados da década de 1960, em função da necessidade de projetar sistemas de controle mais complexos e precisos. O advento da era espacial foi a principal propulsora dessa mudança, estimulando a engenharia de controle à buscar soluções para controlar sistemas multivariáveis em situações com restrição de peso, como por exemplo satélites e sondas espaciais. Com o intuito de aprofundar os conhecimentos, o método no domínio do tempo será o objeto de estudo para o controle do Boeing 747.

### 5.1. Análise de Controlabilidade e Observabilidade

Existem dois testes simples que permitem verificar se um sistema linear é controlável e observável. Tais testes são a base para que se projete o sistema de atuação e o sistema de observação. Assim, se o sistema for não controlável, o sistema de atuação tem que ser modificado (matriz B). Sem isso não se projeta o controlador. Já se o sistema for não observável, o sistema de observação tem que ser modificado (matriz C). Sem isso, o controlador não funcionará.

Para o teste de controlabilidade, escreve-se a seguinte matriz (Equação 42).

$$C = [B \mid A \cdot B \mid A^2 \cdot B \mid A^3 \cdot B] \quad (42)$$

Os valores explícitos desta são apresentados no Apêndice F, juntamente com os valores da matriz de observabilidade discutida em sequência.

Para constatar controlabilidade, a matriz C da Equação 42 necessita apresentar posto (rank) n, onde n é a ordem do sistema. A matriz C ( $n \times m$ ) será de posto n se dela se puder extrair uma matriz ( $n \times n$ ) de determinante não nulo.

Já para o teste de observabilidade, escreve-se a matriz (Equação 43).

$$O = [C^T \mid A^T \cdot C^T \mid (A^2)^T \cdot C^T \mid (A^3)^T \cdot C^T] \quad (43)$$

De maneira análoga, o sistema será observável se a matriz O também for de posto n. A matriz O é de dimensão ( $n \times r$ ), onde r é o número de sensores ou de saídas.

Note que no caso tratado n é igual a quatro, ou seja, a ordem do sistema, já discutido em seções anteriores. Também, pode-se afirmar que B e C escolhidos foram desenvolvidos de tal forma que ambos passaram pelos respectivos teste. Além disso, os testes foram realizados com auxílio da ferramenta computacional SciLab e os códigos podem ser verificados no Apêndice I.

## 5.2. Controle por Alocação de Polos

O método de alocação de pólos torna possível escolher o comportamento do sistema de controle pela escolha das raízes da equação característica em malha fechada. Desse modo, pode-se obter a matriz de ganho K, sabendo que  $u = -K \cdot x$ .

Para o sistema de controle do Boeing 747 estudado, escolheram-se os polos de acordo com a teoria de qualidade de voo apresentada no Apêndice G. Como na análise feita, determinou-se que o para a raiz de rolagem o valor deveria ser menor que -0,7. Dessa forma, pode-se escolher para esse polo o valor de -0,8 e ainda ter relativa segurança.

Já para as raízes de “Dutch Roll”, a frequência natural  $\omega_n$  mínima é de 0,4 rad/s, o coeficiente  $\zeta$  mínimo de 0,19 e o valor mínimo da multiplicação de ambos de 0,35 rad/s, o que pode ser conferido no Apêndice G. Escolhendo a frequência de 0,5 rad/s, pode-se ter  $\zeta = 0,7$  e fica-se dentro da especificação. Dessa forma, polinômio característico de 2 ordem do modo “Dutch Roll” pode ser escrito por:  $\lambda^2 + 2\omega\zeta\lambda + \omega^2 = 0$ . Substituindo valores e calculando os zeros, chega-se ao seguinte par de raízes complexas conjugadas:  $-0,35 - 0,35707i$  e  $-0,35 + 0,35707i$ .

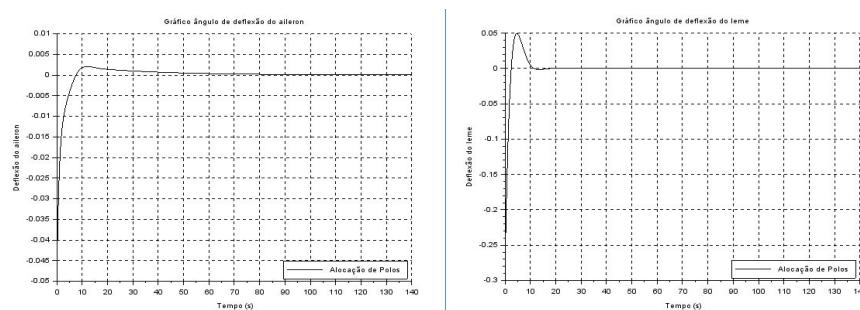
Finalmente, como não há uma restrição para a raiz de espiral, utilizou-se a referência encontrada para controle de alta performance fornecido de um artigo científico da NASA (Smetum, 1972) de -0,0346. Assim tem-se os quatro polos a serem alocados através do software Scilab.

Realizando a alocação chega-se à seguinte matriz de controle K (Equação 44).

$$K = \begin{bmatrix} 0,4801967 & 7,1693373 & 3,8188348 & 0,4540873 \\ 2,73062155 & 1,1818542 & 7,8766759 & 1,339517 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Uma vez a matriz K definida é possível simular a resposta do sistema de controle. É necessário analisar essa resposta, pois tratando de um sistema real, há um limite físico para a deflexão das superfícies de controle. Tal variável está disponível nos gráficos da Figura 13 para uma entrada unitária de velocidade lateral (v) e outros parâmetros nulos.

Figura 13 - Deflexão das superfícies leme e aileron - Alocação de Polos.



Como é possível notar, as deflexões são bem pequenas, logo, é possível afirmar que o sistema de controle pode ser construído e apresenta uma resposta rápida a alterações.

### 5.3. Controle Linear Quadrático

O controle pelo método linear quadrático (LQR) se baseia em achar a lei de controle que minimiza o Índice de Desempenho Quadrático (Função Objetivo), que é utilizado para otimizar o controlador e é mostrado por meio da Equação 45.

$$J = \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T P u) dt \quad (45)$$

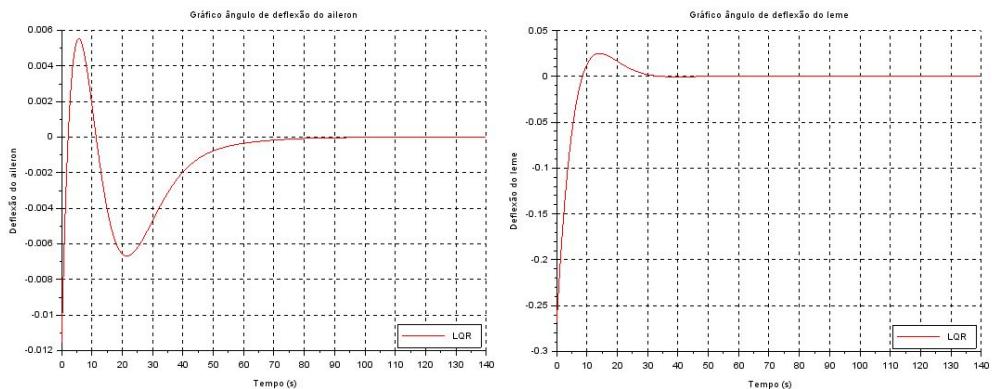
Dessa forma, deve-se definir as matrizes  $Q$  e  $P$  que minimizem o Índice de Desempenho Quadrático. Para isso, testou-se vários valores para tais matrizes, porém, atentando-se também para que haja certa penalidade em relação à energia gasta pelo sistema de controle, ou seja, para que este economize energia. Tal economia é extremamente importante, considerando que a disponibilidade de energia em um avião é muito limitada. Dessa forma, escolheu-se as matrizes  $Q$  e  $P$  considerando que os coeficientes desta devam ser maiores do que os daquela. Assim, as matrizes  $Q$  e  $P$  escolhidas podem ser visualizadas nas Equações 46 e 47.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Utilizando a Equação Algébrica de Riccati (Equação 48), é possível calcular a matriz de ganho em malha fechada por meio da Equação 49. Após a obtenção de tal matriz, foi possível simular o sistema, obtendo-se a Figura 14, novamente, para uma entrada de velocidade lateral ( $v$ ) unitária e outros parâmetros nulos.

Figura 14 - Deflexão das superfícies leme e aileron - LQR..

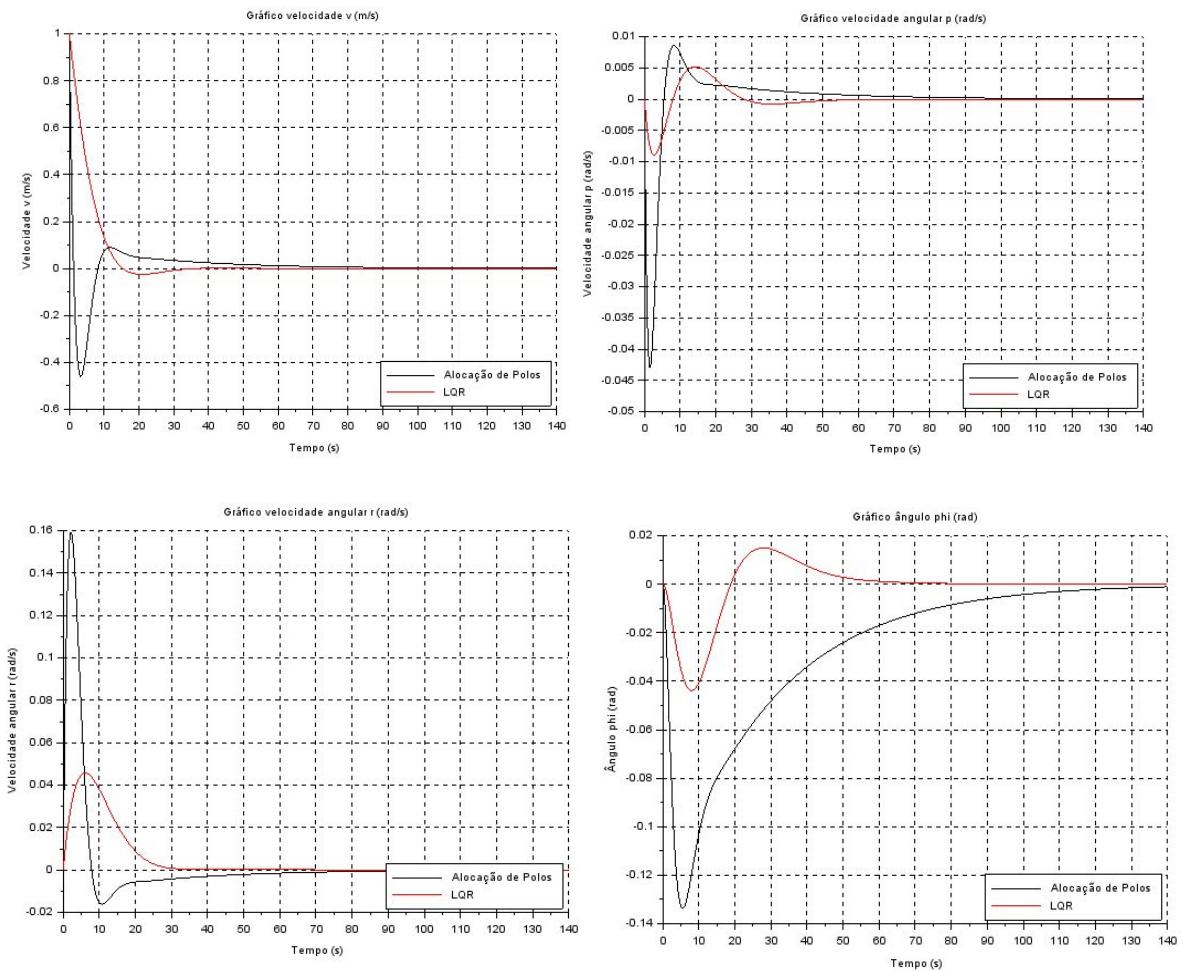


De forma análoga ao controle por alocação de polos, as deflexões são bem pequenas. Logo, esse sistema de controle também pode ser construído e também apresenta uma resposta rápida a alterações.

#### 5.4. Comparação de Controladores

Realizando as simulações dos controladores por alocação de polos e por LQR, foi possível plotar através da ferramenta gráfica do *SciLab* as respostas para cada caso, que podem ser observadas na Figura 15. Em tal figura, a linha de cor preta refere-se às respostas do sistema de controle por alocação de polos, enquanto que linha de cor vermelha representa as respostas do controlador obtido pelo método LQR. Todas situações foram simuladas para uma entrada de velocidade lateral ( $v$ ) unitária e os outros parâmetros nulos.

Figura 15 - Resposta dos controladores por LQR e Alocação de Polos para as variáveis de estado (a) velocidade  $v$  (esquerda superior), (b) velocidade  $p$  (direita superior), (c) velocidade  $r$  (esquerda inferior), (d) ângulo  $\phi$  (direita inferior).



Com base nos gráficos desenvolvidos, pode-se construir a Tabela 2 comparando as características de cada sistema de controle.

Tabela 2 - Características das respostas dos controladores.

	Overshoot		Tempo de Acomodação	
	Alocação de Polos	LQR	Alocação de Polos	LQR
<b>Velocidade V(m/s)</b>	0,46	0,025	45	25
<b>Velocidade Angular p (rad/s)</b>	0,043	0,009	50	60
<b>Velocidade Angular r (rad/s)</b>	0,016	0,044	50	30
<b>Ângulo Phi (rad)</b>	0,134	0,044	115	65

Analizando os valores da tabela, pode-se constatar que o controlador do método LQR apresenta valores menores de *overshoot* que aquele construído por alocação de polos. Tal característica pode ser considerada um vantagem desse sistema de controle, visto que para o Boeing 747 ao qual se deseja controlar um menor overshoot é vantajoso. Ainda analisando a tabela, pode-se notar que nenhum dos tempos de acomodação apresentou vantagem na maioria dos casos, apesar de o tempo de acomodação para o ângulo phi ser bem maior para alocação de polos.

### 5.5. Alocação de Polos dos Observadores

A escolha dos polos do observador deve ser feita de tal forma que a resposta do sistema de observação seja mais rápida que a do sistema de controle, isso é, a medida do erro da planta deve tender a zero mais rapidamente que a própria medida. Para que isso ocorra, segundo a teoria de controle estudada, basta que os polos do observador estejam mais à esquerda no plano imaginário em relação aos polos do sistema controlado.

Para que isso ocorresse, como todos os polos do sistema eram negativos, apenas tomou-se o produto desses por 2, de maneira semelhante a exercícios de aplicação resolvidos em PME - 3381. Logo os polos escolhidos foram: [-1,6; -0.7 + 0.71414i; -0.7 - 0,71414i; -0,0692].

Com esses polos pode-se chegar a matriz de ganhos do observador,  $K_o$  (Equação 50).

$$K_o = \begin{bmatrix} -7,4291273 & 21,348303 \\ 3,1576034 & -9,6719054 \\ -3,4444517 & 10,150103 \\ 9,4094271 & -25,7155663 \end{bmatrix} \quad (50)$$

### 5.6. LQR dos Observadores

De forma análoga à seção 5.3 do presente relatório, deve-se definir novamente as matrizes  $Q_o$  e  $P_o$  que minimizem o Índice de Desempenho Quadrático, uma vez que isso culmina em uma resposta mais rápida do sistema de observação. Contudo, deve-se atentar também para escolher tais matrizes de forma com que os polos do observador estejam mais à esquerda dos do sistema, a fim

de que a resposta do sistema de observação seja mais rápida do que a do sistema de controle. Assim, as matrizes  $Q_o$  e  $P_o$  escolhidas podem ser visualizadas nas Equações 51 e 52.

$$Q_o = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$P_o = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \quad (52)$$

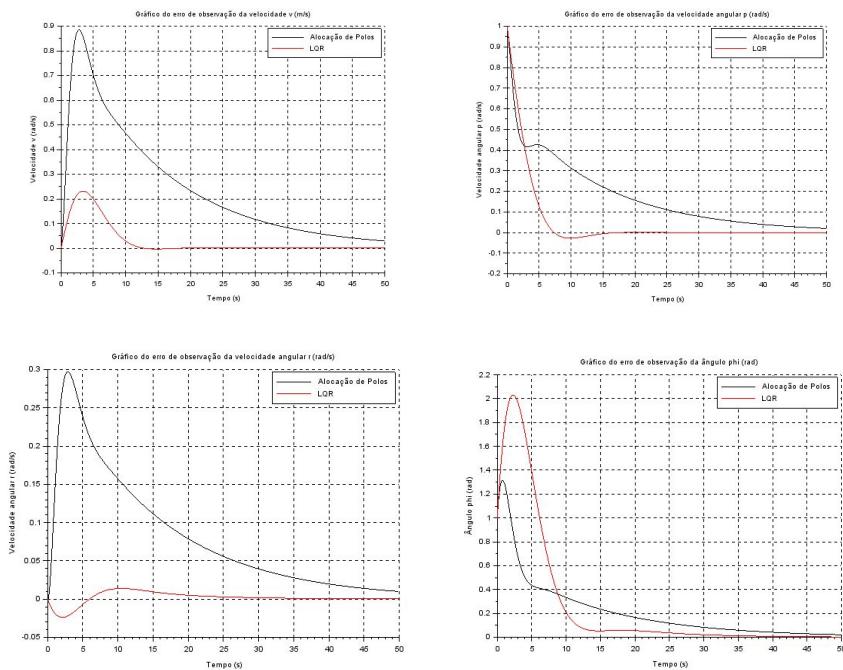
Utilizando novamente a Equação Diferencial de Riccati, foi possível calcular a matriz de ganho para o observador, a qual pode ser visualizada por meio da Equação 53.

$$K_o = R_o \cdot C^T \cdot P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0,9812 & -0,050 \\ 0,2624 & -0,0410 \\ -0,050 & 0,0632 \\ 2,3695 & 0,1052 \end{bmatrix} \quad (53)$$

### 5.7. Comparação de Observadores

Com a matriz de ganho de observador para ambos os métodos, é possível avaliar o erro de observação para cada método, o que é explicitado nos gráficos da Figura 16. Como há sensores para as velocidades lateral ( $v$ ) e de guinada ( $r$ ), seus erros iniciais são nulos. Assim, foram simuladas situações onde há erros iniciais para a velocidade de rolagem ( $p$ ) e ângulo de rolagem ( $\Phi$ ).

Figura 16 - Comparação de erro de observação pelos métodos LQR e Alocação de Polos (a) velocidade  $v$  (esquerda superior), (b) velocidade  $p$  (direita superior), (c) velocidade  $r$  (esquerda inferior), (d) ângulo  $\phi$  (direita inferior).

