

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA

GUSTAVO LOPES OLIVEIRA	10335490
JOÃO AFONSO QUINTEIRO PEROSA	10335805
LUCAS HIDEKI TAKEUCHI OKAMURA	9274315
MATEUS ALVES MEDEIROS	10274307

**Controle de movimentos laterais de uma aeronave**

São Paulo

2020

GUSTAVO LOPES OLIVEIRA  
JOÃO AFONSO QUINTEIRO PEROSA  
LUCAS HIDEKI TAKEUCHI OKAMURA  
MATEUS ALVES MEDEIROS

## **Controle de movimentos laterais de uma aeronave**

### **Versão Original**

Relatório de controle moderno para a disciplina de Controle e Aplicações, código PME 3381, do curso de engenharia mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Área de concentração: Engenharia Mecânica.

Professores: Agenor de Toledo Fleury e Décio Crisol Donha.

SÃO PAULO

2020

## RESUMO

Este relatório é a continuação daquele apresentado na disciplina de Modelagem de Sistemas Dinâmicos. No presente, se apresentará um estudo acerca do controle de uma aeronave Boeing 747 em regime de cruzeiro e seus movimentos laterais. Para isso, serão aplicados os conhecimentos obtidos nas aulas da disciplina de Controle e Aplicações, bem como a teoria de Mecânica dos Fluidos e Aeronáutica, consultando a bibliografia disponível dos acervos da Escola Politécnica. O resultado a ser adquirido é um sistema capaz de controlar o modelo satisfatoriamente.

**Palavras-chave:** Avião; aeronave; modelagem dinâmica; movimentos laterais; rolagem; guinada; superfícies de controle; dinâmica de voo; controle moderno.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Superfícies de controle	9
Figura 2 - Sistemas de coordenadas adotados	13
Figura 3 - Indicação do ângulo de rolagem	13
Figura 4 - Indicação do ângulo de guinada	13
Figura 5 - Polos do sistema sobre o plano imaginário	18
Figura 6 - Gráficos das variações da velocidade $v$ ( $\Delta v$ ) (esquerda) e da velocidade angular $p$ ( $\Delta p$ ) (direita) para entrada em degrau em $t=4,0s$ nas deflexões dos ailerons e do leme	20
Figura 7 - Gráficos das variações da velocidade angular $r$ ( $\Delta r$ ) (esquerda) e do ângulo de rolagem $\phi$ ( $\Delta \phi$ ) para entrada em degrau em $t=4,0s$ nas deflexões dos ailerons e do leme	20
Figura 8 - Diagrama de Bode para velocidade $v$ e deflexão no aileron (esquerda) no leme (direita)	21
Figura 9 - Diagrama de Bode para velocidade angular $p$ e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita)	22
Figura 10 - Diagrama de Bode para velocidade angular $r$ e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita)	23
Figura 11 - Diagrama de Bode para ângulo de rolagem e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita)	24
Figura 12 - Diagrama de blocos para o sistema	25
Figura 13 - Deflexão das superfícies leme e aileron - Alocação de Polos	27
Figura 14 - Deflexão das superfícies leme e aileron - LQR	28
Figura 15 - Resposta dos controladores por LQR e Alocação de Polos para as variáveis de estado (a) velocidade $v$ (esquerda superior), (b) velocidade $p$ (direita superior), (c) velocidade $r$ (esquerda inferior), (d) ângulo $\phi$ (direita inferior)	29
Figura 16 - Comparação de erro de observação pelos métodos LQR e Alocação de Polos (a) velocidade $v$ (esquerda superior), (b) velocidade $p$ (direita superior), (c) velocidade $r$ (esquerda inferior), (d) ângulo $\phi$ (direita inferior)	31
Figura 17 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por alocação de polos (a) velocidade $v$ (esquerda superior), (b) velocidade $p$ (direita superior), (c) velocidade $r$ (esquerda inferior), (d) ângulo $\phi$ (direita inferior)	32
Figura 18 - Comparação de polos do observador e do controlador (a) por alocação de polos por LQR (b)	33
Figura 19 - Velocidade (a) lateral (esquerda), (b) de guinada (direita) seguindo de referência fixa	34
Figura 20 - Resposta da saída da velocidade de guinada seguindo referência senoidal	35
Figura 21 - Velocidade de guinada seguindo referência senoidal com distúrbio	35
Figura 22 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por LQR (a) velocidade $v$ (esquerda superior), (b) velocidade $p$ (direita superior), (c) velocidade $r$ (esquerda inferior), (d) ângulo $\phi$ (direita inferior)	54

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aplicação do critério de Routh-Hurwitz	19
Tabela 2 - Características das respostas dos controladores	30
Tabela 3- Parâmetros dimensionais e operacionais do BOEING 747	44
Tabela 4 - Coeficientes longitudinais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar	44
Tabela 5- Coeficientes laterais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar	44
Tabela 6- Derivadas parciais em relação às velocidades	45
Tabela 7 - Derivadas parciais em relação a deflexões das superfícies de controle	45
Tabela 8- Termos da matriz de transferência	46
Tabela 9 - Sobrecarga do piloto, especificação MIL-F-8785C	50
Tabela 10 - Classificação do avião, especificação MIL-F-8785C	51
Tabela 11 - Categoria de voo	51
Tabela 12 - Definição de classes de aviões	52
Tabela 13 - Especificação da “ spiral root”	52
Tabela 14 - Especificação da "roll root"	52
Tabela 15 - Especificação das " Dutch Roll Roots"	53

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
1.1. Motivação e Objetivos do Trabalho	8
1.2. Revisão Bibliográfica	8
1.3. Metodologia	10
<b>2. SENSORES</b>	<b>11</b>
2.1. Tubos de Pitot	11
2.2. Giroscópios	11
2.3. Utilização dos Sensores	12
<b>3. ATUADORES</b>	<b>12</b>
<b>4. MODELAGEM DO SISTEMA EM MALHA ABERTA</b>	<b>13</b>
4.1. Modelagem Física e Hipóteses Simplificadoras	13
4.2. Modelagem Matemática	14
4.3. Linearização das Equações	15
4.4. Espaço de Estados	16
4.5. Parâmetros e Coeficientes Adimensionais	16
4.6. Matriz de Transferência	17
4.7. Polos Do Sistema Em Malha Aberta	18
4.8. Análise de Estabilidade em Malha Aberta	19
4.9. Matriz de Transição e Matriz Relativa ao Termo Forçante	19
4.10. Simulações do Sistema em Malha Aberta	20
4.10.1. Análise no domínio do tempo	20
4.10.2. Análise no domínio da frequência	21
Velocidade $v$	21
Velocidade angular $p$	22
Velocidade angular $r$	23
Ângulo de rolagem $\phi$	24
4.11. Distúrbios	24
<b>5. CONTROLE MODERNO</b>	<b>26</b>
5.1. Análise de Controlabilidade e Observabilidade	26
5.2. Controle por Alocação de Polos	27
5.3. Controle Linear Quadrático	28
5.4. Comparação de Controladores	29
5.5. Alocação de Polos dos Observadores	30
5.6. LQR dos Observadores	30
5.7. Comparação de Observadores	31
5.8. Princípio da Separação	32
5.9. Análise de Estabilidade dos Sistemas Controlados	33

5.10. Acompanhamento de Referência	33
<b>6. CONCLUSÃO</b>	36
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	37
<b>APÊNDICE A - Conjunto de Hipóteses Simplificadoras</b>	38
<b>APÊNDICE B - Desenvolvimento da Modelagem Matemática</b>	39
<b>APÊNDICE C - Parâmetros Dimensionais</b>	44
<b>APÊNDICE D - Funções de Transferência</b>	46
<b>APÊNDICE E - Matrizes de Transição e de Termo Forçante</b>	47
<b>APÊNDICE F - Matrizes de Controlabilidade e Observabilidade</b>	49
<b>APÊNDICE G - Exigências de Qualidade de Voo</b>	50
<b>APÊNDICE H - Gráficos Extras</b>	54
<b>APÊNDICE I - Código</b>	55

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Motivação e Objetivos do Trabalho

O fascínio pelo voo é algo que acompanha a sociedade há muitos séculos. Registrado em inúmeros relatos de tentativas malsucedidas, o desejo de voar sempre teve quem o tentasse sanar. É seguro dizer que, após seu nascimento em 1906 com Santos Dumont, o avião se tornou a forma mais consagrada de transporte aéreo existente.

Um dos maiores ícones da aviação moderna é o modelo de aeronave Boeing 747, um verdadeiro gigante da aviação, e a inspiração para este trabalho. Podendo comportar até 660 passageiros, dependendo do modelo, a importância deste veículo para a aviação comercial é tremenda. Impulsionado pelo fascínio deste enorme mercado e dessa incrível criação da engenharia, este trabalho tem como objetivo realizar o controle de uma aeronave Boeing 747 realizando movimentos laterais.

Sua propulsão se dá por um sistema com quatro turbinas, nas quais a expansão dos gases provenientes da queima do combustível propuliona o avião. Além disso, um sistema de comando que controla um conjunto de superfícies móveis (superfícies de controle), gera os demais movimentos do avião em regime de voo. Conforme o aviador deflete esses elementos, as diversas forças (arrasto e sustentação) que atuam sobre a aeronave variam, possibilitando o controle dos movimentos do veículo.

É justamente a dinâmica que compreende o controle de aeronaves que esse trabalho se propõe a estudar. Tal estudo deriva sua importância das inúmeras fases de desenvolvimento de aeronaves as quais dependem dele. Além disso, esse tipo de análise está presente em diversos setores importantes da indústria de aviação. Assim, o presente documento tem como objetivo o estudo e controle dos movimentos de rolagem, guinada e translação lateral (movimentos laterais) de um Boeing 747.

## 1.2. Revisão Bibliográfica

A fim de estudar e adotar modelos simplificados coerentes com os regimes reais, o grupo buscou diversas fontes conceituadas para embasar as hipóteses e modelagens feitas. Os três principais textos utilizados como referências e fontes foram Etkin (1996), Nelson (1998), e Rodrigues (2014).

Etkin (1996) e Nelson (1998) apresentam métodos e meios de se realizar a modelagem de uma aeronave, além de apresentar um estudo dos cálculos dos esforços aerodinâmicos. Rodrigues (2014), por outro lado, apresenta um estudo de como as superfícies de controle atuam em uma aeronave em regime de voo, e quais as suas influências no movimento do veículo.



A respeito da modelagem do sistema referente à aeronave, Etkin (1996) e Nelson (1998) adotam a hipótese de que o corpo pode ser tratado como um corpo rígido. Dessa maneira, a deflexão física das superfícies de controle (Figura 2) mencionadas acima passa a ser representada por um conjunto de forças e momentos aplicados ao próprio corpo do avião.

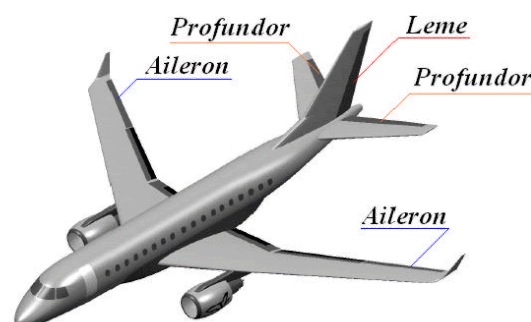
Segundo também Etkin (1996) e Nelson (1998), o estudo dos movimentos de uma aeronave pode ser subdividido em dois estudos diferentes: o estudo dos movimentos longitudinais, e o estudo dos movimentos laterais. Dado que o intuito deste trabalho é controlar os movimentos laterais de uma aeronave, o principal material de consulta está contido nas subdivisões responsáveis por apresentar a modelagem de tais movimentos. Em especial, destaca-se o capítulo 5 “Lateral Motion” de Nelson (1998). Cabe destacar que serão considerados, então, apenas os movimentos de rolagem, guinada, e translação lateral, em regime de voo.

Os estudos e meios de dividir a estrutura da modelagem podem ser encontrados por meio de Rodrigues (2014), que a divide em cinco principais grupos. São eles:

- Asas.
- Trem de pouso, que permite a manobrabilidade do avião enquanto em solo.
- Fuselagem, que contém o compartimento de carga e a própria cabine, sendo a estrutura nas quais os demais componentes são fixados.
- Empenagem de cauda, responsável pela estabilidade durante regime de voo, subdividida em horizontal e vertical.
- Grupo moto-propulsor, que gera tração e impulso.

As superfícies de controle de interesse (Figura 1) são compostas por ailerons, profundor e leme. Os ailerons se localizam nas asas, enquanto o profundor e o leme se localizam na empenagem de cauda.

Figura 1 - Superfícies de controle



(fonte: Formação de Pilotos, 2014)

Os ailerons, localizados mais especificamente nos bordos de fuga das extremidades das asas são encarregados de controlar o movimento de rolagem (Figura 1) da aeronave. Seu funcionamento se dá pois, quando um aileron é defletido para cima, sua respectiva asa perde força de sustentação; enquanto que, quando o outro aileron é defletido para baixo (de forma simultânea), sua respectiva asa ganha força de sustentação. Essa diferença de forças gera um momento que promove o movimento de rolagem do avião.

O profundor, localizado na superfície horizontal da empenagem de cauda, age de forma similar aos ailerons. Ao ser defletido para cima, a empenagem de cauda perde força de sustentação, enquanto, se defletido para baixo, ganha força de sustentação. Esse controle de força atuante permite a atuação de um momento que promove o movimento de arfagem do avião.

O leme é o responsável por controlar o direcionamento do avião. Localizado também na empenagem de cauda, seu funcionamento se dá, pois, ao ser defletido para um dos lados, a força de sustentação que age sobre a superfície vertical da empenagem de cauda aumenta no outro sentido, o que causa um momento que rotaciona a aeronave, gerando o movimento de guinada.

Outras duas superfícies de controle existentes que não serão abordadas neste trabalho são os flapes e os spoilers. Os flapes, tais quais os ailerons, atuam no controle das forças de sustentação do avião, entretanto, são acionados durante regime de pouso e decolagem da aeronave. Os spoilers, localizados sobre o extradorso das asas, podem auxiliar a realização de curvas em conjunto com os ailerons, entretanto, são acionados principalmente em movimentos de descida e pouso. Para efeitos de simplificação, estes não serão abordados neste estudo.

Os coeficientes adimensionais e parâmetros necessários para a modelagem e representação do modelo de aeronave Boeing 747 foram retirados de Nelson (1998). Demais textos e fontes pontuais utilizadas como referências podem ser vistas na seção de bibliografia deste trabalho.

### **1.3. Metodologia**

O grupo optou por seguir a metodologia semelhante à de Etkin (1996) e à de Nelson (1998), que definem dois sistemas de coordenadas: um solidário ao corpo, e um sistema fixo. É importante ressaltar que o primeiro é não inercial.

Para a obtenção das equações que regem os movimentos de interesse, o Teorema do Movimento do Baricentro e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular foram desenvolvidos no primeiro referencial, e então, transferidos para o segundo. Todavia, das seis equações resultantes dos teoremas supracitados, foram utilizadas somente as três equações referentes ao movimento lateral. Uma quarta equação é proveniente da transferência entre os dois referenciais utilizados.

As equações, então, foram escritas na abordagem de Espaço de Estados, que transforma as equações obtidas (de ordens superiores) em um conjunto de equações de 1ª ordem. A partir desse formato, análises de estabilidade puderam ser feitas. Ainda, essa modelagem permitiu o desenvolvimento do sistema de controle, objetivo principal deste trabalho, utilizando técnicas do chamado “controle moderno”, como as análises de controlabilidade e observabilidade do sistema, e o controle propriamente dito, pelos métodos de Alocação de Polos e Controle Linear Quadrático. A eficiência de ambos os sistemas pôde ser simulada através da adição de uma perturbação ao sistema.

## **2. SENSORES**

Para o perfeito funcionamento de um avião, são necessários diversos tipos de sensores, muitas vezes usados para conferir as medições, as quais são utilizadas para garantir maior segurança de voo e um maior conforto para os passageiros e tripulação. Como o intuito deste projeto é apenas o controle da posição de um avião, serão necessários poucos sensores, que realizam a medição de determinados parâmetros para a avaliação do comportamento do avião. Dentre tais parâmetros, destacam-se a velocidade vertical, altitude, velocidade do ar e a variação na direção do movimento, que podem ser medidos a partir de dois tipos de sensores principais: os Tubos de Pitot e os sensores giroscópios.

### **2.1. Tubos de Pitot**

Os Tubos de Pitot são sensores instalados paralelamente ao vento relativo que medem a variação de pressão em relação a uma pressão estática. Com o aumento da pressão do ar, somada à pressão estática, a cápsula se expande, fazendo com que os ponteiros do velocímetro se movimentem, indicando assim a velocidade do avião.

Especificações técnicas:

- Material em aço inox;
- Medição até 200 nós (~370 km/h);
- Precisão de  $\pm 2\%$  e fundo de escala até 45 metros por segundo.

### **2.2. Giroscópios**

Resumidamente, os sensores giroscópicos medem a variação da velocidade angular do avião em relação a um referencial estável, através da leitura de dados de um rotor suspenso. Seu funcionamento se baseia no princípio da inércia, opondo-se a qualquer tentativa de alterar sua direção, mas não conseguindo medir variações que ocorram no eixo de giro do giroscópio. Para calcular tais variações, é necessário utilizar mais de um giroscópio, com eixos não paralelos.

Especificações técnicas:

- Giroscópio de 3 eixos L3G4200C Brick;
- Medição de até 20000 graus por segundo.

