Introduction à la programmation linéaire

Saida.bouakaz@univ-lyon1.fr

Objet de la programmation linéaire :

La programmation linéaire peut être vue comme un outil permettant d’allouer, de façon optimale, des ressources disponibles en quantités limitées, à une ou des activités pour obtenir le meilleur résultat ou le meilleur rendement.

Introduction par un exemple

- **Énoncé**

Un ébéniste fabrique des chaises et des tables.
Il peut consacrer au plus 1040 heures et 38 morceaux de bois.

Une pièce de chaque produit nécessite une quantité donnée de matière première et consomme une durée donnée de travail. les deux produits ne sont pas vendu au même prix

- **Objectif**

maximiser les gains en respectant les contraintes suivante (temps, fourniture).

➔ Trouver le nombre de fauteuil , le nombre de table qui permettent de maximiser les gains en respectant les contraintes

Introduction : exemple1-suite

On a les données suivantes :

1 table prend 50 heures
Nécessite 2 morceaux de bois

1 table rapporte 420 €.

1 chaise prend 40 heures
Nécessite 1 morceau de bois

1 Fauteuil rapporte 300 €.

Quelle doit être la production pour que le gain soient maximal ?

Modélisation : modélisation du problème

Nbre de tables et de fauteuils

Pour un gain maximal

X_1 le nombre de tables

$X_1 \geq 0$

X_2 le nombre de chaises

$X_2 \geq 0$

Soit Z le gain de l'ébéniste : $Z = 420\ X_1 + 300\ X_2$

Z est la fonction à maximiser.

Contraintes :

$50\ X_1 + 40\ X_2 \leq 1040$: Contrainte de temps de production

$2\ X_1 + X_2 \leq 38$: Contrainte de quantité de bois

Modélisation : mise en équation

Ecriture formelle

PL : Expression standardisée

$Z = 420\,x_1 + 300\,x_2$ → fonction objectif

$50\,x_1 + 40\,x_2 \leq 1040$

$2\,x_1 + x_2 \leq 38$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

contraintes

Ecriture standard

Ecriture matricielle (canonique)

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 420 & 300 \end{pmatrix}$$

- Le vecteur X code la quantité de production possible (dans l'exemple nombre de tables et chaises)
- La matrice A code le coût de production d'un élément de chaque type (dans l'exemple : coût en temps et matière d'une table / d'une chaise)
- Le vecteur B code les limites de capacité de production en temps et en matière (dans l'exemple : bois)
- Le vecteur C code les bénéfices de production (dans l'exemple les bénéfices de vente des tables et fauteuils)

Ecriture Sdt

Forme canonique

- Le système s'écrit :

$$Max\ Z = CX$$

Sous les contraintes $\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$

- Instanciation du système pour l'exemple 1

$$Max\ Z = CX = 420x_1 + 300x_2$$

$$AX \leq B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \leq \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$X \geq 0$$

Caractéristiques de la PL

Définition :

Un programme linéaire est un problème d'optimisation (maximisation ou minimisation) défini par :

- n variables de décision (variables à calculer)
- une fonction objectif linéaire (à optimiser)
- des contraintes sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires

Modélisation : généralisation

- Modélisation du problème
  - Spécification des contraintes du problème
    - Contraintes liées à la disponibilité des fournitures
    - Contraintes liées au respect des proportions

    \+ Contraintes de non négativité (grandeur positives)
  - Spécification de la fonction objectif
    - Maximisation un gain, retour sur investissement, profit, …

      Ou bien
    - Minimisation du coût, ….

Expression PL

Dans ce cas le programme linéaire (PL) s'écrit

$$\max Z = CX$$

- Sous les contraintes : $\begin{cases} AX \leq B \\ X_i \geq 0 \end{cases}$

- Avantage de cette écriture : générique

→l'écriture est dite normalisée.

Proprietés d'un modèle de programmation linéaire

- Linéarité

  Équations polynômiales de degré 1

  $$a_1 X_1^1 + a_2 X_2^1 + \dots + a_n X_n^1$$

- Divisibilité & continuité

  Domaine des variables partie de R (ou bien tout R)

- Séparabilité & additivité

  $$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

- Fonction objectif unique

  Min coût ou Max profit, …

Forme générale d'un problème d'optimisation

Max (ou Min Z) $\quad Z = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_k \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \\ x_1 \geq 0 \;;\; x_2 \geq 0 \;;\; \ldots,\, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Si les fonctions f_i sont linéaires alors on a un (PL)

Exemple -2

Une entreprise fournit deux types de machines: A et B.

objectif : réaliser la meilleure rentabilité sous les contraintes

Coût de la production/élément

	A	B
Pompes	1	1
Main d'oeuvre	9 heures	6 heures
Tuyaux	12 m	16 m

Rentabilité/élément

Prix unitaire	350 €.	300 €.

On dispose de 200 pompes,
On a 2880 mètres de tuyaux disponibles
On peut consacrer jusqu'à 1566 heures (max)

Les étapes pour la formulation du problème PL

1. Comprendre le problème : dégager l'objectif

2. Identifier les variables de decision(s)

   x_1 = nbre de machines de type A produites

   x_2 = nbre de machines de type B produites

3. Définir les <u>contraintes</u> en une combinaison linéaire de variables décisionnelles.

   $1x_1 + 1x_2 \leq 200$ → nombre de pompes

   $9x_1 + 6x_2 \leq 1566$ → coût Main-d'oeuvre.

   $12x_1 + 16x_2 \leq 2880$ → longueur tuyaux

Les étapes pour la formulation du problème PL

4. traduire la fonction objectif par une combinaison linéaire du rendement de chaque élément → variables décisionnelles

$$Max: 350\,x_1 + 300\,x_2$$

5. Identifier les limites supérieures ou inférieures des variables de décision (espace de recherche des solutions)

- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- Posons $x_2 = 0$ --- > on se déplace sur l'axe x_1, on examine les contraintes sur la variable décisionnelle x_1

1ère contrainte : $1x_1 \leq 200$ → $x_1 \leq 200$

2° contrainte : $9\,x_1 \leq 1566$ → $x_1 \leq 174$

3° contrainte : $12\,x_1 \leq 2880$ → $x_1 \leq 240$

Exemple

Retour à l'exemple de l'ébéniste

$$\text{Max :}\ 350\,x_1 + 300\,x_2$$

$$\text{Sous les contraintes}\ \begin{cases} 1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 200 \\ 9\,x_1 + 6\,x_2 \leq 1566 \\ 12\,x_1 + 16\,x_2 \leq 2880 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le problème PL: Une approche intuitive (Suite)

Si x_2=0, la valeur maximale de x_1 est 174 et le profit total est:

(350 € * **174**) + (300 € * **0**) = **60 900** €

C'est une solution possible mais est-elle *optimale*?

Non!