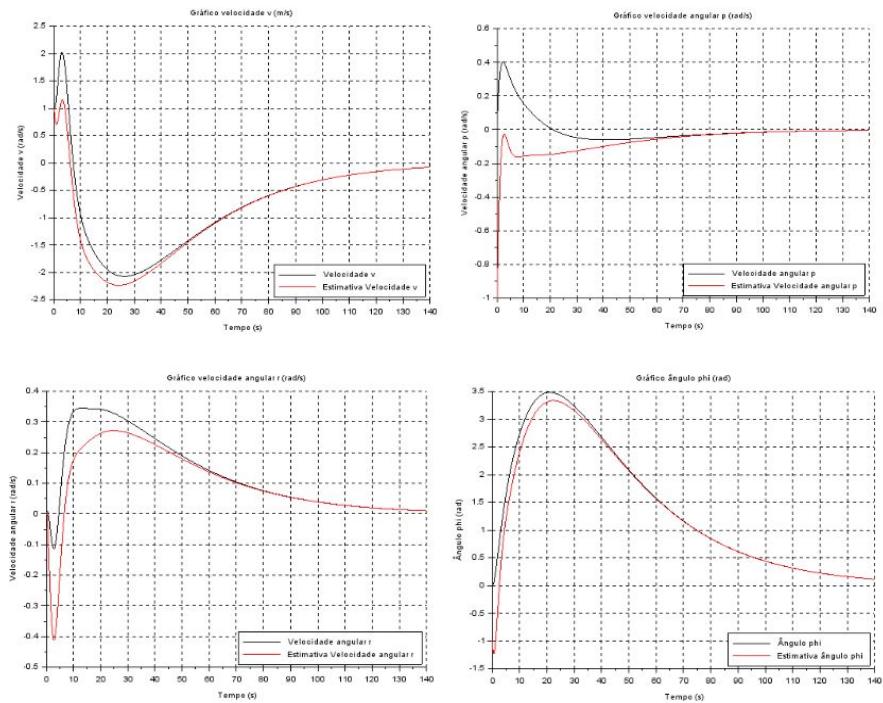


Observa-se que, para as variáveis estimadas sem o uso de sensores, ou seja, velocidade de rolagem ( $p$ ) e ângulo de rolagem ( $\phi$ ), o uso do método LQR atinge o erro zero em menor tempo, embora seu *overshoot* inicial no ângulo de rolagem seja maior. As variáveis medidas por sensor, ou seja, velocidades lateral ( $v$ ) e de guinada ( $r$ ), estão apresentadas para verificar se o observador está funcionando de acordo, sendo que os resultados nos levam a mesma conclusão de que o observador feito por método LQR possui melhor desempenho.

### 5.8. Princípio da Separação

Na Figura 17, estão apresentadas as comparações entre a estimativa feita pelo observador e o valor real das variáveis de estado, a partir das matrizes de ganho obtidas a partir do método de alocação dos polos. Foram utilizadas as mesmas condições iniciais para o controle e observação, ou seja, condição inicial de controle com velocidade lateral ( $v$ ) unitária no início e erros iniciais de observação não nulos na velocidade de rolagem ( $p$ ) e no ângulo de rolagem ( $\phi$ ).

Figura 17 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por alocação de polos (a) velocidade  $v$  (esquerda superior), (b) velocidade  $p$  (direita superior), (c) velocidade  $r$  (esquerda inferior), (d) ângulo  $\phi$  (direita inferior).



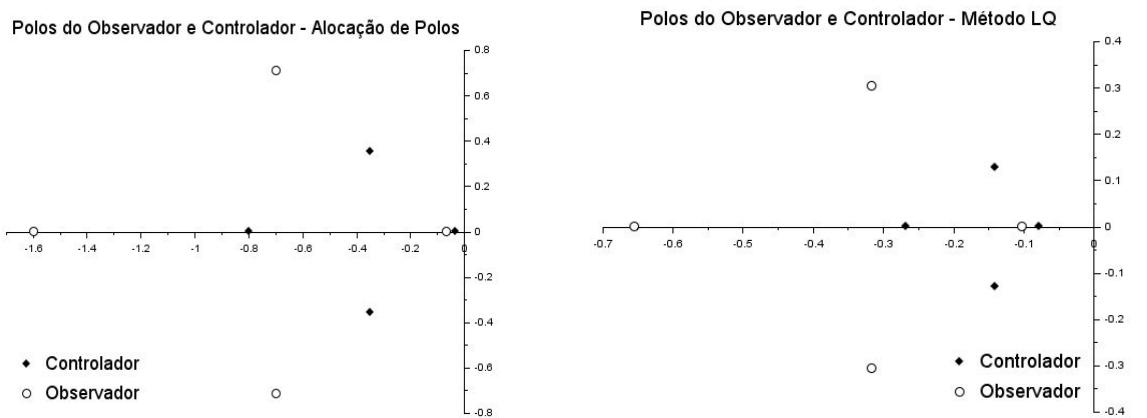
O intuito do método do Princípio da Separação é fazer com que a estimativa do espaço de estado converja para o real valor do sistema, fato que é comprovado pelos gráficos acima. Verifica-se que as trajetórias estimadas são razoáveis, de modo que as variáveis são estimadas de forma satisfatória. Nota-se diferenças entre as respostas para sistemas controlados sem e com

observador. Isto ocorre devido ao fato de os erros de observação afetarem diretamente nas variáveis de espaço de estado do sistema. Além disso, verifica-se que as variáveis que melhor são estimadas são as que possuem sensores para sua medição, sendo que a velocidade angular  $p$  e o ângulo  $\phi$  possuem estimativas piores. Os gráficos para o Princípio de Separação com as matrizes de ganho do método de controle LQR estão disponíveis na Figura 22 do Apêndice H.

### 5.9. Análise de Estabilidade dos Sistemas Controlados

A Figura 18 apresenta os polos de controladores e observadores para os dois sistemas de controle construídos.

Figura 18 - Comparação de polos do observador e do controlador (a) por alocação de polos por LQR (b).



Pela posição dos polos no plano imaginário é possível perceber que todos eles se encontram à esquerda do eixo imaginário, ou seja, todos os polos têm parte real negativa. A partir disso, é possível afirmar que ambos os sistemas em malha fechada são estáveis. Isso também pode ser visto analisando os gráficos obtidos nas figuras anteriores de resposta do sistema, onde todas as simulações tendiam a zero depois de decorrido um certo tempo.

Além disso, a partir da observação dos polos no plano imaginário, é possível observar claramente que a resposta do sistema de observação é mais rápida do que a do sistema de controle. Isso é, sem dúvidas, uma característica desejável pois, dessa forma, o sistema reconhece um erro de medição mais rapidamente que o sistema de atuação realiza o controle.

### 5.10. Acompanhamento de Referência

Além de buscar trazer o sistema para a posição de equilíbrio por meio do uso de controladores, pode-se utilizar artifícios para fazer com que as saídas de interesse sigam referências desejadas, sendo elas fixa ou variáveis, mantendo a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios.

Para isso, utilizamos o controle em malha fechada que leva em consideração tanto o erro com relação ao ponto de equilíbrio, quanto o erro em relação à referência estabelecida. Para isso, estabeleceremos uma referência descrita pela seguinte expressão:

$$x_r \quad (54)$$

$$\dot{x}_r = A_r x_r \quad (55)$$

Dessa forma, buscamos controlar o sistema por meio de transformação da entrada  $u$  em uma função do erro em relação ao equilíbrio e do erro em relação à referência:

$$u = -K(x - x_r) - K_e x_r \quad (56)$$

Com isso, conseguimos criar uma entrada de controle capaz de rejeitar os distúrbios por meio da matriz  $K$ , que pode ser determinada por meio do método da alocação de polos ou do regulador quadrático linear, e também capaz de seguir a referência, devido à matriz  $K_e$ , função das matrizes compostoras do espaço de estados e também das matrizes que determinam os distúrbios e referências.

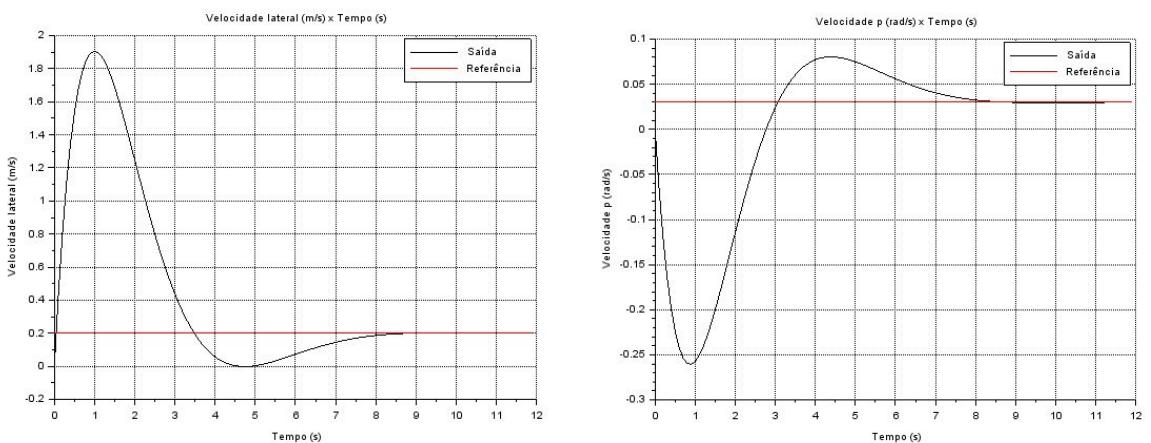
Nas simulações realizadas para o seguidor, foi utilizada a matriz  $K$  alocada para os polos já citados na seção sobre alocação de polos.

Na primeira situação é solicitado que se siga uma referência constante para os estados observados:

$$x_{1,r} = 0,2 \text{ m/s} \quad (57)$$

$$x_{3,r} = 0,03 \text{ rad/s} \quad (58)$$

Figura 19 - Velocidade (a) lateral (esquerda), (b) de guinada (direita) seguindo de referência fixa.

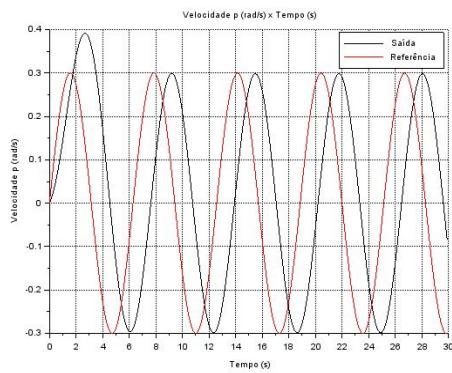


Verifica-se que o sistema é capaz de seguir as referências com tempo de acomodação de cerca de 8,4 s para a velocidade lateral e de 8,2 s para a velocidade de guinada. Além disso, observa-se a presença de um *overshoot* nas saídas devido à dinâmica do sistema. Esses sobressinais atingem valores de até quase 10 vezes da referência pretendida.

Em um segundo caso, buscamos fazer com que a velocidade de guinada siga uma referência senoidal, com resultado mostrado na Figura 20:

$$x_{3,r} = 0,3\sin(t) \text{ rad/s} \quad (59)$$

Figura 20 - Resposta da saída da velocidade de guinada seguindo referência senoidal.

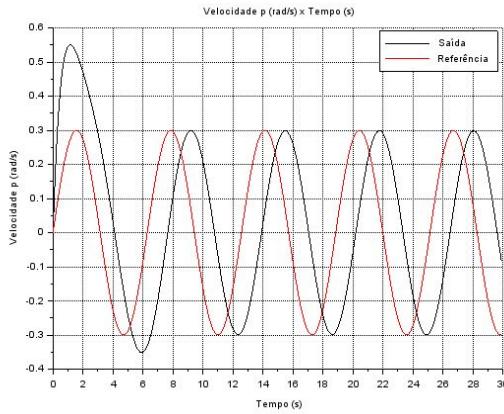


Percebe-se que a saída segue a referência com um atraso de cerca de 1,3 s. No início, há um *overshoot* de cerca de 30% devido à dinâmica do sistema.

Já para o terceiro caso, mostrado na Figura 21, além de introduzir a referência variável, é adicionado um distúrbio correspondente à uma rajada de vento rotacional na direção de rolagem da aeronave com intensidade de 20 rad/s:

$$x_{w,2} = 20 \text{ rad/s} \quad (60)$$

Figura 21 - Velocidade de guinada seguindo referência senoidal com distúrbio.



Como esperado, há diferença entre as respostas no início, caracterizado por um aumento do *overshoot*, porém os resultados são semelhantes em regime permanente. Isso se dá pelo fato de o sistema ter que se adequar ao distúrbio. O efeito do distúrbio é pequeno, de forma que o tempo de atraso entre a saída e a referência se mantém praticamente igual ao caso sem a presença do distúrbio.

Fica visível, então, que o seguidor de referência variável é capaz de acompanhar as referências quando fixas, quando variáveis e também na situação onde são adicionados distúrbios no sistema, mantendo a capacidade de rejeição de distúrbios implementada por meio do método da alocação de polos e do regulador quadrático linear.

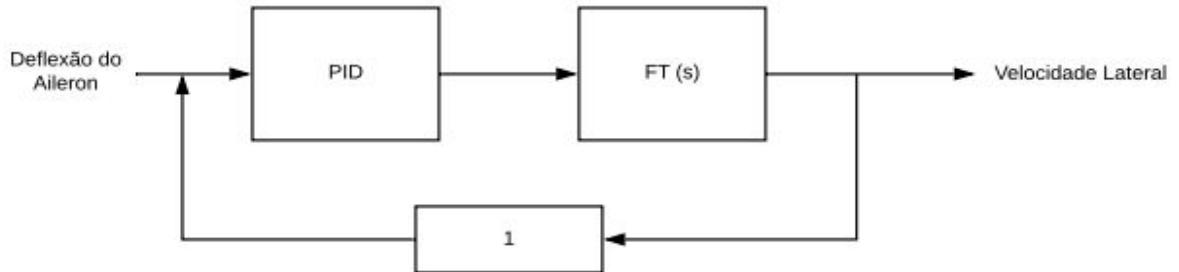
## 6. CONTROLE CLÁSSICO

O tópico anterior abordou o controle moderno, no qual se fazia uso do espaço de estados para controlar o sistema no domínio do tempo. Entretanto, para o Controle Clássico, o trabalho se dará no domínio da frequência, pelo uso das funções de transferência do sistema. Vale ressaltar que o Controle Clássico é restrito a sistemas SISO, sendo mais simples e possuindo mais limitações, por isso, serão analisadas apenas uma entrada e uma saída do sistema. Para a entrada usou-se as deflexões dos ailerons ( $\delta a$ ) e para a saída, a velocidade lateral do avião ( $v$ ), assim a função de transferência utilizada foi:

$$FT_1 = \frac{0,0005759 + 0,0096525s - 0,0038725s^2}{0,0000237 + 0,0013412s + 0,027388s^2 + 0,34822398s^3 + s^4} \quad (61)$$

Desta forma pode-se representar o controle a ser feito pelo diagrama de blocos da Figura 22.

Figura 22 - Diagrama de blocos da entrada e saída a serem controladas.

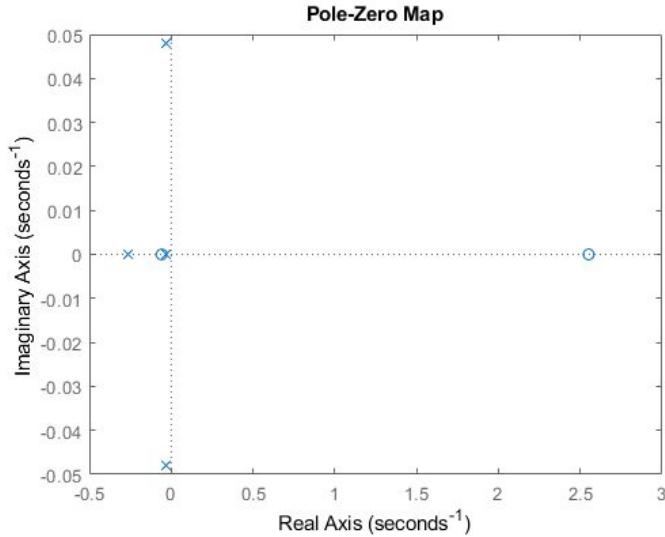


### 6.1 Polos e zeros em malha aberta

A Figura 23 apresenta os polos e os zeros do sistema em malha aberta, nota-se que todos os polos apresentam parte real negativa, portanto o sistema é estável em malha aberta, entretanto,

nota-se que há um zero com parte real positiva, tal zero será responsável por atrair os polos no diagrama de lugar das raízes. Além disso, esse zero com parte real positiva também é responsável por tornar o sistema em malha fechada instável, sendo necessário um sistema de controle, o qual será projetado no presente trabalho.

Figura 23 - Polos e zeros do sistema em malha aberta.



## 6.2 Análise de tipo e erro em regime permanente

Nesta seção, serão analisados o tipo da função de transferência e o respectivo erro em regime permanente para entrada impulso unitário, degrau unitário e rampa. Além disso, quanto a ordem da função, pode-se afirmar somente analisando a equação 61 que a FT é de ordem 4. O tipo também pode ser obtido somente pela análise da FT, o qual corresponde ao número de polos nulos da função em malha aberta, nesse caso, tem-se tipo 0.

Em relação ao erro em regime permanente, de acordo com o tipo, pode-se afirmar que uma entrada impulso unitário terá erro 0, enquanto uma entrada rampa terá erro em regime permanente infinito. Assim, falta somente determinar a erro para uma entrada degrau que será dado pela equação 62.

$$E_{RP} = \frac{1}{1 + K_P} \quad (62)$$

Em que  $K_P$  é dado pela equação 63.

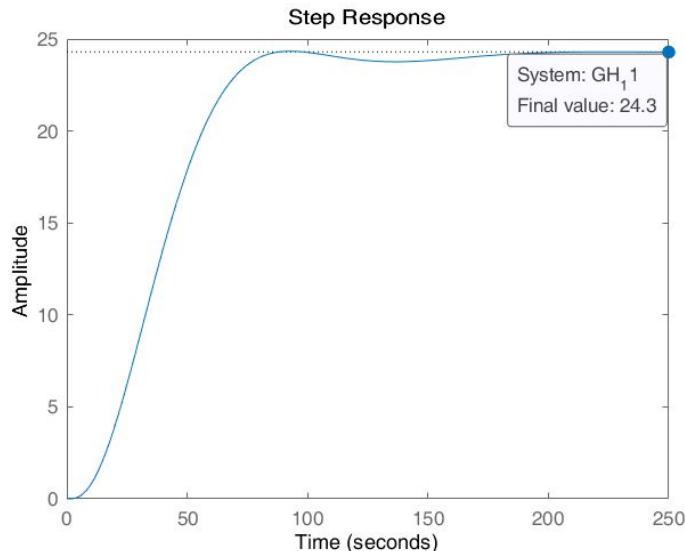
$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (63)$$

Realizando os cálculos obtém-se um erro em regime permanente para entrada degrau unitário de 0,03952.