### 2.3. Utilização dos Sensores

Como dito anteriormente, em um avião são utilizados diversos tipos e grande número de sensores, mas, para o caso específico de avaliação do movimento lateral de um avião, serão utilizados apenas um tubo de Pitot e um sensor giroscópio. Tais sensores serão utilizados para medir a velocidade lateral do avião e sua velocidade angular de guinada, respectivamente. Com o uso destes sensores e o conhecimento de uma posição qualquer do avião, é possível descobrir sua trajetória através do Espaço de Estados, utilizando uma matriz adequada. Assim, tem-se para o sistema a seguinte matriz C, contida na Equação 1 e 2.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 3. ATUADORES

Para realizar as ações de controle, são necessários atuadores, que são essenciais para o bom funcionamento de um avião. Para o estudo do movimento lateral, são importantes os seguintes atuadores:

- **Dois atuadores para os ailerons:** Estes atuadores devem funcionar em sentidos opostos, e são responsáveis pelas manobras de rolagem. Seu controle é realizado através do manche, que quando comandado para a direita, o aileron da asa direita é defletido para cima e o aileron da asa esquerda é defletido para baixo, executando um rolamento para a direita.
- **Atuador para o leme:** O atuador para o leme controla as manobras de guinada. Seu controle é realizado através dos pedais. Ao pisar no pedal direito, sua deflexão permite tenha um movimento de guinada para a direita, e vice-versa.

No trabalho as deflexões para os ailerons e para o leme serão referidos como  $\delta a$  e  $\delta r$ , respectivamente. Dessa forma, tem-se a seguinte matriz B para os atuadores (Equação 3).

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Fy_{\delta r}}{m} \\ \frac{Mx_{\delta a}}{Ix} & \frac{Mx_{\delta r}}{Ix} \\ \frac{Mz_{\delta a}}{Iz} & \frac{Mz_{\delta r}}{Iz} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

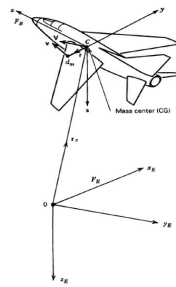
A obtenção dos termos da matriz segue a bibliografia de Nelson (1998) e será especificada na seção 4.

## 4. MODELAGEM DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

### 4.1. Modelagem Física e Hipóteses Simplificadoras

O modelo físico da aeronave é feito baseando-se nos textos de Rodrigues (2014) e Nelson (1998), que recomendam tratar o avião como um corpo rígido. Os sistemas de coordenadas do modelo tratado são, também, os mesmos indicados em Etkin (1996), e podem ser vistos na Figura 2. Cabe ressaltar que são dois sistemas de coordenadas: um solidário à aeronave e outro fixo.

Figura 2 - Sistemas de coordenadas adotados

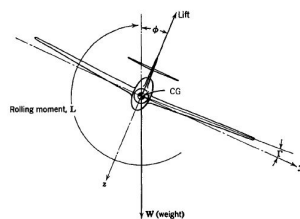


(fonte: ETKIN, 1996)

A fim de simplificar a modelagem do problema, são necessárias algumas hipóteses simplificadoras, que foram amplamente discutidas nos textos de modelagem correspondentes aos trabalhos feitos no semestre anterior. Todas as hipóteses adotadas podem ser revistas no Apêndice A.

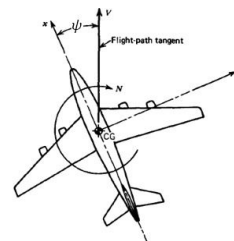
Além disso, cabe ressaltar que, como este trabalho tem como foco o estudo e controle dos movimentos laterais de um avião (representados parcialmente nas Figuras 3 e 4), não serão abordados de forma profunda outros movimentos, como a translação longitudinal, ou o movimento de arfagem, por exemplo.

Figura 3 - Indicação do ângulo de rolagem



(fonte: Etkin, 1996)

Figura 4 - Indicação do ângulo de guinada



(fonte: Etkin, 1996, modificada)

## 4.2. Modelagem Matemática

A modelagem matemática do sistema tem como finalidade a obtenção de equações e relações matemáticas que descrevem o comportamento do sistema dada a modelagem física adotada. Tais equações relacionam as chamadas entradas (parâmetros variáveis que afetam o comportamento do sistema como um todo) com as saídas (respostas de interesse de estudo cujo comportamento é dependente das entradas).

As entradas do sistema que são fornecidas são a deflexão angular dos ailerons ( $\delta a$ ) e a deflexão angular do leme ( $\delta r$ ), enquanto que as saídas são a velocidade de translação lateral ( $v$ ), a velocidade angular de rolagem ( $p$ ), a velocidade angular de guinada ( $r$ ) e o ângulo de rolagem ( $\phi$ ).

A aplicação da segunda Lei de Newton, mais especificamente a aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), resultam em equações que descrevem o sistema no tempo. O equacionamento foi realizado com base nas instruções explicitadas no capítulo 3 de Nelson (1998). Contudo, para a obtenção das equações que regem o sistema, primeiramente foram consideradas as decomposições vetoriais da velocidade (Equação 4), da velocidade angular (Equação 5) e dos momentos (Equação 6).

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (4)$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad (5)$$

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \quad (6)$$

Aplicando o Teorema do Movimento do Baricentro e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular, adicionando a força gravitacional e utilizando as decomposições presentes nas Equações 4, 5 e 6, obteve-se as Equações 7, 8 e 9.

$$M_x = I_x \dot{p} + qr(I_z - I_y) \quad (7)$$

$$M_z = I_z \dot{r} + pq(I_y - I_x) \quad (8)$$

$$F_y + mg \cos\theta \sin\phi = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (9)$$

As Equações 7, 8 e 9 referem-se a um referencial solidário ao avião. Todavia, o estudo das respostas do sistema demanda que as saídas deste sejam analisados a partir de um referencial solidário ao solo. Dessa forma, há a necessidade da transferência do sistema do primeiro referencial para o segundo, o que é possível graças às Equações 10, 11 e 12.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (11)$$

Tal que:

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Vale destacar que todo o desenvolvimento matemático que possibilitou chegar às equações anteriores foi ocultado no item 4.2. do presente relatório, mas está completo e pode ser visualizado no Apêndice B.

#### 4.3. Linearização das Equações

Para realizar a linearização, foi utilizada a hipótese de pequenos distúrbios (NELSON, 1998), em que o movimento do avião consiste em pequenos desvios na condição de voo estável. Visto isso, todas as variáveis de saída da equação possuem um ponto de referência e uma determinada perturbação em relação a esse ponto.

Aplicando-se os métodos de linearização que são exibidos e explicados no Apêndice B às equações de movimento do item anterior, obtêm-se as Equações 13, 14 e 15.

$$\left(\frac{Fy_v}{m} \cdot \Delta v - \Delta \dot{v}\right) + \frac{Fy_p}{m} \cdot \Delta p + \left(\frac{Fy_r}{m} - u_0\right) \cdot \Delta r + \frac{Fy_{\delta r}}{m} \Delta \delta r + g \cdot \cos\theta_0 \cdot \Delta\phi = 0 \quad (13)$$

$$\frac{Mx_v}{I_x} \cdot \Delta v + \left(\frac{Mx_p}{I_x} \cdot \Delta p - \Delta \dot{p}\right) + \frac{Mx_r}{I_x} \cdot \Delta r + \frac{Mx_{\delta a}}{I_x} \Delta \delta a + \frac{Mx_{\delta r}}{I_x} \Delta \delta r = 0 \quad (14)$$

$$\frac{Mz_v}{I_z} \cdot \Delta v + \frac{Mz_p}{I_z} \cdot \Delta p + \left(\frac{Mz_r}{I_z} \cdot \Delta r - \Delta \dot{r}\right) + \frac{Mz_{\delta a}}{I_z} \Delta \delta a + \frac{Mz_{\delta r}}{I_z} \Delta \delta r = 0 \quad (15)$$

Por fim, tem-se um sistema de três equações e quatro incógnitas ( $\Delta v$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta r$  e  $\Delta\phi$ ). Resta, portanto, determinar uma nova equação que torne o sistema possível. Essa equação deriva da relação dos ângulos de Euler (NELSON, 1998), e pode ser visualizada na Equação 16.

$$p_0 + \Delta p = \Delta \dot{\phi} - \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \cdot (\psi_0 + \Delta\psi) \quad (16)$$

Desenvolvendo a equação e zerando termos de acordo com simplificações adotadas, tem-se a Equação 17:

$$\Delta p = \Delta \dot{\phi} \quad (17)$$

Com isso, têm-se as quatro equações linearizadas do sistema.

#### 4.4. Espaço de Estados

Para uma resolução mais fácil do sistema de equações diferenciais, utiliza-se a notação de Espaço de Estados para o sistema estudado, como dado no formato abaixo (Equação 18).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x + D u \end{aligned} \quad (18)$$

Dessa forma, de acordo com a bibliografia, com os atuadores e sensores pré-definidos, reescrevem-se as equações para o sistema na forma matricial e, posteriormente, para a notação de Espaço de Estados. Dessa forma, obtém-se as Equações 19 e 20.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{Fy_v}{m} & \frac{Fy_p}{m} & (\frac{Fy_r}{m} - u_0) & g \cdot \cos \theta_0 \\ \frac{Mx_v}{Ix} & \frac{Mx_p}{Ix} & \frac{Mx_r}{Ix} & 0 \\ \frac{Mz_v}{Iz} & \frac{Mz_p}{Iz} & \frac{Mz_r}{Iz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Fy_{\delta r}}{m} \\ \frac{Mx_{\delta a}}{Ix} & \frac{Mx_{\delta r}}{Ix} \\ \frac{Mz_{\delta a}}{Iz} & \frac{Mz_{\delta r}}{Iz} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} \quad (20)$$

#### 4.5. Parâmetros e Coeficientes Adimensionais

A fim de estudar como um modelo específico de aeronave se comporta dada a modelagem apresentada, é necessário substituir os parâmetros e coeficientes das equações com os valores referentes ao modelo do avião. Além dos parâmetros físicos, são importantes também as condições sob as quais o avião está sujeito e alguns parâmetros adimensionais, que facilitam os cálculos de forças e momentos aplicados ao sistema pelo ar. Como o foco deste trabalho é o modelo Boeing 747, serão utilizados os dados deste modelo, os quais foram coletados de Nelson (1998). Suas propriedades são fornecidas na Tabela 3, no Apêndice C, e os coeficientes adimensionais estão presentes nas Tabelas 4 e 5.



Para o cálculo dos valores das matrizes, utilizam-se as fórmulas contidas nas Tabelas 6 e 7 no mesmo apêndice, utilizando os dados para o modelo de referência. Atribuindo valores, obtêm-se as Equações 21 e 22.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,0265 & 0 & -1 & 0,1144 \\ -0,0043 & -0,2585 & 0,0580 & 0 \\ 0,00105 & -0,0254 & -0,0631 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,4143 \\ 0,076 & 0,0115 \\ 0,0038 & -0,666 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} \quad (22)$$

#### 4.6. Matriz de Transferência

Utilizando a matriz obtida no cálculo do Espaço de Estados, é possível encontrar uma matriz de funções de transferência  $G(s)$ , a qual transforma as entradas do sistema nas saídas desejadas. Então, para tal, aplica-se a Transformada de Laplace nas equações de estado (Equações 23 e 24).

$$s.X = A.X + B.U \quad (23)$$

$$Y = C.X + D.U \quad (24)$$

E, rearranjando de modo a obter a razão  $Y/U$ , têm-se as Equações 25, 26 e 27.

$$X = (s.I - A)^{-1}.B.U \quad (25)$$

$$Y = [C (s.I - A)^{-1}.B + D]U \quad (26)$$

$$G(s) = [C (s.I - A)^{-1}.B] \quad (27)$$

Por fim, substituindo as matrizes A, B e C na Equação 27, obtêm-se a matriz de transferência (Equação 28).

$$G(s) = \begin{bmatrix} H(s)/P(s) & L(s)/P(s) \\ I(s)/P(s) & M(s)/P(s) \\ J(s)/P(s) & N(s)/P(s) \\ K(s)/P(s) & O(s)/P(s) \end{bmatrix} \quad (28)$$

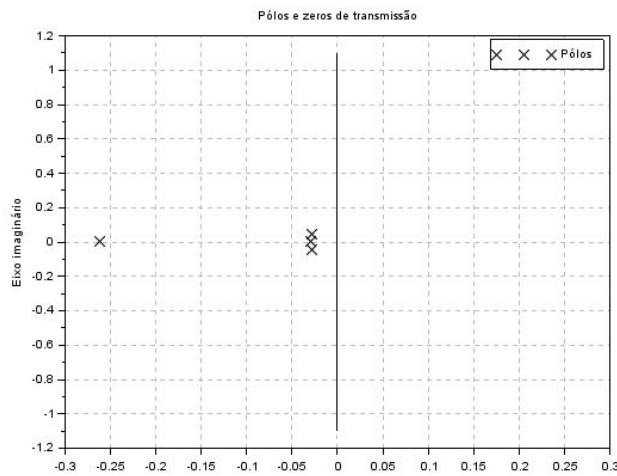
Em que os polinômios representados acima estão descritos no Apêndice D.

A multiplicação entre a matriz de transferência e a matriz de entradas, composta pelas deflexões do aileron e leme, resulta na matriz de saídas, compostas pela velocidade lateral, velocidades angulares de rolagem e guinada e ângulo de rolagem.

#### 4.7. Polos Do Sistema Em Malha Aberta

O sistema em malha aberta será tratado como nada mais que o próprio sistema do avião modelado na disciplina PME 3380. Seus polos serão os autovalores da matriz A obtida na seção 4.5. Assim, seus valores, inferidos por meio do software SciLab, são apresentados na Figura 5.

Figura 5 - Polos do sistema sobre o plano imaginário



Para encontrar o valor absoluto dos polos, será avaliada o polinômio característico do sistema, que pode ser visualizado nas Equações 29 e 30:

$$P(s) = |s.I - A| = \det(s.I - A) \quad (29)$$

$$P(s) = 0,0000237 + 0,0013412s + 0,0273880s^2 + 0,3482239s^3 + s^4 \quad (30)$$

E, assim, encontra-se os seguintes polos:

$$s_1 = -0,02915 \quad s_2 = -0,26187$$

$$s_3 = -0,028597 - 0,04785i \quad s_4 = -0,028597 + 0,04785i$$

#### 4.8. Análise de Estabilidade em Malha Aberta

A análise de estabilidade do sistema em malha aberta pode ser obtida de duas maneiras. A primeira, e mais simples delas, é analisar os polos do sistema e perceber que nenhum deles possui parte real positiva, o que se verifica nos polos acima. Na segunda, que será feita por meio da Tabela 1, é pelo método de Routh-Hurwitz.

Tabela 1 - Aplicação do critério de Routh-Hurwitz

$s^4$	1	0,0273880	0,0000237
$s^3$	0,3482239	0,0013412	0
$s^2$	0,023536	0,0000237	0
$s^1$	0,000991	0	0
$s^0$	0,0000237	0	0

A primeira entrada para esse método é a verificação de que nenhum dos coeficientes do denominador da função de transferência é negativo. Após isso, a verificação da estabilidade do sistema se dá pela verificação da ocorrência de trocas de sinais entre os termos da primeira coluna da tabela. Dado que ela não ocorreu, é possível inferir que o sistema é estável.

#### 4.9. Matriz de Transição e Matriz Relativa ao Termo Forçante

A matriz de transição é a solução da equação diferencial homogênea (com  $B.u = 0$ ). Assim, como a matriz do sistema  $A$  é conhecida, pode-se obter a matriz transição  $\Phi$  por meio da Equação 31.

$$\Phi(t) = I + A \cdot t + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) & \Phi_{14}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) & \Phi_{24}(t) \\ \Phi_{31}(t) & \Phi_{32}(t) & \Phi_{33}(t) & \Phi_{34}(t) \\ \Phi_{41}(t) & \Phi_{42}(t) & \Phi_{43}(t) & \Phi_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Os valores de cada termo da matriz de transição, bem como os termos da matriz relativa ao termo forçante, vista na sequência, serão especificados no Apêndice E.

A matriz relativa ao termo forçante representa a solução particular da equação diferencial (isto é,  $B.u \neq 0$ ) e pode ser obtida por meio da Equação 32, sendo que a sua representação é feita por  $\Gamma$ .

$$\Gamma(t) = I \cdot t + A \cdot \frac{t^2}{2!} + A^2 \cdot \frac{t^3}{3!} + A^3 \cdot \frac{t^4}{4!} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(t) & \Gamma_{12}(t) & \Gamma_{13}(t) & \Gamma_{14}(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22}(t) & \Gamma_{23}(t) & \Gamma_{24}(t) \\ \Gamma_{31}(t) & \Gamma_{32}(t) & \Gamma_{33}(t) & \Gamma_{34}(t) \\ \Gamma_{41}(t) & \Gamma_{42}(t) & \Gamma_{43}(t) & \Gamma_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

## 4.10. Simulações do Sistema em Malha Aberta

### 4.10.1. Análise no domínio do tempo

Com o espaço de estados pronto, pode-se utilizar o programa “Scilab” para simular a resposta do sistema no tempo. Por meio das funções “ode” e “csim” pode-se utilizar dois métodos distintos para simular o sistema. O primeiro resolve o sistema de equações diferenciais por meio de métodos numéricos, já o último utiliza da teoria de funções de transferência para simular o problema.