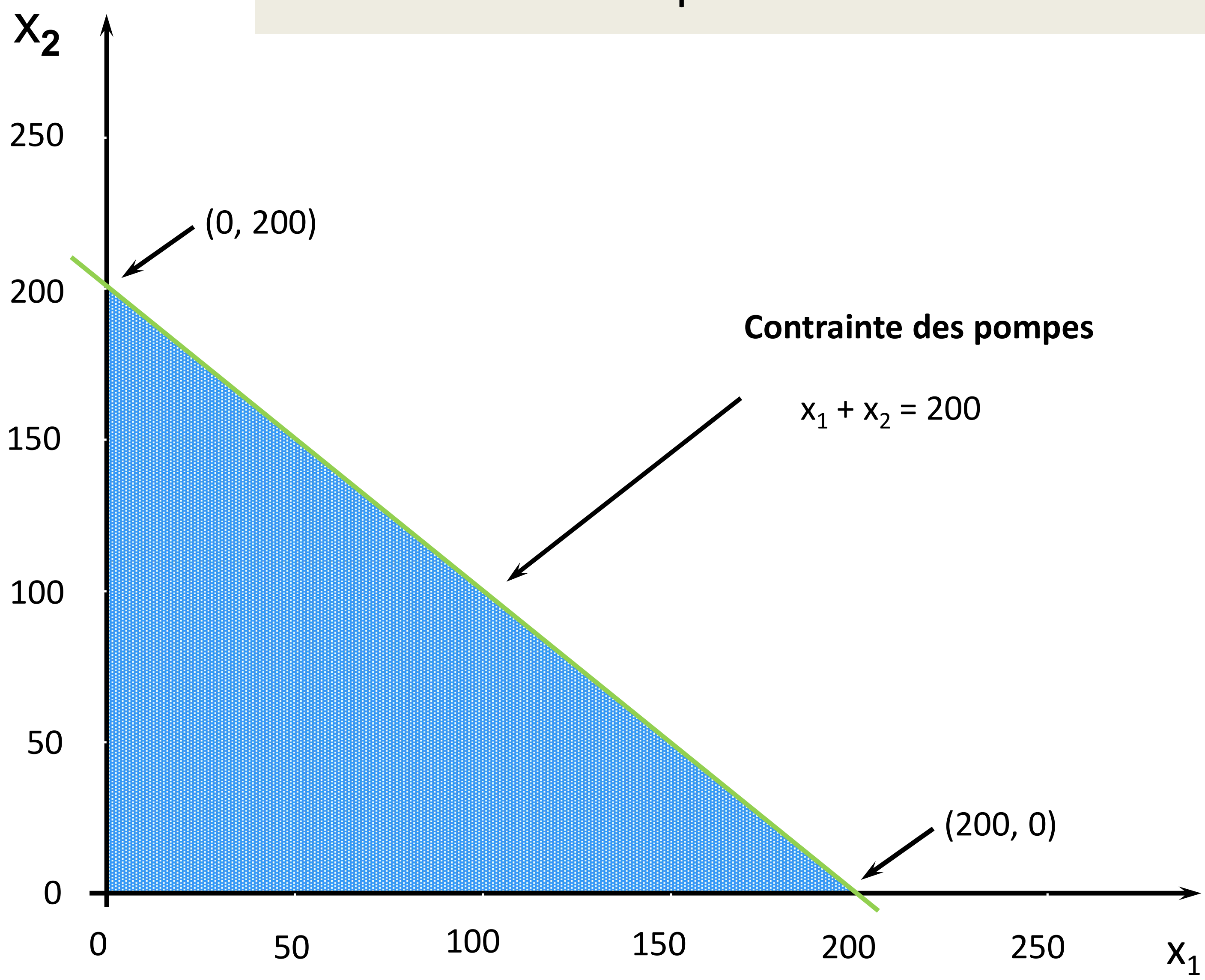
Résolution du problème PL
Une approche graphique

- Les contraintes d'un problème PL définissent la région de faisabilité.
- Le meilleur point dans la zone de faisabilité correspond à la solution optimale.
- Pour des problèmes à deux (resp. 3) variables, il est facile de tracer la zone de faisabilité et de trouver la solution optimale dans le plan (resp. dans l'espace).

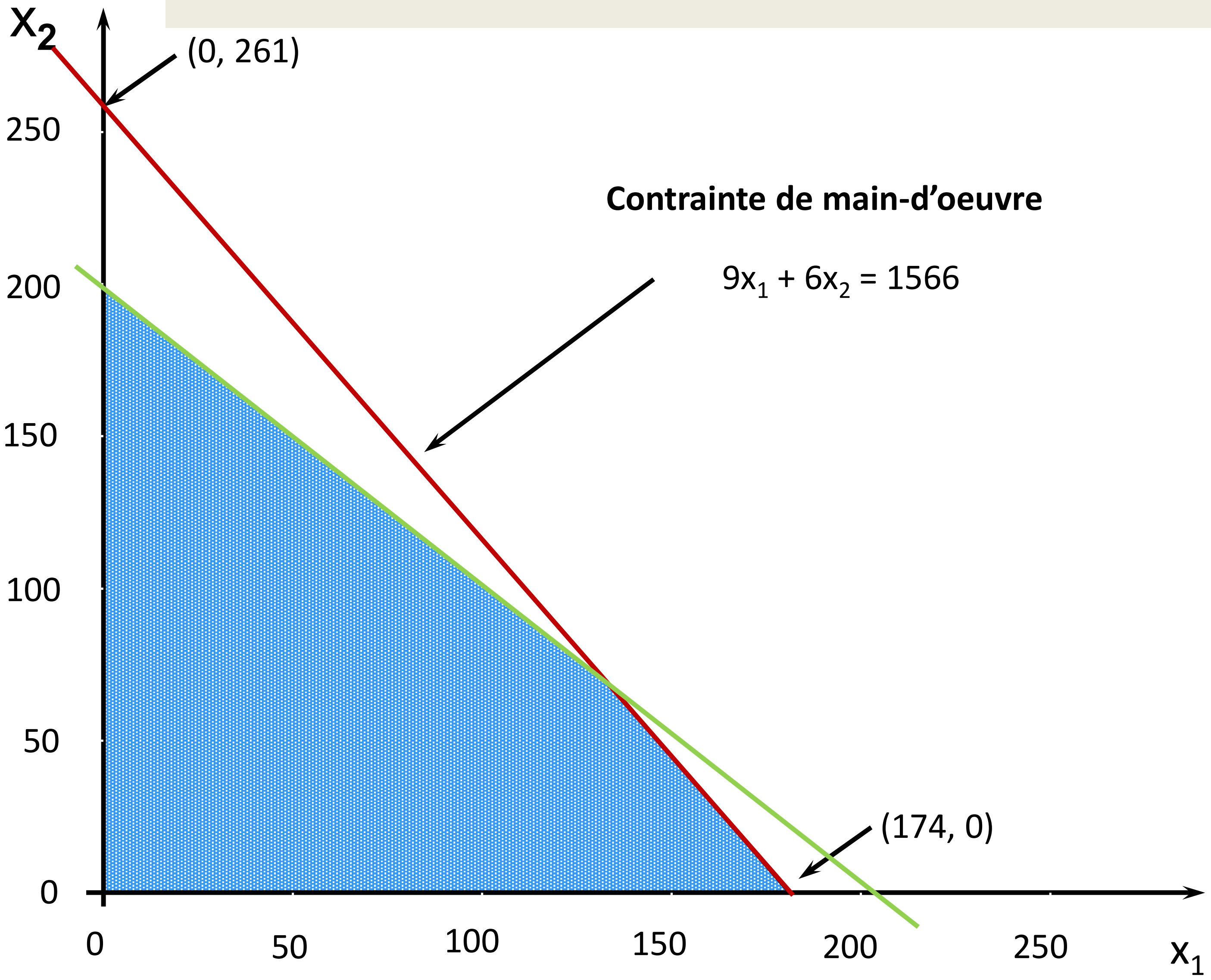
- Attention !! Cette approche est envisageable dans R^2

- Au delà de 3 variables ?!!

