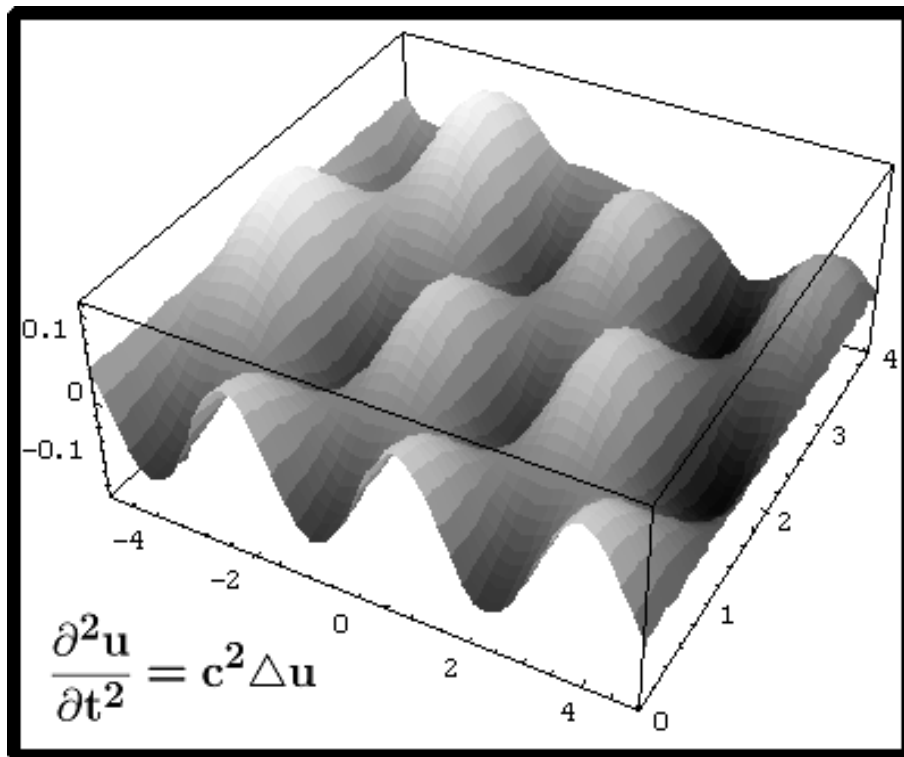




Universidade Estadual do Norte Fluminense

Equações Diferenciais Parciais



Liliana A. L. Mescua
Rigoberto G. S. Castro

Agosto de 2010

Sumário

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Conceitos Fundamentais em EDP | 1 |
| 2.1 | Equação Diferencial Ordinária | 1 |
| 2.2 | Equação Diferencial Parcial | 2 |
| 2.3 | Exemplos de Equações Diferenciais Parciais | 2 |
| 2.4 | Ordem e grau de uma Equação Diferencial Parcial | 2 |
| 2.5 | Exemplos relacionados com ordem e grau de uma EDP | 3 |
| 3 | Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem | 3 |
| 3.1 | Equação diferencial parcial quase-linear | 3 |
| 3.1.1 | Exemplo de EDP quase-linear sobre uma região | 3 |
| 3.2 | Equação diferencial parcial Linear | 3 |
| 3.2.1 | Exemplos de EDPs lineares e não-lineares | 4 |
| 3.3 | EDP homogênea | 4 |
| 4 | Soluções de Equações Diferenciais Parciais | 5 |
| 4.1 | Solução de uma equação diferencial parcial | 5 |
| 4.2 | Solução geral e soluções particulares de uma EDP | 5 |
| 4.3 | Exercícios | 5 |
| 5 | Condições de Contorno e Iniciais | 6 |
| 6 | Classificação | 8 |
| 6.1 | Exercícios: | 10 |
| 6.2 | O tipo de uma EDP é Invariante sob Mudanças de Variáveis | 10 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 7 | Curvas Características e Forma Canônicas | 11 |
| 7.1 | Curvas Características | 11 |
| 7.2 | Formas Canônicas de uma EDP | 12 |
| 7.3 | Exercícios: | 15 |
| 8 | O Método de D'Alembert para Resolver a Equação de Onda | 15 |
| 8.1 | A Corda Infinita | 16 |
| 8.2 | Exercícios | 18 |
| 9 | O Método de Fourier das Variáveis Separáveis | 19 |
| 9.1 | Séries Infinitas | 19 |
| 9.1.1 | Séries de Potências | 20 |
| 9.2 | Séries de Fourier | 24 |
| 9.2.1 | Jean Baptiste Joseph Fourier | 24 |
| 9.3 | Cálculo dos coeficientes de Fourier de $f(x)$ | 26 |
| 9.3.1 | f é de período 2π | 26 |
| 9.3.2 | f é de período $2L$, com $2L \neq 2\pi$ | 29 |
| 9.3.3 | f é par ou ímpar, de período $2L$ | 31 |
| 9.3.4 | f é não periódica | 35 |
| 9.4 | Separação de Variáveis | 36 |
| 9.5 | Exercícios | 38 |
| 10 | Equação de Onda | 40 |
| 10.1 | A corda Finita | 40 |
| 10.2 | Solução por Separação de Variáveis | 42 |
| 10.3 | A Solução de d'Alembert para a Corda Finita | 48 |