### 6.3 Resposta em Malha Aberta

Para a resposta de malha aberta, a função de transferência em questão possui como entrada a deflexão no aileron e como saída a velocidade lateral do avião. Assim, define-se uma entrada em degrau unitária de deflexão no aileron, de modo a avaliar sua resposta em termos de rapidez e magnitude. O gráfico da resposta ao degrau no tempo encontra-se na Figura 24.

Figura 24 - Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.

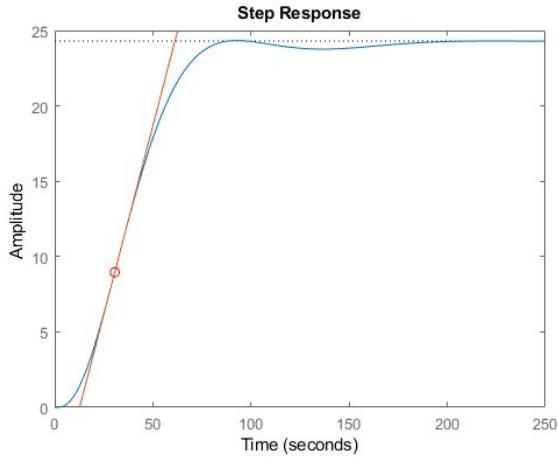


Verifica-se que, para uma deflexão unitária no aileron, a velocidade lateral do avião estabiliza-se em uma amplitude de 24,3 m/s, a qual é atingida em um período de, aproximadamente, 150 segundos.

### 6.4 Sintonia PID pelo Método de Ziegler-Nichols

Assim como nas plantas estudadas por Ziegler e Nichols, a resposta em malha aberta da função de transferência escolhida também apresenta uma forma de “S” para uma entrada em degrau (o que pode ser verificado pela Figura 24). Dessa forma, pode-se, como demandado pelo método de Ziegler-Nichols, determinar o ponto de inflexão da curva obtida e, em seguida, traçar a reta tangente à curva neste ponto. Tanto o ponto quanto a reta obtida são mostrados por meio da Figura 25.

Figura 25 - Reta tangente no ponto de inflexão da resposta em degrau unitário em malha aberta.



Através da Figura 25, é possível determinar os valores de  $L$  e  $T$  e, por meio destes e das Equações 64, 65, 66, 67 e 68, determinar os coeficientes  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  do controlador PID.

$$K_p = 1,2 \frac{T}{L} \quad (64)$$

$$T_i = 2L \quad (65)$$

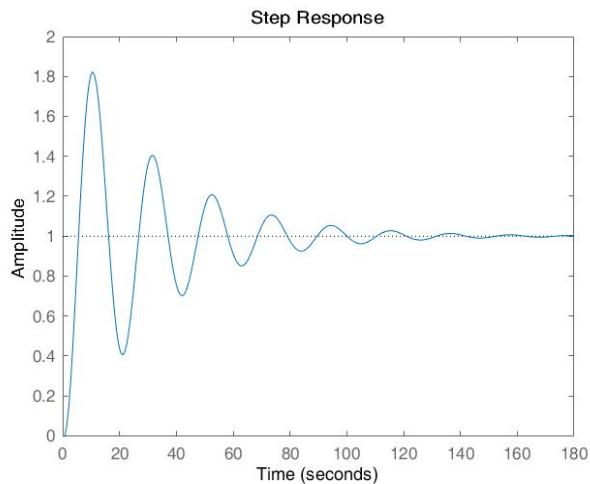
$$T_d = 0,5L \quad (66)$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (67)$$

$$K_d = \frac{K_p}{T_d} \quad (68)$$

Como os valores encontrados para  $T$  e  $L$  pela figura foram 17,9 e 12,7, tem-se que os coeficientes  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  valem respectivamente 1,69, 0,0665 e 10,7. A resposta ao degrau unitário é mostrada na Figura 26.

Figura 26 - Resposta ao degrau unitário para o PID sintonizado por Ziegler-Nichols.



## 6.5 Sintonia PID por Lugar das Raízes

Para a sintonia PID, existem ganhos que melhoram o desempenho do sistema, de modo que podem ser encontrados a partir dos diagramas de lugar das raízes de determinadas equações. Tais diagramas demonstram os possíveis locais dos polos do sistema em malha fechada para diferentes ganhos, sendo possível realizar uma seleção visual do lugar dos polos a ser considerados. Para tal, considera-se  $N$  o numerador da função de transferência e  $D$  o denominador, sendo que ambos se referem a equação 61.

### 6.5.1 Ganho Proporcional Ótimo

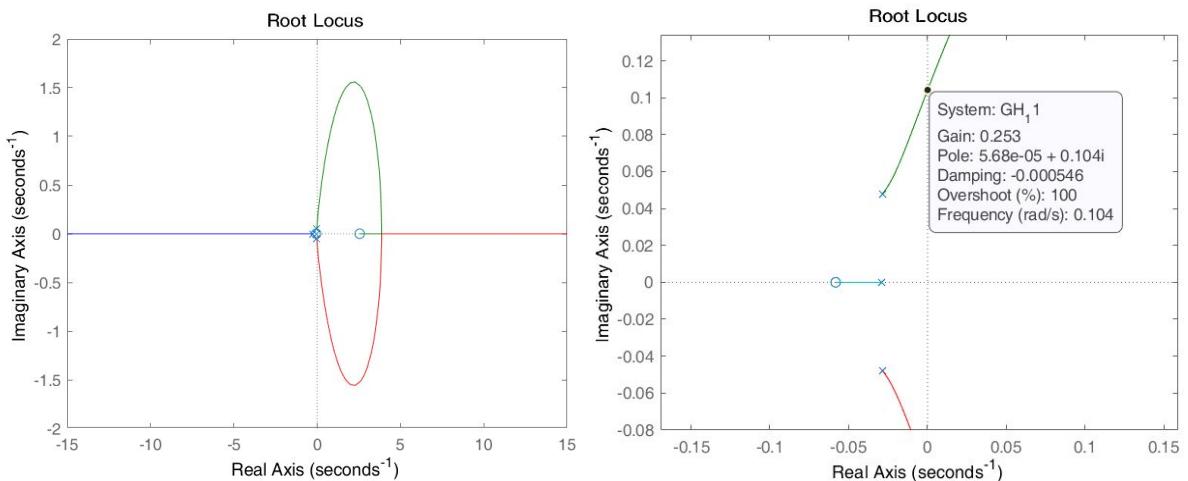
Para encontrar o ganho proporcional ótimo, utiliza-se a equação 70 com variação no ganho  $K_p$  para elaborar o diagrama de Lugar das Raízes utilizando o comando *rlocus* do *Matlab*.

$$\Phi_p = 1 + K_p \cdot \frac{N}{D} = 0 \quad (69)$$

$$GH_p = K_p \frac{0,0005759 + 0,0096525s - 0,0038725s^2}{0,0000237 + 0,0013412s + 0,027388s^2 + 0,34822398s^3 + s^4} \quad (70)$$

Assim, o ganho é escolhido de modo que haja um equilíbrio entre o valor de ganho e a estabilidade do sistema, de modo que o ganho seja ideal e os polos do sistema estejam distantes do eixo imaginário do plano. Dessa forma, foi encontrado o diagrama da Figura 27.

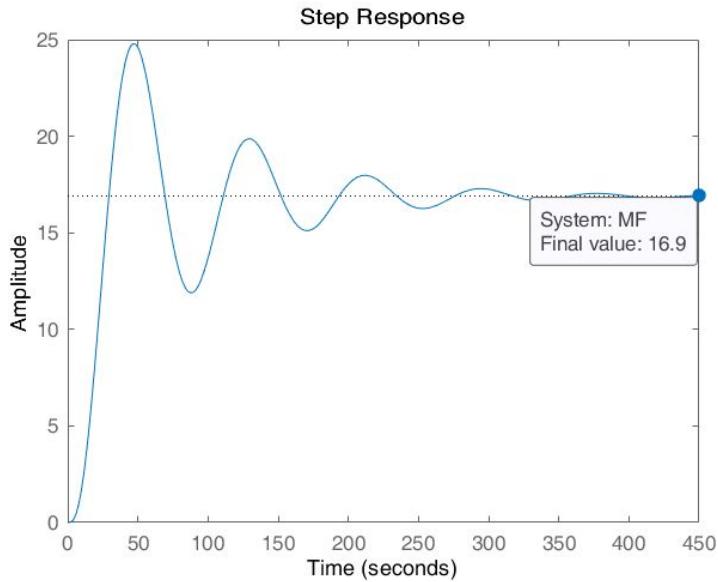
Figura 27 - Lugar das Raízes para ganho proporcional (direita) e com detalhe (esquerda).



Assim, verifica-se que com o aumento do ganho proporcional, os polos complexos conjugados tendem ao lado positivo do eixo real, sendo que o valor para o ganho deve estar entre 0 e 0,253 para que o sistema fosse estável. Dessa forma, escolheu-se um ganho  $K_p = 0,094$  para otimizar a resposta do sistema.

Escolhido o ganho proporcional, simula-se o sistema para seguir uma sinal de velocidade lateral  $v = 24,3$  m/s, que é a velocidade obtida em malha aberta para uma deflexão unitária do aileron, obtendo a resposta da Figura 28.

Figura 28 - Resposta ao degrau unitário apenas com ganho proporcional.



Avaliando a resposta ao degrau unitário com um controlador que possui apenas ganho proporcional, verifica-se que há um grande erro em regime permanente, visto que o sistema atingiu uma velocidade lateral final de 16,9 m/s, sendo que o valor a ser atingido era de 24,3 m/s. Sendo assim, o sistema necessita de um ganho integral, o qual irá arrumar este erro em regime permanente. Ademais, verifica-se que o sistema demora para atingir a estabilidade, sendo muito oscilatório seu comportamento, o que permite concluir que há a necessidade de incluir também um ganho derivativo para amortecer o sistema.

### 6.5.2 Ganho Integral Ótimo

As etapas para encontrar o ganho integral ótimo são parecidas com as etapas para encontrar o ganho proporcional, com a diferença de que devem ser feitas manipulações algébricas para que a equação característica esteja em função do ganho integral  $K_i$ . Assim, é utilizada a equação 72 para a elaboração do diagrama do Lugar das Raízes.

$$\Phi_i = 1 + K_i \cdot \frac{N}{s(D + K_p N)} = 0 \quad (71)$$

$$GH_i = K_i \cdot \frac{-0,003873s^2 + 0,009652s + 0,0005759}{s^5 + 0,3482s^4 + 0,02702s^3 + 0,002249s^2 + 0,00007783s} \quad (72)$$

Assim, utilizando a equação de malha aberta em função de  $K_i$ , encontra-se o diagrama de Lugar das Raízes, o qual está disponível na Figura 43, no apêndice H.

Verifica-se que o ganho integral a ser inserido no controlador é mínimo, mas que é necessário para que o erro em regime permanente seja nulo. Os valores que esse pode assumir são entre 0 e 0,00382, como visto no diagrama. Assim, foi escolhido um ganho integral de  $K_i = 0,0022$  para obter uma melhor resposta do sistema e mantê-lo estável.

### 6.5.3 Ganho Derivativo Ótimo

O intuito do ganho derivativo é amortecer o sistema e fazer com que este possua uma rápida resposta para uma determinada entrada. Para encontrar seu valor ótimo, avalia-se a equação 74.

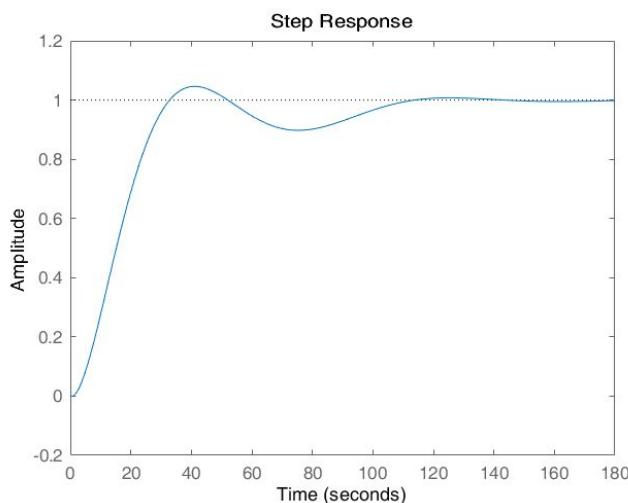
$$\Phi_d = 1 + K_d \cdot \frac{s^2 N}{sD + (K_p s + K_i)N} = 0 \quad (73)$$

$$GH_d = K_d \frac{-0,003873s^4 + 0,009652s^3 + 0,0005759s^2}{s^5 + 0,3482s^4 + 0,02702s^3 + 0,002249s^2 + 0,00007783s} \quad (74)$$

Elaborando o diagrama de Lugar das Raízes para o ganho derivativo, tem-se o gráfico da Figura 44, disponível no apêndice H.

Verifica-se que, para o ganho derivativo os polos sempre estarão do lado negativo do eixo real, o que não limita sua escolha. De modo a escolher os polos mais distantes do eixo imaginário, foi definido o ganho  $K_d = 1,06$ , o qual possui polos complexos conjugados  $-0,00308 \pm 0,0744i$ , os quais serão responsáveis por amortecer o sistema. Assim, a resposta ao degrau unitário para o PID elaborado é mostrada na Figura 29.

Figura 29 - Resposta ao degrau unitário apenas com ganho proporcional e derivativo.



## 6.6 Sintonia PID pelo Método de Alocação de Polos

Um dos métodos utilizados para sintonização de controladores PID é o método da alocação de polos. Nele, o controlador PID é utilizado para fazer com que os polos de malha fechada da função de transferência sejam iguais ou próximos de um conjunto de polos desejado.

O processo consiste em alocar os ganhos do PID que façam com que a equação característica da função de transferência de malha fechada do sistema tenha raízes iguais ou próximas aos polos de malha fechada desejados.

Assim, a equação característica da função de transferência de malha fechada com os ganhos do PID tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & s^5 + s^4(0,348224 - 0,0038725K_d) \\ & + s^3(0,027388 - 0,0038725K_p + 0,0096525K_d) \\ & + s^2(0,0013412 + 0,0096525K_p - 0,0038725K_i + 0,0005759K_d) \quad (75) \\ & + s(0,0005759K_p + 0,0096525K_i + 0,0000237) + 0,0005759K_i \end{aligned}$$

Para determinar o valor dos ganhos, é necessário determinar quais são os polos que desejamos alocar. Neste caso, a equação característica de malha fechada tem 5 raízes, de modo que o sistema tem 5 pólos. Portanto, existem 5 equações (uma para cada polo) e 3 incógnitas (os 3 ganhos do PID). Dessa forma, o sistema não terá uma única solução, de forma que é necessário utilizar algum método para encontrar o conjunto de ganhos que melhor aproxima os resultados desejados.

Então, para poder resolver o sistema, foram determinadas as equações características para diversos conjuntos de pólos, de forma que, igualando as duas equações características, a baseada na dinâmica do sistema com os ganhos do PID, e a equação desejada para os polos, foi possível utilizar o Método dos Mínimos Quadrados para encontrar o melhor conjunto de ganhos para os polos escolhidos para alocação.

Percebe-se, porém, que dificilmente o PID é capaz de alocar os polos desejados com precisão. Por mais que o MMQ determine os ganhos necessários, a aproximação acaba sendo ruim, o que faz com o que o sistema não tenha polos próximos do desejado, ocorrendo, em alguns casos, de o sistema ser instável em malha fechada.

A determinação de um conjunto de polos é realizado iterativamente, buscando uma situação em que o MMQ retornasse um conjunto de ganhos capazes de alocar com precisão os polos, é um processo muito complexo. O que ocorre, provavelmente, é o fato de existir a necessidade de

escolher um conjunto de polos que faça parte do Lugar das Raízes para um PID possível. Caso escolha-se um conjunto de polos que não seja possível de se obter por meio do PID, o sistema não irá se comportar como desejado.

Assim, opta-se por utilizar polos próximos aos polos obtidos após a sintonização do PID por meio do método do lugar das raízes. Essa escolha faz sentido, uma vez que se esses polos foram obtidos por meio da sintonização de um controlador PID, é possível obter, por meio de um controlador PID, polos de malha fechada próximos a esses.

Foram escolhidos, então, os polos  $[-0,023; -0,027 + 0,07i; -0,027 - 0,07i; 0,03 + 0,01i; 0,03 - 0,01i]$ . Assim, a equação característica almejada era da forma:

$$s^5 + 0.344s^4 + 0.036089s^3 + 0.00266161s^2 + 0.0000957292s + 1.29467 \times 10^{-6} \quad (76)$$

Dessa forma, a matriz abaixo traz o sistema de equações que se precisa resolver por meio de MMQ para encontrar os ganhos que alocam os polos desejados.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -0.0038725 \\ -0.0038725 & 0 & 0.0096525 \\ 0.0096525 & -0.0038725 & 0.0005759 \\ 0.0005759 & 0.0096525 & 0 \\ 0 & 0.0005759 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.004224 \\ 0.008701 \\ 0.00132041 \\ 0.000720292 \\ 0.00000129467 \end{vmatrix} \quad (77)$$

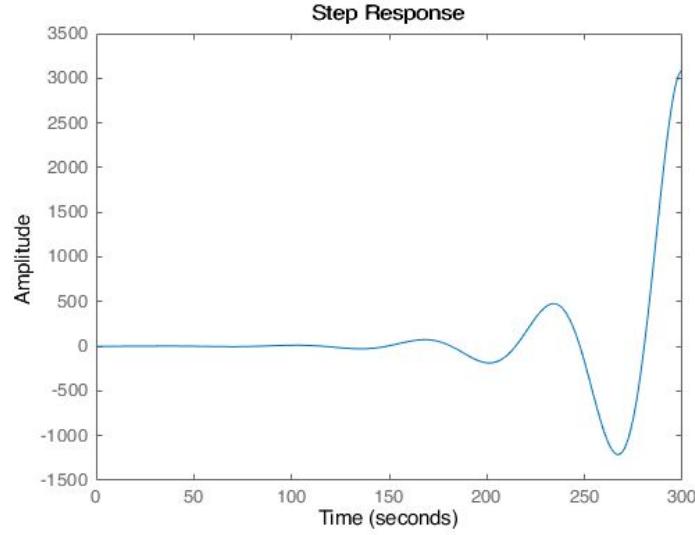
Resolvendo o sistema, chegou-se aos ganhos e desvios-padrão apresentados na tabela xx.