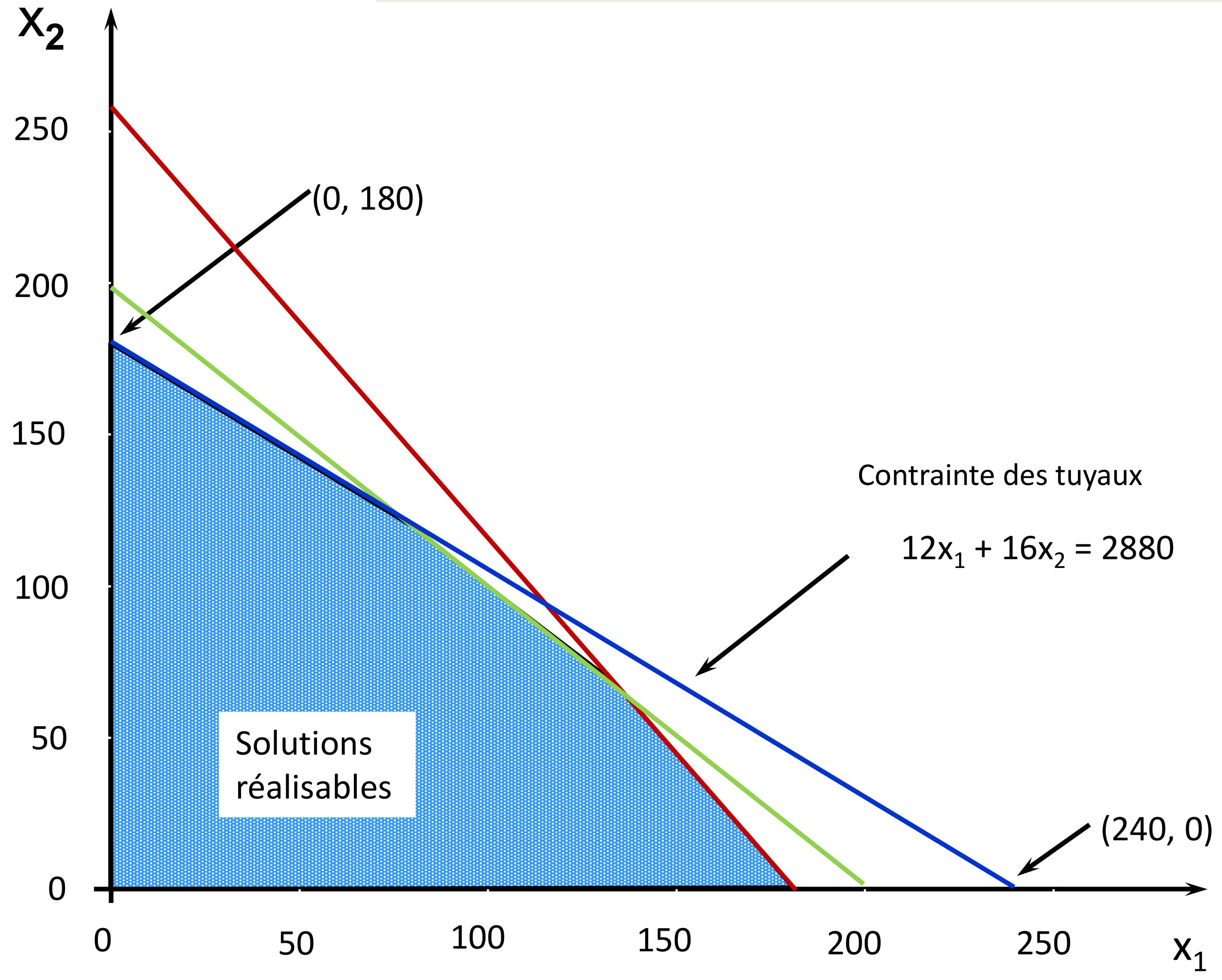
Tracé de la première contrainte



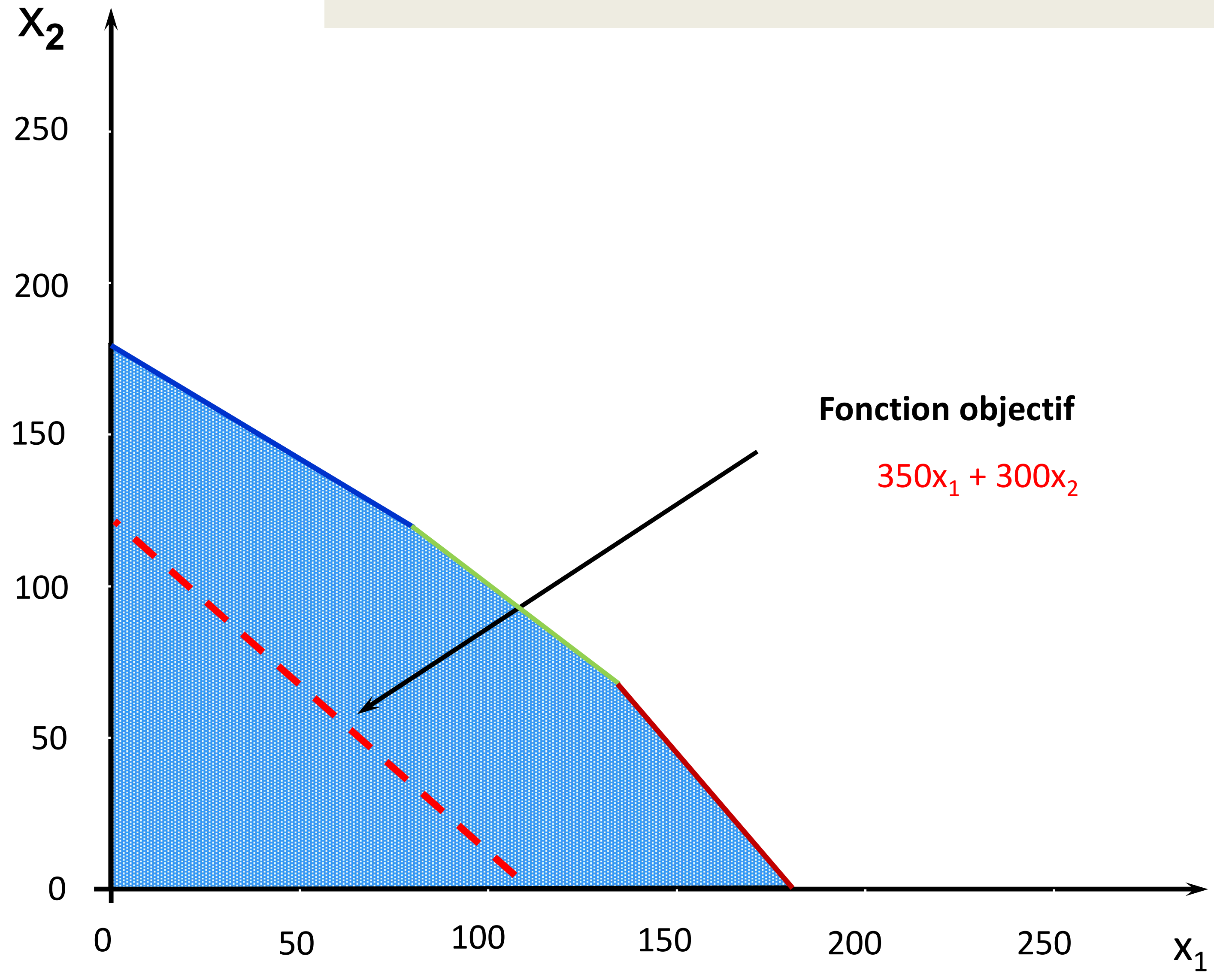
Tracé de la deuxième contrainte



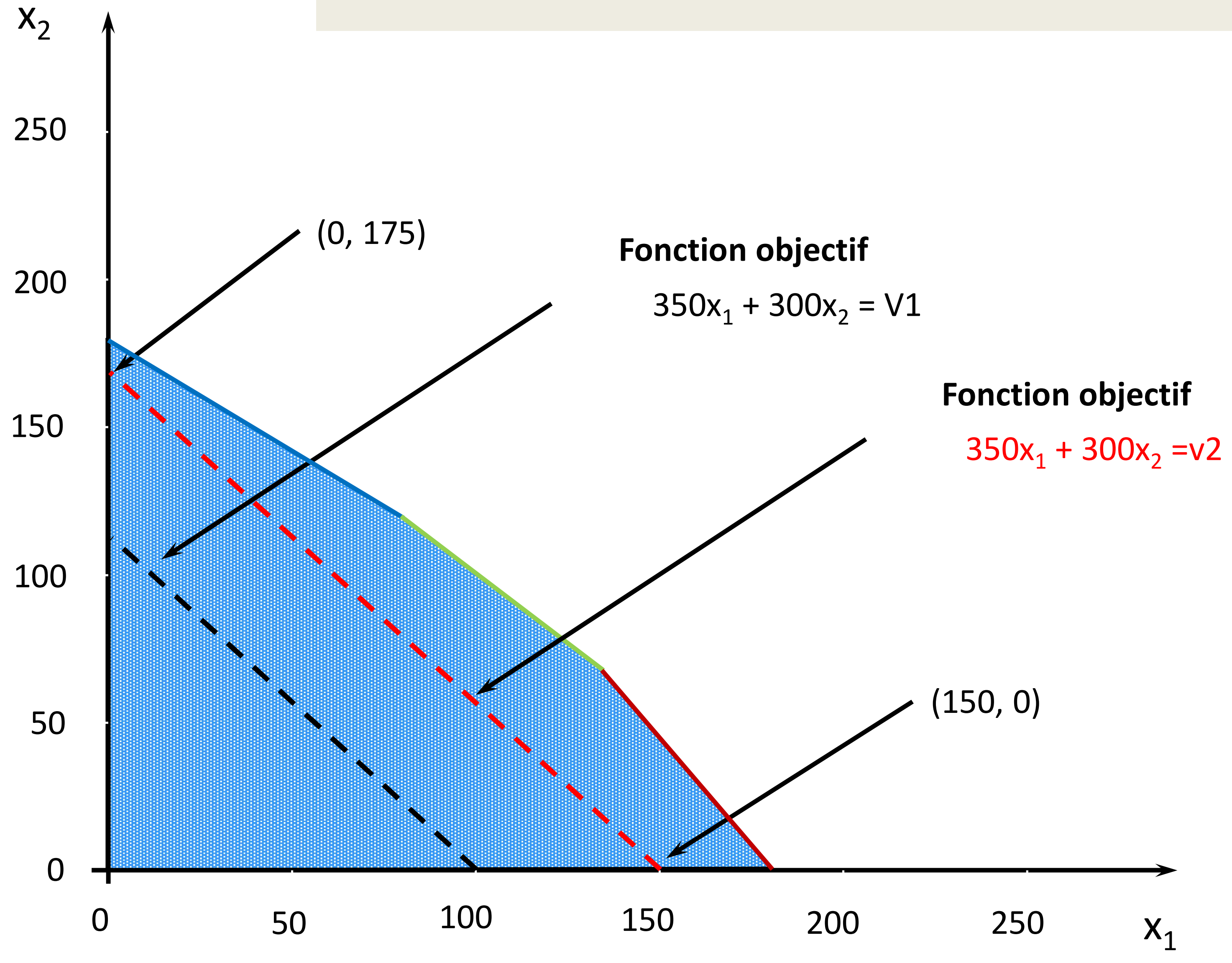
Tracé de la troisième contrainte