| | |
|---|-----------|
| 10.4 Exercícios | 52 |
| 11 Equação do Calor | 53 |
| 11.1 Solução por Separação de Variáveis | 54 |
| 11.2 Exercícios | 57 |
| 12 Equação de Laplace | 58 |
| 12.1 Solução por Separação de Variáveis | 58 |
| 12.2 Exercícios | 61 |

1 Introdução

Muitos fenômenos que ocorrem na Ótica, Eletricidade, Ondulatória, Magnetismo, Mecânica de Flúidos, Biologia, etc, podem ser descritos através de uma equação diferencial parcial.

Na maioria das vezes faz-se a tentativa de transformar a equação diferencial parcial em uma ou mais equações diferenciais ordinárias, com o objetivo de simplificar os trabalhos na obtenção da solução do problema. Uma equação diferencial ordinária possui derivadas de apenas uma variável enquanto que uma equação diferencial parcial possui derivadas parciais da função incógnita.

Muitas leis físicas como: Leis de Newton para o resfriamento dos corpos, Equações de Maxwell, Equações de Navier-Stokes e Equações da Mecânica Quântica de Schrödinger são escritas por equações diferenciais parciais que relacionam o espaço e suas derivadas com o tempo.

Nem todas as equações podem ser construídas a partir de modelos matemáticos reais como é o caso das Equações de Maxwell, mas o estudo de Modelos é fundamental para explicar como e porque funcionam muitas equações diferenciais parciais.

O uso intenso de derivadas e integrais neste contexto é fundamental e depende da interpretação feita para cada objeto matemático como: velocidade, força, aceleração, fluxo, corrente elétrica, taxa de variação, temperatura, etc.

2 Conceitos Fundamentais em EDP

2.1 Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial ordinária (EDO) na variável dependente y e na variável independente x , é uma equação que pode ser escrita da forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

onde F é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada (ordinária) aparece nessa expressão.

2.2 Equação Diferencial Parcial

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) na variável dependente u e nas variáveis independentes x e y , é uma equação que pode ser posta na forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (2.2)$$

onde F é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada parcial aparece nessa expressão. Note que $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, etc.

2.3 Exemplos de Equações Diferenciais Parciais

1. $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$ é a equação de ondas tridimensional, que modela a propagação de som, da luz ou de outros fenômenos ondulatórios.
2. $u_t = a^2 u_{xx}$ é a equação do calor unidimensional.
3. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$ é a equação do calor bidimensional.
4. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ é a equação de Laplace bidimensional.
5. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ é a equação de Laplace tridimensional.
6. $u_x = x + y$
7. $u_{xxx} + 2yu_{xx} + xu_xu_y + (u_x)^2 = \text{sen}(xy)$

2.4 Ordem e grau de uma Equação Diferencial Parcial

A **ordem** de uma equação diferencial parcial é a ordem da mais alta derivada que ocorre na equação e o **grau** é o expoente da derivada mais alta quando a equação está escrita em uma forma semelhante a uma função polinomial em que as potências fazem o papel das derivadas da ordem respectiva.

2.5 Exemplos relacionados com ordem e grau de uma EDP

No exemplo anterior, as equações dos itens 1, 2, 3, 4 e 5 são de segunda ordem, a do item 6 é de primeira ordem e a do item 7 é de terceira ordem.