Os resultados expostos aqui são fruto do uso da função ode, sendo os resultados obtidos a partir da função csim utilizados apenas para validação. As simulações foram feitas no intervalo de tempo de 50s devido ao fato de a aeronave ter movimentos lentos por conta de seu tamanho. O código utilizado para se obter as simulações encontra-se no Apêndice I.

Será imposto entradas do tipo degrau, com início em  $t = 4,0s$  e com amplitude de  $0,01\text{ m}$  para as deflexão do aileron e do leme. Ou seja, para  $t < 4,0s$ ,  $\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 0$ . Para  $t > 4,0s$ ,  $\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 0.01$ . A simulação para tal entrada pode ser visualizada pelas Figuras 6 e 7.

Figura 6 - Gráficos das variações da velocidade  $v$  ( $\Delta v$ ) (esquerda) e da velocidade angular  $p$  ( $\Delta p$ ) (direita) para entrada em degrau em  $t=4,0s$  nas deflexões dos ailerons e do leme

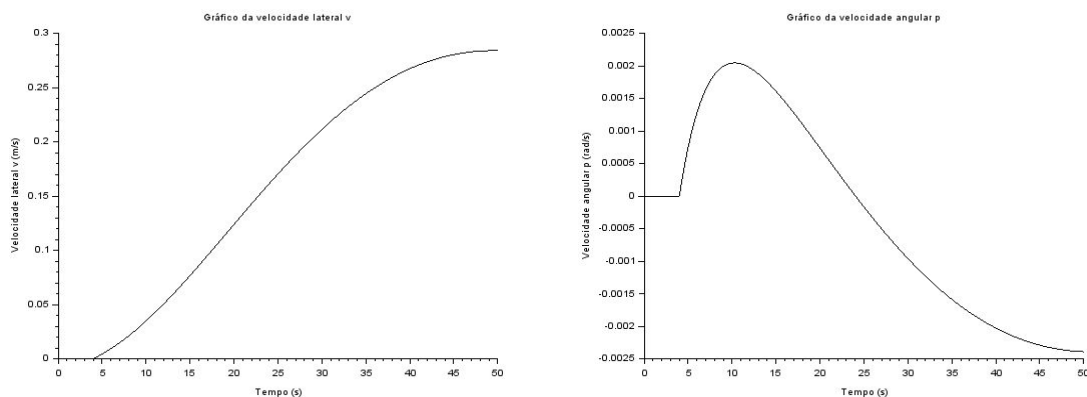
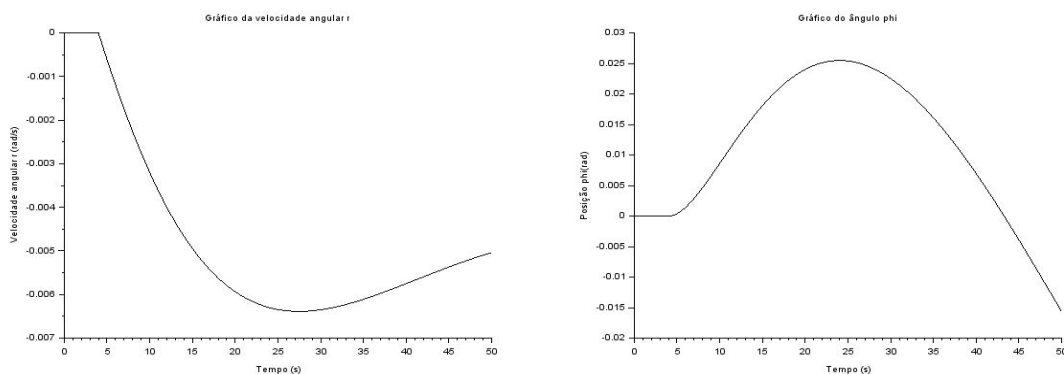


Figura 7 - Gráficos das variações da velocidade angular  $r$  ( $\Delta r$ ) (esquerda) e do ângulo de rolagem  $\phi$  ( $\Delta\phi$ ) para entrada em degrau em  $t=4,0s$  nas deflexões dos ailerons e do leme



Os resultados estão dentro do esperado, uma vez que, enquanto as entradas são nulas, o sistema permanece na posição de equilíbrio e inicia-se a perturbação no instante em que o degrau inicial. A partir desse instante, as saídas reagem de acordo com as deflexões continuamente aplicadas nos ailerons e no leme.

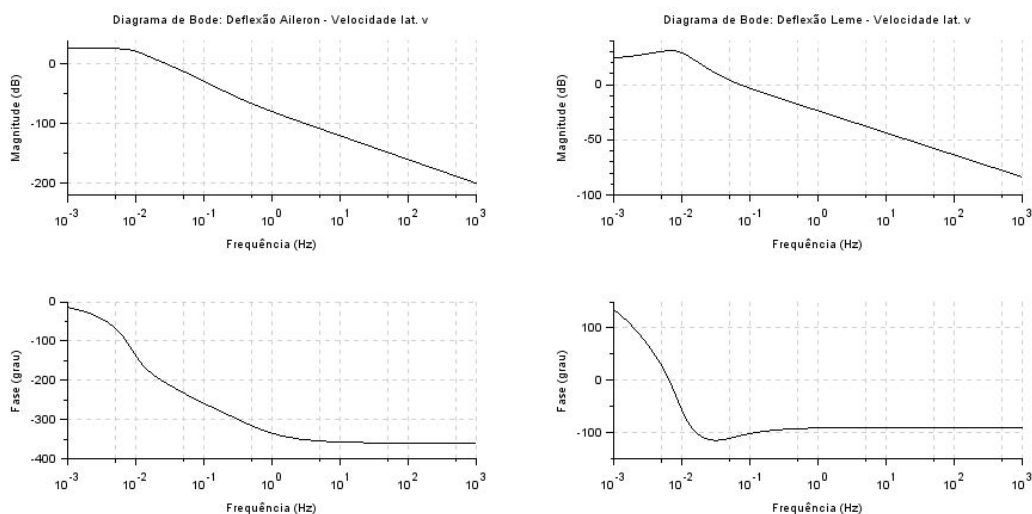
#### 4.10.2. Análise no domínio da frequência

Com o intuito de analisar o comportamento do sistema no campo das frequências, serão utilizados diagramas de Bode. Sua função é representar a resposta de cada saída do sistema à uma entrada harmônica em cada uma das suas possíveis entradas. No caso do problema modelado, têm-se 2 entradas e 4 saídas, resultando num total de 8 diagramas de Bode, e cada um deles é desenvolvido a partir da função de transferência em malha aberta que relaciona a entrada com a saída.

Os resultados a seguir refletem a resposta das componentes do movimento lateral de uma aeronave modelo Boeing 747 às entradas de deflexão no aileron e no leme. Os diagramas de Bode das velocidade  $v$ ,  $p$ ,  $r$  e do ângulo  $\phi$  são representados pelas Figuras 8, 9, 10 e 11, respectivamente.

#### Velocidade $v$

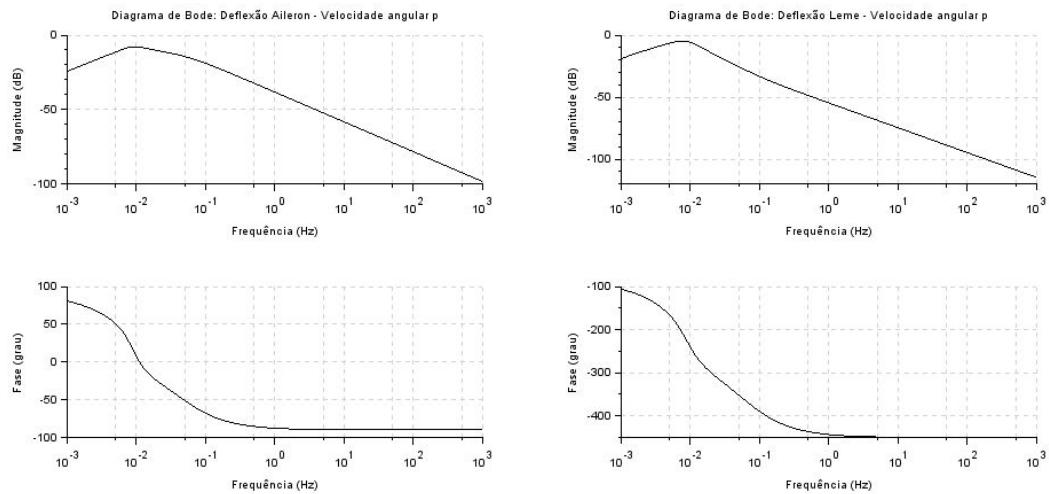
Figura 8 - Diagrama de Bode para velocidade  $v$  e deflexão do aileron (esquerda) e do leme (direita)



Os diagramas de ganho encontrados para a saída de velocidade indicam que o efeito de uma deflexão no leme para a variação da velocidade lateral  $v$  é superior que o efeito de uma deflexão no aileron. Verificou-se, também, que, para as duas entradas, há ganho em baixas frequências, sendo que, a partir de frequências próximas de 0,01 Hz, ocorre um decaimento de cerca de 40 dB por década no caso da entrada de aileron e de 20 dB por década para a entrada de leme.

### Velocidade angular $p$

Figura 9 - Diagrama de Bode para velocidade angular  $p$  e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita)

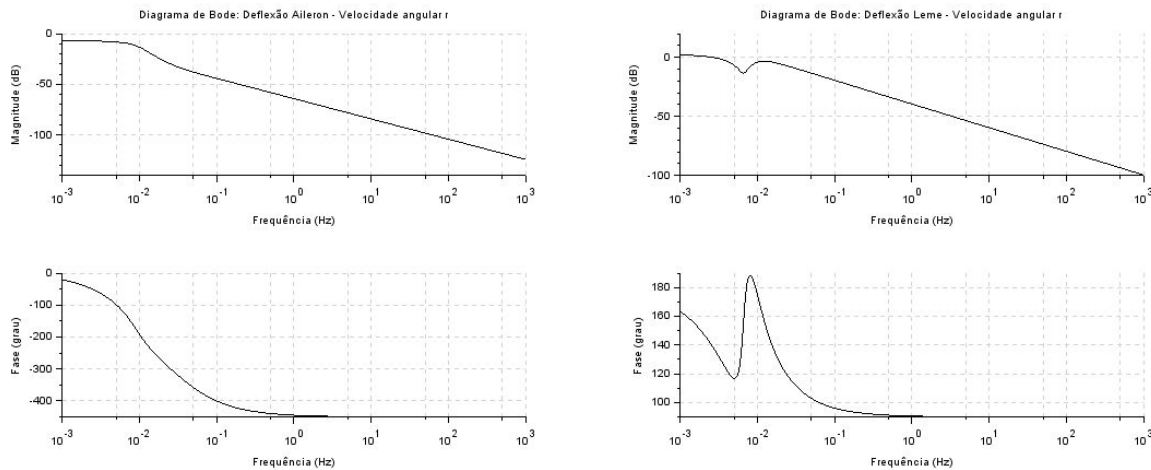


Analisando os diagramas de Bode para a velocidade angular  $p$  (velocidade de rolagem) novamente verificaram-se respostas cujo ganho tende a decrescer conforme se aumenta a frequência da entrada. A atenuação após a frequência de 0,01 Hz é observada novamente, porém agora ambas as entradas trazem um decaimento de 20 dB por década após essa frequência.

Pelo diagrama de fases é visível que no caso da entrada de leme o atraso cresce conforme se aumenta a frequência da entrada. Já para a entrada de aileron, a fase se estabiliza em cerca de  $-90^\circ$  após a frequência de corte, indicando atraso em altas frequências.

## Velocidade angular $r$

Figura 10 - Diagrama de Bode para velocidade angular  $r$  e deflexão no aileron (esquerda) e no leme (direita)

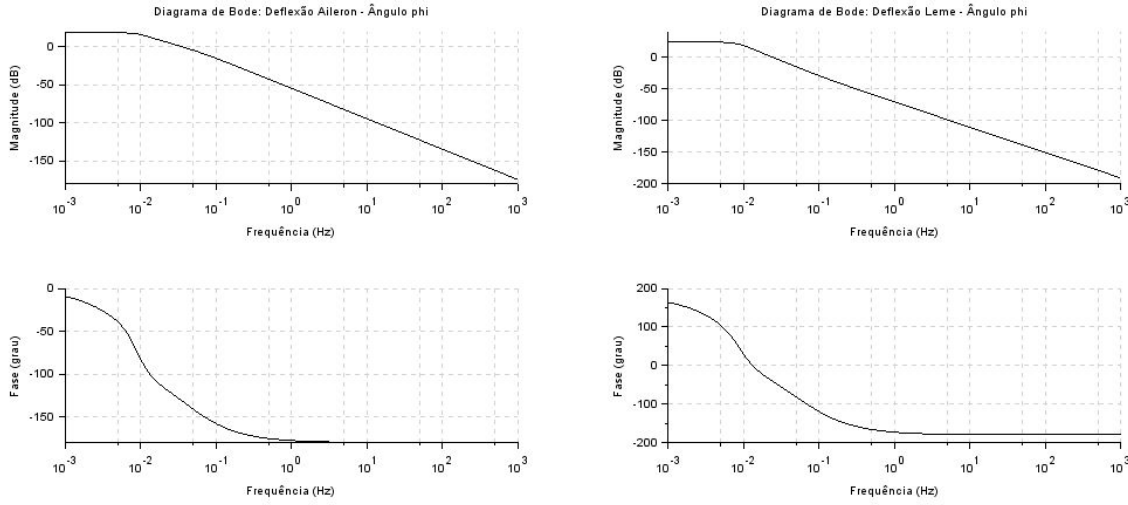


Para a saída de velocidade angular  $r$  (velocidade de guinada) verificou-se, novamente, atenuação do ganho em altas frequências, muito notável a partir da frequência de 0,01 Hz, próxima do pico de ganho para as duas entradas. Como esperado, o sistema responde melhor à entradas de baixa frequência. Novamente os decaimentos em alta frequência se estabilizaram em cerca de 20 dB por década. Vale notar também que os ganhos para entrada de leme são levemente superiores aos ganhos observados para entrada de aileron.

Para a entrada do aileron, verifica-se que há um aumento de atraso a medida que sua frequência cresce. Além disso, para a entrada do leme sua fase possui um pico de pouco mais de  $180^\circ$  na frequência de 0,01 Hz e para altas frequências sua fase se estabiliza em  $90^\circ$ .

## Ângulo de rolagem $\phi$

Figura 11 - Diagrama de Bode para ângulo de rolagem e deflexão no aileron (esquerda) e no leme(direita)



Como em todos os outros casos, foi verificado ganho em baixas frequências com atenuação de 40 dB por década em altas frequências, e o ganho para os ailerons é maior quando comparado com o ganho do leme. Verifica-se que as fases se tornam constantes a partir da frequência de 1 Hz.

Vale ressaltar que não há picos de fase nos diagramas, o que evidencia a ausência de ressonância do sistema.

De forma geral, os Diagramas de Bode evidenciam bem o comportamento do sistema em determinadas faixas de frequência, com o aileron sendo mais influente nos movimentos de rolagem e o leme nos movimentos de guinada. Esse destaque é tênue, devido a grande dimensão do avião e consequente alto valor de inércia, o que impossibilita ganhos muito grandes.

### 4.11. Distúrbios

Para a seção em questão, serão simuladas algumas situações em que as condições de voo não são ideais, havendo frequentemente vento, rajadas e turbulências. Assim, é necessário modificar as equações de movimento com termos das velocidades inerciais ( $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ ), velocidades angulares inerciais ( $\Delta p$ ,  $\Delta q$ ,  $\Delta r$ ), velocidades de rajada ( $u_g$ ,  $v_g$ ,  $w_g$ ) e velocidades angulares de rajada ( $p_g$ ,  $q_g$ ,  $r_g$ ). Tais termos podem ser visualizados pelas Equações 33 a 38.

$$\Delta u_a = \Delta u - u_g \quad (33)$$

$$\Delta v_a = \Delta v - v_g \quad (34)$$

$$\Delta w_a = \Delta w - w_g \quad (35)$$



$$\Delta p_a = \Delta p - p_g \quad (36)$$

$$\Delta q_a = \Delta q - q_g \quad (37)$$

$$\Delta r_a = \Delta r - r_g \quad (38)$$

Dessa forma, retomando as contas do espaço de estados para a equação do movimento lateral de um avião, substituindo as velocidades pelos novos termos e considerando  $\xi$  como vetor de perturbações da rajada, têm-se as Equações 39 e 40.

$$\dot{x} = A.x + B.u + B'.\xi \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta p} \\ \dot{\Delta r} \\ \dot{\Delta \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fy_v}{m} & \frac{Fy_p}{m} & (\frac{Fy_r}{m} - u_0) & g \cdot \cos \theta_0 \\ \frac{Mx_v}{Ix} & \frac{Mx_p}{Ix} & \frac{Mx_r}{Ix} & 0 \\ \frac{Mz_v}{Iz} & \frac{Mz_p}{Iz} & \frac{Mz_r}{Iz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Fy_{\delta r}}{m} \\ \frac{Mx_{\delta a}}{Ix} & \frac{Mx_{\delta r}}{Ix} \\ \frac{Mz_{\delta a}}{Iz} & \frac{Mz_{\delta r}}{Iz} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{Fy_v}{m} & -\frac{Fy_p}{m} & 0 \\ -\frac{Mx_v}{Ix} & -\frac{Mx_p}{Ix} & -\frac{Mx_r}{Ix} \\ -\frac{Mz_v}{Iz} & -\frac{Mz_p}{Iz} & -\frac{Mz_r}{Iz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_g \\ p_g \\ r_g \end{bmatrix} \quad (40)$$

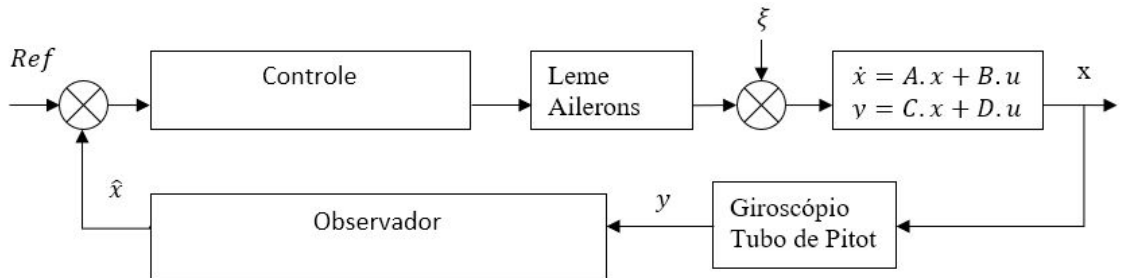
E atribuindo os valores para o avião estudado, tem-se a Equação 41.