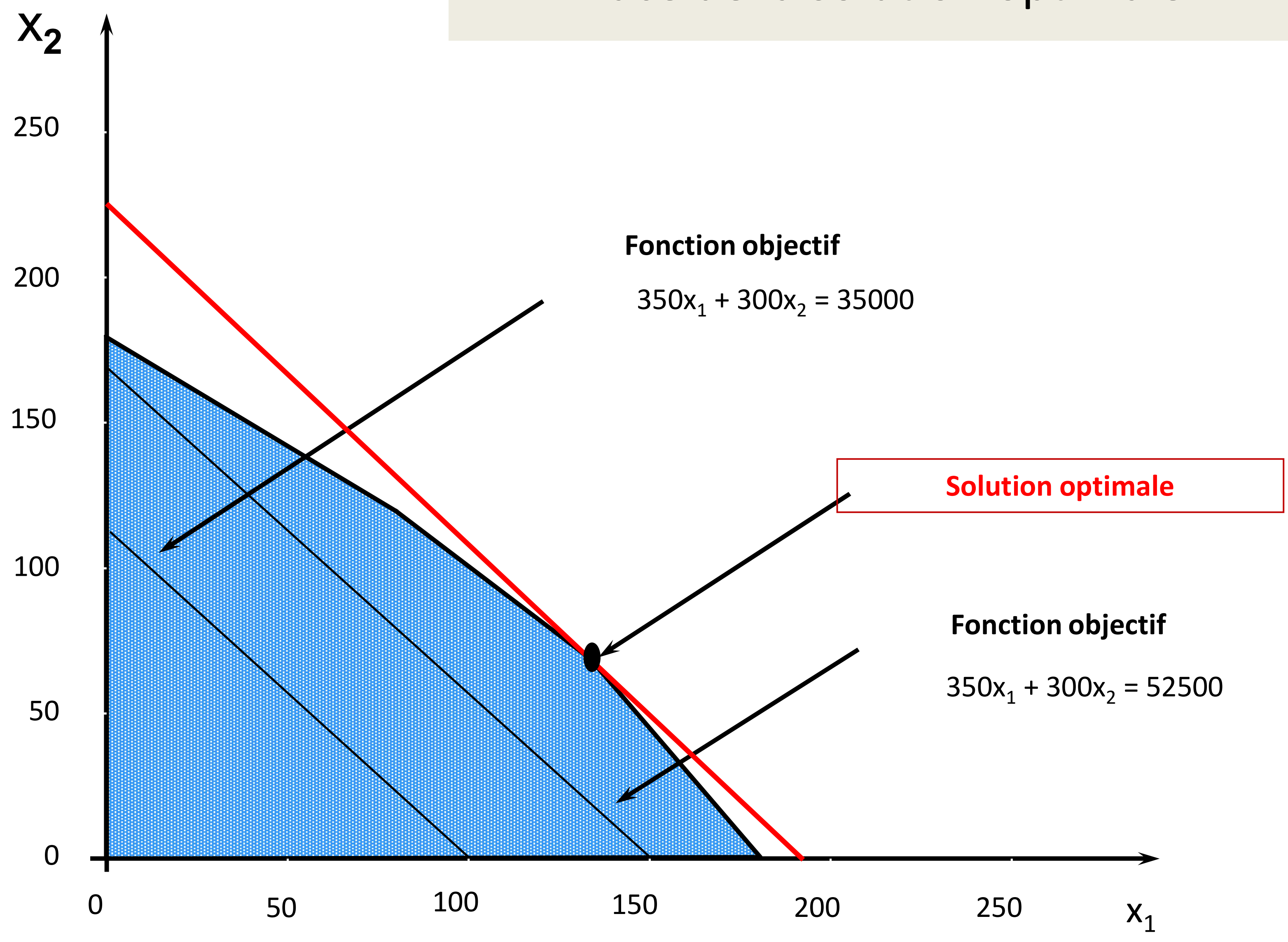
Tracé d'une droite de la fonction objectif



Deuxième tracé d'une droite de la fonction objectif



Tracé de la solution optimale



Calcul de la solution optimale

Comment déterminer la solution ?