3 Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem

3.1 Equação diferencial parcial quase-linear

Uma Equação Diferencial Parcial nas variáveis independentes x , y e na variável dependente $u = u(x, y)$ é dita **quase-linear** (ou **semi-linear**) de segunda ordem sobre um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$, se pode ser posta na forma:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

onde os coeficientes A , B e C das derivadas duplas de u , **somente dependem** das variáveis independentes x e y , isto é:

$$A = A(x, y) \quad B = B(x, y) \quad C = C(x, y)$$

e para todo $(x, y) \in M$ pelo menos um dos coeficientes A , B e C é não nulo, isto é:

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$$

3.1.1 Exemplo de EDP quase-linear sobre uma região

A equação parcial

$$u_{xx} = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, u_{yy}$$

é quase-linear sobre o conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

3.2 Equação diferencial parcial Linear

Uma equação diferencial parcial quase-linear de 2^{da} ordem nas variáveis independentes x , y e na variável dependente $u = u(x, y)$ é dita linear sobre $M \in \mathbb{R}^2$, se pode ser escrita

na forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

onde todos os coeficientes A, B, C, D, E, F e G somente dependem das variáveis independentes x e y e para todo $(x, y) \in M$:

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$$

3.2.1 Exemplos de EDPs lineares e não-lineares

1. Equações lineares

a) $u_{xx} + u_{yy} + u = 0$

b) $u_{xx} + \sin(x)u_{yy} + \cos(x) = 0$

c) $u_{xx} + e^x u_{yy} + 6 = 0$

2. Equações não lineares

a) $uu_{xx} + u_{yy} = 0$

b) $xu_{xx} + yu_{yy} + u^2 = 0$

c) $uu_x + u_{yy} = 0$

Dentre todas as Equações Diferenciais Parciais (EDP), talvez as mais importantes sejam as EDP lineares de segunda ordem.

3.3 EDP homogênea

Uma Equação Diferencial Parcial de segunda ordem é dita não homogênea, se pode ser escrita na forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

onde os coeficientes A, B, C, D, E, F e G podem depender das variáveis x e y , da função $u = u(x, y)$ ou das derivadas de primeira ordem de $u = u(x, y)$ e além disso $G(x, y) \neq 0$ na EDP mais geral de segunda ordem. Se $G(x, y) = 0$ dizemos que a EDP é **homogênea**.

4 Soluções de Equações Diferenciais Parciais

4.1 Solução de uma equação diferencial parcial

Uma função $u = f(x, y)$ é solução de uma equação diferencial parcial

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

sobre um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ se:

1. $f \in C^2(M) \equiv f$ é 2 vezes continuamente diferenciável sobre o conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$;
2. f satisfaz à Equação Diferencial Parcial dada.

4.2 Solução geral e soluções particulares de uma EDP

A solução geral $u = f(x, y)$ de uma EDP sobre um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ é a solução que engloba todas as soluções válidas sobre este conjunto M , enquanto uma solução particular é uma função específica que satisfaz à EDP dada sob uma condição particular.

4.3 Exercícios

1. Dé a ordem das EDP's abaixo

a) $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

b) $u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = u^2 + 1$

c) $u_x u_t = \sin u$

d) $x^3 \partial_x u - u^3 \partial_t u + \partial_x^2 u = x^5 + t^3$

c) $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) - \frac{\partial u}{\partial y} = xyu$

2. Verifique quais as equações abaixo são lineares indicando, nesse caso, se são homogêneas ou não.

a) $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

b) $x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = x + y$

c) $(u_x)^2 - x^2 + u_t = 0$

d) $u_{xx} - u_{tt} = \sin u$

e) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} = xyu$

3. Indique quais, entre as equações dos exercícios 1 e 2 acima são quasi-lineares.

4. Mostrar que $w = f(x + y) + g(x - y)$ é solução geral da equação diferencial parcial $u_{xx} - u_{yy} = 0$, mas todas as outras funções abaixo, definidas sobre $M = \mathbb{R}^2$, são soluções particulares.

a) $u = x^2 + y^2$

b) $u = \sin(x + y)$

c) $u = e^{x+y}$

5. Obter as soluções gerais das equações diferenciais ordinárias:

a) $u'(x) = 0$

b) $u''(x) = 0$

6. Obter as soluções gerais das EDP's:

a) $u_x(x, y) = 0$

b) $u_y(x, y) = 0$

c) $u_{xx}(x, y) = 0$

d) $u_{xy}(x, y) = 0$

5 Condições de Contorno e Iniciais

Uma diferença importante entre EDO's e EDP's é a informação suplementar necessária para a unicidade da solução. Por exemplo, na solução geral de uma EDO linear de ordem n aparecem n constantes arbitrárias: podemos determinar essas constantes impondo condições iniciais, isto é, fixando os valores da solução e de suas derivadas até a ordem