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta v} \\ \dot{\Delta p} \\ \dot{\Delta r} \\ \dot{\Delta \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0265 & 0 & -1 & 0,1144 \\ -0,0043 & -0,2585 & 0,0580 & 0 \\ 0,00105 & -0,0254 & -0,0631 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,4143 \\ 0,076 & 0,0115 \\ 0,0038 & -0,666 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta a \\ \Delta \delta r \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0,0265 & 0 & 0 \\ 0,0043 & 0,2585 & -0,0580 \\ -0,00105 & 0,0254 & 0,0631 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_g \\ p_g \\ r_g \end{bmatrix} \quad (41)$$

Dessa forma, atribuídos os sensores, atuadores e distúrbios ao sistema, é possível fechar a malha, de modo a controlar o sistema da forma necessária, o que será abordado na seção 5. O diagrama de blocos para a malha fechada está apresentada na Figura 12.

Figura 12 - Diagrama de blocos para o sistema



## 5. CONTROLE MODERNO

Até aqui, o trabalho feito foi, em grande parte, uma reedição daquilo estudado em modelagem, com a adição de algumas pequenas mudanças. Todavia, o foco principal deste trabalho está na teoria de Controle Moderno. Essa teoria surgiu em meados da década de 1960, em função da necessidade de projetar sistemas de controle mais complexos e precisos. O advento da era espacial foi a principal propulsora dessa mudança, estimulando a engenharia de controle à buscar soluções para controlar sistemas multivariáveis em situações com restrição de peso, como por exemplo satélites e sondas espaciais. Com o intuito de aprofundar os conhecimentos, o método no domínio do tempo será o objeto de estudo para o controle do Boeing 747.

### 5.1. Análise de Controlabilidade e Observabilidade

Existem dois testes simples que permitem verificar se um sistema linear é controlável e observável. Tais testes são a base para que se projete o sistema de atuação e o sistema de observação. Assim, se o sistema for não controlável, o sistema de atuação tem que ser modificado (matriz B). Sem isso não se projeta o controlador. Já se o sistema for não observável, o sistema de observação tem que ser modificado (matriz C). Sem isso, o controlador não funcionará.

Para o teste de controlabilidade, escreve-se a seguinte matriz (Equação 42).

$$C = [B \mid A \cdot B \mid A^2 \cdot B \mid A^3 \cdot B] \quad (42)$$

Os valores explícitos desta são apresentados no Apêndice F, juntamente com os valores da matriz de observabilidade discutida em sequência.

Para constatar controlabilidade, a matriz C da Equação 42 necessita apresentar posto (rank) n, onde n é a ordem do sistema. A matriz C (nxnm) será de posto n se dela se puder extrair uma matriz (nxn) de determinante não nulo.

Já para o teste de observabilidade, escreve-se a matriz (Equação 43).

$$O = [C^T \mid A^T \cdot C^T \mid (A^2)^T \cdot C^T \mid (A^3)^T \cdot C^T] \quad (43)$$

De maneira análoga, o sistema será observável se a matriz O também for de posto n. A matriz O é de dimensão (nxnr), onde r é o número de sensores ou de saídas.

Note que no caso tratado n é igual a quatro, ou seja, a ordem do sistema, já discutido em seções anteriores. Também, pode-se afirmar que B e C escolhidos foram desenvolvidos de tal forma que ambos passaram pelos respectivos teste. Além disso, os testes foram realizados com auxílio da ferramenta computacional SciLab e os códigos podem ser verificados no Apêndice I.

## 5.2. Controle por Alocação de Polos

O método de alocação de polos torna possível escolher o comportamento do sistema de controle pela escolha das raízes da equação característica em malha fechada. Desse modo, pode-se obter a matriz de ganho  $K$ , sabendo que  $u = -K.x$ .

Para o sistema de controle do Boeing 747 estudado, escolheram-se os polos de acordo com a teoria de qualidade de voo apresentada no Apêndice G. Como na análise feita, determinou-se que o para a raiz de rolagem o valor deveria ser menor que  $-0,7$ . Dessa forma, pode-se escolher para esse polo o valor de  $-0,8$  e ainda ter relativa segurança.

Já para as raízes de “Dutch Roll”, a frequência natural  $\omega_n$  mínima é de  $0,4$  rad/s, o coeficiente  $\zeta$  mínimo de  $0,19$  e o valor mínimo da multiplicação de ambos de  $0,35$  rad/s, o que pode ser conferido no Apêndice G. Escolhendo a frequência de  $0,5$  rad/s, pode-se ter  $\zeta = 0,7$  e fica-se dentro da especificação. Dessa forma, polinômio característico de 2 ordem do modo “Dutch Roll” pode ser escrito por:  $\lambda^2 + 2.\omega.\zeta.\lambda + \omega^2 = 0$ . Substituindo valores e calculando os zeros, chega-se ao seguinte par de raízes complexas conjugadas:  $-0,35 - 0,35707i$  e  $-0,35 + 0,35707i$ .

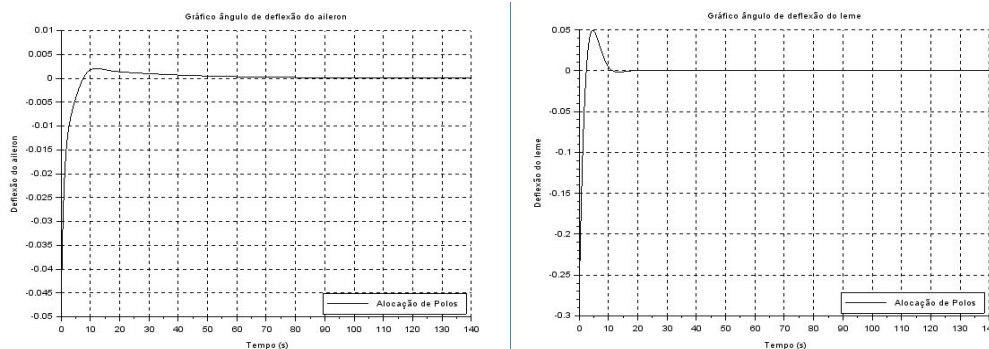
Finalmente, como não há uma restrição para a raiz de espiral, utilizou-se a referência encontrada para controle de alta performance fornecido de um artigo científico da NASA (Smetum, 1972) de  $-0,0346$ . Assim tem-se os quatro polos a serem alocados através do *software Scilab*.

Realizando a alocação chega-se à seguinte matriz de controle  $K$  (Equação 44).

$$K = \begin{bmatrix} 0,4801967 & 7,1693373 & 3,8188348 & 0,4540873 \\ 2,73062155 & 1,1818542 & 7,8766759 & 1,339517 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Uma vez a matriz  $K$  definida é possível simular a resposta do sistema de controle. É necessário analisar essa resposta, pois tratando de um sistema real, há um limite físico para a deflexão das superfícies de controle. Tal variável está disponível nos gráficos da Figura 13.

Figura 13 - Deflexão das superfícies leme e aileron - Alocação de Polos



Como é possível notar, as deflexões são bem pequenas, logo, é possível afirmar que o sistema de controle pode ser construído e apresenta uma resposta rápida a alterações.

### 5.3. Controle Linear Quadrático

O controle pelo método linear quadrático (LQR) se baseia em achar a lei de controle que minimiza a o Índice de Desempenho Quadrático (Função Objetivo), que é utilizado para otimizar o controlador e é mostrado por meio da Equação 45.

$$J = \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T P u) dt \quad (45)$$

Dessa forma, deve-se definir as matrizes Q e P que minimizem o Índice de Desempenho Quadrático. Para isso, testou-se vários valores para tais matrizes, porém, atentando-se também para que haja certa penalidade em relação à energia gasta pelo sistema de controle, ou seja, para que este economize energia. Tal economia é extremamente importante, considerando que a disponibilidade de energia em um avião é muito limitada. Dessa forma, escolheu-se as matrizes Q e P considerando que os coeficientes desta devam ser maiores do que os daquela. Assim, as matrizes Q e P escolhidas podem ser visualizadas nas Equações 46 e 47.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

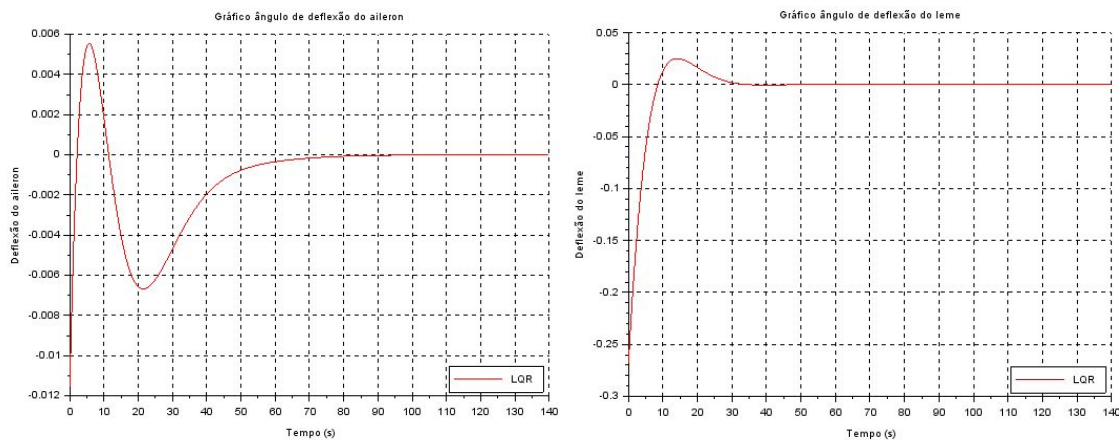
$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Utilizando a Equação Diferencial de Riccati (Equação 48), é possível calcular a matriz de ganho em malha fechada por meio da Equação 49. Após a obtenção de tal matriz, foi possível simular o sistema, obtendo-se a Figura 14.

$$R.A + A^T.R + Q - R.B.P^{-1}.B^T.R = 0 \quad (48)$$

$$K = P^{-1}.B^T.R = \begin{bmatrix} 0,0116 & 1,1632 & 0,1981 & 0,3524 \\ 0,2681 & 0,1287 & -1,1944 & 0,0886 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Figura 14 - Deflexão das superfícies leme e aileron - LQR

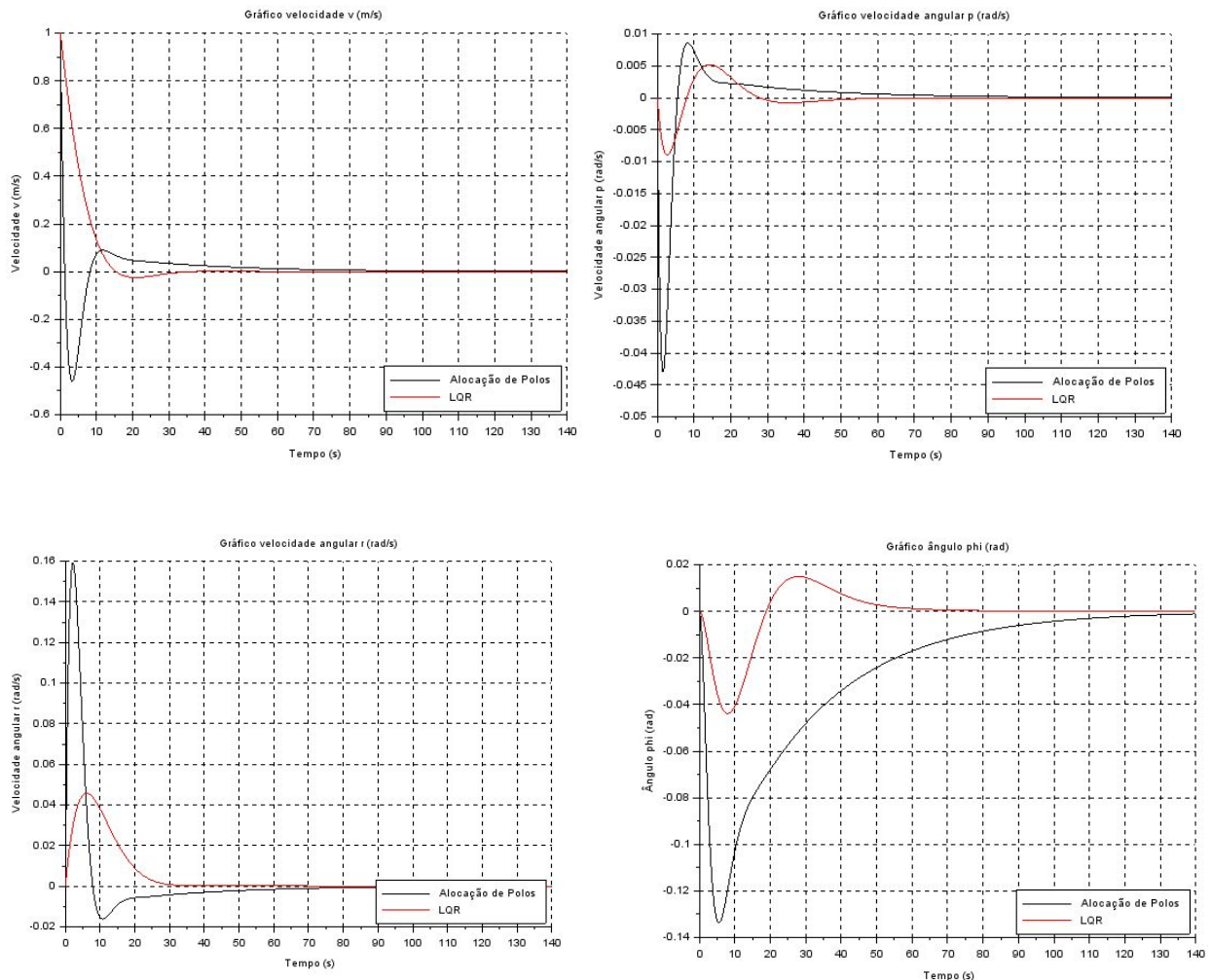


De forma análoga ao controle por alocação de polos, as deflexões são bem pequenas. Logo, esse sistema de controle também pode ser construído e também apresenta uma resposta rápida a alterações.

#### 5.4. Comparação de Controladores

Realizando as simulações dos controladores por alocação de polos e por LQR, foi possível plotar através da ferramenta gráfica do *SciLab* as respostas para cada caso, que podem ser observadas na Figura 15. Em tal figura, a linha de cor preta refere-se às respostas do sistema de controle por alocação de polos, enquanto que linha de cor vermelha representa as respostas do controlador obtido pelo método LQR.

Figura 15 - Resposta dos controladores por LQR e Alocação de Polos para as variáveis de estado (a) velocidade  $v$  (esquerda superior), (b) velocidade  $p$  (direita superior), (c) velocidade  $r$  (esquerda inferior), (d) ângulo  $\phi$  (direita inferior)



Com base nos gráficos desenvolvidos, pode-se construir a Tabela 2 comparando as características de cada sistema de controle.

Tabela 2 - Características das respostas dos controladores

	Overshoot		Tempo de Acomodação	
	Alocação de Polos	LQR	Alocação de Polos	LQR
Velocidade V(m/s)	0,46	0,025	45	25
Velocidade Angular p (rad/s)	0,043	0,009	50	60
Velocidade Angular r (rad/s)	0,016	0,044	50	30
Ângulo Phi (rad)	0,134	0,044	115	65

Analisando os valores da tabela, pode-se constatar que o controlador do método LQR apresenta valores menores de *overshoot* que aquele construído por alocação de polos. Tal característica pode ser considerada um vantagem desse sistema de controle, visto que para o Boeing 747 ao qual se deseja controlar um menor overshoot é vantajoso. Ainda analisando a tabela, pode-se notar que nenhum dos tempos de acomodação apresentou vantagem na maioria dos casos, apesar de o tempo de acomodação para o ângulo phi ser bem maior para alocação de polos.

### 5.5. Alocação de Polos dos Observadores

A escolha dos polos do observador deve ser feita de tal forma que a resposta do sistema de observação seja mais rápida que a do sistema de controle, isso é, a medida do erro da planta deve tender a zero mais rapidamente que a própria medida. Para que isso ocorra, segundo a teoria de controle estudada, basta que os polos do observador estejam mais à esquerda no plano imaginário em relação aos polos do sistema controlado.

Para que isso ocorresse, como todos os polos do sistema eram negativos, apenas tomou-se o produto desses por 2, de maneira semelhante a exercícios de aplicação resolvidos em PME - 3381. Logo os polos escolhidos foram: [-1,6; -0.7 + 0.71414i; -0.7 - 0.71414i; -0,0692].

