Ciências e Tecnologias Espaciais

Sensores e Atuadores Espaciais

Métodos Numéricos e Aplicações em Clusters I – Básico

Lista de Exercícios 1

Professor: Angelo Passaro
Aluno: Lucas Kriesel Sperotto

22 de Março de 2010

1 – Escrever uma curta monografia, com referências, para discutir o conceito e características de EDPs.

Vários fenômenos da natureza (Ótica, Magnetismo, Eletricidade, Biologia, Química,...) podem ser modelados matematicamente por equações compostas por derivadas parciais de funções dependentes de coordenadas espaciais e/ou temporais.

De acordo com [1] e [2], uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve as derivadas parciais de uma função desconhecida de duas ou mais variáveis independentes. Sua classificação fornece informações sobre condições auxiliares, orienta na escolha de métodos de solução e informações gerais sobre o comportamento da solução.

A ordem de uma EDP é definida pela ordem da maior derivada presente na EDP. Por exemplo, a equação de Poisson ($\nabla^2 u = f(x, y)$) é uma EDP se segunda ordem.

Para [1] as equações diferenciais parciais de segunda ordem podem ser escritas na forma geral:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

Onde A, B e C são funções de x e y e D é uma função de x, y, u, $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$. As EDPs podem ser classificadas através dos valores dos termos dos coeficientes de segunda ordem (A, B e C). Na tabela 1 têm-se as três categorias de equações diferenciais parciais de segunda ordem com relação à $B^2 - 4AC$.

Tabela 1 - Classificação das EDPs de Segunda Ordem

$\boldsymbol{B^2 - 4AC}$	**Categoria**
< 0	Elíptica
$= 0$	Parabólica
> 0	Hiperbólica

Para [2] uma EDP é dita *linear* se puder ser escrita como uma combinação linear de u e suas derivadas com respeito às variáveis independentes e com coeficientes que dependam apenas das variáveis independentes; *Homogênea* se os coeficientes não dependam explicitamente das variáveis independentes (se aparecer um coeficiente dependente apenas das variáveis independentes ela é *não homogênea*); E *quase linear* se a EDP for uma combinação linear das derivadas e os coeficientes de maior derivada (n) depender de derivadas de no máximo uma ordem a menos ($n - 1$).

As EDP's também podem ser classificadas segundo suas curvas características. Estas curvas são caminhos no domínio da solução ao longo dos quais a informação se propaga. Descontinuidades nas derivadas da variável dependente também se propagam através das características.

Para a obtenção da curva característica tomamos uma EDP quase linear de segunda ordem na notação simplificada:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$$

Para [2] uma pergunta base deve ser feita: existe uma região onde a segunda derivada é descontinua? Para responder a essa pergunta, devemos determinar u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}. [2] apresenta uma forma mais elegante de obter a equação da curva característica, preferi seguir os passos mostrados por [3] dada sua simplicidade.

Rearranjando a EDP definida anteriormente:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = -Du_x - Eu_y - Fu$$

Escrevemos as derivadas completas de u pela regra da cadeia:

$$d(u_x) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy\right)$$

Obtendo:

$$d(u_x) = \left(u_{xx}dx + u_{xy}dy\right)$$

De forma análoga para u_y:

$$d(u_y) = \left(u_{yx}dx + u_{yy}dy\right)$$

Isolando as derivadas segundas de u, podemos escrever um sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Du_x - Eu_y - Fu \\ d(u_x) \\ d(u_y) \end{bmatrix}$$

Para garantir que o sistema tenha infinitas soluções na curva tomamos o determinante da matriz igual à zero:

$$A(dy)^2 - B(dxdy) + C(dx)^2$$

E sua solução é:

$$h = \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Dada à solução em um ponto P em um domínio $D(x, y)$, [3] demonstra o conceito de Domínio de Dependência (DD) e Limite de Influência (LI). O primeiro define a região que influencia a solução no ponto P e o segundo a região onde a solução depende do ponto P.