Tabela 3 - Ganhos e desvios-padrão para o PID sintonizado por Alocação de Polos.

Ganho	Valor	Desvio-Padrão
K <sub>p</sub>	0,1203	0,0371
K <sub>i</sub>	0,0305	0,0342
K <sub>d</sub>	0,9835	0,0342

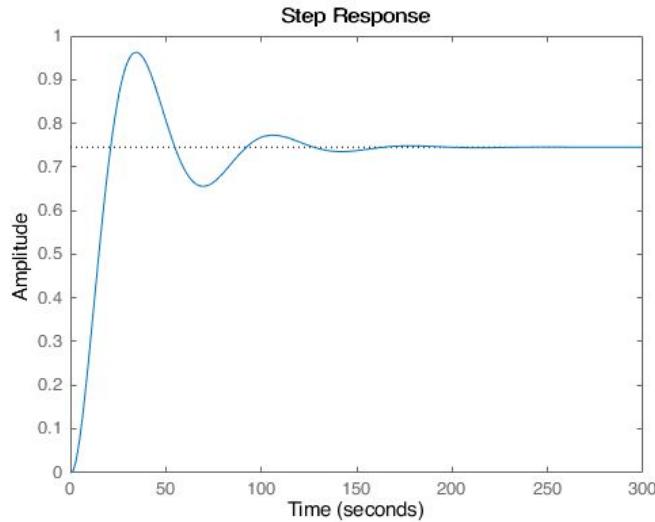
Os desvios-padrão para os ganhos proporcional e derivativo eram pequenos, porém para o ganho integral o desvio-padrão tinha ordem de grandeza maior que o próprio ganho. Utilizando o ganho integral obtido, percebeu-se que o sistema tinha comportamento instável ao degrau, o que é visível na Figura 30.

Figura 30 - Resposta ao degrau para os ganhos sintonizados por MMQ.



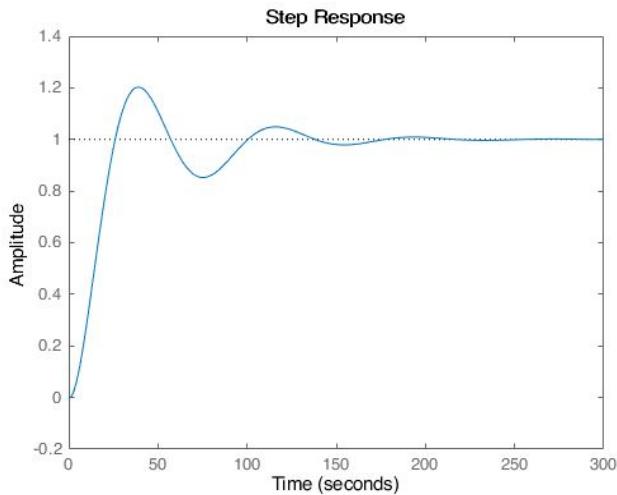
Dessa forma, foi desconsiderado ganho integral obtido por meio do MMQ, verificando que o sistema se tornava estável, porém com erro em regime permanente, como visto na Figura 31.

Figura 31 - Resposta ao degrau para os ganhos sintonizados por MMQ sem ganho integral.



Para determinar um valor de ganho integral capaz de trazer um bom resultado para o sistema, testa-se algumas potências de 10 do ganho encontrado para o MMQ. Assim, um resultado satisfatório é encontrado para  $K_i = 0,00305$ , representado na Figura 32.

Figura 32 - Resposta ao degrau para os ganhos sintonizados por MMQ com ganho integral.



Com esses ganhos, utilizou-se a função `pole()` do *Matlab* para verificar os polos da equação característica da função de transferência de malha fechada. Os polos encontrados foram  $[-0,2364; -0,0226 + 0,0804i; -0,0226 - 0,0804i; -0,0315 + 0,0088i; -0,0315 - 0,0088i]$ . É visível que estes polos são próximos dos polos que se desejava alocar, de modo que o procedimento utilizado é capaz de sintonizar um PID que torna a dinâmica do sistema próxima à dinâmica desejada.

Novamente, vale ressaltar que a impossibilidade de alocar os polos exatos vem do fato de que não é possível, utilizando apenas um controlador PID, alocar 5 pólos perfeitamente, a não ser que esses pólos estejam dentro dos diagramas de lugar das raízes possíveis para o sistema.

## 6.7 Sintonia PID por Otimização ITAE

Uma das maneiras de sintonizar controladores PID no domínio do tempo é por meio dos métodos de integral do erro. Diferentes abordagens podem ser utilizadas para sintonizar controladores PID a partir da otimização de índices baseados na integração do erro, algumas delas estão apresentadas na Figura 33.

Figura 33 - Métodos de Integral do Erro.

Índice de Desempenho	Descrição	Expressão
IAE	Integral do módulo do erro	$\int  e(t)  dt$
ISE	Integral dos erros ao quadrado	$\int e^2(t) dt$
ITAE	Integral do módulo do erro vezes o tempo	$\int t  e(t)  dt$

Fonte: DE CAMPOS, 2006.

O índice de desempenho ITAE, então, se baseia na integração do tempo multiplicado pelo erro absoluto da resposta do sistema ao degrau. Essa integração deve ser feita entre o instante inicial, em que se inicia a entrada em degrau, até o momento em que ocorre a estabilização.

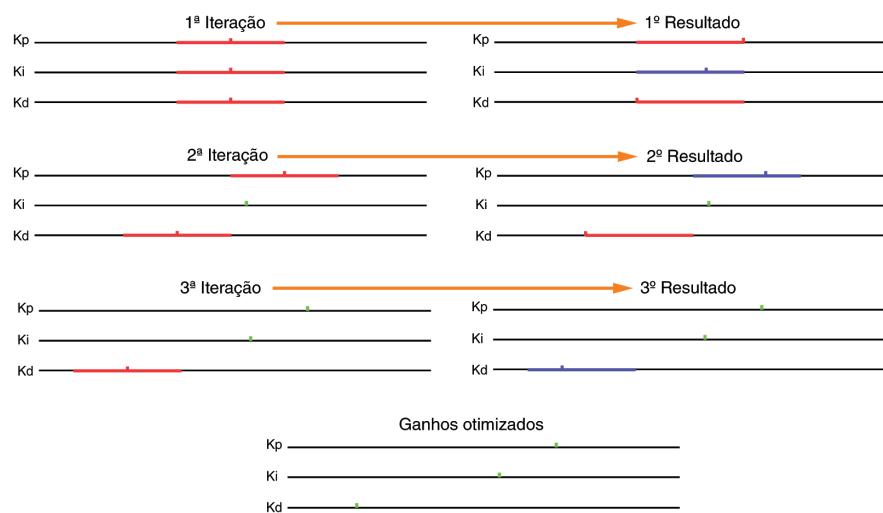
Existem diversos métodos propostos para utilizar o ITAE como critério de sintonização do PID. Alguns deles propõem a definição dos ganhos do PID baseados na escolha de frequências naturais e coeficientes de amortecimento desejados para a resposta. Esse método é apresentado em Campos (2006), porém sua utilização é dificultada para sistemas de ordem alta como o tratado neste relatório.

Outro método de utilizar o ITAE para sintonizar um controlador PID, proposto em Martins (2005), é por meio da otimização dos ganhos para a minimização do ITAE. Assim é possível, então, encontrar um controlador PID que faz com que o sistema responda rapidamente ao degrau, sem que existam erros em regime permanente.

Assim, os ganhos de um controlador PID foram otimizados de modo a minimizar o ITAE. O código presente no apêndice I foi utilizado para realizar a otimização. Por meio dos resultados obtidos para os controladores PID sintonizados pelos métodos anteriores, verificou-se que um tempo de acomodação de 300 s seria suficiente para cálculo do ITAE.

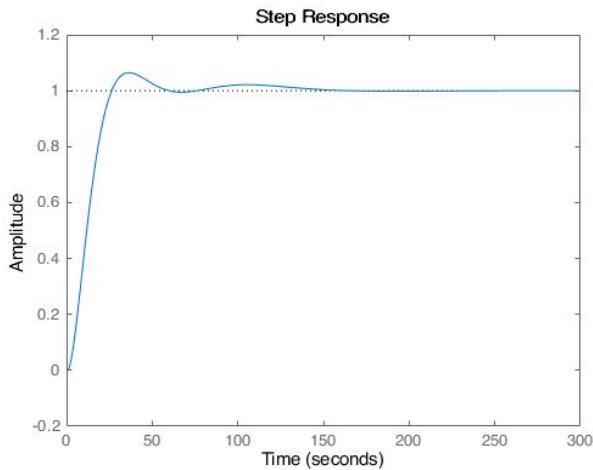
O processo de otimização foi baseado na criação de intervalos discretos em que os ganhos poderiam variar. Assim verificou-se qual conjunto de ganhos era o que minimizava o ITAE. Os ganhos que se mantivessem dentro do intervalo eram considerados ótimos e não eram mais alterados. Caso o ganho ótimo estivesse na extremidade do intervalo, era criado um novo intervalo discreto para análise desse ganho, até que o ganho ótimo estivesse dentro do intervalo de iteração. Esse procedimento está exemplificado na Figura 34.

Figura 34 - Método de otimização do PID por ITAE.



Para iniciar o processo de iteração, os ganhos sintonizados pelo método do Lugar das Raízes foram utilizados como base para a primeira iteração. Com isso, foi investigado em processos subsequentes até atingir os critérios citados anteriormente. Dessa forma, os ganhos obtidos foram  $K_p = 0,01$ ,  $K_i = 0,004$  e  $K_d = 1,76$ . O resultado para a resposta ao degrau do sistema em malha fechada controlado por esse PID está apresentado na figura 35.

Figura 35 - Resposta ao Degrau do sistema controlado por PID sintonizado por ITAE.



Verifica-se que esse resultado é o que se espera de um sistema controlado por um PID sintonizado via ITAE. A resposta é rápida, com pouco *overshoot* e um tempo de acomodação também relativamente pequeno.

## 6.8 Análises de estabilidade Absoluta e Relativa

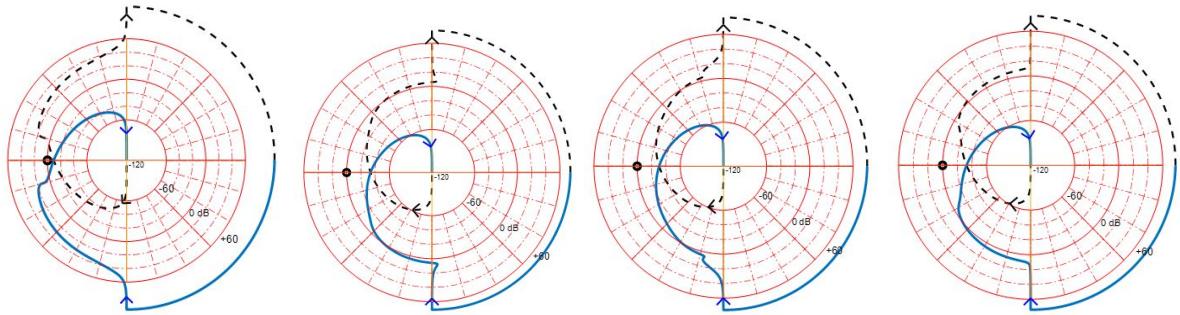
### 6.8.1 Análise por Nyquist

Considera-se um sistema absolutamente estável se todas as raízes da equação características deste sistema possuírem sua parte real negativa. Conforme já foi largamente discutido, o sistema é absolutamente estável, visto que todos os polos do sistema tem parte real negativa, além disso, realizando todas as simulações do sistema por meio do Matlab, pode-se verificar novamente a estabilidade absoluta do sistema através das margens de fase e de ganho, obtidas pelos diagramas de Nyquist e de Bode dos sistemas controlados.

Para se analisar a estabilidade por meio do diagrama de Nyquist, deve-se atentar ao fato que o sistema controlado em malha fechada só é estável se o número de voltas do diagrama em torno do ponto menos -1 no plano complexo for igual ao número de polos instáveis do sistema em malha

aberta. Poderá ser observado nas Figuras 36a, 36b, 36c e 36d, que para todos os sistemas controlados, nenhum diagrama circundou o ponto -1 do plano, dessa forma, como a equação 61 não possui nenhum polo instável, todos os sistemas são assistoticamente estáveis. A estabilidade relativa, pode ser observada nos diagramas de Nyquist, notando a distância da curva polar representativa do sistema do ponto -1, com isso, pode-se perceber que os sistemas controlados PID's sintonizados por Otimização ITAE, Lugar das Raízes e Alocação de polos são muito parecidos e relativamente mais estáveis que o sistema controlado por PID sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols. Nos tópicos posteriores haverá uma comparação entre sistemas controlados, onde se perceberá que a resposta do sistema controlado por Ziegler-Nichols possui respostas piores em outros quesitos também.

Figura 36 - Diagramas de Nyquist dos sistema controlados. Sintonia PID por: (a) Ziegler-Nichols (primeira), (b) Lugar das raízes (segunda), (c) Otimização ITAE (terceira), (d) Alocação de polos (quarta).



### 6.8.2 Estabilidade Relativa usando Bode

A análise de estabilidade absoluta e relativa, pode ser feita por meio dos diagramas de Bode, a analisando a margem de fase e a margem de ganho. A margem de ganho é o fator pelo qual o ganho pode ser aumentado antes que o sistema fique instável e esta margem pode ser lida diretamente das curvas de Bode, medindo a distância vertical entre a curva de módulo da função  $GH(j\omega)$  e a linha  $|GH(j\omega)|=1$ , isto é, a linha de 0 db, na frequência onde  $\angle GH(j\omega) = 180^\circ$ . A margem de fase, por sua vez, é o número de graus de  $\angle GH(\omega)$  acima de  $-180^\circ$ , na frequência de cruzamento de ganho, onde o módulo da função é igual a 1, tal margem de fase é definida como  $180^\circ$  mais o ângulo de fase da função de transferência de malha aberta na freqüência cujo módulo tem o valor unitário.

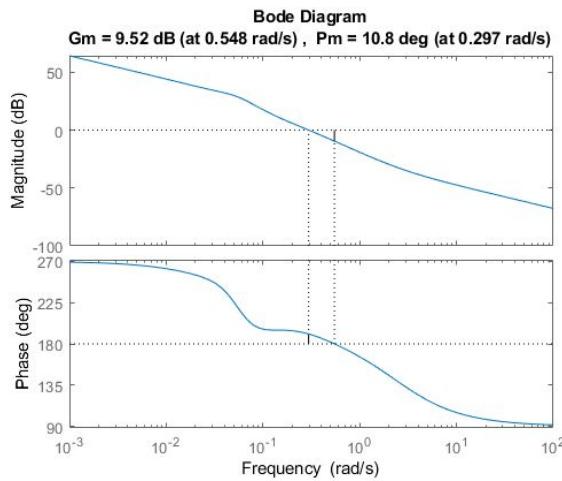
Essas margens, são por sua vez medidas da estabilidade relativa do sistema, obtidas dos diagramas de Bode. Fazendo a construção dos diagramas por meio do *MatLab*, pode-se usar o comando *margin()* que devolve os valores das margens no próprio diagrama, como pode ser visto nas Figuras 37, 38, 39 e 40. A estabilidade absoluta pode ser observada pelas margem de ganho

(MG) e de Fase ( $\Theta$ ), sendo que, se  $MG > 0$  dB e  $\Theta > 0^\circ$ , o sistema é absolutamente estável, caso contrário, o sistema é instável. A estabilidade relativa, por sua vez será dada comparando as margens umas com as outras e com valores típicos de sistemas robustos, obtidos da apresentação de aula da disciplina, onde as faixas típicas são definidas:

- Margem de Fase:  $30^\circ < \Theta < 60^\circ$
- Margem de Ganho:  $4,6$  dB  $< C < 6,0$  dB

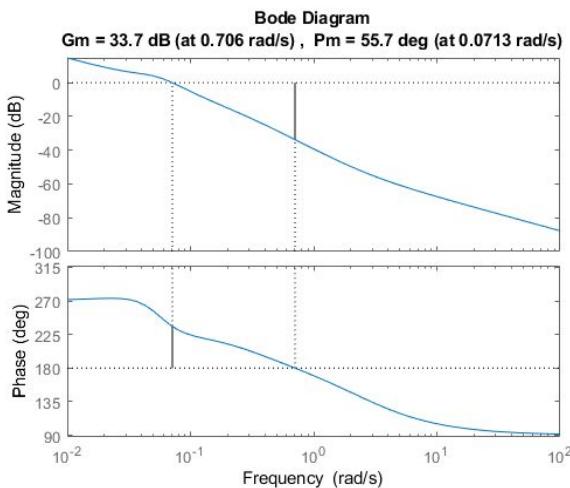
Note que os diagramas são feitos, utilizando a função de transferências dos sistemas controlados em malha aberta e retratam a estabilidade do sistema em malha fechada, semelhante ao caso da estabilidade relativa segundo Nyquist.

Figura 37 - Diagrama de Bode com margens do sistema controlado por Sintonia PID de Ziegler-Nichols.



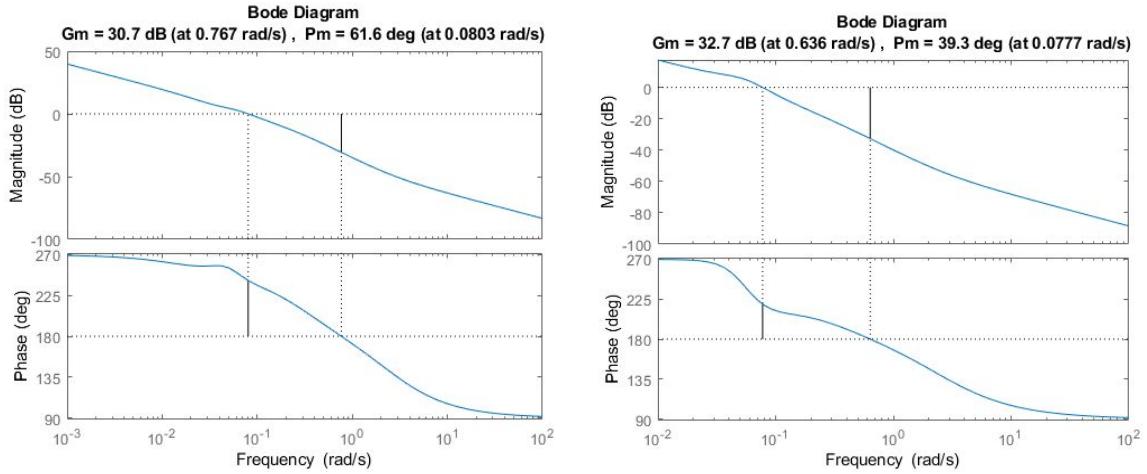
Note que ambas as margens são maiores que zero, portanto, o sistema controlado é estável. Como se verá a seguir esse é o sistema menos estável dos controladores construídos, apesar do ganho ser acima da faixa típica.