Com esses polos pode-se chegar a matriz de ganhos do observador,  $K_o$  (Equação 50).

$$K_o = \begin{bmatrix} -7,4291273 & 21,348303 \\ 3,1576034 & -9,6719054 \\ -3,4444517 & 10,150103 \\ 9,4094271 & -25,7155663 \end{bmatrix} \quad (50)$$

### 5.6. LQR dos Observadores

De forma análoga à seção 5.3 do presente relatório, deve-se definir novamente as matrizes  $Q_o$  e  $P_o$  que minimizem o Índice de Desempenho Quadrático, uma vez que isso culmina em uma resposta mais rápida do sistema de observação. Contudo, deve-se atentar também para escolher tais matrizes de forma com que os polos do observador estejam mais à esquerda dos do sistema, a fim de que a

resposta do sistema de observação seja mais rápida do que a do sistema de controle. Assim, as matrizes  $Q_o$  e  $P_o$  escolhidas podem ser visualizadas nas Equações 51 e 52.

$$Q_o = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$P_o = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \quad (52)$$

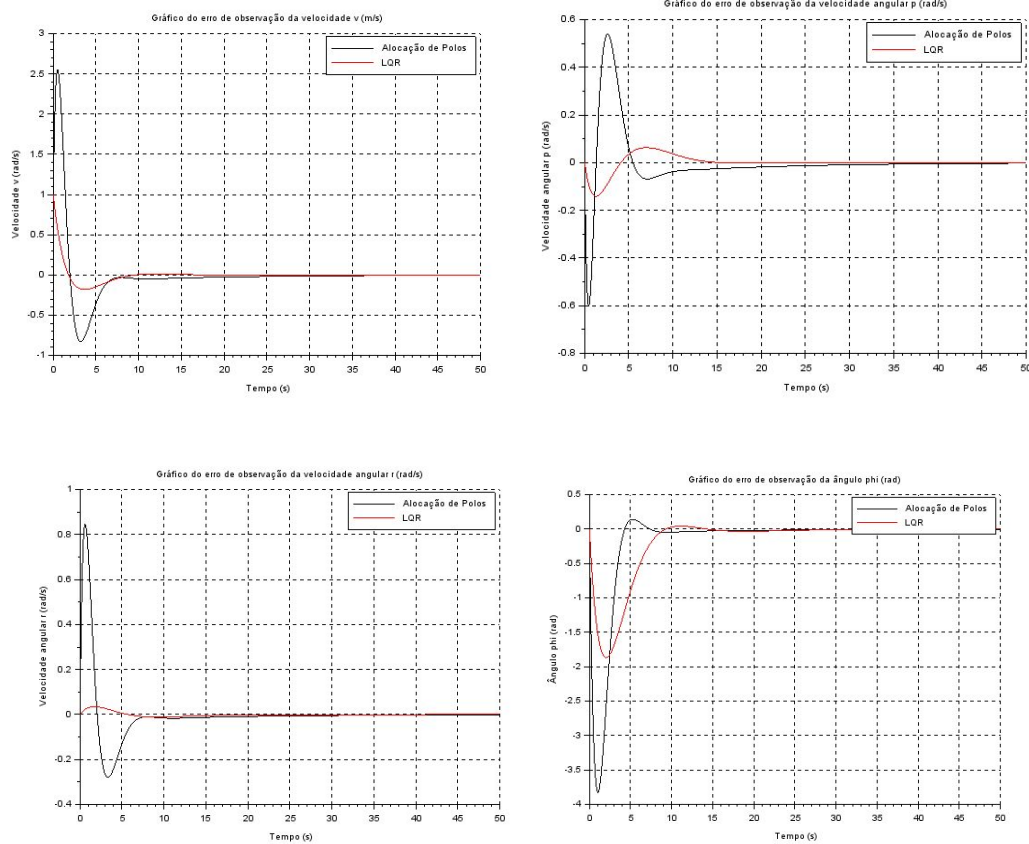
Utilizando novamente a Equação Diferencial de Riccati, foi possível calcular a matriz de ganho para o observador, a qual pode ser visualizada por meio da Equação 53.

$$K_o = R_o \cdot C^T \cdot P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0,9812 & -0,050 \\ 0,2624 & -0,0410 \\ -0,050 & 0,0632 \\ 2,3695 & 0,1052 \end{bmatrix} \quad (53)$$

### 5.7. Comparação de Observadores

Com a matriz de ganho de observador para ambos os métodos, é possível avaliar o erro de observação para cada método, o que é explicitado nos gráficos da Figura 16.

Figura 16 - Comparação de erro de observação pelos métodos LQR e Alocação de Polos (a) velocidade  $v$  (esquerda superior), (b) velocidade  $p$  (direita superior), (c) velocidade  $r$  (esquerda inferior), (d) ângulo  $\phi$  (direita inferior)



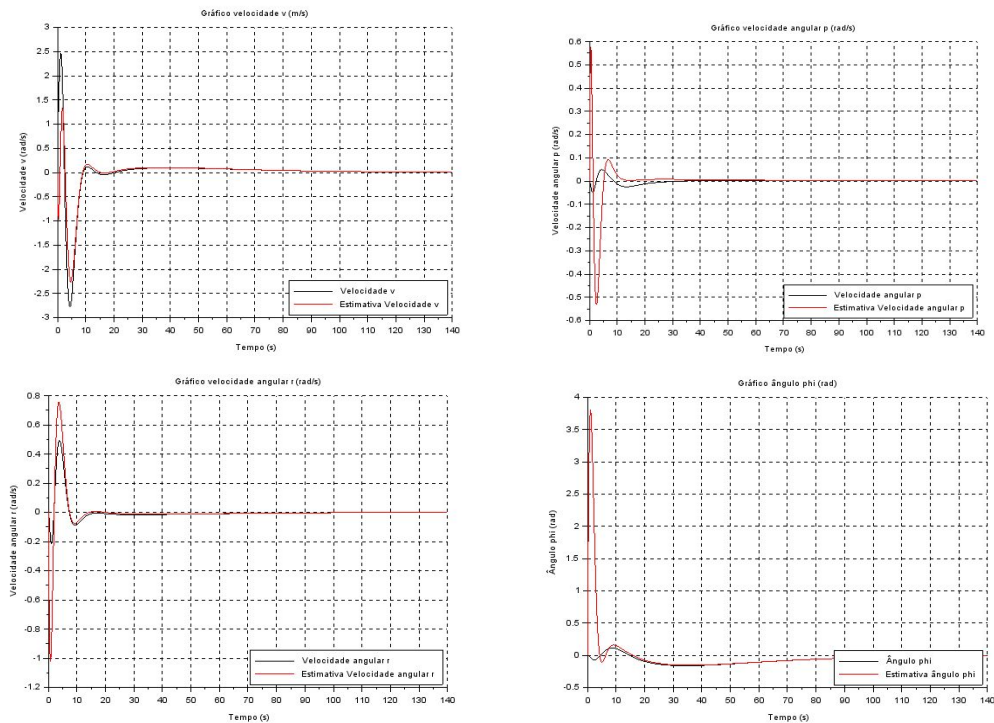


Observa-se que, com exceção da velocidade  $r$ , os erros para o método de controle LQR possuem menores *overshoots* e convergem para o erro nulo em períodos de tempo menores quando comparado com os erros de observação pelo método de alocação de polos.

### 5.8. Princípio da Separação

Na Figura 17, estão apresentadas as comparações entre a estimativa feita pelo observador e o valor real das variáveis de estado, a partir das matrizes de ganho obtidas a partir do método de alocação dos polos.

Figura 17 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por alocação de polos (a) velocidade  $v$  (esquerda superior), (b) velocidade  $p$  (direita superior), (c) velocidade  $r$  (esquerda inferior), (d) ângulo  $\phi$  (direita inferior)



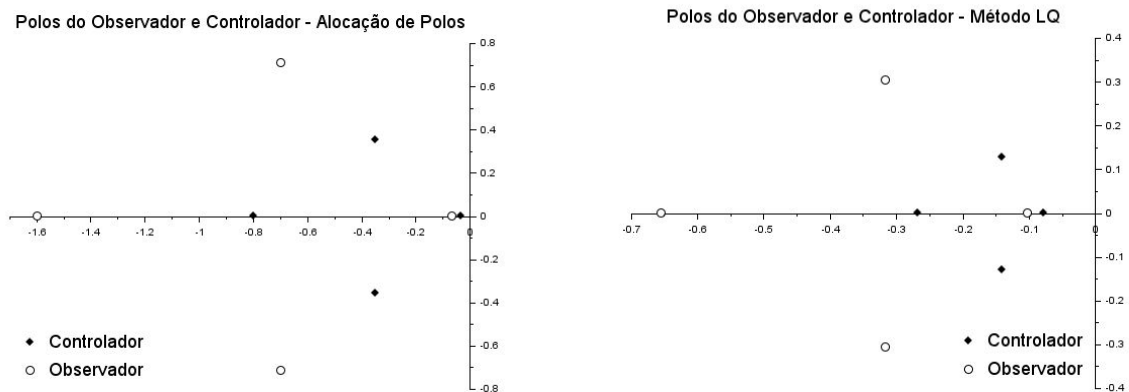
O intuito do método do Princípio da Separação é fazer com que a estimativa do espaço de estado convirja para o real valor do sistema, fato que é comprovado pelos gráficos acima. Verifica-se que as trajetórias estimadas são razoáveis, com o porém de que para as velocidades angulares e ângulo de rolagem  $\phi$  há um overshoot de sentido contrário nos instantes iniciais. Nota-se diferenças entre as respostas para sistemas controlados sem e com observador. Isto ocorre devido ao fato de os erros de observação afetarem diretamente nas variáveis de espaço de estado do sistema. Além disso, verifica-se que as variáveis que melhor são estimadas são as que possuem sensores para sua medição, sendo que a velocidade angular  $p$  e o ângulo  $\phi$  possuem estimativas piores. Os gráficos para o Princípio de Separação com as matrizes de ganho do método de controle LQR estão disponíveis na Figura 22 do Apêndice H.



### 5.9. Análise de Estabilidade dos Sistemas Controlados

A Figura 18 apresenta os polos de controladores e observadores para os dois sistemas de controle construídos.

Figura 18 - Comparação de polos do observador e do controlador (a) por alocação de polos por LQR (b)



Pela posição dos polos no plano imaginário é possível perceber que todos eles se encontram à esquerda do eixo imaginário, ou seja, todos os polos têm parte real negativa. A partir disso, é possível afirmar que ambos os sistemas em malha fechada são estáveis. Isso também pode ser visto analisando os gráficos obtidos nas figuras anteriores de resposta do sistema, onde todas as simulações tendiam a zero depois de decorrido um certo tempo.

Além disso, a partir da observação dos polos no plano imaginário, é possível observar claramente que a resposta do sistema de observação é mais rápida do que a do sistema de controle. Isso é, sem dúvidas, uma característica desejável pois, dessa forma, o sistema reconhece um erro de medição mais rapidamente que o sistema de atuação realiza o controle.

### 5.10. Acompanhamento de Referência

Além de buscar trazer o sistema para a posição de equilíbrio por meio do uso de controladores, pode-se utilizar artifícios para fazer com que as saídas de interesse sigam referências desejadas, sendo elas fixa ou variáveis, mantendo a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios.

Para isso, utilizamos o controle em malha fechada que leva em consideração tanto o erro com relação ao ponto de equilíbrio, quanto o erro em relação à referência estabelecida. Para isso, estabeleceremos uma referência descrita pela seguinte expressão:

$$x_r \quad (54)$$

$$\dot{x}_r = A_r x_r \quad (55)$$

Dessa forma, buscamos controlar o sistema por meio de transformação da entrada  $u$  em uma função do erro em relação ao equilíbrio e do erro em relação à referência:

$$u = -K(x - x_r) - K_e x_r \quad (56)$$

Com isso, conseguimos criar uma entrada de controle capaz de rejeitar os distúrbios por meio da matriz  $K$ , que pode ser determinada por meio do método da alocação de polos ou do regulador quadrático linear, e também capaz de seguir a referência, devido à matriz  $K_e$ , função das matrizes compositoras do espaço de estados e também das matrizes que determinam os distúrbios e referências.

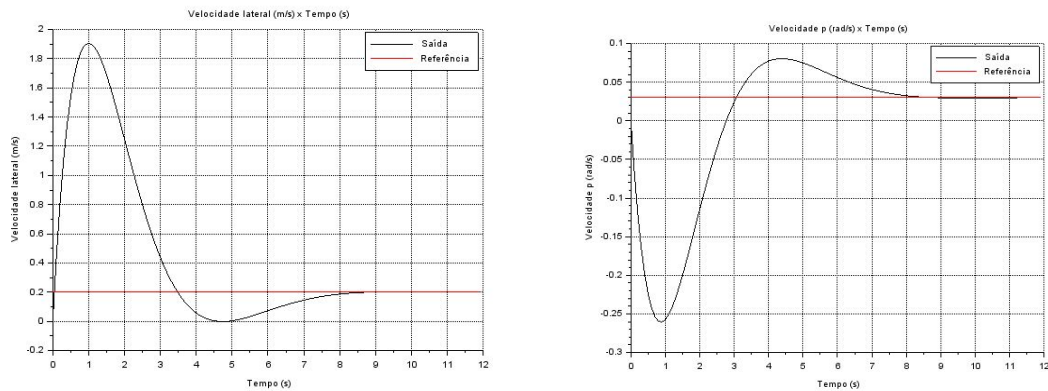
Nas simulações realizadas para o seguidor, foi utilizada a matriz  $K$  alocada para os polos já citados na seção sobre alocação de polos.

Na primeira situação é solicitado que se siga uma referência constante para os estados observados:

$$x_{1,r} = 0,2 \text{ m/s} \quad (57)$$

$$x_{3,r} = 0,03 \text{ rad/s} \quad (58)$$

Figura 19 - Velocidade (a) lateral (esquerda), (b) de guinada (direita) seguindo de referência fixa

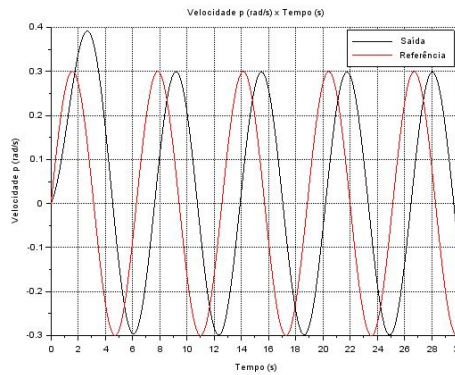


Verifica-se que o sistema é capaz de seguir as referências com tempo de acomodação de cerca de 8,4 s para a velocidade lateral e de 8,2 s para a velocidade de guinada. Além disso, observa-se a presença de um sobressinal nas saídas devido à dinâmica do sistema. Esses sobressinais atingem valores de até quase 10 vezes da referência pretendida.

Em um segundo caso, buscamos fazer com que a velocidade de guinada siga uma referência senoidal, com resultado mostrado na Figura 20:

$$x_{3,r} = 0,3 \text{sen}(t) \text{ rad/s} \quad (59)$$

Figura 20 - Resposta da saída da velocidade de guinada seguindo referência senoidal

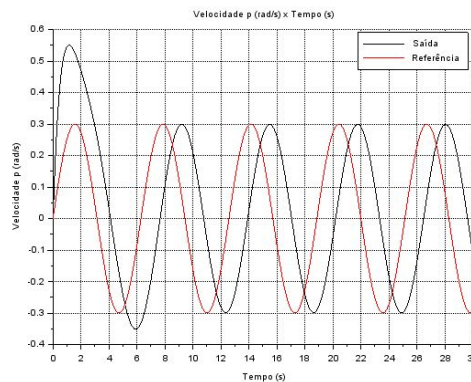


Percebe-se que a saída segue a referência com um atraso de cerca de 1,3 s. No início, há um sobressinal de cerca de 30% devido à dinâmica do sistema.

Já para o terceiro caso, mostrado na Figura 21, além de introduzir a referência variável, é adicionado um distúrbio correspondente à uma rajada de vento rotacional na direção de rolagem da aeronave com intensidade de 20 rad/s:

$$x_{w,2} = 20 \text{ rad/s} \quad (60)$$

Figura 21 - Velocidade de guinada seguindo referência senoidal com distúrbio



Como esperado, há diferença entre as resposta no início, caracterizado por um aumento do sobressinal, porém os resultados são semelhantes em regime permanente. Isso se dá pelo fato de o sistema ter que se adequar ao distúrbio. O efeito do distúrbio é pequeno, de forma que o tempo de atraso entre a saída e a referência se mantém praticamente igual ao caso sem a presença do distúrbio.

Fica visível, então, que o seguidor de referência variável é capaz de acompanhar as referências quando fixas, quando variáveis e também na situação onde são adicionados distúrbios no sistema, mantendo a capacidade de rejeição de distúrbios implementada por meio do método da alocação de polos e do regulador quadrático linear.

## 6. CONCLUSÃO

O trabalho em questão retomou os principais tópicos realizados para a modelagem do sistema de movimentos laterais de um avião Boeing 747, revisando conceitos de modelagem física e matemática, espaço de estados e simulações no domínio do tempo e da frequência, além de conceitos de estabilidade e comportamento geral do sistema em malha aberta.