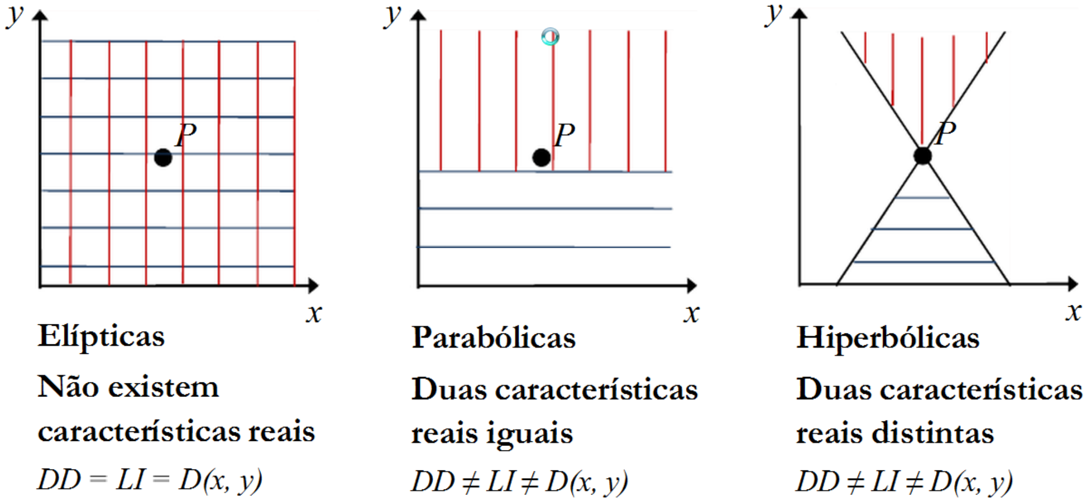

Figura 1 – Em azul DD e em vermelho LI (a): $B^2 - 4AC < 0$; (b): $B^2 - 4AC = 0$; (c): $B^2 - 4AC > 0$ (Figura retirada de [3])

2 – Partindo de $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = -\left(du_x + eu_y + fu - g(x, y)\right) = H$ realizar todo o desenvolvimento matemático que leva a $Au_{\xi\xi} + Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \left(a\xi_{xx} + b\xi_{xy} + c\xi_{yy}\right)u_\xi + \left(a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy}\right)u_\eta = g(\xi, \eta)$ e a $B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)J^2$.

Simbologia utilizada para a derivada primeira $\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$ e derivada segunda $\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$.

Transformação para um espaço homogêneo:

Pode-se escrever as coordenadas homogêneas em função das coordenadas normais $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$ e definir um sistema para transformação das coordenadas $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{bmatrix}$ onde o determinante da matriz de transformação (matriz Jacobiana) é definido por $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$.

Para aplicar a transformação nas derivadas primeiras, basta resolver o sistema resultando em :

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

Para aplicar a transformação nas derivadas segundas: podemos prosseguir da seguinte forma:

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x) + \frac{\partial}{\partial x}(u_\eta \eta_x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x) = \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\xi_x + u_\xi \xi_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\eta \eta_x) = \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\eta_x + u_\eta \eta_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\xi}\eta_x)\xi_x + u_\xi \xi_{xx} + (u_{\xi\eta}\xi_x + u_\eta \eta_x\ )\eta_x + u_\eta \eta_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx}$$

$$\boldsymbol{u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_y) + \frac{\partial}{\partial x}(u_\eta \eta_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_y) = \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\xi_y + u_\xi \xi_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\eta \eta_y) = \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\eta_y + u_\eta \eta_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\xi}\eta_x)\xi_y + u_\xi \xi_{xy} + (u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\ )\eta_y + u_\eta \eta_{xy}$$

$$\boldsymbol{u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y + u_\xi \xi_{xy} + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_x\,\eta_y + u_\eta \eta_{xy}}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) = \frac{\partial}{\partial y}(u_\xi \xi_y) + \frac{\partial}{\partial y}(u_\eta \eta_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_\xi \xi_y) = \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\xi_y + u_\xi \xi_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_\eta \eta_y) = \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\eta_y + u_\eta \eta_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y)\xi_y + u_\xi \xi_{yy} + (u_{\xi\eta}\xi_y + u_\eta \eta_y\ )\eta_y + u_\eta \eta_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\right) = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}$$

$$\boldsymbol{u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\right) = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}}$$