La solution optimale est l'un des sommets du polygone (polyèdre) convexe qui délimite le domaine des solutions réalisables.
Un sommet correspond à l'intersection de 2 (ou plus) contraintes.

La solution maximise la fonction objective

Calcul de la solution optimale

Pour l'exemple :

La solution optimale se trouve à l'intersection des contraintes de pompes et de main d'œuvre.

Soit :

$$x_1 + x_2 = 200 \qquad (1)$$

$$9x_1 + 6x_2 = 1566 \qquad (2)$$

On résout le système :

$$x_2 = 200 - x_1 \qquad (3)$$

Calcul de la solution optimale (Suite)

Par substitution on obtient :

$$9x_1 + 6\ (200 - x_1) = 1566$$

d'où $x_1 = 122$

La solution optimale est :

$x_1 = 122$

$x_2 = 200 - x_1 = 78$

Profit total = (350 € * **122**) + (300 € * **78**) = **66 100** €

Situations spéciales : Remarque 1

- Plusieurs anomalies peuvent survenir:
  - Solutions optimales multiples
  - Contraintes redondantes
  - Problème non-contraint (“Unbounded Solutions”)
  - Non réalisable

Situations spéciales : Remarque 2

- ATTENTION !!! Certaines contraintes peuvent ne pas agir car elles sont au-delà de ce que d'autres imposent → contrainte redondante

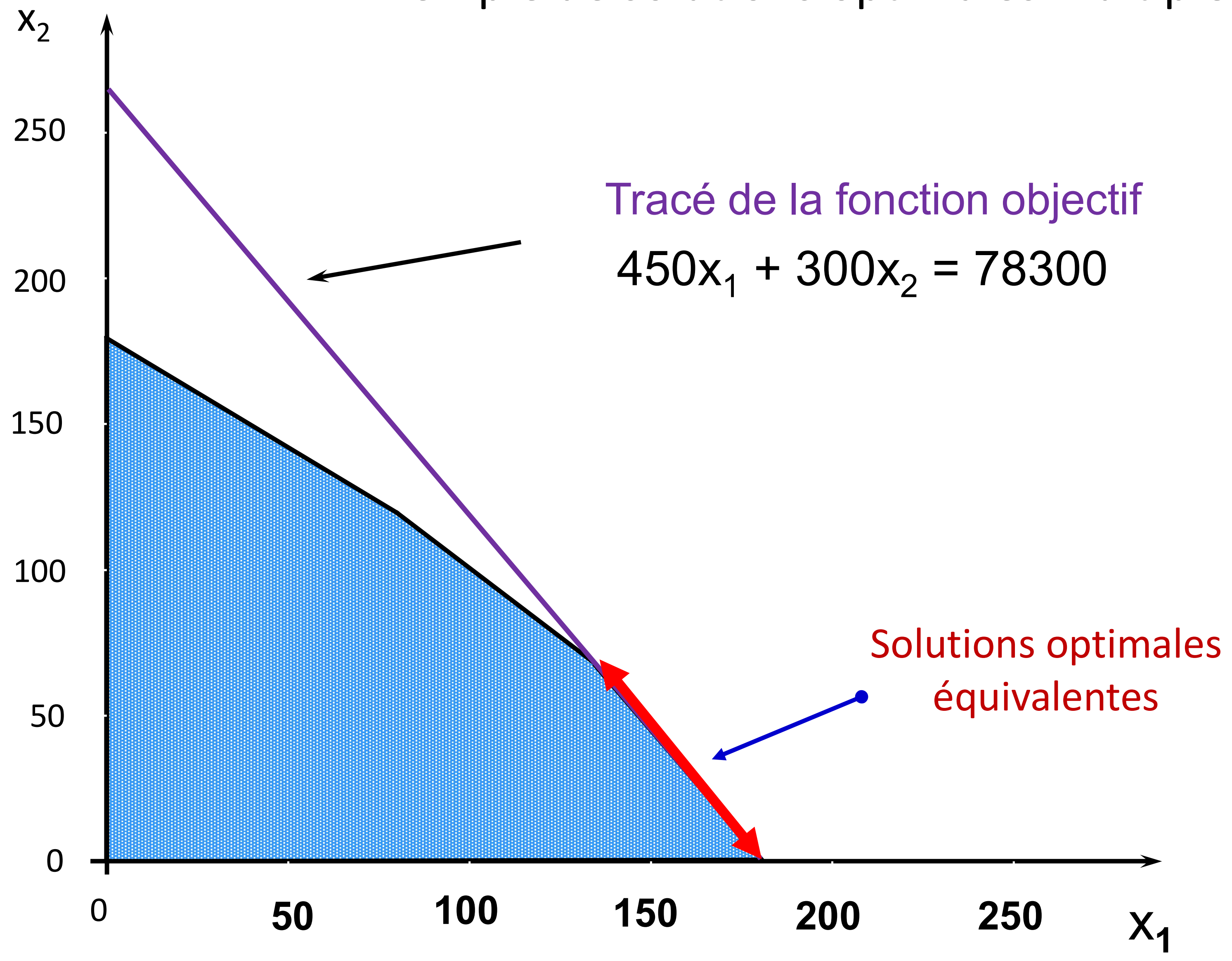
- On peut remplacer la recherche d'un maximum par la recherche d'un minimum, dans ce cas on transforme le pbme en 1 problème équivalent → voir chapitre : problème dual.