Partindo para o controle moderno do sistema, foram desenvolvidos sistemas de controle e observação por alocação de polos e por controle LQR. De forma geral, os resultados obtidos por controle LQR foram mais satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos por Alocação de polos, apresentando menores valores de *overshoot* e tempo de alocação. Quanto aos observadores, o mesmo padrão foi seguido, visto que os erros apresentados pelo observador obtido por controle LQR foram menores quando comparado com os erros obtidos por alocação de polos, resultando em estimações de trajetória melhores, comprovados pelo método da separação.

Em seguida, foram apresentados seguidores de referências constante e variável, cujos comportamentos também foram verificados quando submetidos a perturbações externas na atmosfera. Todos seguidores funcionaram de maneira eficiente, porém, para o estudo do caso em questão, não há aplicação prática para o seguidor de referência constante, sendo o de referência variável o modelo mais importante para o problema. Além disso, os seguidores dissipam perturbações de forma bastante eficiente.

Por fim, para os próximos passos da disciplina, será aplicada para o sistema em questão a teoria de Controle Clássico, como controladores do tipo PID, o que permitirá realizar comparações entre resultados e aplicar o controlador de melhor performance ao sistema.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- NELSON, Robert C., “Flight Stability and Automatic Control”, 2ª edição, McGraw-Hill, 1998
- ETKIN, B.; REID, L. D., “Dynamics of flight: Stability and Control” , 3ª edição, John Wiley & Sons, 1996
- RODRIGUES, Luiz E. M. J., “Fundamentos da Engenharia Aeronáutica com Aplicações ao Projeto SAE-AeroDesign”, 1ª edição, 2014
- ROSKAM, J., “Airplane flight dynamics and automatic flight controls” , DARcorporation, 1998
- CAUGHEY, David A., “Introduction to Aircraft Stability and Control Course Notes for M&AE 5070”, Cornell University, 2011
- ANDERSON, John D., Jr, “Introduction to Flight” , 3ª edição, McGraw-Hill, 1989
- OGATA, K., “Engenharia de Controle Moderno”, 3ª edição, Editora LTC, 1998
- DIEDERICH, Franklin W., “The Response of an Airplane to Random Atmospheric Disturbances”, California Institute of Technology of Pasadena, 1957.
- WHITE, Roland J., “Investigation of Lateral Dynamic Stability in the XB-47 Airplane”, Boeing Airplane Company, 1950.
- PETERSEN, Forrest S., et. al., “Lateral-Directional Control Characteristics of the X-15 Airplane”, Flight Research Center, 1965.
- SMETUM, Frederick O., et. al., “Riding And Handling Qualities Of Light Aircraft - A Review And Analysis”, Nasa Contractor Report, North Carolina State University, 1975.

## APÊNDICE A - Conjunto de Hipóteses Simplificadoras

A seguir estão discretizadas todas as hipóteses simplificadoras adotadas.

São elas:

- A perda de massa ao longo do tempo devido à queima de combustível é desconsiderada. Logo, a massa da aeronave é mantida como constante ao longo do tempo.
- Sendo tratado como um corpo rígido, o avião e suas superfícies de controle não sofrem deformações ou distorções causadas pela aplicação de esforços.
- Como mencionado na Seção 1.2, as deflexões das superfícies de controle de interesse (em especial, os ailerons e o leme) são representadas como forças e momentos aplicadas à aeronave.
- As forças peso e de propulsão (respectivamente,  $m \cdot g$  e  $T$ ) estão aplicadas no centro de gravidade da aeronave.
- As forças de arrasto e sustentação (respectivamente,  $D$  e  $L$ ) estão aplicadas no centro aerodinâmico da aeronave.
- Supondo simetria e distribuição uniforme de massa, é possível considerar que os produtos de inércia do avião são nulos.
- É também possível considerar que ambos os centros aerodinâmico e de gravidade estão contidos no plano  $Oxz$  do referencial solidário à aeronave.
- A propulsão gerada pelo conjunto de turbinas do avião tem componente de atuação restrito ao eixo  $x$ , e pode criar um binário apenas na direção  $y$ , sendo essas direções referentes ao referencial solidário à aeronave.
- Como os gradientes de vento tem pouco impacto nos movimentos de curta duração (NELSON, 1998), para efeitos de simplificação, é considerado que o ar tem velocidade nula para o referencial fixo.

## APÊNDICE B - Desenvolvimento da Modelagem Matemática

No presente apêndice, será apresentado todo os passos do desenvolvimento matemático necessário para se chegar às equações de movimento do avião, assim como o processo de linearização destas.

Primeiramente, para a modelagem matemática foram considerados o Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) (Equações 61 e 62, respectivamente).

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} + m(\vec{V} \wedge \vec{\omega}) \quad (61)$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{H}) \quad (62)$$

Além disso, foram consideradas as decomposições da força, do momento e das velocidades, o que pode ser observado nas Equações 63, 64, 65 e 66.

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (63)$$

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \quad (64)$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (65)$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad (66)$$

Substituindo as Equações 63, 64, 65 e 66 nas 61 e 62 e desenvolvendo as expressões, tem-se as Equações 67, 68, 69, 70, 71 e 72 que representam relações matemáticas de resultantes de forças e momentos.

$$X = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (67)$$

$$Y = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (68)$$

$$Z = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (69)$$

$$M_x = I_x\dot{p} + qr(I_z - I_y) \quad (70)$$

$$M_y = I_y\dot{q} + rp(I_x - I_z) \quad (71)$$

$$M_z = I_z\dot{r} + pq(I_y - I_x) \quad (72)$$

Tais forças e momentos são definidos pela interação do sistema com o meio externo, que age sobre o mesmo. São estas: a propulsão através das turbinas, a ação do campo gravitacional e a interação da aeronave com o escoamento ao seu redor (forças de arrasto e de sustentação).

Dividindo as forças que agem no sistema sobre cada eixo do referencial solidário ao corpo, chegam-se às seguintes divisões:

Sobre o eixo  $x$ , atuam uma parcela da força peso, a força de propulsão, a força de arrasto longitudinal, e um momento gerado pela deflexão das superfícies de controle.

Sobre o eixo  $y$  atuam somente uma parcela da força peso, e uma resultante de forças gerada pela deflexão das superfícies de controle.

Sobre o eixo  $z$  atuam uma parcela da força peso, a força de sustentação e um momento gerado pela deflexão das superfícies de controle.

Cabe ressaltar que tais esforços serão considerados aplicados aos centros de gravidade e aerodinâmicos da aeronave, dadas suas respectivas naturezas. Além disso, considerando que em regime de cruzeiro a velocidade do avião se mantém constante, a força de arrasto longitudinal possui mesma magnitude e é oposta à propulsão do avião.

Além disso, serão considerados os seguintes ângulos:

- Ângulo de rolagem:  $\phi$
- Ângulo de arfagem:  $\theta$
- Ângulo de guinada:  $\psi$

Aplicando as parcelas da força peso desenvolvidas nas Equações 67 a 69, tem-se as Equações 73, 74 e 75.

$$-mg \sin\theta = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (73)$$

$$F_y + mg \cos\theta \sin\phi = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (74)$$

$$mg \cos\theta \cos\phi - L = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (75)$$



Contudo, as equações anteriores foram definidas para um referencial solidário ao avião. Para descrever o posicionamento e a orientação da aeronave no espaço com relação ao solo, será necessário transferir as relações encontradas para um referencial fixo adotado.

Para tanto, é utilizado o conceito dos Ângulos de Euler para realizar tal transferência de referencial. Os três ângulos que definem tal correspondência entre os referenciais são os ângulos de rolagem, arfagem e guinada ( $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , respectivamente).

Segundo Nelson (1998), a matriz de mudança de base que relaciona as velocidades lineares dos dois referenciais é dada pela Equação 76.

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (76)$$

Dessa forma, tem-se a Equação 77, que relaciona as velocidades dos dois referenciais, e a Equação 78, que relaciona as velocidades angulares com a taxa de variação dos ângulos de Euler.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (78)$$

Foi realizado o equacionamento do comportamento dinâmico do avião como um todo, com equações para o movimento longitudinal e lateral da aeronave. Contudo o escopo do trabalho abrange somente o comportamento lateral do modelo, sendo as Equações 70, 72 e 74 as que descrevem tal comportamento. Portanto, são essas as que serão utilizadas para a realização de simulações e análises.

Todavia, as equações que serão utilizadas para estudar o sistema não são lineares, o que dificulta a simulação deste. Dessa forma, é necessário o processo de linearização e, para isso, foi utilizada a hipótese de pequenos distúrbios Nelson (1998). Portanto, todas as variáveis de saída da equação possuem um ponto de referência e uma determinada perturbação em relação a esse ponto. Além disso, considerou-se que as perturbações são simétricas. Adotando tais condições, têm-se as Equações 79 a 88.

$$u = u_0 + \Delta u \quad (79)$$

$$v = v_0 + \Delta v \quad (80)$$

$$w = w_0 + \Delta w \quad (81)$$

$$p = p_0 + \Delta p \quad (82)$$

$$q = q_0 + \Delta q \quad (83)$$

$$r = r_0 + \Delta r \quad (84)$$

$$Mx = Mx_0 + \Delta Mx \quad (85)$$

$$Mz = Mz_0 + \Delta Mz \quad (86)$$

$$Fy = Fy_0 + \Delta Fy \quad (87)$$

$$\delta = \delta_0 + \Delta \delta \quad (88)$$

A variável  $\delta$  consiste na deflexão da respectiva superfície de controle, ela podendo ser o aileron ou o leme.

A fim de obter as relações matemáticas que modelam o comportamento do sistema entorno de tais condições e perturbações, substituem-se os termos das Equações 79 a 88 nas Equações 70, 72 e 74. Dessa forma, tem-se, as Equações 89, 90 e 91.

$$Mx_0 + \Delta Mx = I_x \frac{d}{dt} (p_0 + \Delta p) + (r_0 + \Delta r) \cdot (q_0 + \Delta q) \cdot (I_z - I_y) \quad (89)$$

$$Mz_0 + \Delta Mz = (q_0 + \Delta q) \cdot (p_0 + \Delta p) \cdot (I_y - I_x) \quad (90)$$

$$\begin{aligned} Fy_0 + \Delta Fy - mg \cos(\theta_0 + \Delta \theta) \sin(\phi_0 + \Delta \phi) \\ = m \left( (v_0 + \Delta v) + (r_0 + \Delta r) \cdot (u_0 + \Delta u) - (p_0 + \Delta p) \cdot (w_0 + \Delta w) \right) \end{aligned} \quad (91)$$

Seguindo ainda as orientações de Nelson (1998) e Etkin (1996), considera-se que os movimentos do sistema serão simétricos. Logo, as variáveis expressas terão valor inicial nulo. Dessa forma, tem-se a Equação 92.

$$v_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = Fy_0 = Mx_0 = Mz_0 = 0 \quad (92)$$

Ainda, o eixo x será alinhado inicialmente de forma que fique paralelo à velocidade da aeronave e, assim, a velocidade em z ( $\omega_0$ ) seja nula. A fim de simplificar as relações expressas acima, pode-se adotar as relações trigonométricas mostradas nas Equações 93, 94, 95 e 96 para variáveis arbitrárias  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\text{sen}(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \text{sen}\alpha_0 + \text{cos}\alpha_0.\Delta\alpha \quad (93)$$

$$\text{cos}(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \text{cos}\alpha_0 + \text{sen}\alpha_0.\Delta\alpha \quad (94)$$

$$\Delta\alpha.\Delta\beta = 0 \quad (95)$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \dot{\Delta\alpha} \quad (96)$$

As equações das forças e momentos podem ser expressas com séries de Taylor em função de cada variável de perturbação. Dessa forma, é possível escrever as Equações 97, 98 e 99.

$$\Delta F_y = \frac{\partial F_y}{\partial v}.\Delta v + \frac{\partial F_y}{\partial p}.\Delta p + \frac{\partial F_y}{\partial r}.\Delta r + \frac{\partial F_y}{\partial \delta r}.\Delta \delta r \quad (97)$$

$$\Delta M_x = \frac{\partial M_x}{\partial v}.\Delta v + \frac{\partial M_x}{\partial p}.\Delta p + \frac{\partial M_x}{\partial r}.\Delta r + \frac{\partial M_x}{\partial \delta a}.\Delta \delta a + \frac{\partial M_x}{\partial \delta r}.\Delta \delta r \quad (98)$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial v}.\Delta v + \frac{\partial M_z}{\partial p}.\Delta p + \frac{\partial M_z}{\partial r}.\Delta r + \frac{\partial M_z}{\partial \delta a}.\Delta \delta a + \frac{\partial M_z}{\partial \delta r}.\Delta \delta r \quad (99)$$

Além disso, será adotada uma nova notação a fim de não poluir muito as equações:

$$A_a = \frac{\partial A}{\partial a}$$

Substituindo as Equações 97, 98 e 99 respectivamente nas 89, 90 e 91, zerando os termos indicados em 92 e utilizando as simplificações explicitadas nas Equações 93, 94, 95 e 96 chega-se nas Equações 100, 101 e 102.

$$\left(\frac{F_{yv}}{m}.\Delta v - \Delta \dot{v}\right) + \frac{F_{yp}}{m}.\Delta p + \left(\frac{F_{yr}}{m} - u_0\right).\Delta r + \frac{F_{y\delta r}}{m}.\Delta \delta r + g.\text{cos}\theta_0.\Delta \phi = 0 \quad (100)$$

$$\frac{M_{xv}}{I_x}.\Delta v + \left(\frac{M_{xp}}{I_x}.\Delta p - \Delta \dot{p}\right) + \frac{M_{xr}}{I_x}.\Delta r + \frac{M_{x\delta a}}{I_x}.\Delta \delta a + \frac{M_{x\delta r}}{I_x}.\Delta \delta r = 0 \quad (101)$$

$$\frac{M_{zv}}{I_z}.\Delta v + \frac{M_{zp}}{I_z}.\Delta p + \left(\frac{M_{zr}}{I_z}.\Delta r - \Delta \dot{r}\right) + \frac{M_{z\delta a}}{I_z}.\Delta \delta a + \frac{M_{z\delta r}}{I_z}.\Delta \delta r = 0 \quad (102)$$

## APÊNDICE C - Parâmetros Dimensionais

Tabela 3- Parâmetros dimensionais e operacionais do BOEING 747

Densidade do ar em nível do mar	$\rho = 3,639 \times 10^{-1} \text{ kg/m}^3$
Velocidade de Voo	$V = 85,75 \text{ m/s}$
Massa total do avião	$m = 288756,90 \text{ kg}$
Força peso	$m.g = 2832705,19 \text{ N}$
Área alar	$S = 510,97 \text{ m}^2$
Envergadura	$b = 59,64 \text{ m}$
Corda média	$c = 8,32 \text{ m}$
Momento de inércia em x	$I_x = 24,68 \times 10^6 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia em y	$I_y = 44,88 \times 10^6 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia em z	$I_z = 67,38 \times 10^6 \text{ kg.m}^2$
Produto de inércia em xz	$I_{xz} = 0 \text{ kg.m}^2$

Admite-se que o avião estará sujeito a perturbações ao longo de sua viagem em altitude e velocidades longitudinais de cruzeiro. Os momentos e produto de inércia são calculados em relação ao sistema de coordenadas solidário ao avião, sendo que o produto de inércia, por efeitos de simplificação, foi considerado como nulo.

Tabela 4 - Coeficientes longitudinais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar

$C_L$	$C_D$	$C_{L_\alpha}$	$C_{D_\alpha}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{L_{\ddot{\alpha}}}$	$C_{m_{\ddot{\alpha}}}$	$C_{L_q}$	$C_{m_q}$	$C_{L_M}$	$C_{D_M}$	$C_{m_M}$	$C_{L_{\delta_e}}$	$C_{m_{\delta_e}}$
1.11	0.102	5,70	0,66	-1,26	6,7	-3,2	5,4	-20,8	-0,81	0,0	0,27	0,338	-1,34

Tabela 5- Coeficientes laterais BOEING 747 - Mach = 0,25 - nível do mar

$C_{y_\beta}$	$C_{l_\beta}$	$C_{n_\beta}$	$C_{l_p}$	$C_{n_p}$	$C_{l_r}$	$C_{n_r}$	$C_{l_{\delta_\alpha}}$	$C_{n_{\delta_\alpha}}$	$C_{y_{\delta_r}}$	$C_{l_{\delta_r}}$	$C_{n_{\delta_r}}$
-0,96	-0,221	0,15	-0,45	-0,121	0,101	-0,30	0,0461	0,0064	0,175	0,007	-0,109

Sendo  $Q = \frac{1}{2}\rho u_0^2 = 1337,9 \text{ N/m}^2$ , podem ser utilizadas as equações presentes nas Tabelas 6 e 7 abaixo para o cálculo dos parâmetros do problema.