Figura 38 - Diagrama de Bode com margens do sistema controlado por Sintonia PID de Lugar das Raízes.



Percebe-se, nesse caso, que a margem de fase é de  $55,7^\circ$ , dentro da faixa típica, já a margem de ganho é de 33,7 dB, valor muito acima da faixa típica, porém isso não é um problema, apenas nos indica que o sistema controlado está bastante estável.

Figura 39 - Diagrama de Bode com margens do sistema controlado por Sintonia PID com Otimização ITAE (direita) e por Alocação de polos (esquerda).



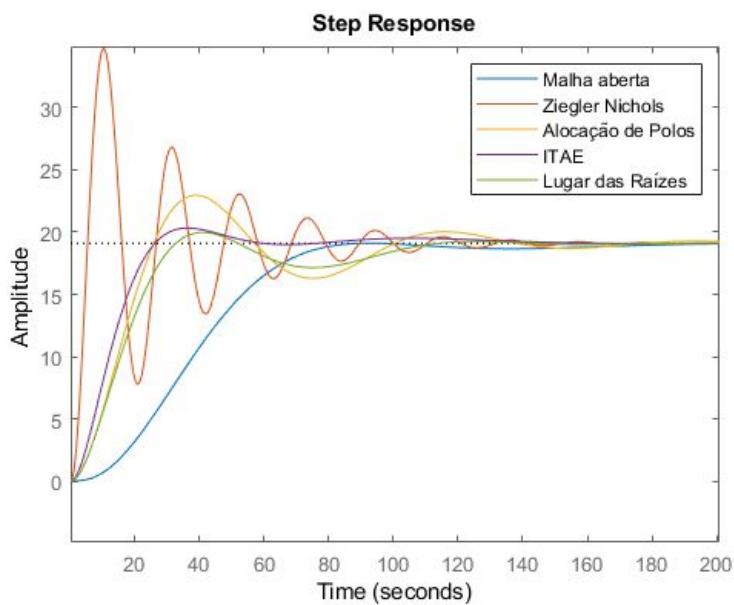
Finalmente, analisando os últimos dois últimos diagramas da Figura 39 nota-se a semelhança com aquele da Figura 38. Com margens de ganho bastante elevadas, e margens de fase dentro da faixa típica ou muito próxima dela como no caso do sistema controlado por PID sintonizado por Otimização ITAE. Os valores das margens podem ser observados nas figuras. É relevante notar que os diagramas de Bode são coerentes com os de Nyquist, com três controladores muito semelhantes e um deles levemente pior.

Observe que, como as margens do sistema são muito boas, pode-se afirmar que os controladores construídos, principalmente pelos últimos três métodos, são robustos, e o sistema não necessita de compensadores. Compensadores são dispositivos para melhorar as margens de estabilidade, tornando o sistema relativamente mais estável, entretanto como os resultados obtidos foram bons o grupo optou por não fazer uso destes.

## 6.9 Seguidores de sinal e rejeição de distúrbios

Para verificar se os controladores PID conseguiram seguir um sinal específico e rejeitar distúrbio, definiu-se por meio do software *MatLab* que tais controladores deveriam estabilizar a velocidade lateral do avião em 19,1 m/s. Escolheu-se tal número, pois este representa a velocidade lateral em que a aeronave estudada se estabiliza no caso de sistema em malha aberta quando a deflexão do aileron vale  $\pi/4$  radianos (valor definido arbitrariamente). Assim, também é possível comparar a resposta do sistema sem controlador e com os controladores projetados. As respostas do sistema nestas diferentes condições podem ser verificadas por meio da Figura 40.

Figura 40 - Respostas ao degrau de valor 19,1 m/s do sistema com e sem controladores.



## 6.10 Comparação entre sistemas sem controle e com controle

Ainda analisando a Figura 40, e a partir do comando *stepinfo()* do *Matlab*, é possível encontrar as informações de tempo de acomodação e de *overshoot* para cada método, sendo possível elaborar a Tabela 4 de modo a comparar os resultados de cada sintonização.

Tabela 4 - Comparação entre métodos de sintonização PID e malha aberta.

	Overshoot	Tempo de Acomodação (s)
<b>Malha Aberta</b>	0,1448	148,19
<b>Ziegler-Nichols</b>	82,31	117,96
<b>Alocação de Polos</b>	20,25	158,64
<b>ITAE</b>	6,43	113,87
<b>Lugar das Raízes</b>	4,61	104,5

Assim, em comparação com o sistema em malha aberta, verifica-se que a maioria dos métodos, com exceção da sintonização por Alocação de Polos, possuem tempos de acomodação menores, o que é um dos objetivos do uso de controladores. Em relação ao *overshoot* dos métodos, observa-se que a sintonização PID por Ziegler-Nichols possui o pior dos resultados, com um *sobressinal* de 82,31. O melhor PID sintonizado foi aquele obtido através do método de Lugar das Raízes, onde o tempo de acomodação é 30% menor e há um *overshoot* aceitável quando comparado com outros sistemas de controle.

## 7. COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NO DOMÍNIO DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

Tem-se, como visto anteriormente, duas vertentes no desenvolvimento de sistemas de controle. O controle clássico é baseado em análises realizadas no domínio das frequências, trabalhando com funções de transferência com uma entrada e uma saída. Já o controle moderno tem métodos baseados no domínio do tempo, utilizando as matrizes do espaço de estados para projetar controladores para sistemas com diversas entradas e diversas saídas.

O controle clássico tem esse nome por ter sido desenvolvido antes do controle moderno. O projeto de controladores por meio dessa vertente se baseia em métodos que podem ser resolvidos utilizando cálculo diferencial, integral e geometria. Sua abrangência se limita a sistemas com entrada única e saída única. Como se trabalha com funções de transferência SISO, é necessário avaliar o desempenho do sistema controlado pelo controlador sintonizado, buscando verificar se os efeitos da não linearidade do sistema e da interação entre as variáveis não afetam a resposta do sistema em relação ao esperado.

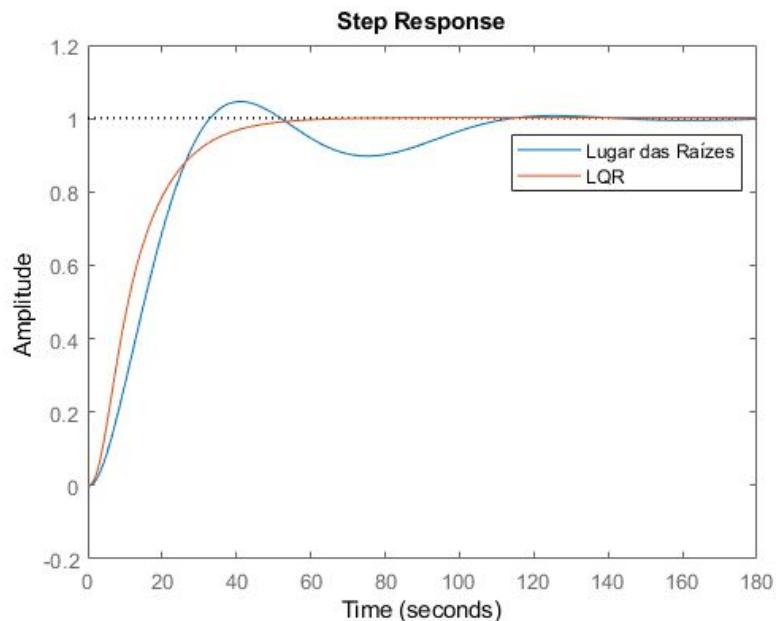
Com o desenvolvimento dos computadores, métodos numéricos começaram a se tornar vantajosos para a solução de problemas matemáticos. Assim, se tornou possível executar métodos de controle que necessitavam de soluções que se pautavam em inversão de matrizes e outras operações que não possuíam soluções analíticas fáceis de serem aplicadas. Desse modo, o controle moderno se baseia em espaços de estado, permitindo o desenvolvimento de sistemas de controle para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO).

Entre os sistemas desenvolvidos por meio dos métodos de controle moderno, o que se destacou foi o sintonizado por meio do LQR, por conta dos tempos de acomodação.

Já no controle clássico, o PID sintonizado por meio do método do Lugar das Raízes foi o considerado melhor. Além de ter uma das melhores estabilidades relativas, esse método foi o que obteve menor *overshoot* e o menor tempo de acomodação, se mostrando o mais adequado para controlar a função de transferência analisada.

A Figura 41 traz a comparação da resposta do sistema com os dois controladores, o PID sintonizado por lugar das raízes, e o controlador sintonizado por LQR.

Figura 41 - Comparaçao da resposta para controle moderno e clássico.



Fica visível, então, que o controlador sintonizado por meio do LQR faz com que o sistema tenha uma resposta melhor para o degrau unitário. O tempo de acomodação nesta situação é menor, sem a presença de *overshoot* na resposta. Assim, verifica-se que a resposta do sistema controlado por um sistema sintonizado por meio do controle moderno é melhor que a daquele sintonizado pelo método do controle clássico, quando se analisa o gráfico isoladamente.

Uma melhor análise seria feita considerando as múltiplas entradas e saídas do sistema em ambos os casos, permitindo uma comparação mais justa entre os controladores. Porém, na situação estudada, o controlador desenvolvido por meio do controle moderno se mostrou mais eficaz.

## 8. CONCLUSÃO

O trabalho em questão retomou os principais tópicos realizados para a modelagem do sistema de movimentos laterais de um avião Boeing 747, revisando conceitos de modelagem física e matemática, espaço de estados e simulações no domínio do tempo e da frequência, além de conceitos de estabilidade e comportamento geral do sistema em malha aberta.

Partindo para o controle moderno do sistema, foram desenvolvidos sistemas de controle e observação por alocação de polos e por controle LQR. De forma geral, os resultados obtidos por controle LQR foram mais satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos por Alocação de polos, apresentando menores valores de *overshoot* e tempo de alocação. Quanto aos observadores, o mesmo padrão foi seguido, visto que os erros apresentados pelo observador obtido por controle LQR foram menores quando comparado com os erros obtidos por alocação de polos, resultando em estimativas de trajetória melhores, o que foi comprovado pelo método da separação.

Em seguida, foram apresentados seguidores de referências constante e variável, cujos comportamentos também foram verificados quando submetidos a perturbações externas na atmosfera. Todos os seguidores funcionaram de maneira eficiente, porém, para o estudo do caso em questão, não há aplicação prática para o seguidor de referência constante, sendo o de referência variável o modelo mais importante para o problema. Além disso, os seguidores dissipam perturbações de forma bastante eficiente.

Além disso, foi realizado o controle no domínio da frequência por meio da teoria de Controle Clássico, realizando a sintonia PID por otimização ITAE, alocação de polos, método de Ziegler-Nichols e lugar das raízes. Em seguida, todos os métodos passaram por uma análise de estabilidade absoluta e relativa, em que todos tiveram bons resultados tanto analisando via diagrama de Nyquist quanto analisando via diagrama de Bode. Assim, foi feita uma comparação entre os métodos de sintonia, onde concluiu-se a sintonia por lugar das raízes proporcionou um sistema de controle com menor tempo de acomodação e menor *overshoot*.

Finalmente, comparou-se os dois controles estudados, moderno e clássico, e concluiu-se que o controle moderno foi mais eficiente, apesar de não ser possível chegar a uma conclusão precisa, visto que controlou-se apenas uma entrada e uma saída e não todo o sistema MIMO por sintonia PID. Os próximos passos, caso haja oportunidade do grupo se aprofundar mais no assunto, seria controlar todo o sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas via sintonia PID e assim concluir com certeza qual o melhor método.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- ANDERSON, John D., Jr, “Introduction to Flight”, 3<sup>a</sup> edição, McGraw-Hill, 1989.
- CAUGHEY, David A., “Introduction to Aircraft Stability and Control Course Notes for M&AE 5070”, Cornell University, 2011.
- DE CAMPOS, M. C. M. M.; TEIXEIRA, H. C. G. “Controles típicos de equipamentos e processos industriais”, Editora Edgard Blucher, 1<sup>a</sup> edição, 2006.
- DIEDERICH, Franklin W., “The Response of an Airplane to Random Atmospheric Disturbances”, California Institute of Technology of Pasadena, 1957.
- ETKIN, B.; REID, L. D., “Dynamics of flight: Stability and Control”, 3<sup>a</sup> edição, John Wiley & Sons, 1996.
- MARTINS, Fernando G. “Tuning PID Controllers Using the ITAE Criterion”, Int. J Engng. Edu., vol. 21, no. 3, pp. 1-7, Jun 2005.
- NELSON, Robert C., “Flight Stability and Automatic Control”, 2<sup>a</sup> edição, McGraw-Hill, 1998.
- OGATA, K., “Engenharia de Controle Moderno”, 3<sup>a</sup> edição, Editora LTC, 1998.
- PETERSEN, Forrest S., et. al., “Lateral-Directional Control Characteristics of the X-15 Airplane”, Flight Research Center, 1965.
- RODRIGUES, Luiz E. M. J., “Fundamentos da Engenharia Aeronáutica com Aplicações ao Projeto SAE-AeroDesign”, 1<sup>a</sup> edição, 2014.
- ROSKAM, J., “Airplane flight dynamics and automatic flight controls”, DARcorporation, 1998.
- SMETUM, Frederick O., et. al., “Riding And Handling Qualities Of Light Aircraft - A Review And Analysis”, Nasa Contractor Report, North Carolina State University, 1975.
- WHITE, Roland J., “Investigation of Lateral Dynamic Stability in the XB-47 Airplane”, Boeing Airplane Company, 1950.

## **APÊNDICE A - Conjunto de Hipóteses Simplificadoras**

A seguir estão discretizadas todas as hipóteses simplificadoras adotadas.

São elas:

- A perda de massa ao longo do tempo devido à queima de combustível é desconsiderada. Logo, a massa da aeronave é mantida como constante ao longo do tempo.
- Sendo tratado como um corpo rígido, o avião e suas superfícies de controle não sofrem deformações ou distorções causadas pela aplicação de esforços.
- Como mencionado na Seção 1.2, as deflexões das superfícies de controle de interesse (em especial, os ailerons e o leme) são representadas como forças e momentos aplicadas à aeronave.
- As forças peso e de propulsão (respectivamente,  $m.g$  e  $T$ ) estão aplicadas no centro de gravidade da aeronave.
- As forças de arrasto e sustentação (respectivamente,  $D$  e  $L$ ) estão aplicadas no centro aerodinâmico da aeronave.
- Supondo simetria e distribuição uniforme de massa, é possível considerar que os produtos de inércia do avião são nulos.
- É também possível considerar que ambos os centros aerodinâmico e de gravidade estão contidos no plano  $Oxz$  do referencial solidário à aeronave.
- A propulsão gerada pelo conjunto de turbinas do avião tem componente de atuação restrito ao eixo  $x$ , e pode criar um binário apenas na direção  $y$ , sendo essas direções referentes ao referencial solidário à aeronave.
- Como os gradientes de vento tem pouco impacto nos movimentos de curta duração (NELSON, 1998), para efeitos de simplificação, é considerado que o ar tem velocidade nula para o referencial fixo.

## APÊNDICE B - Desenvolvimento da Modelagem Matemática

No presente apêndice, será apresentado todo os passos do desenvolvimento matemático necessário para se chegar às equações de movimento do avião, assim como o processo de linearização destas.

Primeiramente, para a modelagem matemática foram considerados o Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) (Equações 78 e 79, respectivamente).

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} + m(\vec{V} \wedge \vec{\omega}) \quad (78)$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{H}) \quad (79)$$

Além disso, foram consideradas as decomposições da força, do momento e das velocidades, o que pode ser observado nas Equações 80, 81, 82 e 83.

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (80)$$

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \quad (81)$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (82)$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad (83)$$

Substituindo as Equações 80, 81, 82 e 83 nas 78 e 79 e desenvolvendo as expressões, tem-se as Equações 84, 85, 86, 87, 88 e 89 que representam relações matemáticas de resultantes de forças e momentos.

$$X = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (84)$$

$$Y = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (85)$$

$$Z = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (86)$$

$$M_x = I_x\dot{p} + qr(I_z - I_y) \quad (87)$$

$$M_y = I_y\dot{q} + rp(I_x - I_z) \quad (88)$$

$$M_z = I_z\dot{r} + pq(I_y - I_x) \quad (89)$$

Tais forças e momentos são definidos pela interação do sistema com o meio externo, que age sobre o mesmo. São estas: a propulsão através das turbinas, a ação do campo gravitacional e a interação da aeronave com o escoamento ao seu redor (forças de arrasto e de sustentação).

Dividindo as forças que agem no sistema sobre cada eixo do referencial solidário ao corpo, chegam-se às seguintes divisões:

Sobre o eixo x, atuam uma parcela da força peso, a força de propulsão, a força de arrasto longitudinal, e um momento gerado pela deflexão das superfícies de controle.

Sobre o eixo y atuam somente uma parcela da força peso, e uma resultante de forças gerada pela deflexão das superfícies de controle.

Sobre o eixo z atuam uma parcela da força peso, a força de sustentação e um momento gerado pela deflexão das superfícies de controle.

Cabe ressaltar que tais esforços serão considerados aplicados aos centros de gravidade e aerodinâmicos da aeronave, dadas suas respectivas naturezas. Além disso, considerando que em regime de cruzeiro a velocidade do avião se mantém constante, a força de arrasto longitudinal possui mesma magnitude e é oposta à propulsão do avião.

Além disso, serão considerados os seguintes ângulos:

- Ângulo de rolagem:  $\phi$
- Ângulo de arfagem:  $\theta$
- Ângulo de guinada:  $\psi$

Aplicando as parcelas da força peso desenvolvidas nas Equações 84 a 86, tem-se as Equações 90, 91 e 92.

$$-mg \sin\theta = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (90)$$

$$F_y + mg \cos\theta \sin\phi = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (91)$$

$$mg \cos\theta \cos\phi - L = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (92)$$

Contudo, as equações anteriores foram definidas para um referencial solidário ao avião. Para descrever o posicionamento e a orientação da aeronave no espaço com relação ao solo, será necessário transferir as relações encontradas para um referencial fixo adotado.

Para tanto, é utilizado o conceito dos Ângulos de Euler para realizar tal transferência de referencial. Os três ângulos que definem tal correspondência entre os referenciais são os ângulos de rolagem, arfagem e guinada ( $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , respectivamente).

Segundo Nelson (1998), a matriz de mudança de base que relaciona as velocidades lineares dos dois referenciais é dada pela Equação 93.