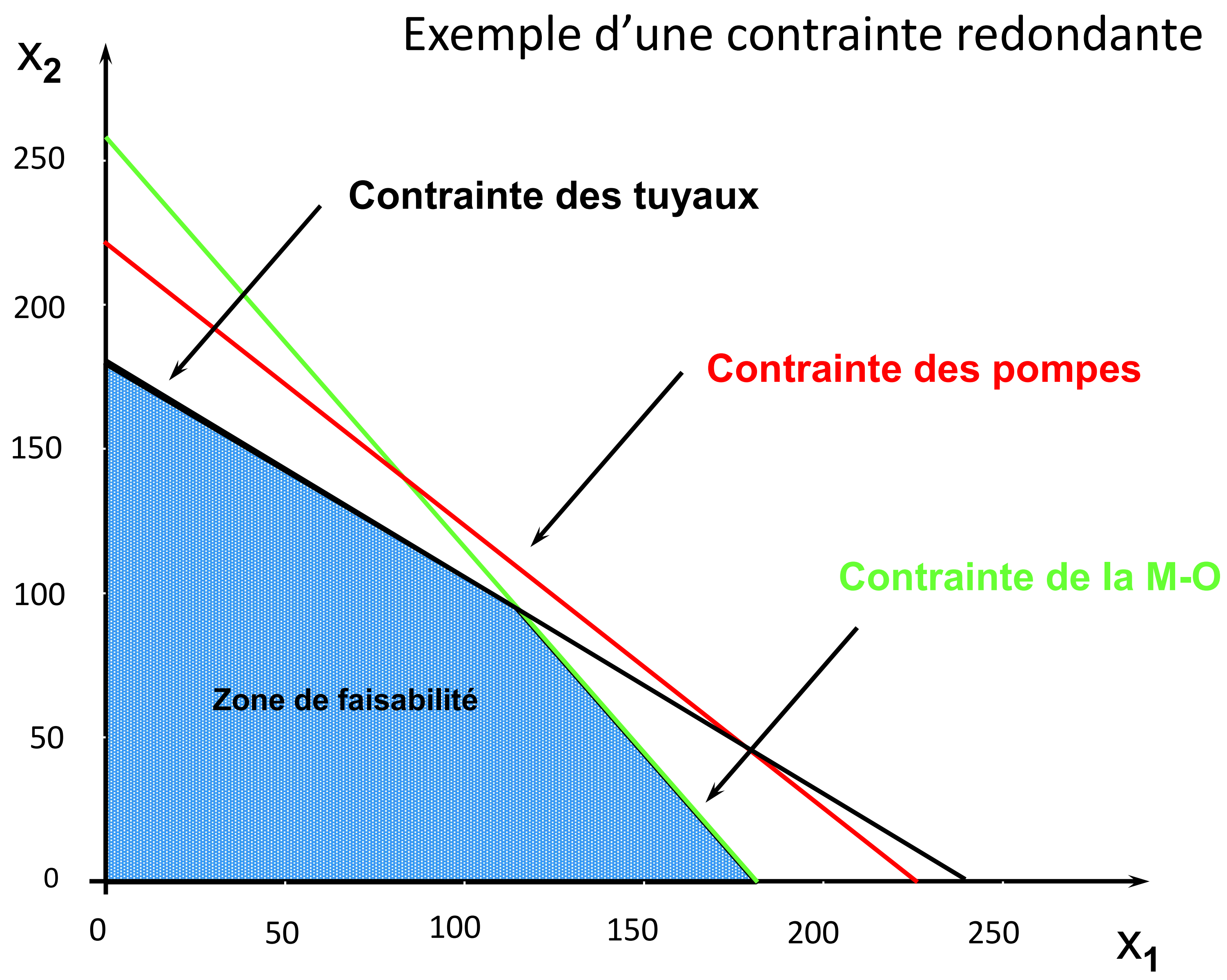
Remarques -3

- Les $a_{i,j}$, b_i, c_j ne sont pas nécessairement positifs (voir suite du cours)

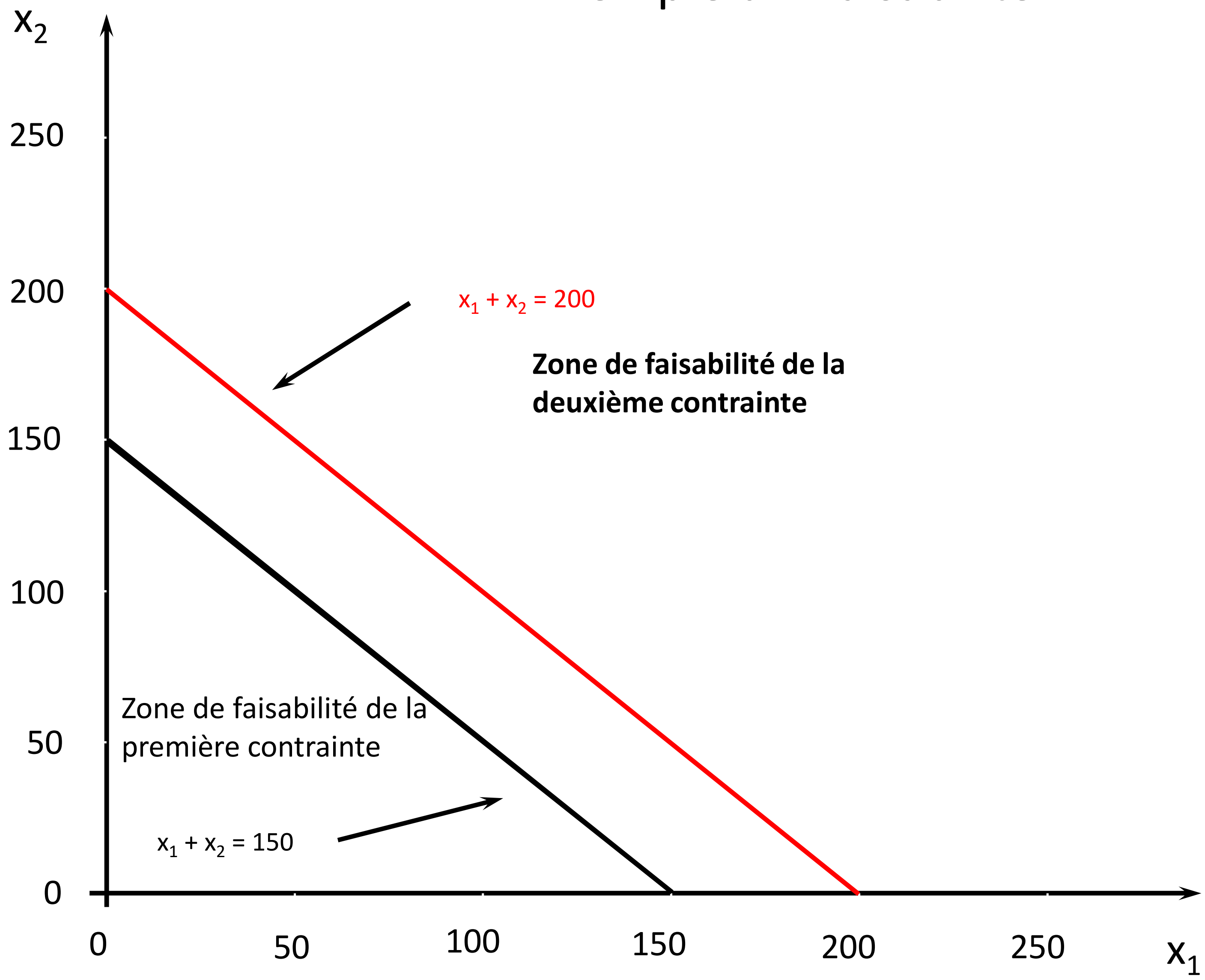
- Plusieurs situations peuvent se rencontrer
  - Il n'existe pas de x_j satisfaisant les inéquations (1)
  - Parmi les x_j satisfaisant les inéquations la somme peut être aussi grande que l'on veut (2)
  - Il existe plusieurs valeurs donnant l'optimum
  - Il existe une et une seule valeur donnant l'optimum