Tabela 6- Derivadas parciais em relação às velocidades

$Fy_v$	$Fy_p$	$Fy_r$	$Mx_v$	$Mx_p$	$Mx_r$	$Mz_v$	$Mz_p$	$Mz_r$
$\frac{Q \cdot S \cdot C_{y\beta}}{u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b \cdot C_{yp}}{2 \cdot u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b \cdot C_{yr}}{2 \cdot u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b \cdot C_{i\beta}}{u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b^2 \cdot C_{ip}}{2 \cdot u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b^2 \cdot C_{ir}}{2 \cdot u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b \cdot C_{n\beta}}{u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b^2 \cdot C_{np}}{u_0}$	$\frac{Q \cdot S \cdot b^2 \cdot C_{nr}}{2 \cdot u_0}$

Tabela 7 - Derivadas parciais em relação a deflexões das superfícies de controle

$Fy_{\delta r}$	$Mx_{\delta a}$	$Mx_{\delta r}$	$Mz_{\delta a}$	$Mz_{\delta r}$
$Q \cdot S \cdot C_{y\delta r}$	$Q \cdot S \cdot b \cdot C_{l\delta a}$	$Q \cdot S \cdot b \cdot C_{l\delta r}$	$Q \cdot S \cdot b \cdot C_{n\delta a}$	$Q \cdot S \cdot b \cdot C_{n\delta r}$

## APÊNDICE D - Funções de Transferência

Tabela 8- Termos da matriz de transferência

$H(s) = 0,0005759 + 0,0096525s - 0.0038725s^2$
$I(s) = 0.0002305s + 0.0070525s^2 + 0.0761732s^3$
$J(s) = 0.0000111 - 0.0000249s - 0.0008355s^2 + 0.0038725s^3$
$K(s) = 0.0002305 + 0.0070525s + 0.0761732s^2$
$L(s) = -0.0003544 + 0.0260485s + 0.1992438s^2 + 0.4143037s^3$
$M(s) = 0.0004367s - 0.0045555s^2 + 0.0115664s^3$
$N(s) = -0.0000307 - 0.0003015s - 0.0186592s^2 - 0.0659543s^3$
$O(s) = -0.0004367 - 0.0045555s + 0.0115664s^2$

## APÊNDICE E - Matrizes de Transição e de Termo Forçante

A seguir são apresentadas as matrizes de transição (Equação 103) e de termo forçante (Equação 120), assim como os seus componentes (Equações 104 a 119 e 121 a 129), utilizadas na seção 4.9 do presente documento.

$$\Phi(t) = I + A \cdot t + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + A^3 \cdot \frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) & \Phi_{14}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) & \Phi_{24}(t) \\ \Phi_{31}(t) & \Phi_{32}(t) & \Phi_{33}(t) & \Phi_{34}(t) \\ \Phi_{41}(t) & \Phi_{42}(t) & \Phi_{43}(t) & \Phi_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$\Phi_{11}(t) = 1 - 0,0265t - 0,0002239t^2 - 0,000081t^3 \quad (104)$$

$$\Phi_{21}(t) = -0,0043t + 0,0006461t^2 - 0,0000553t^3 \quad (105)$$

$$\Phi_{31}(t) = 0,00115t + 0,0000031t^2 - 0,0000056t^3 \quad (106)$$

$$\Phi_{41}(t) = -0,00215t^2 + 0,0002154t^3 \quad (107)$$

$$\Phi_{12}(t) = 0,0699t^2 - 0,0069076t^3 \quad (108)$$

$$\Phi_{22}(t) = 1 - 0,2585t + 0,0326745t^2 - 0,0028367t^3 \quad (109)$$

$$\Phi_{32}(t) = -0,0254t + 0,0040843t^2 - 0,0003358t^3 \quad (110)$$

$$\Phi_{42}(t) = 1t - 0,12925t^2 + 0,0108915t^3 \quad (111)$$

$$\Phi_{13}(t) = -1t + 0,0448t^2 + 0,0004837t^3 \quad (112)$$

$$\Phi_{23}(t) = 0,058t - 0,0071764t^2 + 0,0005673t^3 \quad (113)$$

$$\Phi_{33}(t) = 1 - 0,0631t + 0,0006792t^2 + 0,0000636t^3 \quad (114)$$

$$\Phi_{43}(t) = 0,029t^2 - 0,0023921t^3 \quad (115)$$

$$\Phi_{14}(t) = 0,1144t - 0,0015158t^2 - 0,0000085t^3 \quad (116)$$

$$\Phi_{24}(t) = -0,000246 + 0,0000246t^3 \quad (117)$$

$$\Phi_{34}(t) = 0,0000658t^2 + 0,0000001t^3 \quad (118)$$

$$\Phi_{44}(t) = 1 - 0,000082t^3 \quad (119)$$

$$\Gamma(t) = I \cdot t + A \cdot \frac{t^2}{2!} + A^2 \cdot \frac{t^3}{3!} + A^3 \cdot \frac{t^4}{4!} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(t) & \Gamma_{12}(t) & \Gamma_{13}(t) & \Gamma_{14}(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22}(t) & \Gamma_{23}(t) & \Gamma_{24}(t) \\ \Gamma_{31}(t) & \Gamma_{32}(t) & \Gamma_{33}(t) & \Gamma_{34}(t) \\ \Gamma_{41}(t) & \Gamma_{42}(t) & \Gamma_{43}(t) & \Gamma_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (120)$$

$$\Gamma_{11}(t) = 1t - 0,01325t^2 - 0,0000746t^3 - 0,0000203t^4 \quad (121)$$

$$\Gamma_{21}(t) = -0,00215t^2 + 0,0002154t^3 - 0,0000138t^4 \quad (122)$$

$$\Gamma_{31}(t) = 0,000575t^2 + 0,000001t^3 - 0,0000014t^4 \quad (123)$$

$$\Gamma_{41}(t) = -0,0007167t^3 + 0,0000538t^4 \quad (124)$$

$$\Gamma_{12}(t) = 0,0233 - 0,0017269t^4 \quad (125)$$

$$\Gamma_{22}(t) = 1t - 0,12925t^2 + 0,0108915t^3 - 0,0007092t^4 \quad (126)$$

$$\Gamma_{32}(t) = -0,0127t^2 + 0,0013614t^3 - 0,0000839t^4 \quad (127)$$

$$\Gamma_{42}(t) = 0,5t^2 - 0,0430833t^3 + 0,0027229t^4 \quad (128)$$

$$\Gamma_{13}(t) = -0,5t^2 + 0,0149333t^3 + 0,0001209t^4 \quad (129)$$

$$\Gamma_{23}(t) = 0,029t^2 - 0,0023921t^3 + 0,0001418t^4 \quad (130)$$

$$\Gamma_{33}(t) = 1t - 0,03155t^2 + 0,0002264t^3 + 0,0000159t^4 \quad (131)$$

$$\Gamma_{43}(t) = 0,0096667t^3 - 0,000598t^4 \quad (132)$$

$$\Gamma_{14}(t) = 0,0572t^2 - 0,0005053t^3 - 0,0000021t^4 \quad (133)$$

$$\Gamma_{24}(t) = -0,000082t^3 + 0,0000062t^4 \quad (134)$$

$$\Gamma_{34}(t) = 0,0000219t^3 \quad (135)$$

$$\Gamma_{44}(t) = 1t - 0,0000205t^4 \quad (136)$$



## APÊNDICE F - Matrizes de Controlabilidade e Observabilidade

Nas Equações 137 e 138, são apresentadas respectivamente as matrizes de controlabilidade e observabilidade do sistema. A matriz de controlabilidade foi transposta devido ao seu tamanho.

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0,0761732 & 0,0038725 & 0 \\ 0,4143037 & 0,0115664 & -0,0659543 & 0 \\ -0,0038725 & -0,0194728 & -0,002184 & 0,0761732 \\ 0,0549734 & -0,0085832 & 0,0043077 & 0,0115664 \\ 0,0110011 & 0,0049252 & 0,0006296 & -0,0194728 \\ -0,0044415 & 0,0022354 & 0,0000048 & -0,0085832 \\ -0,0031489 & -0,0012839 & -0,0001535 & 0,0049252 \\ -0,000869 & -0,0005589 & -0,0000619 & 0,0022354 \end{bmatrix} \quad (137)$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,0265044 & 0 & -1 & 0,1144023 \\ 0,0010585 & -0,0254624 & -0,0631299 & 0 \\ -0,000356 & 0,1398647 & 0,0896343 & -0,0030322 \\ 0,0000136 & 0,0081917 & 0,0014491 & 0,0001211 \\ -0,0004913 & -0,041482 & 0,002815 & -0,0000407 \\ -0,0000337 & -0,0020341 & 0,0003704 & 0,0000016 \end{bmatrix} \quad (138)$$

## APÊNDICE G - Exigências de Qualidade de Voo

O presente apêndice irá tratar das exigências de qualidade de voo, pois, além da exigência da estabilidade dinâmica do avião, há também a necessidade de o avião apresentar características aceitáveis pelo piloto que irá pilotar o avião. Essas características são definidas como de “Qualidade de Voos de Aviões Pilotados” e são apresentadas na especificação militar norte-americana MIL-F-8785C, de 1980. Apesar de não serem mais oficiais, ainda se apresentam como uma boa referência para análise. As exigências feitas dependem da categoria do avião, do voo e do piloto e são expostas nas Tabelas 9, 10 e 11 abaixo.

Tabela 9 - Sobrecarga do piloto, especificação MIL-F-8785C

<b>Sobrecarga do Piloto</b>	
Nível 1	Qualidades de voo claramente adequadas para a fase de voo da missão.
Nível 2	Qualidades de voo adequadas para realizar a fase de voo da missão, mas com algum aumento na carga de trabalho piloto ou degradação na eficácia da missão.
Nível 3	Qualidades de voo tais que o avião pode ser controlado com segurança, mas piloto sofre sobrecarga ou a eficácia da missão é inadequada. As fases de voo da Categoria A podem ser terminadas com segurança e a categoria de vôo B e C podem ser concluídas.

(fonte: , Especificação MIL-F-8785C)

Tabela 10 - Classificação do avião, especificação MIL-F-8785C

<b>Classificação do Avião</b>	
I	Aviões leves e pequenos, como utilidade leve, instrutor primário e luz de observação de embarcações
II	Aviões de manobrabilidade de peso médio, baixo a médio, como serviços pesados ou busca e salvamento, transporte leve ou médio, carga ou navio-tanque, reconhecimento, bombardeiro tático e ataque pesado.
III	Aviões grandes, pesados, de baixa a média manobrabilidade, como transporte pesado, carga, navio-tanque ou bombardeiro pesado
IV	Aviões de alta manobrabilidade, como caça ou interceptor, ataque, reconhecimento tático ou observação

(fonte: , Especificação MIL-F-8785C)

Tabela 11 - Categoria de voo

<b>Categoria do Voo</b>	
A	Fase de voo não terminal que requer manobras rápidas, rastreamento de precisão ou controle preciso do trajeto de vôo
B	Fases de voo não-terminais que são normalmente realizadas usando manobras graduais e sem rastreamento de precisão, embora o controle preciso da trajetória de voo possa ser necessário.
C	As fases terminais do vôo são normalmente realizadas usando manobras graduais e geralmente requerem um controle preciso do trajeto de vôo.

(fonte: , Especificação MIL-F-8785C)

O avião analisado neste relatório é um Boeing 747, que certamente não se enquadra nas categorias de aviões militares. Todavia, estudos que relacionam as categorias já foram realizados e, segundo Roskam (1998), ele se encontra na classificação III. Como se está estudando o avião em

velocidade de cruzeiro, pode-se afirmar que a categoria pode ser estimada como Categoria A e a sobrecarga do piloto considerada foi nível 1. A Tabela 12 foi usada como referência para classificação do Boeing 747, além de trazer outros exemplos de uso da especificação para aviões civis.

Tabela 12 - Definição de classes de aviões

<b>MIL-F-8785C</b>	<b>Examples</b>	<b>Civilian Equivalent</b>	<b>Examples</b>
<b>Class I Small, light airplanes such as:</b> * Light utility * Primary trainer * Light observation	* Cessna T-41 * Beech T-34C * Rockwell OV-10A	Very Light Aircraft (VLA) and FAR 23 category airplanes	* Cessna 210 * Piper Tomahawk * Edgeley Optica
<b>Class II Medium weight, low-to-medium maneuverability airplanes such as:</b> * Heavy utility / search and rescue * Light or medium transport / cargo / tanker * Early warning / electronic counter-measures / airborne command, control or communications relay * Anti-submarine * Assault transport * Reconnaissance * Tactical Bomber * Heavy Attack * Trainer for Class II	* Fairchild C-26A/B * Fairchild C-123 * Grumman E-2C * Boeing E-3A * Lockheed S-3A * Lockheed C-130 * Fairchild OA-10 * Douglas B-60 * Grumman A-6 * Beech T-1A	FAR 25 category airplanes	* Boeing 737, * Airbus A 320 * McDD MD-80
<b>Class III Large, heavy, low-to-medium maneuverability airplanes such as:</b> * Heavy transport / cargo / tanker * Heavy bomber * Patrol / early warning / electronic counter-measures / airborne command, control or communications relay * Trainer for Class III	* McDD C-17 * Boeing B-52H * Lockheed P-3 * Boeing E-3D * Boeing TC-135	FAR 25 category airplanes	* Boeing 747, * Airbus 340, * McDD MD-11
<b>Class IV High maneuverability airplanes such as:</b> * Fighter / interceptor * Attack * Tactical reconnaissance * Observation * Trainer for Class IV	* Lockheed F-22 * McDD F-15E * McDD RF-4 * Lockheed SR-71 * Northrop T-38	FAR 23 aerobatic category airplanes	* Pitts Special, * Sukhoi Su-26M

(fonte: ROSKAM, 1998)

Além disso, sabe-se, a partir de Nelson (1998), que há quatro raízes da modelagem dos movimentos laterais de um avião, duas delas são reais e duas imaginárias. A raiz real com menor módulo é denominada “spiral root”. A segunda raiz real é denominada “roll root”. Por fim, as duas raízes imaginárias são denominadas “Dutch roll roots”. Há especificações para cada uma delas e se encontram nas Tabelas 13,14 e 15.

Tabela 13 - Especificação da “ spiral root”

<b>Spiral mode (minimum time to double amplitude) flying qualities</b>				
<b>Class</b>	<b>Category</b>	<b>Level 1</b>	<b>Level 2</b>	<b>Level 3</b>
I and IV	A	12 s	12 s	4 s
	B and C	20 s	12 s	4 s
II and III	All	20 s	12 s	4 s

(fonte: NELSON, 1998)

Tabela 14 - Especificação da "roll root"

Roll mode (maximum roll time constant) flying qualities (in seconds)				
Class	Category	Level 1	Level 2	Level 3
I, IV	A	1.0	1.4	10
II, III		1.4	3.0	
All	B	1.4	3.0	10
I, IV	C	1.0	1.4	10
II, III		1.4	3.0	

(fonte: NELSON, 1998)

Tabela 15 - Especificação das "Dutch Roll Roots"

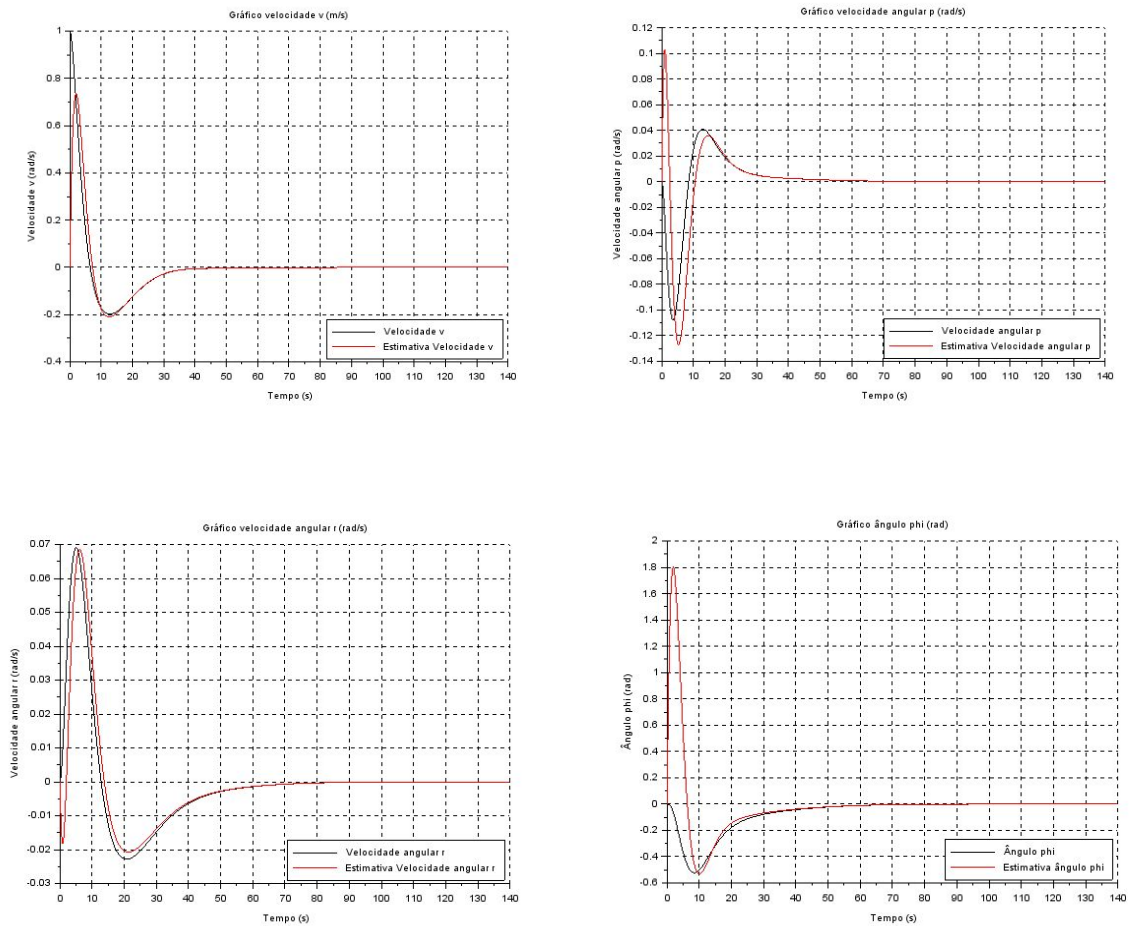
TABLE 5.6 Dutch roll flying qualities					
Level	Category	Class	Min $\zeta^*$	Min $\zeta\omega_n^*$ rad/s	Min $\omega_n$ rad/s
1	A	I, IV	0.19	0.35	1.0
		II, III	0.19	0.35	0.4
	B	All	0.08	0.15	0.4
		I, II-C	0.08	0.15	1.0
	C	IV			
		II-L, III	0.08	0.15	0.4
2	All	All	0.02	0.05	0.4
3	All	All	0.02	---	0.4

(fonte: NELSON, 1998)

Para o modo espiral encontrado na Tabela 13, a especificação só é necessária quando a raiz de espiral é instável, portanto, a limitação é em relação ao tempo de dobrar a amplitude da entrada aplicada. Como usou-se uma raiz estável, não há restrição nessa raiz. Já no modo de rolagem ("roll mode") a especificação é dada pelo valor máximo da constante de tempo e, para o caso do Boeing 747, vale 1,4. Como se sabe, a raiz deve ser menor do que -0,7. Por fim, para o modo "Dutch Roll" a limitação é de uma frequência natural mínima de 0,4 rad/s, coeficiente de amortecimento mínimo de 0,19 e a multiplicação de ambos de 0,35 rads/s.