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (93)$$

Dessa forma, tem-se a Equação 94, que relaciona as velocidades dos dois referenciais, e a Equação 95, que relaciona as velocidades angulares com a taxa de variação dos ângulos de Euler.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (95)$$

Foi realizado o equacionamento do comportamento dinâmico do avião como um todo, com equações para o movimento longitudinal e lateral da aeronave. Contudo o escopo do trabalho abrange somente o comportamento lateral do modelo, sendo as Equações 87, 89 e 91 as que descrevem tal comportamento. Portanto, são essas as que serão utilizadas para a realização de simulações e análises.

Todavia, as equações que serão utilizadas para estudar o sistema não são lineares, o que dificulta a simulação deste. Dessa forma, é necessário o processo de linearização e, para isso, foi utilizada a hipótese de pequenos distúrbios Nelson (1998). Portanto, todas as variáveis de saída da equação possuem um ponto de referência e uma determinada perturbação em relação a esse ponto. Além disso, considerou-se que as perturbações são simétricas. Adotando tais condições, têm-se as Equações 96 a 105.

$$u = u_0 + \Delta u \quad (96)$$

$$v = v_0 + \Delta v \quad (97)$$

$$w = w_0 + \Delta w \quad (98)$$

$$p = p_0 + \Delta p \quad (99)$$

$$q = q_0 + \Delta q \quad (100)$$

$$r = r_0 + \Delta r \quad (101)$$

$$Mx = Mx_0 + \Delta Mx \quad (102)$$

$$Mz = Mz_0 + \Delta Mz \quad (103)$$

$$Fy = Fy_0 + \Delta Fy \quad (104)$$

$$\delta = \delta_0 + \Delta \delta \quad (105)$$

A variável  $\delta$  consiste na deflexão da respectiva superfície de controle, ela podendo ser o aileron ou o leme.

A fim de obter as relações matemáticas que modelam o comportamento do sistema entorno de tais condições e perturbações, substituem-se os termos das Equações 96 a 105 nas Equações 87, 89 e 91. Dessa forma, tem-se, as Equações 106, 107 e 108.

$$Mx_0 + \Delta Mx = I_x \frac{d}{dt} (p_0 + \Delta p) + (r_0 + \Delta r) \cdot (q_0 + \Delta q) \cdot (I_z - I_y) \quad (106)$$

$$Mz_0 + \Delta Mz = (q_0 + \Delta q) \cdot (p_0 + \Delta p) \cdot (I_y - I_x) \quad (107)$$

$$\begin{aligned} Fy_0 + \Delta Fy - mg \cos(\theta_0 + \Delta \theta) \sin(\phi_0 + \Delta \phi) \\ = m \left( (v_0 + \Delta v) + (r_0 + \Delta r) \cdot (u_0 + \Delta u) \right. \\ \left. - (p_0 + \Delta p) \cdot (w_0 + \Delta w) \right) \end{aligned} \quad (108)$$

Seguindo ainda as orientações de Nelson (1998) e Etkin (1996), considera-se que os movimentos do sistema serão simétricos. Logo, as variáveis expressas terão valor inicial nulo. Dessa forma, tem-se a Equação 109.

$$v_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = F_{y0} = M_{x0} = M_{z0} = 0 \quad (109)$$

Ainda, o eixo x será alinhado inicialmente de forma que fique paralelo à velocidade da aeronave e, assim, a velocidade em z ( $\omega_0$ ) seja nula. A fim de simplificar as relações expressas acima, pode-se adotar as relações trigonométricas mostradas nas Equações 110, 111, 112 e 113 para variáveis arbitrárias  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \sin\alpha_0 + \cos\alpha_0 \cdot \Delta\alpha \quad (110)$$

$$\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \cos\alpha_0 + \sin\alpha_0 \cdot \Delta\alpha \quad (111)$$

$$\Delta\alpha \cdot \Delta\beta = 0 \quad (112)$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \dot{\Delta\alpha} \quad (113)$$

As equações das forças e momentos podem ser expressas com séries de Taylor em função de cada variável de perturbação. Dessa forma, é possível escrever as Equações 114, 115 e 116.

$$\Delta F_y = \frac{\partial F_y}{\partial v} \cdot \Delta v + \frac{\partial F_y}{\partial p} \cdot \Delta p + \frac{\partial F_y}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial F_y}{\partial \delta r} \cdot \Delta \delta r \quad (114)$$

$$\Delta M_x = \frac{\partial M_x}{\partial v} \cdot \Delta v + \frac{\partial M_x}{\partial p} \cdot \Delta p + \frac{\partial M_x}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial M_x}{\partial \delta a} \cdot \Delta \delta a + \frac{\partial M_x}{\partial \delta r} \cdot \Delta \delta r \quad (115)$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial v} \cdot \Delta v + \frac{\partial M_z}{\partial p} \cdot \Delta p + \frac{\partial M_z}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial M_z}{\partial \delta a} \cdot \Delta \delta a + \frac{\partial M_z}{\partial \delta r} \cdot \Delta \delta r \quad (116)$$

Além disso, será adotada uma nova notação a fim de não poluir muito as equações:

$$A_\alpha = \frac{\partial A}{\partial \alpha}$$

Substituindo as Equações 114, 115 e 116 respectivamente nas 89, 90 e 91, zerando os termos indicados em 109 e utilizando as simplificações explicitadas nas Equações 110, 111, 112 e 113 chega-se nas Equações 117, 118 e 119.

$$\left( \frac{F_{yv}}{m} \cdot \Delta v - \Delta \dot{v} \right) + \frac{F_{yp}}{m} \cdot \Delta p + \left( \frac{F_{yr}}{m} - u_0 \right) \cdot \Delta r + \frac{F_{y\delta r}}{m} \Delta \delta r + g \cdot \cos\theta_0 \cdot \Delta\phi = 0 \quad (117)$$

$$\frac{M_{xv}}{I_x} \cdot \Delta v + \left( \frac{M_{xp}}{I_x} \cdot \Delta p - \Delta \dot{p} \right) + \frac{M_{xr}}{I_x} \cdot \Delta r + \frac{M_{x\delta a}}{I_x} \Delta \delta a + \frac{M_{x\delta r}}{I_x} \Delta \delta r = 0 \quad (118)$$

$$\frac{M_{zv}}{I_z} \cdot \Delta v + \frac{M_{zp}}{I_z} \cdot \Delta p + \left( \frac{M_{zr}}{I_z} \cdot \Delta r - \Delta \dot{r} \right) + \frac{M_{z\delta a}}{I_z} \Delta \delta a + \frac{M_{z\delta r}}{I_z} \Delta \delta r = 0 \quad (119)$$

## APÊNDICE C - Parâmetros Dimensionais

Tabela 5- Parâmetros dimensionais e operacionais do BOEING 747.

Densidade do ar em nível do mar	$\rho = 3,639 \times 10^{-1} \text{ kg/m}^3$
Velocidade de Vôo	$V = 85,75 \text{ m/s}$
Massa total do avião	$m = 288756,90 \text{ kg}$
Força peso	$m.g = 2832705,19 \text{ N}$
Área alar	$S = 510,97 \text{ m}^2$
Envergadura	$b = 59,64 \text{ m}$
Corda média	$c = 8,32 \text{ m}$
Momento de inércia em x	$I_x = 24,68 \times 10^6 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia em y	$I_y = 44,88 \times 10^6 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia em z	$I_z = 67,38 \times 10^6 \text{ kg.m}^2$
Produto de inércia em xz	$I_{xz} = 0 \text{ kg.m}^2$

Admite-se que o avião estará sujeito a perturbações ao longo de sua viagem em altitude e velocidades longitudinais de cruzeiro. Os momentos e produto de inércia são calculados em relação ao sistema de coordenadas solidário ao avião, sendo que o produto de inércia, por efeitos de simplificação, foi considerado como nulo.

Tabela 6 - Coeficientes longitudinais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar.

$C_L$	$C_D$	$C_{L_\alpha}$	$C_{D_\alpha}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{L_\dot{\alpha}}$	$C_{m_\dot{\alpha}}$	$C_{L_q}$	$C_{m_q}$	$C_{L_M}$	$C_{D_M}$	$C_{m_M}$	$C_{L_{\delta_e}}$	$C_{m_{\delta_e}}$
1,11	0,102	5,70	0,66	-1,26	6,7	-3,2	5,4	-20,8	-0,81	0,0	0,27	0,338	-1,34

Tabela 7- Coeficientes laterais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar.

$C_{y_\beta}$	$C_{l_\beta}$	$C_{n_\beta}$	$C_{l_p}$	$C_{n_p}$	$C_{l_r}$	$C_{n_r}$	$C_{l_{\delta_\alpha}}$	$C_{n_{\delta_\alpha}}$	$C_{y_{\delta_r}}$	$C_{l_{\delta_r}}$	$C_{n_{\delta_r}}$
-0,96	-0,221	0,15	-0,45	-0,121	0,101	-0,30	0,0461	0,0064	0,175	0,007	-0,109

Sendo  $Q = \frac{1}{2}\rho u_0^2 = 1337,9 \text{ N/m}^2$ , podem ser utilizadas as equações presentes nas Tabelas 6 e 7 abaixo para o cálculo dos parâmetros do problema.

Tabela 8- Derivadas parciais em relação às velocidades.

$Fy_v$	$Fy_p$	$Fy_r$	$Mx_v$	$Mx_p$	$Mx_r$	$Mz_v$	$Mz_p$	$Mz_r$
$\frac{Q.S.C_{y\beta}}{u_0}$	$\frac{Q.S.b.C_{yp}}{2.u_0}$	$\frac{Q.S.b.C_{yr}}{2.u_0}$	$\frac{Q.S.b.C_{l\beta}}{u_0}$	$\frac{Q.S.b^2.C_{lp}}{2.u_0}$	$\frac{Q.S.b^2.C_{lr}}{2.u_0}$	$\frac{Q.S.b.C_{n\beta}}{u_0}$	$\frac{Q.S.b^2.C_{np}}{u_0}$	$\frac{Q.S.b^2.C_{nr}}{2.u_0}$

Tabela 9 - Derivadas parciais em relação a deflexões das superfícies de controle.

$Fy_{\delta r}$	$Mx_{\delta a}$	$Mx_{\delta r}$	$Mz_{\delta a}$	$Mz_{\delta r}$
$Q.S.C_{y\delta r}$	$Q.S.b.C_{l\delta a}$	$Q.S.b.C_{l\delta r}$	$Q.S.b.C_{n\delta a}$	$Q.S.b.C_{n\delta r}$

## APÊNDICE D - Funções de Transferência

Tabela 10- Termos da matriz de transferência.

$H(s) = 0,0005759 + 0,0096525s - 0,0038725s^2$
$I(s) = 0,0002305s + 0,0070525s^2 + 0,0761732s^3$
$J(s) = 0,0000111 - 0,0000249s - 0,0008355s^2 + 0,0038725s^3$
$K(s) = 0,0002305 + 0,0070525s + 0,0761732s^2$
$L(s) = -0,0003544 + 0,0260485s + 0,1992438s^2 + 0,4143037s^3$
$M(s) = 0,0004367s - 0,0045555s^2 + 0,0115664s^3$
$N(s) = -0,0000307 - 0,0003015s - 0,0186592s^2 - 0,0659543s^3$
$O(s) = -0,0004367 - 0,0045555s + 0,0115664s^2$

## APÊNDICE E - Matrizes de Transição e de Termo Forçante

A seguir são apresentadas as matrizes de transição (Equação 120) e de termo forçante (Equação 137), assim como os seus componentes (Equações 121 a 136 e 138 a 145), utilizadas na seção 4.9 do presente documento.

$$\Phi(t) = I + A \cdot t + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) & \Phi_{14}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) & \Phi_{24}(t) \\ \Phi_{31}(t) & \Phi_{32}(t) & \Phi_{33}(t) & \Phi_{34}(t) \\ \Phi_{41}(t) & \Phi_{42}(t) & \Phi_{43}(t) & \Phi_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (120)$$

$$\Phi_{11}(t) = 1 - 0,0265t - 0,0002239t^2 - 0,000081t^3 \quad (121)$$

$$\Phi_{21}(t) = -0,0043t + 0,0006461t^2 - 0,0000553t^3 \quad (122)$$

$$\Phi_{31}(t) = 0,00115t + 0,0000031t^2 - 0,0000056t^3 \quad (123)$$

$$\Phi_{41}(t) = -0,00215t^2 + 0,0002154t^3 \quad (124)$$

$$\Phi_{12}(t) = 0,0699t^2 - 0,0069076t^3 \quad (125)$$

$$\Phi_{22}(t) = 1 - 0,2585t + 0,0326745t^2 - 0,0028367t^3 \quad (126)$$

$$\Phi_{32}(t) = -0,0254t + 0,0040843t^2 - 0,0003358t^3 \quad (127)$$

$$\Phi_{42}(t) = 1t - 0,12925t^2 + 0,0108915t^3 \quad (128)$$

$$\Phi_{13}(t) = -1t + 0,0448t^2 + 0,0004837t^3 \quad (129)$$

$$\Phi_{23}(t) = 0,058t - 0,0071764t^2 + 0,0005673t^3 \quad (130)$$

$$\Phi_{33}(t) = 1 - 0,0631t + 0,0006792t^2 + 0,0000636t^3 \quad (131)$$

$$\Phi_{43}(t) = 0,029t^2 - 0,0023921t^3 \quad (132)$$

$$\Phi_{14}(t) = 0,1144t - 0,0015158t^2 - 0,0000085t^3 \quad (133)$$

$$\Phi_{24}(t) = -0,000246 + 0,0000246t^3 \quad (134)$$

$$\Phi_{34}(t) = 0,0000658t^2 + 0,0000001t^3 \quad (135)$$

$$\Phi_{44}(t) = 1 - 0,000082t^3 \quad (136)$$

$$\Gamma(t) \cdot B = \left( I \cdot t + A \cdot \frac{t^2}{2!} + A^2 \cdot \frac{t^3}{3!} + A^3 \cdot \frac{t^4}{4!} \right) B = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(t) & \Gamma_{12}(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22}(t) \\ \Gamma_{31}(t) & \Gamma_{32}(t) \\ \Gamma_{41}(t) & \Gamma_{42}(t) \end{bmatrix} \quad (137)$$

$$\Gamma_{11}(t) = -0,0009681t^2 + 0,0018335t^3 - 0,0001312t^4 \quad (138)$$

$$\Gamma_{21}(t) = 0,0761732t - 0,0048682t^2 + 0,0008209t^3 - 0,0000535t^4 \quad (139)$$

$$\Gamma_{31}(t) = 0,0038725t - 0,000546t^2 + 0,0001049t^3 - 0,0000064t^4 \quad (140)$$

$$\Gamma_{41}(t) = 0,0190433t^2 - 0,0032455t^3 + 0,0002052t^4 \quad (141)$$

$$\Gamma_{12}(t) = 0,4143037t + 0,0137433t^2 - 0,0007403t^3 - 0,0000362t^4 \quad (142)$$

$$\Gamma_{22}(t) = 0,0115664t - 0,0021458t^2 + 0,0003726t^3 - 0,0000233t^4 \quad (143)$$

$$\Gamma_{32}(t) = -0,0659543t + 0,0010769t^2 + 0,0000008t^3 - 0,0000026t^4 \quad (144)$$

$$\Gamma_{42}(t) = 0,0028916t^2 - 0,0014305t^3 + 0,0000931t^4 \quad (145)$$

## APÊNDICE F - Matrizes de Controlabilidade e Observabilidade

Nas Equações 137 e 138, são apresentadas respectivamente as matrizes de controlabilidade e observabilidade do sistema. A matriz de controlabilidade foi transposta devido ao seu tamanho.

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0,0761732 & 0,0038725 & 0 \\ 0,4143037 & 0,0115664 & -0,0659543 & 0 \\ -0,0038725 & -0,0194728 & -0,002184 & 0,0761732 \\ 0,0549734 & -0,0085832 & 0,0043077 & 0,0115664 \\ 0,0110011 & 0,0049252 & 0,0006296 & -0,0194728 \\ -0,0044415 & 0,0022354 & 0,0000048 & -0,0085832 \\ -0,0031489 & -0,0012839 & -0,0001535 & 0,0049252 \\ -0,000869 & -0,0005589 & -0,0000619 & 0,0022354 \end{bmatrix} \quad (146)$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,0265044 & 0 & -1 & 0,1144023 \\ 0,0010585 & -0,0254624 & -0,0631299 & 0 \\ -0,000356 & 0,1398647 & 0,0896343 & -0,0030322 \\ 0,0000136 & 0,0081917 & 0,0014491 & 0,0001211 \\ -0,0004913 & -0,041482 & 0,002815 & -0,0000407 \\ -0,0000337 & -0,0020341 & 0,0003704 & 0,0000016 \end{bmatrix} \quad (147)$$

## **APÊNDICE G - Exigências de Qualidade de Voo**

O presente apêndice irá tratar das exigências de qualidade de voo, pois, além da exigência da estabilidade dinâmica do avião, há também a necessidade de o avião apresentar características aceitáveis pelo piloto que irá pilotar o avião. Essas características são definidas como de “Qualidade de Voos de Aviões Pilotados” e são apresentadas na especificação militar norte-americana MIL-F-8785C, de 1980. Apesar de não serem mais oficiais, ainda se apresentam como uma boa referência para análise. As exigências feitas dependem da categoria do avião, do voo e do piloto e são expostas nas Tabelas 11, 12 e 13 abaixo.

Tabela 11 - Sobrecarga do piloto, especificação MIL-F-8785C.

<b>Sobrecarga do Piloto</b>	
Nível 1	Qualidades de voo claramente adequadas para a fase de voo da missão.
Nível 2	Qualidades de voo adequadas para realizar a fase de voo da missão, mas com algum aumento na carga de trabalho piloto ou degradação na eficácia da missão.
Nível 3	Qualidades de voo tais que o avião pode ser controlado com segurança, mas piloto sofre sobrecarga ou a eficácia da missão é inadequada. As fases de voo da Categoria A podem ser terminadas com segurança e a categoria de vôo B e C podem ser concluídas.

(fonte: Especificação MIL-F-8785C)

Tabela 12 - Classificação do avião, especificação MIL-F-8785C.

<b>Classificação do Avião</b>	
I	Aviões leves e pequenos, como utilidade leve, instrutor primário e luz de observação de embarcações
II	Aviões de manobrabilidade de peso médio, baixo a médio, como serviços pesados ou busca e salvamento, transporte leve ou médio, carga ou navio-tanque, reconhecimento, bombardeiro tático e ataque pesado.
III	Aviões grandes, pesados, de baixa a média manobrabilidade, como transporte pesado, carga, navio-tanque ou bombardeiro pesado
IV	Aviões de alta manobrabilidade, como caça ou interceptor, ataque, reconhecimento tático ou observação

(fonte: Especificação MIL-F-8785C)

Tabela 13 - Categoria de voo.