Tomando a expressão inicial:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = -\left(du_x + eu_y + fu - g(x,y)\right) = H$$

Substituindo as derivadas nas coordenadas transformadas:

$$a(u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}) + b(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_x + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}) + c(u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}) = -\left(d(u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x) + e(u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y) + fu - g(\xi,\eta)\right)$$

Resolvendo:

$$au_{\xi\xi}\xi_x^2 + au_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2au_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + au_\xi\xi_{xx} + au_\eta\eta_{xx} + bu_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + bu_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + bu_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + bu_{\xi\eta}\xi_y\eta_x + bu_\xi\xi_{xy} + bu_\eta\eta_{xy} + cu_{\xi\xi}\xi_y^2 + cu_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2cu_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + cu_\xi\xi_{yy} + cu_\eta\eta_{yy} = -\left(du_\xi\xi_x + du_\eta\eta_x + eu_\xi\xi_y + eu_\eta\eta_y + fu - g(\xi,\eta)\right)$$

Isolando as derivadas segundas

$$au_{\xi\xi}\xi_x^2 + au_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2au_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + au_\xi\xi_{xx} + au_\eta\eta_{xx} + bu_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + bu_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + bu_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + bu_{\xi\eta}\xi_y\eta_x + bu_\xi\xi_{xy} + bu_\eta\eta_{xy} + cu_{\xi\xi}\xi_y^2 + cu_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2cu_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + cu_\xi\xi_{yy} + cu_\eta\eta_{yy} = -\left(du_\xi\xi_x + du_\eta\eta_x + eu_\xi\xi_y + eu_\eta\eta_y + fu - g(\xi,\eta)\right)$$

Resolvendo:

$$Au_{\xi\xi} + Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + au_\xi\xi_{xx} + au_\eta\eta_{xx} + bu_\xi\xi_{xy} + bu_\eta\eta_{xy} + cu_\xi\xi_{yy} + cu_\eta\eta_{yy} = -\left(du_\xi\xi_x + du_\eta\eta_x + eu_\xi\xi_y + eu_\eta\eta_y + fu - g(\xi,\eta)\right)$$

Sendo A, B e C definidos por:

$$\begin{cases} A = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B = 2a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + 2c\xi_y\eta_y \\ C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \end{cases}$$

Isolando as derivadas primeiras:

$$Au_{\xi\xi} + Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + au_\xi\xi_{xx} + au_\eta\eta_{xx} + bu_\xi\xi_{xy} + bu_\eta\eta_{xy} + cu_\xi\xi_{yy} + cu_\eta\eta_{yy} + du_\xi\xi_x + du_\eta\eta_x + eu_\xi\xi_y + eu_\eta\eta_y + fu = g(\xi,\eta)$$

Resolvendo:

$$Au_{\xi\xi} + Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \left(a\xi_{xx} + b\xi_{xy} + c\xi_{yy}\right)u_\xi + \left(a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy}\right)u_\eta = g(\xi,\eta)$$

Obtém-se a expressão dada como objetivo do exercício:

$$Au_{\xi\xi} + Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \left(a\xi_{xx} + b\xi_{xy} + c\xi_{yy}\right)u_\xi + \left(a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy}\right)u_\eta = g(\xi,\eta)$$

Tomando a expressão dada:

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)J^2$$

Resolvendo o lado Esquerdo da igualdade, substituindo as definições de A, B e C:

$$(2a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + 2c\xi_y\eta_y)^2 - 4(a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)(a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)$$

Resolvendo a primeira parte $(2a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + 2c\xi_y\eta_y)^2$:

$$4a^2\xi_x^2\eta_x^2 + 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 8ac\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_x^2\eta_y^2 + 2b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 + 4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y + 4c^2\xi_y^2\eta_y^2$$