$(n - 1)$ em um determinado ponto. A situação para as EDP's é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral, quando é possível achá-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes (como vimos no exercício 4.3-4), de modo que existe um grau de generalidade muito maior em relação à forma da solução. No caso das EDP's o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções definidas em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; é natural substituir os extremos do intervalo (caso $n = 1$) pelo bordo $\partial\Omega$ da região Ω . Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (*condições de contorno*) temos um *problema de valores de contorno* ou simplesmente *problema de contorno*. Condições de contorno aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (isto é, independentes do tempo); encontraremos muitas vezes condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (5.1)$$

onde α e β são constantes dadas, f é uma função dada em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada de u na direção normal a $\partial\Omega$. No caso em que $\beta = 0$, a condição (5.1) é conhecida como **condição de Dirichlet**; no caso em que $\alpha = 0$, temos uma **condição de Neumann**.

Como generalizar o conceito de condições iniciais (no caso de EDO's) para EDP's? Como no caso de EDP's temos mais de uma variável dependente (por exemplo x e t), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo $t=0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$, f e g funções dadas). Observe que no caso $n = 2$ com variáveis x, t isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva $t = 0$; analogamente, no caso $n = 3$, com variáveis x, y, t , fixar $t = 0$ significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície (plano) $t = 0$. Podemos então generalizar o conceito de *condições iniciais* impondo o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva (se $n = 2$) ou superfície (se $n = 3$) inicial; o problema correspondente é um *problema de Cauchy* ou de *valor inicial*.

Os conceitos acima ficarão mais claros com os exemplos a seguir:

Exemplo 5.1. *Um típico Problema com condições iniciais e de contorno para uma Equação Diferencial Parcial do Calor que modela a distribuição de temperatura numa barra isolada*

termicamente a superfície lateral é:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (t, x) \in (0, L) \times (0, +\infty)$$

$$u(0, t) = 0 = u(L, t), \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

onde $u(0, t) = u(L, t) = 0$ é uma condição de contorno de tipo Dirichlet, enquanto que $u(x, 0) = f(x)$ para $x \in (0, L)$ é uma condição inicial. A função f é dada, α^2 é uma constante positiva e procuramos uma solução $u \in C([0, L] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, L) \times (0, +\infty))$. Logo f tem que estar em $C([0, L])$. A interpretação física da condição de contorno é que nas extremidades da barra a temperatura é mantida constante igual a zero.

Por outro lado, a mesma equação do calor pode ter outra condição de contorno:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (t, x) \in (0, L) \times (0, +\infty)$$

$$u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t), \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

cuja interpretação física é que as extremidades barra são isoladas termicamente. Isso quer dizer que nas extremidades o fluxo de calor são nulos. Esta condição de contorno é de tipo Neumann.

Exemplo 5.2. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^2$ um aberto. Então*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \tag{5.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = f$$

é um problema de contorno e de fato um problema de Dirichlet.

6 Classificação

Definição 6.1. *A forma geral de uma equação diferencial parcial de segunda ordem em duas variáveis independentes x e y é*

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = G(x, y, u, u_x, u_y) \tag{6.1}$$

Definição 6.2. (*Classificação de Equações*) A equação diferencial parcial de segunda ordem (6.1) é

1. **Hiperbólica** em (x_0, y_0) , se $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) > 0$
2. **Parabólica** em (x_0, y_0) , se $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) = 0$
3. **Elítica** em (x_0, y_0) , se $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) < 0$

A função $\delta(x, y) = B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y)$ é chamado de **discriminante** da equação (6.1).

Exemplo 6.1.

1. A **Equação da onda** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$ é linear, não homogênea, e desde que $A(x, t) = -1$, $B(x, t) = 0$ e $C(x, t) = 1$ temos que $\delta(x, y) = 4 > 0$. Logo, será tipo hiperbolica no domínio de f .
2. A **Equação do Calor** $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$ é linear, não homogênea, e como $A(x, t) = -1$, $B(x, t) = 0$ e $C(x, t) = 0$ temos que $\delta(x, y) = 0$. Logo, será tipo parabólica no domínio de f .
3. A **Equação de Laplace** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ é linear, não homogênea, e já que $A(x, y) = 1$, $B(x, y) = 0$ e $C(x, y) = 1$ temos que $\delta(x, y) = -4 < 0$. Logo, será tipo elítica no domínio de f .
4. A **Equação de Tricomi** $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é linear, homogênea, e visto que $A(x, y) = y$, $B(x, y) = 0$ e $C(x, y) = 1$, temos que $\delta(x, y) = B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) = -4y$. Logo, a equação será de tipo misto, isto é
 - a) no semiplano $y < 0$, a eq. será hiperbólica,
 - b) no eixo $y = 0$, a eq. será parabólica,
 - c) no semiplano $y > 0$, a eq. será elítica.