<b>Categoria do Voo</b>	
A	Fase de voo não terminal que requer manobras rápidas, rastreamento de precisão ou controle preciso do trajeto de vôo
B	Fases de voo não-terminais que são normalmente realizadas usando manobras graduais e sem rastreamento de precisão, embora o controle preciso da trajetória de voo possa ser necessário.
C	As fases terminais do voo são normalmente realizadas usando manobras graduais e geralmente requerem um controle preciso do trajeto de vôo.

(fonte: , Especificação MIL-F-8785C)

O avião analisado neste relatório é um Boeing 747, que certamente não se enquadra nas categorias de aviões militares. Todavia, estudos que relacionam as categorias já foram realizados e, segundo Roskam (1998), ele se encontra na classificação III. Como se está estudando o avião em velocidade de cruzeiro, pode-se afirmar que a categoria pode ser estimada como Categoria A e a sobrecarga do piloto considerada foi nível 1. A Tabela 14 foi usada como referência para

classificação do Boeing 747, além de trazer outros exemplos de uso da especificação para aviões civis.

Tabela 14 - Definição de classes de aviões.

<b>MIL-F-8785C</b>	<b>Examples</b>	<b>Civilian Equivalent</b>	<b>Examples</b>
<b>Class I Small, light airplanes such as:</b> * Light utility * Primary trainer * Light observation	* Cessna T-41 * Beech T-34C * Rockwell OV-10A	Very Light Aircraft (VLA) and FAR 23 category airplanes	* Cessna 210 * Piper Tomahawk * Edgeley Optica
<b>Class II Medium weight, low-to-medium maneuverability airplanes such as:</b> * Heavy utility / search and rescue * Light or medium transport / cargo / tanker * Early warning / electronic counter-measures / airborne command, control or communications relay * Anti-submarine * Assault transport * Reconnaissance * Tactical Bomber * Heavy Attack * Trainer for Class II	* Fairchild C-26A/B * Fairchild C-123 * Grumman E-2C * Boeing E-3A * Lockheed S-3A * Lockheed C-130 * Fairchild OA-10 * Douglas B-60 * Grumman A-6 * Beech T-1A	FAR 25 category airplanes	* Boeing 737, * Airbus A 320 * McD D MD-80
<b>Class III Large, heavy, low-to-medium maneuverability airplanes such as:</b> * Heavy transport / cargo / tanker * Heavy bomber * Patrol / early warning / electronic counter-measures / airborne command, control or communications relay * Trainer for Class III	* McD D C-17 * Boeing B-52H * Lockheed P-3 * Boeing E-3D * Boeing TC-135	FAR 25 category airplanes	* Boeing 747, * Airbus 340, * McD D MD-11
<b>Class IV High maneuverability airplanes such as:</b> * Fighter / interceptor * Attack * Tactical reconnaissance * Observation * Trainer for Class IV	* Lockheed F-22 * McD D F-15E * McD D RF-4 * Lockheed SR-71 * Northrop T-38	FAR 23 aerobatic category airplanes	* Pitts Special, * Sukhoi Su-26M

(fonte: ROSKAM, 1998)

Além disso, sabe-se, a partir de Nelson (1998), que há quatro raízes da modelagem dos movimentos laterais de um avião, duas delas são reais e duas imaginárias. A raiz real com menor módulo é denominada “spiral root”. A segunda raiz real é denominada “roll root”. Por fim, as duas raízes imaginárias são denominadas “Dutch roll roots”. Há especificações para cada uma delas e se encontram nas Tabelas 15,16 e 17.

Tabela 15 - Especificação da “spiral root” .

**Spiral mode (minimum time to double amplitude)  
flying qualities**

Class	Category	Level 1	Level 2	Level 3
I and IV	A	12 s	12 s	4 s
	B and C	20 s	12 s	4 s
II and III	All	20 s	12 s	4 s

(fonte: NELSON, 1998)

Tabela 16 - Especificação da "roll root".

**Roll mode (maximum roll time constant) flying qualities (in seconds)**

Class	Category	Level 1	Level 2	Level 3
I, IV	A	1.0	1.4	10
II, III	A	1.4	3.0	10
All	B	1.4	3.0	10
I, IV	C	1.0	1.4	10
II, III	C	1.4	3.0	10

(fonte: NELSON, 1998)

Tabela 17 - Especificação das "Dutch Roll Roots".

**TABLE 5.6  
Dutch roll flying qualities**

Level	Category	Class	Min $\zeta^*$	Min $\xi\omega_n^*$ , rad/s	Min $\omega_n$ , rad/s
1	A	I, IV	0.19	0.35	1.0
		II, III	0.19	0.35	0.4
	B	All	0.08	0.15	0.4
		I, II-C	0.08	0.15	1.0
	C	IV			
		II-L, III	0.08	0.15	0.4
2	All	All	0.02	0.05	0.4
3	All	All	0.02	—	0.4

(fonte: NELSON, 1998)

Para o modo espiral encontrado na Tabela 15, a especificação só é necessária quando a raiz de espiral é instável, portanto, a limitação é em relação ao tempo de dobrar a amplitude da entrada aplicada. Como usou-se uma raiz estável, não há restrição nessa raiz. Já no modo de rolagem ("roll mode") a especificação é dada pelo valor máximo da constante de tempo e, para o caso do Boeing 747, vale 1,4. Como se sabe, a raiz deve ser menor do que -0,7. Por fim, para o modo "Dutch Roll" a limitação é de uma frequência natural mínima de 0,4 rad/s, coeficiente de amortecimento mínimo de 0,19 e a multiplicação de ambos de 0,35 rads/s.

## APÊNDICE H - Gráficos Extras

Figura 42 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por LQR (a) velocidade v (esquerda superior), (b) velocidade p (direita superior), (c) velocidade r (esquerda inferior), (d) ângulo phi (direita inferior).

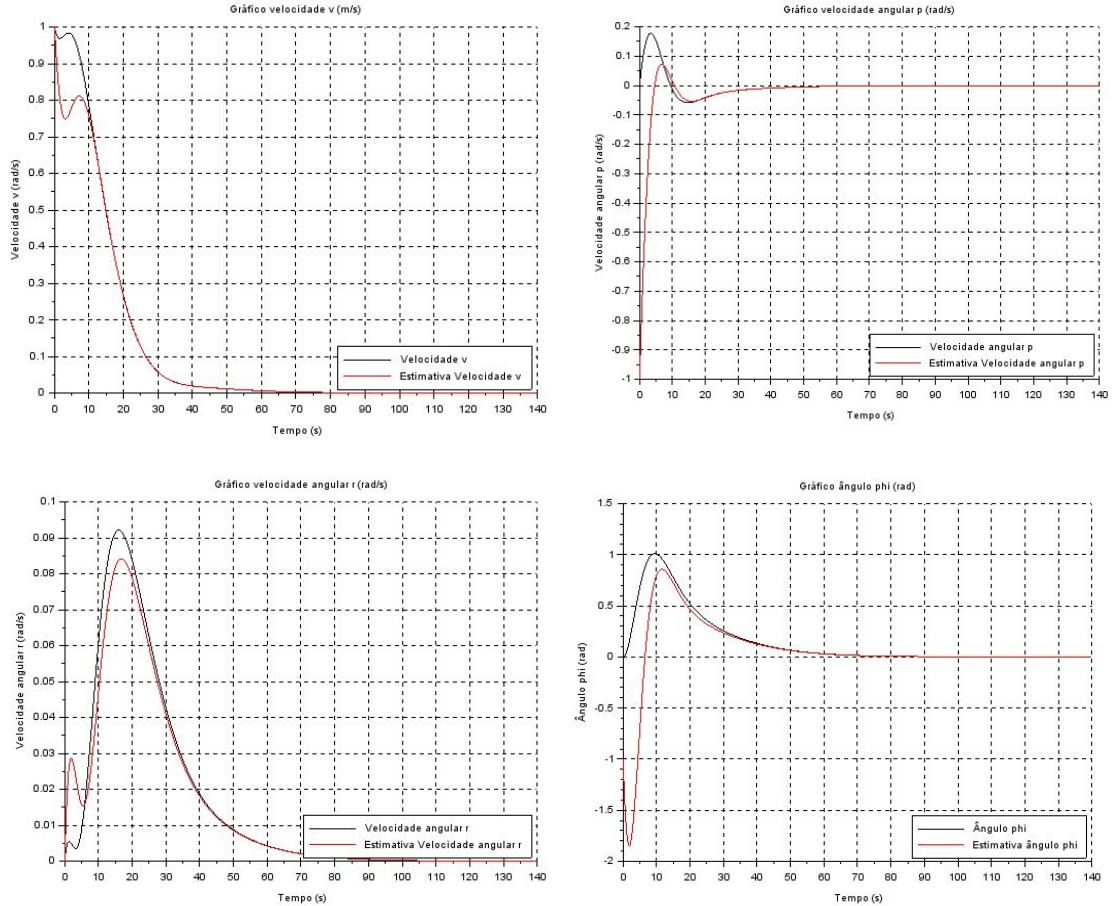


Figura 43 - Lugar das Raízes para ganho integral (direita) e com detalhe (esquerda).

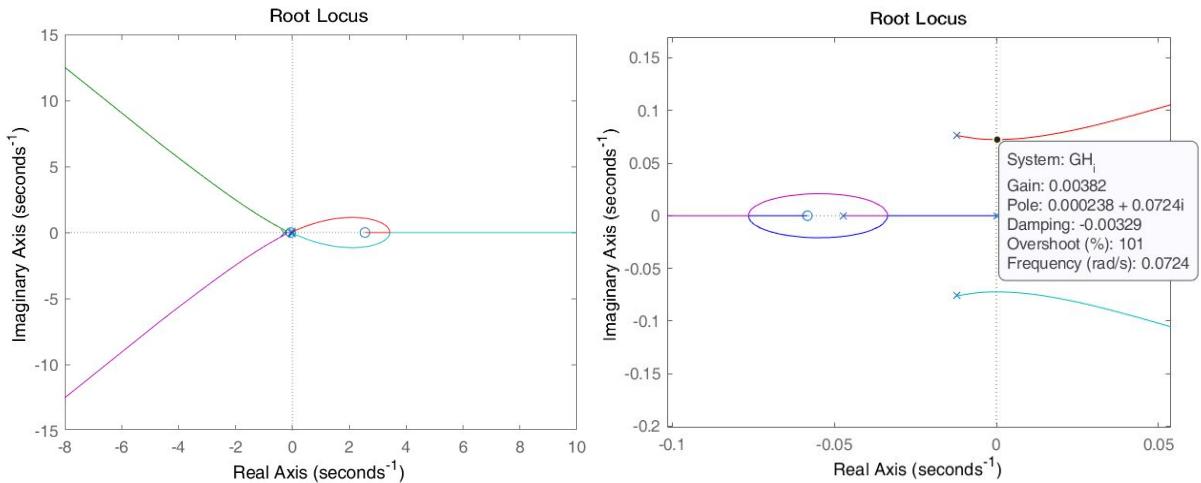
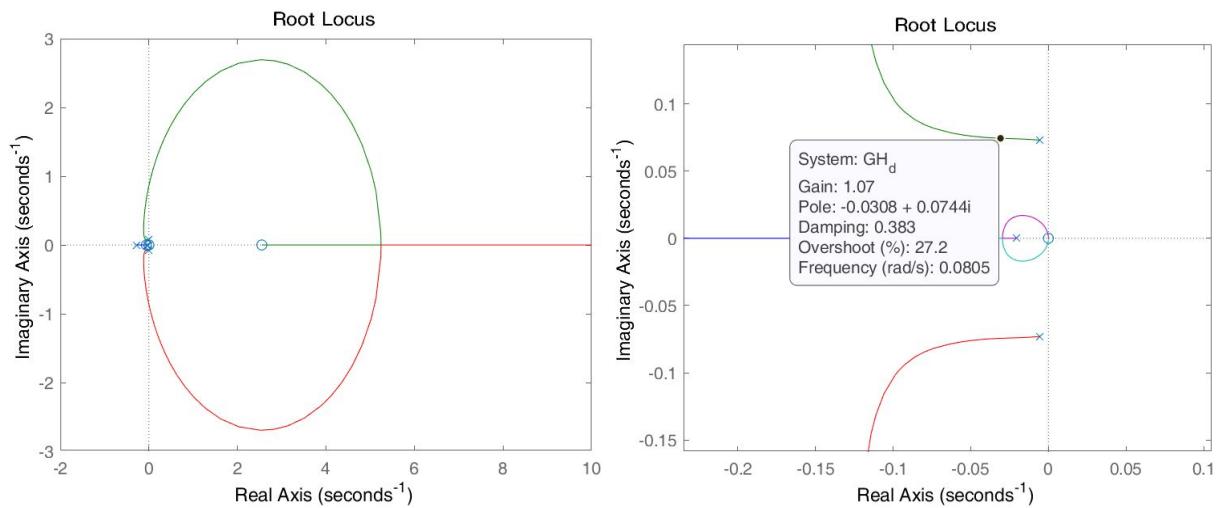


Figura 44 - Lugar das Raízes para ganho derivativo (direita) e com detalhe (esquerda).



## APÊNDICE I - Códigos

A seguir está o código feito por meio do software *SciLab* para a parte referente ao controle moderno do presente relatório.

```
// Dados do Boeing 747 para altitude de 40.000 pés e Mach = 0.90 ref. Nelson
// Coeficientes laterais
cyb = -0.96
cyp = 0
cyr = 0
clb = -0.221
cnb = 0.150
clp = -0.45
cnp = -0.121
clr = 0.101
cnr = -0.30
clda = 0.0461
cnda = 0.0064
cydr = 0.175
cldr = 0.007
cndr = -0.109
// Dimensões
S = 5500*0.092903 // Área alar
b = 195.68*0.3048 // Envergadura
c = 27.31*0.3048 // Corda média

// Massa
m = 636600*0.453592
// Momentos de inércia
Ix = 18.2*10^6*1.35581795
Iy = 33.1*10^6*1.35581795
Iz = 49.7*10^6*1.35581795

u0 = 85.75 // Velocidade de cruzeiro do Boeing 747

// Dados do ambiente
rho = 3.639*10^-1 // Densidade atmosférica
g = 9.81 // Gravidade
```

```

// Pré-cálculo das constantes do espaço de estados

Q = 1/2*rho*u0^2
Fyv = Q*S*cyb/u0
Fyp = Q*S*b*cyp/(2*u0)
Fyr = Q*S*b*cyr/(2*u0)
Mxv = Q*S*b*clb/u0
Mxp = Q*S*b^2*clp/(2*u0)
Mxr = Q*S*b^2*clr/(2*u0)
Mzv = Q*S*b*cnb/(u0)
Mzp = Q*S*b^2*cnp/(2*u0)
Mzr = Q*S*b^2*cnr/(2*u0)
Fydr = Q*S*cydr
Mxda = Q*S*b*clda
Mxdr = Q*S*b*cldr
Mzda = Q*S*b*cnda
Mzdr = Q*S*b*cndr
|
// Constantes da linearização

theta0 = 0

// Definição das matrizes do espaço de estados
// Espaço de Estados do tipo: dx/dt = Ax + Bu e y = Cx + Du

A = [[Fyv/m, Fyp/m, (Fyr/m-u0/u0)*g*cos(theta0)/u0]; [Mxv/Ix, Mxp/Ix, Mxr/Ix, 0]; [Mzv/Iz, Mzp/Iz, Mzr/Iz, 0]; [0, 1, 0, 0]]
B = [[0, Fydr/m]; [Mxda/Ix, Mxdr/Ix]; [Mzda/Iz, Mzdr/Iz]; [0, 0]]
C = [[0, 0, 0, 1]; [0, 0, 1, 0]]
D = [[0, 0]; [0, 0]]
E = [[-Fyv/m, 0, 0]; [Mxv/Ix, Mxp/Ix, Mxr/Ix]; [-Mzv/Iz, -Mzp/Iz, -Mzr/Iz]; [0, 0, 0]]

// Polos e Zeros

sl = syslin('c', A, B, C, D)
h = ss2tf(sl)
disp(h)
plzz(sl)
s = poly(0, 's')
matr = s*eye(4, 4) - A
disp(matr)
disp(C*inv(matr)*B)
disp(roots(det(matr)))

```

```

// Definição das condições iniciais
x0 = [5;5;5;5]

// Definição do intervalo de tempo
t0 = 0
tf = 200
n = 1000
t = linspace(t0,tf,n)
// Sistema linear
C = [[1,0,0,0];
      [0,1,0,0];
      [0,0,1,0];
      [0,0,0,1]];
D = [[0,0];
      [0,0];
      [0,0];
      [0,0]];
sl = syslin('c',A,B,C,D)
h = ss2tf(sl)

scf(0)
subplot(1,2,1)
bode(h(1,1));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Aileron -- Velocidade lat. v")
subplot(1,2,2)
bode(h(1,2));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Leme -- Velocidade lat. v")

scf(1)
subplot(1,2,1)
bode(h(2,1));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Aileron -- Velocidade angular p")
subplot(1,2,2)
bode(h(2,2));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Leme -- Velocidade angular p")

scf(2)
subplot(1,2,1)
bode(h(3,1));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Aileron -- Velocidade angular r")
subplot(1,2,2)
bode(h(3,2));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Leme -- Velocidade angular r")

scf(3)
subplot(1,2,1)
bode(h(4,1));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Aileron -- Ângulo phi")
subplot(1,2,2)
bode(h(4,2));
xtitle("Diagrama de Bode: Deflexão Leme -- Ângulo phi")