Resolvendo a segunda parte $-4\left(a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2\right)\left(a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2\right)$:

$$-4(a^2\xi_x^2\eta_x^2 + ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + ac\xi_x^2\eta_y^2 + ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 + ac\xi_y^2\eta_x^2 + bc\xi_y^2\eta_x\eta_y + c^2\xi_y^2\eta_y^2)$$

$$-4a^2\xi_x^2\eta_x^2 - 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y - 4ac\xi_x^2\eta_y^2 - 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 - 4b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 - 4ac\xi_y^2\eta_x^2 - 4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y - 4c^2\xi_y^2\eta_y^2$$

Juntando as partes:

$$4a^2\xi_x^2\eta_x^2 + 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 8ac\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_x^2\eta_y^2 + 2b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 + 4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y + 4c^2\xi_y^2\eta_y^2 - 4a^2\xi_x^2\eta_x^2 - 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y - 4ac\xi_x^2\eta_y^2 - 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 - 4b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 - 4ac\xi_y^2\eta_x^2 - 4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y - 4c^2\xi_y^2\eta_y^2$$

$$4a^2\xi_x^2\eta_x^2 + 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 8ac\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_x^2\eta_y^2 + 2b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 + 4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y + 4c^2\xi_y^2\eta_y^2 - 4a^2\xi_x^2\eta_x^2 - 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y - 4ac\xi_x^2\eta_y^2 - 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 - 4b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 - 4ac\xi_y^2\eta_x^2 - 4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y - 4c^2\xi_y^2\eta_y^2$$

$$8ac\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_x^2\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 - 4ac\xi_x^2\eta_y^2 - 2b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - 4ac\xi_y^2\eta_x^2 = (b^2 - 4ac)J^2$$

$$(4ac - b^2)2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_x^2\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 - 4ac\xi_x^2\eta_y^2 - 4ac\xi_y^2\eta_x^2 = (b^2 - 4ac)J^2$$

$$(4ac - b^2)2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + (b^2 - 4ac)\xi_x^2\eta_y^2 + b^2\xi_y^2\eta_x^2 - 4ac\xi_y^2\eta_x^2 = (b^2 - 4ac)J^2$$

$$(4ac - b^2)2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + (b^2 - 4ac)\xi_x^2\eta_y^2 + (b^2 - 4ac)\xi_y^2\eta_x^2 = (b^2 - 4ac)J^2$$

$$-2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y(b^2 - 4ac) + (b^2 - 4ac)\xi_x^2\eta_y^2 + (b^2 - 4ac)\xi_y^2\eta_x^2 = (b^2 - 4ac)J^2$$

$$(b^2 - 4ac)(\xi_x^2\eta_y^2 - 2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2) = (b^2 - 4ac)J^2$$

$$(b^2 - 4ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 = (b^2 - 4ac)J^2$$

$$(b^2 - 4ac)J^2 = (b^2 - 4ac)J^2$$

Referências:

[1] CHAPRA, Steven C; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. Trad. Helena Castro. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

[2] MATTHEIJ, R.M.M. RIENSTRA, S.W. THIJE BOONKKAMP, J.H.M. ten. **Partial Differential equations – Modeling, Analysis, Computation**, SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, 2005.

[3] http://pt.scribd.com/doc/46204448/01-Intro-EDPs - Acessado em 10/04/2012

[4] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo Com Geometria Analítica – Volume 1**. 3ª Ed. São Paulo: Harbra, 1994.

[5] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo Com Geometria Analítica – Volume 2**. 3ª Ed. São Paulo: Harbra, 1994.

[6] HOFFMAN, Jose D. **Numerical Methods for Engineers and Scientists**. 2ª Ed. New York: McGraw-Hill, 1992.

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation#Classification - Acessado em 10/04/2012

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/First-order_partial_differential_equation - Acessado em 10/04/2012

[9] http://www.scottsarra.org/shock/shockApplet.html - Acessado em 10/04/2012