## APÊNDICE H - Gráficos Extras

Figura 22 - Comparação da trajetória real e a estimada pelo princípio da separação por LQR (a) velocidade  $v$  (esquerda superior), (b) velocidade  $p$  (direita superior), (c) velocidade  $r$  (esquerda inferior), (d) ângulo  $\phi$  (direita inferior)



## APÊNDICE I - Código

```
// Dados do Boeing 747 para altitude de 40.000 pés e Mach = 0.90 ref. Nelson
// Coeficientes laterais
cyb = -0.96
cyp = 0
cyr = 0
clb = -0.221
cnb = 0.150
clp = -0.45
cnp = -0.121
clr = 0.101
cnr = -0.30
clda = 0.0461
cnda = 0.0064
cydr = 0.175
cldr = 0.007
cndr = -0.109
// Dimensões
S = 5500*0.092903 // Área alar
b = 195.68*0.3048 // Envergadura
c = 27.31*0.3048 // Corda média

// Massa
m = 636600*0.453592
// Momentos de inércia
Ix = 18.2*10^6*1.35581795
Iy = 33.1*10^6*1.35581795
Iz = 49.7*10^6*1.35581795

u0 = 85.75 // Velocidade de cruzeiro do Boeing 747

// Dados do ambiente
rho = 3.639*10^-1 // Densidade atmosférica
g = 9.81 // Gravidade

// Pré-cálculo das constantes do espaço de estados

Q = 1/2*rho*u0^2
Fyv = Q*S*cyb/u0
Fyp = Q*S*b*cyp/(2*u0)
Fyr = Q*S*b*cyr/(2*u0)
Mxv = Q*S*b*clb/u0
Mxp = Q*S*b^2*clp/(2*u0)
Mxr = Q*S*b^2*clr/(2*u0)
Mzv = Q*S*b*cnb/(u0)
Mzp = Q*S*b^2*cnp/(2*u0)
Mzr = Q*S*b^2*cnr/(2*u0)
Fydr = Q*S*cydr
Mxda = Q*S*b*clda
Mxdr = Q*S*b*cldr
Mzda = Q*S*b*cnda
Mzdr = Q*S*b*cndr
|
// Constantes da linearização

theta0 = 0

// Definição das matrizes do espaço de estados
// Espaço de Estados do tipo: dx/dt = Ax + Bu e y = Cx + Du

A = [[Fyv/m, Fyp/m, (Fyr/m-u0/u0), g*cos(theta0)/u0], [Mxv/Ix, Mxp/Ix, Mxr/Ix, 0], [Mzv/Iz, Mzp/Iz, Mzr/Iz, 0], [0, 1, 0, 0]]
B = [[0, Fydr/m], [Mxda/Ix, Mxdr/Ix], [Mzda/Iz, Mzdr/Iz], [0, 0]]
C = [[0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0]]
D = [[0, 0], [0, 0]]
E = [[-Fyv/m, 0, 0], [Mxv/Ix, Mxp/Ix, Mxr/Ix], [-Mzv/Iz, -Mzp/Iz, -Mzr/Iz], [0, 0, 0]]
```

```

//Polos-e-Zeros
s1 = svslin('c',A,B,C,D)
h = ss2tf(s1)
disp(h)
plzr(s1)
s = poly(0,'s')
matr = s*eye(4,4) - A
disp(matr)
disp(C*inv(matr)*B)
disp(roots(det(matr)))

//Definição-das-condições-iniciais
x0 = [5;5;5;5]

//Definição-do-intervalo-de-tempo
t0 = 0
tf = 200
n = 1000
t = linspace(t0,tf,n)
//Sistema-linear
C = [[1,0,0,0];
-----[0,1,0,0];
-----[0,0,1,0];
-----[0,0,0,1]]
D = [[0,0];
-----[0,0];
-----[0,0];
-----[0,0]]
s1 = svslin('c',A,B,C,D)
h = ss2tf(s1)

scf(0)
subplot(1,2,1)
bode(h(1,1));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Aileron--Velocidade-lat.-v")
subplot(1,2,2)
bode(h(1,2));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Leme--Velocidade-lat.-v")

scf(1)
subplot(1,2,1)
bode(h(2,1));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Aileron--Velocidade-angular-p")
subplot(1,2,2)
bode(h(2,2));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Leme--Velocidade-angular-p")

scf(2)
subplot(1,2,1)
bode(h(3,1));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Aileron--Velocidade-angular-r")
subplot(1,2,2)
bode(h(3,2));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Leme--Velocidade-angular-r")

scf(3)
subplot(1,2,1)
bode(h(4,1));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Aileron--Ângulo-phi")
subplot(1,2,2)
bode(h(4,2));
xlabel("Diagrama-de-Bode:-Deflexão-Leme--Ângulo-phi")

```



```

//Simulação via integração numérica do espaço de estados

function entradas = u(t) //Entradas para simulação via integração numérica do espaço dos estados
... u1 = 0
... u2 = 0
... entradas = [u1;u2]
endfunction
function dist = p(t) //Distúrbios para simulação via integração numérica do espaço de estados
... p1 = 0
... p2 = 0
... p3 = 0
... dist = [p1;p2;p3]
endfunction
function dx = f(t,x) //Função para simulação via integração do espaço de estados
... dx = A*x+B*u(t)+E*p(t)
endfunction

//Intervalo de tempo da simulação
t = []
t0 = 0
dt = 0.01
tf = 50
t = t0:dt:tf

//Condições iniciais
x0 = [1;1;1;1]

//Integração via ode
x = []
x = ode(x0,t0,t,f) //integração numérica

//Determinação da saída observável
U1 = []
U2 = []
for i = 1:(tf-t0)/dt+1 //entradas
... T = t0 + dt*(i-1)
... ent = u(T)
... U1(i) = ent(1)
... U2(i) = ent(2)
end
U = [U1,U2]'
y = []
y = C*x+D*U

scf(0)
plot2d(t,y(1,:))
scf(1)
plot2d(t,y(2,:))

```

```

//Verifica a controlabilidade e a observabilidade do sistema

Ct = [B A*B A*A*B A*A*A*B] //Matriz de controlabilidade
if rank(Ct) >= size(A) then //Verifica se o posto da matriz de controlabilidade é igual
....//ou superior à dimensão da matriz A
....disp('O sistema é controlável!')
else
....disp('O sistema não é controlável!')
end

Ob = [C;C*A;C*A*A;C*A*A*A]
if rank(Ob) >= size(A) then
....disp('O sistema é observável!')
else
....disp('O sistema não é observável!')
end

//Matriz de Transição e termo forçante
t0 = 0
dt = 0.1
n = 500
x0 = [1;1;1;1]
function input = u(t)
....u1 = 0
....u2 = 0
....input = [u1;u2]
endfunction
x1 = []
x2 = []
x3 = []
x4 = []
for i = 1:n
....t = t0+(i-1)*dt
....mt = expm(A*(t-t0))*x0
....disp(mt)
....tf1 = integrate(' expm(A*(t-d))*B*[0;0] (1)', 'd', t0, t)
....tf2 = integrate(' expm(A*(t-d))*B*[0;0] (2)', 'd', t0, t)
....tf3 = integrate(' expm(A*(t-d))*B*[0;0] (3)', 'd', t0, t)
....tf4 = integrate(' expm(A*(t-d))*B*[0;0] (4)', 'd', t0, t)
....x1(i) = mt(1)+tf1
....x2(i) = mt(2)+tf2
....x3(i) = mt(3)+tf3
....x4(i) = mt(4)+tf4
end
tint = t0:dt:(t0+(n-1)*dt)
x = []
x = [x1';x2';x3';x4']
y = []
y = C*x
scf(0)
plot2d(tint,y(1,:),style=3)
scf(1)
plot2d(tint,y(2,:),style=3)

//Código para alocação de polos do controlador e do observador
s = poly(0,'s')
matr = s*eye(4,4)-A
pc = [-0.5,-1+1i,-1-1i,-0.2] //Polos desejados para o controlador
Kc = ppol(A,B,pc) //Definição da matriz K do controlador
po = 2*pc //Polos desejados para o observador
Ko = (ppol(A',C',po))' //Definição da matriz K do observador
disp(spec(A-B*Kc))

```

```

//Criação das matrizes K do controlador e do observador via LQR
Qc = [1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1] //Matriz Q do controlador
Pc = [1,0;0,1] //Matriz P do controlador
slc = syslin('c',A,B,C) //Criação do sistema linear do espaço de estados para o controlador
Kc = lqr(slc,Qc,Pc) //Definição da matriz Kc
Qo = [1,0,0,1;0,1,0,1;0,0,1,0;1,1,0,0] //Matriz Q do observador
Po = [1,0;0,1] //Matriz P do observador
slo = syslin('c',A',C',B') //Criação do sistema linear do espaço de estados para o observador
Ko = lqr(slo,Qo,Po)' //Definição da matriz Ko
disp(spec(A-B*Kc))

```

```

Ar = [0,0,0,0;0,0,0,-1,0;0,1,0,0;0,0,0,0]
B2 = E
Aw = 0.01*[0,0,1;0,0,0;-1,0,0]
F = A-B*Kc
F2 = [A-Ar]
Ao = [Aw zeros(3,4);zeros(4,3) Ar]
Ke = inv(C*inv(eye(4,4)-A-B*Kc)*B)*C

//lambdafull = [A-B*Kc,Ay;zeros(7,4),Ao]
lambda = [A-B*Kc, -(B*(Kc-Ke));zeros(4,4),Ar]
t0 = 0 //Definição do intervalo de tempo
dt = 0.1
n = 500
tf = t0 + dt*(n-1)
t = []
t = t0:dt:tf
x0 = []
x0 = [0;0;0;0] //Condições iniciais
w0 = [0;1;1]
r0 = [0;0;0.01;0]
c0 = [x0;w0;r0]
x1=[]
x2=[]
x3=[]
x4=[]
xrl=[]
xr2=[]
xr3=[]
xr4=[]
yr = []
xw1=[]
xw2=[]
xw3=[]
xw=[]

```

```

function plotter_separacao(x0,A,B,K,Ko)
    lambda = [(A-B*K B*K)];
    ..... [zeros(size(A,1), size(A,1)) A-Ko*C]]
    polos = spec(lambda)
    polos_cont = polos(1:size(A,1))
    polos_obs = polos(size(A,1)+1:2*size(A,1))
    disp('Os polos do controlador são:')
    disp(polos_cont)
    disp('Os polos do observador são:')
    disp(polos_obs)
    scf(0)
    scatter(real(polos_cont),imag(polos_cont), marker = '.')
    scatter(real(polos_obs),imag(polos_obs), marker = 'filled-diamond')
    legend('Polos do controlador', 'Polos do observador')
    //Matriz de transição
    dt = 0.1
    nit = 400
    x1 = []
    x2 = []
    x3 = []
    x4 = []
    xob1 = []
    xob2 = []
    xob3 = []
    xob4 = []

    for i = 1:nit
        t = (i-1)*dt
        sigma = expm(lambda*t)
        x = sigma*[x0;x0]
        x1(i) = x(1)
        x2(i) = x(2)
        x3(i) = x(3)
        x4(i) = x(4)
        xob1(i) = -x(5)+x(1)
        xob2(i) = -x(6)+x(2)
        xob3(i) = -x(7)+x(3)
        xob4(i) = -x(8)+x(4)
    end
    t = 0:dt:(nit-1)*dt
    scf(1)
    plot2d(t,x1)
    plot2d(t,xob1, style = 5)
    legend('Velocidade-v', 'Estimativa-Velocidade-v',[4])
    xtitle('Gráfico-velocidade-v (m/s)')
    xlabel('Tempo (s)')
    ylabel('Velocidade-v (rad/s)')
    xgrid()
    scf(2)
    plot2d(t,x2)
    plot2d(t,xob2, style = 5)
    legend('Velocidade-angular-p', 'Estimativa-Velocidade-angular-p',[4])
    xtitle('Gráfico-velocidade-angular-p (rad/s)')
    xlabel('Tempo (s)')
    ylabel('Velocidade-angular-p (rad/s)')
    xgrid()
    scf(3)
    plot2d(t,x3)
    plot2d(t,xob3, style = 5)

```

```

plot2d(t,x4)
plot2d(t,xob4, style = 5)
legend('Ângulo-phi', 'Estimativa-ângulo-phi', [4])
xlabel('Tempo. (s)')
ylabel('Ângulo-phi. (rad)')
xgrid()
endfunction

function plotter_observador(x0,A,C,Koal,Kolq)
    // Koal é a matriz de ganho para observador por alocação de polos
    // Kolq é a matriz de ganho para observador por controle LQR
    // Matriz de transição
    dt = 0.1
    nit = 100
    x1 = []
    x2 = []
    x3 = []
    x4 = []
    dt = 0.1
    nit = 500
    for i = 1:nit
        t = (i-1)*dt
        sigma = expm((A-Koal*C)*t)
        xal = sigma*x0
        x1al(i) = xal(1)
        x2al(i) = xal(2)
        x3al(i) = xal(3)
        x4al(i) = xal(4)
    end

    t = 0:dt:(nit-1)*dt
    disp('Os polos do controlador por alocação de polos são:')
    disp(spec(A-Koal*C))
    disp('Os polos do controlador por método LQR são:')
    disp(spec(A-Kolq*C))
    scf(0)
    plot2d(t,x1al)
    plot2d(t,x1lq, style = 5)
    legend('Alocação de Polos', 'LQR')
    xtitle('Gráfico do erro de observação da velocidade v. (m/s)')
    xlabel('Tempo. (s)')
    ylabel('Velocidade v. (rad/s)')
    xgrid()
    scf(1)
    plot2d(t,x2al)
    plot2d(t,x2lq, style = 5)
    legend('Alocação de Polos', 'LQR')
    xtitle('Gráfico do erro de observação da velocidade angular p. (rad/s)')
    xlabel('Tempo. (s)')
    ylabel('Velocidade angular p. (rad/s)')
    xgrid()
    scf(2)
    plot2d(t,x3al)
    plot2d(t,x3lq, style = 5)
    legend('Alocação de Polos', 'LQR')
    xtitle('Gráfico do erro de observação da velocidade angular r. (rad/s)')
    xlabel('Tempo. (s)')
    ylabel('Velocidade angular r. (rad/s)')
    xgrid()

```

```

... scf(3)
... plot2d(t,x4al)
... plot2d(t,x4lq, style = 5)
... legend('Alocação-de-Polos',-'LQR')
... xtitle('Gráfico-do-erro-de-observação-da-ângulo-phi-(rad)')
... xlabel('Tempo-(s)')
... ylabel('Ângulo-phi-(rad)')
... xgrid()
endfunction

```

```

function plotter_controlador(x0,A,B,Kal,Klq)
... //Kal-é-a-matriz-de-ganho-para-alocação-de-polos
... //Klq-é-a-matriz-de-ganho-para-controle-LQR
... //Matriz-de-transição
... dt = 0.1
... nit = 100
... x1 = []
... x2 = []
... x3 = []
... x4 = []
... dt = 0.1
... nit = 400
... for i = 1:nit
...     t = (i-1)*dt
...     sigma = expm((A-B*Kal)*t)
...     xal = sigma*x0
...     x1al(i) = xal(1)
...     x2al(i) = xal(2)
...     x3al(i) = xal(3)
...     x4al(i) = xal(4)
... end

```

```

t = 0:dt:(nit-1)*dt
disp('Os polos do controlador por alocação de polos são:')
disp(spec(A-B*Kal))
disp('Os polos do controlador por método LQR são:')
disp(spec(A-B*Klq))
scf(0)
plot2d(t,x1a1)
plot2d(t,x1lq, style = 5)
legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
xtitle('Gráfico velocidade v (m/s)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade v (rad/s)')
xgrid()
scf(1)
plot2d(t,x2a1)
plot2d(t,x2lq, style = 5)
legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
xtitle('Gráfico velocidade angular p (rad/s)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade angular p (rad/s)')
xgrid()
scf(2)
plot2d(t,x3a1)
plot2d(t,x4lq, style = 5)
legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
xtitle('Gráfico velocidade angular r (rad/s)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade angular r (rad/s)')
xgrid()
scf(3)
plot2d(t,x4a1)
plot2d(t,x4lq, style = 5)
legend('Alocação de Polos', 'LQR', [4])
xtitle('Gráfico ângulo phi (rad)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Ângulo phi (rad)')
xgrid()
endfunction

```