```

```

// Simulação via integração numérica do espaço de estados

function entradas = u(t) // Entradas para simulação via integração numérica do espaço dos estados
    .. u1 = 0
    .. u2 = 0
    .. entradas = [u1;u2]
endfunction
function dist = p(t) // Disturbios para simulação via integração numérica do espaço de estados
    .. p1 = 0
    .. p2 = 0
    .. p3 = 0
    .. dist = [p1;p2;p3]
endfunction
function dx = f(t,x) // Função para simulação via integração do espaço de estados
    .. dx = A*x+B*u(t)+E*p(t)
endfunction

// Intervalo de tempo da simulação
t = []
t0 = 0
dt = 0.01
tf = 50
t = t0:dt:tf

// Condições iniciais
x0 = [1;1;1;1]

// Integração via ode
x = []
```

```

x = ode(x0,t0,t,f) // integração numérica

// Determinação da saída observável
U1 = []
U2 = []
for i = 1:(tf-t0)/dt+1 // entradas
    .. T = t0 + dt*(i-1)
    .. ent = u(T)
    .. U1(i) = ent(1)
    .. U2(i) = ent(2)
end
U = [U1,U2]'
```

```

y = []
y = C*x+D*U

scf(0)
plot2d(t,y(1,:))
scf(1)
plot2d(t,y(2,:))
```

```

// Verifica a controlabilidade e a observabilidade do sistema

Ct = [B A*B A*A*B A*A*A*B] // Matriz de controlabilidade
if rank(Ct) >= size(A) then // Verifica se o posto da matriz de controlabilidade é igual
    ... // ou superior à dimensão da matriz A
    ... disp('O sistema é controlável!')
else
    ... disp('O sistema não é controlável!')
end

Ob = [C;C*A;C*A*A;C*A*A*A]
if rank(Ob) >= size(A) then
    ... disp('O sistema é observável!')
else
    ... disp('O sistema não é observável!')
end

// Matriz de Transição e termo forçante
t0 = 0
dt = 0.1
n = 500
x0 = [1;1;1;1]
function input = u(t)
    ... u1 = 0
    ... u2 = 0
    ... input = [u1;u2]
endfunction
x1 = []
x2 = []
x3 = []
x4 = []
for i = 1:n
    t = t0+(i-1)*dt
    mt = expm(A*(t-t0))*x0
    disp(mt)
    tf1 = integrate(' (expm(A*(t-d))*B*[0;0]) (1)', 'd', t0, t)
    tf2 = integrate(' (expm(A*(t-d))*B*[0;0]) (2)', 'd', t0, t)
    tf3 = integrate(' (expm(A*(t-d))*B*[0;0]) (3)', 'd', t0, t)
    tf4 = integrate(' (expm(A*(t-d))*B*[0;0]) (4)', 'd', t0, t)
    x1(i) = mt(1)+tf1
    x2(i) = mt(2)+tf2
    x3(i) = mt(3)+tf3
    x4(i) = mt(4)+tf4
end
tint = t0:dt:(t0+(n-1)*dt)
x = [x1';x2';x3';x4']
y = C*x
scf(0)
plot2d(tint,y(1,:),style=3)
scf(1)
plot2d(tint,y(2,:),style=3)

// Código para alocação de polos do controlador e do observador
s = poly(0,'s')
matr = s*eye(4,4)-A
pc = [-0.5,-1+%i,-1-%i,-0.2] // Polos desejados para o controlador
Kc = ppol(A,B,pc) // Definição da matriz K do controlador
po = 2*pc // Polos desejados para o observador
Ko = (ppol(A',C',po))' // Definição da matriz K do observador
disp(spec(A-B*Kc))

```

```

// Criação das matrizes K do controlador e do observador via LQR
Qc = [1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1] // Matriz Q do controlador
Pc = [1,0;0,1] // Matriz P do controlador
slc = syslin('c',A,B,C) // Criação do sistema linear do espaço de estados para o controlador
Kc = lqr(sl, Qc, Pc) // Definição da matriz Kc
Qo = [1,0,0,1;0,1,0,1;0,0,1,0;1,1,0,0] // Matriz Q do observador
Po = [1,0;0,1] // Matriz P do observador
slo = syslin('c',A',C',B') // Criação do sistema linear do espaço de estados para o observador
Ko = (lqr(slo, Qo, Po))' // Definição da matriz Ko
disp(spec(A-B*Kc))

Ar = [0,0,0,0;0,0,-1,0;0,1,0,0;0,0,0,0]
B2 = E
Aw = 0.01*[0,0,1;0,0,0;-1,0,0]
F = A-B*Kc
F2 = [A-Ar]
Ao = [Aw zeros(3,4);zeros(4,3) Ar]
Ke = inv(C*inv(eye(4,4)-A-B*Kc)*B)*C

//lambdafull=[A-B*Kc,Ay;zeros(7,4),Ao]
lambda = [A-B*Kc, - (B*(Kc-Ke));zeros(4,4),Ar]
t0 = 0 // Definição do intervalo de tempo
dt = 0.1
n = 500
tf = t0 + dt*(n-1)
t = []
t = t0:dt:tf
x0 = []
x0 = [0;0;0;0] // Condições iniciais
w0 = [0;1;1]
r0 = [0;0;0.01;0]
c0 = [x0;w0;r0]
x1=[]
x2=[]
x3=[]
x4=[]
xr1=[]
xr2=[]
xr3=[]
xr4=[]
yr = []
xw1=[]
xw2=[]
xw3=[]
xw=[]

function plotter_separacao(x0,A,B,K,Ko)
    lambda = [[A-B*K B*K];
               zeros(size(A,1), size(A,1)) A-Ko*C]]
    polos = spec(lambda)
    polos_cont = polos(1:size(A,1))
    polos_obs = polos(size(A,1)+1:2*size(A,1))
    disp('Os polos do controlador são:')
    disp(polos_cont)
    disp('Os polos do observador são:')
    disp(polos_obs)
    scf(0)
    scatter(real(polos_cont),imag(polos_cont), marker = '.')
    scatter(real(polos_obs),imag(polos_obs), marker = 'filled-diamond')
    legend('Polos do controlador', 'Polos do observador')
    //Matriz de transição
    dt = 0.1
    nit = 400
    x1 = []
    x2 = []
    x3 = []
    x4 = []
    xob1 = []
    xob2 = []
    xob3 = []
    xob4 = []

```

```

.... for i = 1:nit
..... t = (i-1)*dt
..... sigma = expm(lambda*t)
..... x = sigma*x0
..... x1(i) = x(1)
..... x2(i) = x(2)
..... x3(i) = x(3)
..... x4(i) = x(4)
..... xob1(i) = -x(5)+x(1)
..... xob2(i) = -x(6)+x(2)
..... xob3(i) = -x(7)+x(3)
..... xob4(i) = -x(8)+x(4)
..... end
.... t = 0:dt:(nit-1)*dt
.... scf(1)
.... plot2d(t,x1)
.... plot2d(t,xob1, style=.5)
.... legend('Velocidade.v', 'Estimativa.Velocidade.v', [4])
.... xtitle('Gráfico.velocidade.v.(m/s)')
.... xlabel('Tempo.(s)')
.... ylabel('Velocidade.v.(rad/s)')
.... xgrid()
.... scf(2)
.... plot2d(t,x2)
.... plot2d(t,xob2, style=.5)
.... legend('Velocidade.angular.p', 'Estimativa.Velocidade.angular.p', [4])
.... xtitle('Gráfico.velocidade.angular.p.(rad/s)')
.... xlabel('Tempo.(s)')
.... ylabel('Velocidade.angular.p.(rad/s)')
.... xgrid()
.... scf(3)
.... plot2d(t,x3)
.... plot2d(t,xob3, style=.5)

.... plot2d(t,x4)
.... plot2d(t,xob4, style=.5)
.... legend('Ângulo.phi', 'Estimativa.Ângulo.phi', [4])
.... xtitle('Gráfico.ângulo.phi.(rad)')
.... xlabel('Tempo.(s)')
.... ylabel('Ângulo.phi.(rad)')
.... xgrid()
endfunction

function plotter_observador(x0,A,C,Koal,Kolq)
.... // Koal é a matriz de ganho para observador por alocação de polos
.... // Kolq é a matriz de ganho para observador por controle LQR
.... // Matriz de transição
.... dt = 0.1
.... nit = 100
.... x1 = []
.... x2 = []
.... x3 = []
.... x4 = []
.... dt = 0.1
.... nit = 500
.... for i = 1:nit
..... t = (i-1)*dt
..... sigma = expm( (A-Koal*C)*t)
..... xal = sigma*x0
..... x1al(i) = xal(1)
..... x2al(i) = xal(2)
..... x3al(i) = xal(3)
..... x4al(i) = xal(4)
.... end

```

```

.... t = 0:dt:(nit-1)*dt
.... disp('Os polos do controlador por alocação de polos são:')
.... disp(spec(A-Kal*C))
.... disp('Os polos do controlador por método LQR são:')
.... disp(spec(A-Klq*C))
.... scf(0)
.... plot2d(t,x1al)
.... plot2d(t,x1lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR')
.... xtitle('Gráfico do erro de observação da velocidade v. (m/s)')
.... xlabel('Tempo. (s)')
.... ylabel('Velocidade v. (rad/s)')
.... xgrid()
.... scf(1)
.... plot2d(t,x2al)
.... plot2d(t,x2lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR')
.... xtitle('Gráfico do erro de observação da velocidade angular p. (rad/s)')
.... xlabel('Tempo. (s)')
.... ylabel('Velocidade angular p. (rad/s)')
.... xgrid()
.... scf(2)
.... plot2d(t,x3al)
.... plot2d(t,x3lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR')
.... xtitle('Gráfico do erro de observação da velocidade angular r. (rad/s)')
.... xlabel('Tempo. (s)')
.... ylabel('Velocidade angular r. (rad/s)')
.... xgrid()

.... scf(3)
.... plot2d(t,x4al)
.... plot2d(t,x4lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR')
.... xtitle('Gráfico do erro de observação da ângulo phi. (rad)')
.... xlabel('Tempo. (s)')
.... ylabel('Ângulo phi. (rad)')
.... xgrid()
endfunction

function plotter_controlador(x0,A,B,Kal,Klq)
.... // Kal é a matriz de ganho para alocação de polos
.... // Klq é a matriz de ganho para controle LQR
.... // Matriz de transição
.... dt = 0.1
.... nit = 100
.... x1 = []
.... x2 = []
.... x3 = []
.... x4 = []
.... dt = 0.1
.... nit = 400
.... for i = 1:nit
....   t = (i-1)*dt
....   sigma = expm( (A-B*Kal)*t)
....   xal = sigma*x0
....   x1al(i) = xal(1)
....   x2al(i) = xal(2)
....   x3al(i) = xal(3)
....   x4al(i) = xal(4)
.... end

```

```

.... t = 0:dt: (nit-1)*dt
.... disp('Os polos do controlador por alocação de polos são:')
.... disp(spec(A-B*Kal))
.... disp('Os polos do controlador por método LQR são:')
.... disp(spec(A-B*Klq))
.... scf(0)
.... plot2d(t,x1al)
.... plot2d(t,x1lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
.... xtitle('Gráfico velocidade.v.(m/s)')
.... xlabel('Tempo.(s)')
.... ylabel('Velocidade.v.(rad/s)')
.... xgrid()
.... scf(1)
.... plot2d(t,x2al)
.... plot2d(t,x2lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
.... xtitle('Gráfico velocidade.angular.p.(rad/s)')
.... xlabel('Tempo.(s)')
.... ylabel('Velocidade.angular.p.(rad/s)')
.... xgrid()
.... scf(2)
.... plot2d(t,x3al)
.... plot2d(t,x3lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
.... xtitle('Gráfico velocidade.angular.r.(rad/s)')
.... xlabel('Tempo.(s)')
.... ylabel('Velocidade.angular.r.(rad/s)')
.... xgrid()
.... scf(3)
.... plot2d(t,x4al)
.... plot2d(t,x4lq, style = 5)
.... legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
.... xtitle('Gráfico ângulo.phi.(rad)')
.... xlabel('Tempo.(s)')
.... ylabel('Ângulo.phi.(rad)')
.... xgrid()
endfunction

```

A seguir está o código feito por meio do software *MatLab* para a parte referente ao controle clássico do presente relatório.

```

%% TRABALHO DE CONTROLE - T2 - 2020
% Controle de movimentos laterais de uma aeronave

clear all
clc
syms s

%% Função de transferência

%Escolheu-se como entrada a deflexão do aileron e como saída a velocidade
%lateral

%H(s):
Numerador_11 = 0.0005759 + 0.0096525*s - 0.0038725*s^2
%P(s):
Denominador = 0.0000237 + 0.0013412*s + 0.027388*s^2 + 0.34822398*s^3 + s^4

G_11 = tf(sym2poly(Numerador_11), sym2poly(Denominador))
H = 1

GH_11 = G_11*H

%% Polos e Zeros

Zeros = zero(GH_11)
Polos = pole(GH_11)

figure(1)
pzmap(GH_11)

%% Estabilidade por Routh-Hurwitz

% Já feito no T1

%% Análise de tipo e erro em regime permanente para a(s) FT(S) escolhidas

% Escolheu-se a primeira FT ( H(s)/P(s) )

% Ordem: maior grau da equação característica
Ordem = 4
% Tipo: número de integrações
Tipo = 0

Kp_11 = vpa(limit(Numerador_11/Denominador, s, 0))
Erro_11 = 1 / (Kp_11 + 1)

%% Resposta em malha aberta da(s) FTS mais importantes

% Escolheu-se novamente a primeira FT ( H(s)/P(s) )

figure(2)

```

```

step(GH_11)

%% Métodos de Ziegler e Nichols

figure(3)
step(GH_11)

% Determinação do ponto de inflexão
[y,t] = step(GH_11);
ypp = diff(y,2);

Valor = 1000
for i = 1:length(ypp)
    if abs(ypp(i)) < Valor
        Valor = ypp(i)
        I = i
    end
end

hold on
scatter(t(I), y(I), 'ro')

% Determinação da reta
a = ( (y(I)-y(I-1))/(t(I)-t(I-1)) + (y(I)-y(I+1))/(t(I)-t(I+1)) )/2
b = y(I) - a*t(I)

pontosx = 5:0.1:75
pontosy = a*pontosx + b

hold on
plot(pontosx, pontosy)

% Determinação da intersecção entre a reta e o eixo x
Valor = 1000
for i = 1:length(pontosy)
    if abs(pontosy(i)) < Valor
        Valor = abs(pontosy(i))
        I2 = i
    end
end

% Determinação da intersecção entre a reta e a reta horizontal y = K
Valor = 1000
for i = 1:length(pontosy)
    if abs(pontosy(i) - y(length(y))) < Valor
        Valor = abs(pontosy(i) - y(length(y)))
        I3 = i
    end
end

% Determinação dos parâmetros
tan_theta = a
L = pontosx(I2)
T = t(I) - L

```

```

Kp_ZN = 1.2*T/L;
Ti_ZN = 2*L;
Td_ZN = L/2;
Ki_ZN = Kp_ZN/Ti_ZN
Kd_ZN = Kp_ZN*Td_ZN

Gc_ZN = pid(Kp_ZN, Ki_ZN, Kd_ZN)

% Resposta
G1_ZN = series(Gc_ZN, GH_11)
T1_ZN = feedback(G1_ZN, 1)

figure(4)
step(T1_ZN)

%% Alocação de Polos

Kp_AP = 0.1203
Ki_AP = 0.00305
Kd_AP = 0.9835

Gc_AP = pid(Kp_AP, Ki_AP, Kd_AP)

G1_AP = series(Gc_AP, GH_11)
T1_AP = feedback(G1_AP, 1)

figure(5)
step(T1_AP)

%% Controle ótimo ITAE

Kp_ITAE = 0.1
Ki_ITAE = 0.004
Kd_ITAE = 1.76

Gc_ITAE = pid(Kp_ITAE, Ki_ITAE, Kd_ITAE)

G1_ITAE = series(Gc_ITAE, GH_11)
T1_ITAE = feedback(G1_ITAE, 1)

figure(6)
step(T1_ITAE)

%% Lugar das Raízes

% Ganho Proporcional
figure(7)
rlocus(GH_11)
Kp_RL = 0.094

% Ganho Integral
GH_i = tf(sym2poly(Numerador_11), sym2poly(s*(Denominador + Kp_RL*Numerador_11)))
figure(8)

```

```

rlocus(GH_i)
Ki_RL = 0.0022

% Ganho Derivativo
GH_d = tf(sym2poly(s^2*Numerador_11), sym2poly(s*Denominador + (Kp_RL*s + Ki_RL)*Numerador_11))
figure(9)
rlocus(GH_d)
Kd_RL = 1.06

Gc_RL = pid(Kp_RL, Ki_RL, Kd_RL)
G1_RL = series(Gc_RL, GH_11)

T1_RL = feedback(G1_RL, 1)

figure(10)
step(T1_RL)

% Polos e zeros malha fechada RL
polos_RL = pole(T1_RL)
zeros_RL = zero(T1_RL)
disp("Os polos de malha fechada RL são:")
disp(polos_RL)
disp("Os zeros de malha fechada RL são:")
disp(zeros_RL)

%% Critério de Estabilidade de Nyquist

%Ziegler Nichols
figure(11)
nyqlog(G1_ZN)

%Alocação de Polos
figure(12)
nyqlog(G1_AP)

%ITAE
figure(13)
nyqlog(G1_ITAE)

%Lugar das Raízes
figure(14)
nyqlog(G1_RL)

%% Estabilidade Relativa Usando Bode

%Ziegler Nichols
figure(15)
margin(G1_ZN)

%Alocação de Polos
figure(16)
margin(G1_AP)

%ITAE

```

```

figure(17)
margin(G1_ITAE)

%Lugar das Raízes
figure(18)
margin(G1_RL)

%% Capacidade de Seguir Sinal e Rejeitar Distúrbios e
% Comparaçao entre o Desempenho sem Controle e o com Controladores

% Deflexao no aileron determinado: pi/4 rad
Degrau_MA = stepDataOptions('InputOffset', 0, 'StepAmplitude', pi/4)

figure(20)
step(GH_11, Degrau_MA)

% Pela grafico, tal deflexao causa uma variação de 19.1 m/s.
Degrau_MF = stepDataOptions('InputOffset', 0, 'StepAmplitude', 19.1)

hold on
step(T1_ZN, Degrau_MF)
hold on
step(T1_AP, Degrau_MF)
hold on
step(T1_ITAE, Degrau_MF)
hold on
step(T1_RL, Degrau_MF)

legend("Malha aberta", "Ziegler Nichols", "Alocação de Polos", "ITAE", "Lugar das Raízes")

% Informações sobre os graficos
disp("Malha aberta")
stepinfo(GH_11)
disp("Ziegler Nichols")
stepinfo(T1_ZN)
disp("Alocação de Polos")
stepinfo(T1_AP)
disp("ITAE")
stepinfo(T1_ITAE)
disp("Lugar das Raízes")
stepinfo(T1_RL)

% Logo, os melhores controladores são o por ITAE e o por lugar das raízes

%% Comparaçao para Métodos no Domínio do Tempo e Frequência

% Escolheu-se o método por ITAE para realizar a comparação

figure(21)
step(T1_RL)

A = [-0.0265, 0, -1, 0.1144;
      -0.0043, -0.2585, 0.058, 0;

```

```

0.00105, -0.0254, -0.0631, 0;
0, 1, 0, 0]
B = [0, 0.4143;
    0.076, 0.0115;
    0.0038, -0.666;
    0, 0]
C = [1, 0, 0, 0;
    0, 0, 1, 0]
D = 0

sys = ss(A, B, C, D)
[K, P] = lqr(A, B, diag([1, 1, 1, 1]), diag([10, 10]))
sys_novo = ss(A-B*K, B, C, D)

hold on
step(sys_novo(1,1)/1.23)
legend("Lugar das Raízes", "LQR")

```