Exemple de solutions optimales multiples

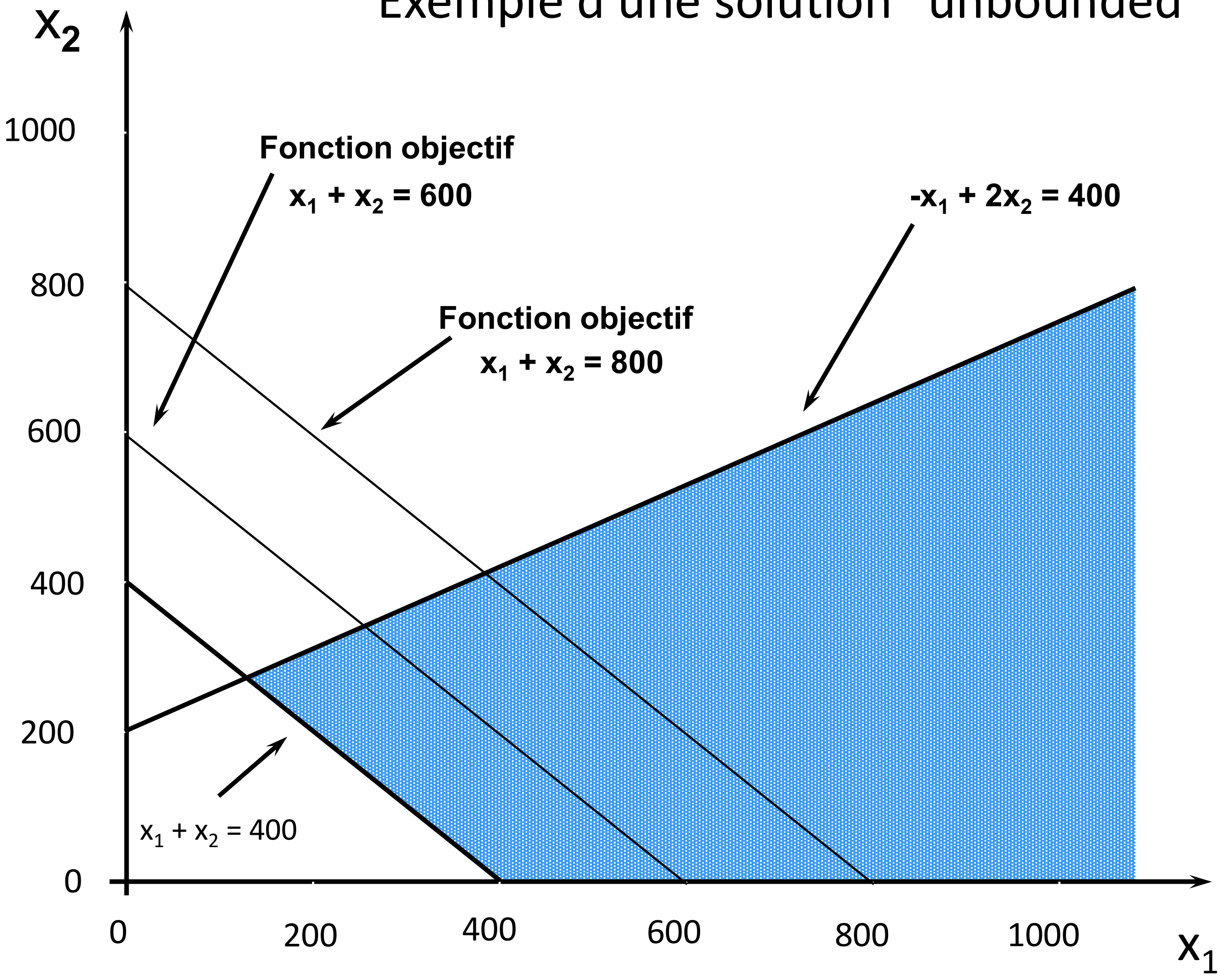



Exemple d'une contrainte redondante
X_2
250
200
150
100
50
0
Contrainte des tuyaux
Contrainte des pompes
Contrainte de la M-O
Zone de faisabilité
0
50
100
150
200
250
X_1

Exemple d’infaisabilité



Exemple d’une solution “unbounded”



Remarques -4

- Une solution **réalisable**, c'est une instanciation de x qui vérifie les contraintes.

- Une solution **réalisable optimale** est une solution réalisable qui maximise Z (ou minimise Z).

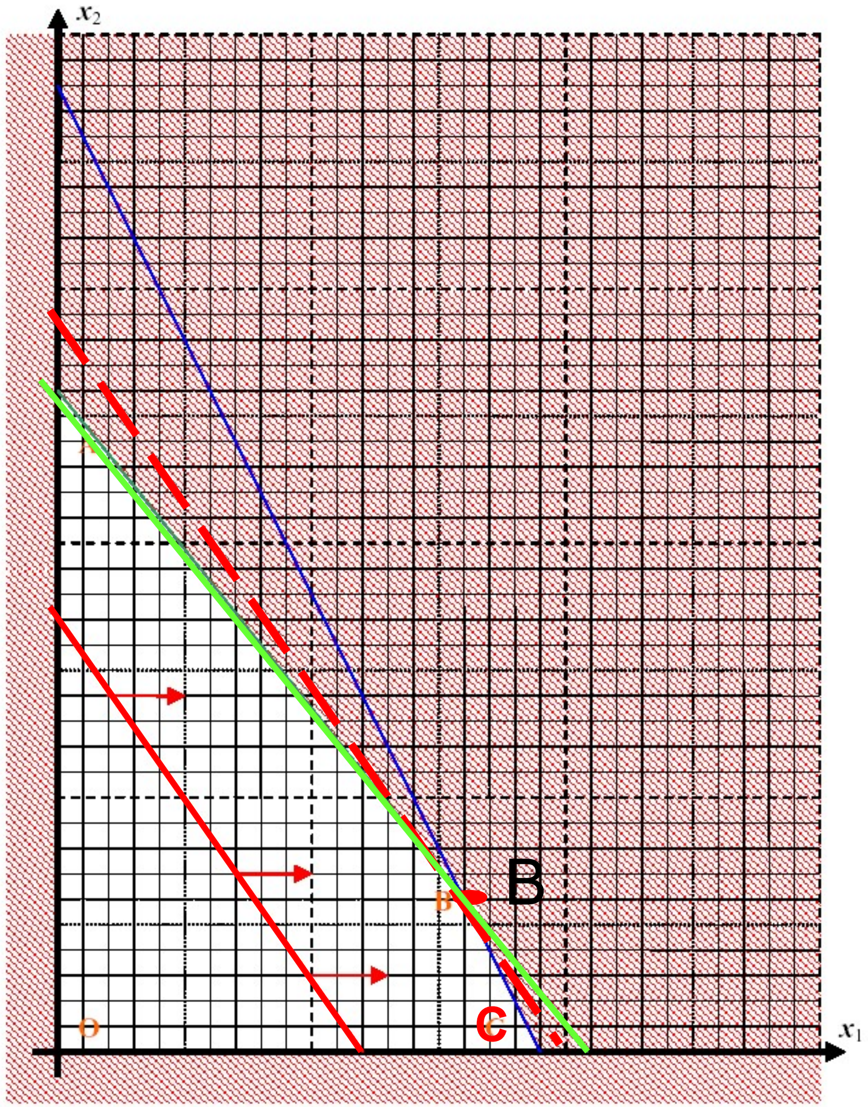
- Mathématiquement l'ensemble des solutions réalisables optimales décrit une partie d'un hyperplan de R^n avec n la dimension de x.

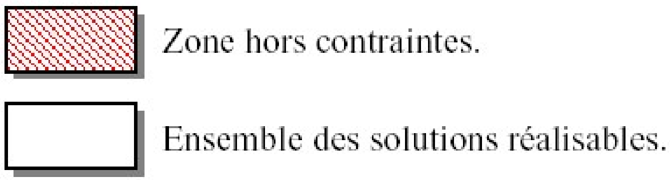
Résolution graphique de l'exemple 1

- On a 2 contraintes donc 2 droites :
  - En vert : $50\, x_1 + 40\, x_2 = 1040$
    $\Leftrightarrow 5\, x_1 + 4\, x_2 = 104$
    et on a les points (0 , 26) et (20.8 , 0)
  - En bleu : $2\, x_1 + x_2 = 38$
    et on a les points (0 , 38) et (19 , 0)

- La droite de maximalisation sera une parallèle à la droite en rouge : $420\, x_1 + 300\, x_2 = A$

  Trouver x_1 ,x_2 qui maximisent A (x_1 , x_2) est l'un des sommets du polygone





On teste les différentes valeurs point B de coordonnées (6 , 16) unique solution réalisable optimale.

On applique donc les coordonnées de B dans *Z pour*

On voit que le gain est maximal et on obtient :

420 * 16 +300 * 6 = 8520 € .

il faut donc produire :

16 tables et **6** chaises

Exercice

Exercice :

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles.

Il doit réaliser des bouquets il a les possibilités suivantes :

1- Des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant

8 lys, 10 roses et 20 jonquilles,

2- des bouquets qu'il vend 50 euros qui comprennent

5 lys, 20 roses et 10 jonquilles.

Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ? → voir solution en TD

Résolution algébrique -1

Rappel

Soit une matrice A de dimension (m, n) telle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ avec m} < \text{n}$$

Une base de *A est un ensemble de* ***m*** *colonnes de A formant une matrice carrée inversible*

C'est une sous matrice de A de taille

Rappel

Une matrice carrée C est inversible si :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \; ; \; \det(c) \neq 0$$

$$\mathrm{C}^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} cofact(c_{11}) & \cdots & cofact(c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cofact(c_{n1}) & \cdots & cofact(c_{nn}) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$$

Résolution algébrique -2

Base et Variables basiques

- Toute matrice B formé de m colonnes linéairement indépendantes de A est une base (ordonnée) du système
- Les colonnes de B sont dites basiques, les autres sont dites hors base
- Les variables associées aux colonnes de B sont dites variable basiques, les autres variable sont dites **hors base**
- La liste ordonnée des variables basique (ou de leurs indices) sera aussi appelée base.

Résolution algébrique -3

Transformation d'une inéquation:

On complète chaque équation par une variable d'écart $\boxed{x_n}$
d'écart :

$$\underbrace{a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \le b_1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} = b_1}$$

En appliquant ce principe aux m inéquations :

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \le b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \le b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

Résolution algébrique -4

Ecriture matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & \cdots & a_{1n}x_n & x_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & \cdots & a_{mn}x_n & 0_1 & \cdots & 0 & x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

X = [x_B,x_N]

N

B

La solution particulière obtenue en fixant à zéro les variables hors base est appelée solution basique associée à la base B.

Résolution algébrique -5

Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on doit alors adapter C :

$$C = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c x_n \underbrace{+0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \cdots + 0x_{n+m}}$$

Résolution algébrique - 6

On obtient les sous matrices ***B*** et ***N*** de ***A*** ainsi que x_B et x_N de $\boldsymbol{X}$ **:**

$$\left(\overbrace{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}^{B} \; \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{N}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

on a donc :

$$Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

Résolution algébrique – 7

Récapitulatif :

La matrice *A passe à une matrice de dimension* (m, n+m)
X *passe à une matrice de dimension (n+m, 1) et C à une dimension (1, n+m) (C est* complétée avec m « 0 »).

On a remplacé les inégalités par des égalités pour avoir un système d'équations qu'on peut exprimer par une formulation matricielle, **mais** on augmente le nombre de variables (variables d'écarts). On obtient un système lié.

une variable d'écart exprime le surplus pour la ressource exprimée par la contrainte.

Retour à l'exemple 1

Rappel de l'exo1

Un ébéniste fabrique des chaises et des tables.

Il peut consacrer au plus 1040 heures et 38 tronçons de bois.

On transforme les matrices pour faire disparaître les inégalités :

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 420 & 300 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 420x_1 + 300x_2$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

La matrice A est de dim 2, les bases seront des matrices de dimension (2,2)

x_3 : exprime le reste en main d'œuvre par rapport à la limite fixée

x_4 : exprime le reste en quantité de bois par rapport à la limite fixée

Comment faire ?

On transforme les différentes matrices pour faire disparaître les inégalités des contraintes :

$$\begin{pmatrix} 50 & 40 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 420 & 300 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice *A est de dimension 2 donc les bases seront des matrices de dimension (2, 2). Pour une base M de A, On utilisera les* formules suivantes :

Retour à l’exemple 1

$$\det M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \iff$$
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Transformation : système étendu :

$$Ax = (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \iff Bx_B + Nx_N = b$$
$$d'où \quad Bx_B = b - Nx_N$$

Suite

$x_B = B^{-1}\ N x_N$

D'où : $Bx_B = b - Nx_N$ → on cherche les cas où $x_N = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \det B = -30 \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ; x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$$

C'est le point **B** du graphique

$$\boxed{x = (16 \quad 6 \quad 0 \quad 0)^t}$$

Suite

$$B_2 = \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \det B_2 = -2; B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -25 \end{pmatrix}$$

$$x_N = (0 \quad 0)^t; x_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 90 \end{pmatrix}$$

C’est le point **C** du graphique

$$\boxed{x = (19 \quad 0 \quad 90 \quad 0)^t}$$

Retour à l'exemple 1

$$B_3 = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;\; \det B_3 = 50 \quad \Rightarrow B_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{50} & 0 \\ -\frac{1}{25} & 1 \end{pmatrix} \;;\; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_B = \begin{pmatrix} 20.8 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

C'est le point ***hors contraintes*** du graphique

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 20.8 & 0 & 0 & 3.6 \end{pmatrix}^t}$$

suite

$$B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -40 \end{pmatrix} \; ; \; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} 38 \\ -480 \end{pmatrix}$$

$$B_5^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{40} & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} 26 \\ 12 \end{pmatrix}$$

x * est le point ***hors contraintes*** du graphique ; x ** est le point ***A*** du graphique

$$x^* = (0 \quad 38 \quad -480 \quad 0)^t$$

$$x^{**} = (0 \quad 26 \quad 0 \quad 12)^t$$

suite

$$B_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_B = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

C' est le point ***O*** du graphique

$$x^* = (0 \quad 0 \quad 1040 \quad 38)^t$$

Le report des différentes valeurs dans Z montrent que B est bien la valeur qui optimise Z=Cx

Solution $x = (16 \quad 6 \quad 0 \quad 0)^t$

Propriétés

- L’ensemble des sommets du polygone convexe formé par l’ensemble des solutions réalisables correspondent à l’ensemble de base réalisable

- La maximisation (ou minimisation) de Z est obtenue en un des sommets du polygone convexe formé par l’ensemble des solutions réalisables, c’est donc une solution de base réalisable.