6.1 Exercícios:

Classifique as equações abaixo

1. $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$
2. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 4 + 2u_x$
3. $2u_{xx} + 9u_{xy} + 9u_{yy} = xy \ u$
4. $(1 + x^2)^2 u_{xx} - 2(1 + x^2)(1 + y^2)u_{xy} + (1 + y^2)^2 u_{yy} = 0$
5. $(1 + x^2)^2 u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} = 0$
6. $u_{xx} - (1 + x^2)^2 u_{yy} = 0.$

6.2 O tipo de uma EDP é Invariante sob Mudanças de Variáveis

Uma propriedade fundamental é que o tipo de uma EDP é invariante sob mudanças de variáveis “bem comportadas”. Para demonstrar isso, suponha que a mudança de variável $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ são funções com derivadas até segunda ordem contínuas em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) com Jacobiano

$$J(x, y) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

e suponha que $J(x_0, y_0) \neq 0$. Definindo então $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ obtemos pela regra da cadeia,

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx}$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}$$

Portanto, se u é uma solução clássica da equação (6.1), v é uma solução clássica da equação

$$A_1(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + B_1(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C_1(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = G_1(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (6.2)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1(\xi, \eta) &= A(x, y)(\xi_x)^2 + B(x, y)\xi_x\xi_y + C(x, y)(\xi_y)^2 \\ B_1(\xi, \eta) &= 2A(x, y)\xi_x\eta_x + B(x, y)(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C(x, y)\xi_y\eta_y \\ C_1(\xi, \eta) &= A(x, y)(\eta_x)^2 + B(x, y)\eta_x\eta_y + C(x, y)(\eta_y)^2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Calculando o discriminante da equação (6.2) obtemos

$$\delta_1(\xi, \eta) = B_1(\xi, \eta)^2 - 4A_1(\xi, \eta)C_1(\xi, \eta) = \delta(x, y)J(x, y)^2$$

onde $\delta(x, y) = B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)$ é o discriminante da equação (6.1). Como o jacobiano nunca se anula em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) o sinal de $\delta_1(\xi_0, \eta_0)$ é igual ao sinal de $\delta(x_0, y_0)$. Em outras palavras, a equação (6.1) é parabólica (respectivamente hiperbólica, elítica) em (x_0, y_0) se e somente se a equação (6.2) é parabólica (respectivamente hiperbólica, elítica) em (ξ_0, η_0) .

7 Curvas Características e Forma Canônicas

7.1 Curvas Características

As curvas características para equações de segunda ordem são curvas planas ao longo das quais a EDP pode ser escrita numa forma contendo apenas derivadas totais de u_x e u_y . Para a EDP linear

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

definimos a equação diferencial **característica** associada, como:

$$A(x, y)(dy)^2 - B(x, y)(dx)(dy) + C(x, y)(dx)^2 = 0$$

As **curvas características** associadas são as soluções da equação diferencial (ordinária) característica.

Exemplo 7.1. *Exemplo de equações características da equação $u_{xx} - u_{yy} = 0$ definida sobre \mathbb{R}^2 .*

Temos que $A(x, y) = 1$, $B(x, y) = 0$ e $C(x, y) = -1$. Portanto, a equação característica tem a forma

$$(dy)^2 - (dx)^2 = 0$$

que é equivalente às EDO's $dy - dx = 0$ e $dy + dx = 0$ cuja soluções fornecem as curvas características $y - x = C_1$ e $y + x = C_2$, onde C_1 e C_2 são constantes.

Exemplo 7.2. *Equações características da equação de Tricomi* $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ no semi-plano $y < 0$.

A equação característica tem a forma

$$y(dy)^2 + (dx)^2 = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{1}{y}}$$

Logo,

$$\sqrt{-y}dy = \pm dx \implies (-y)^{3/2} = \pm \frac{3}{2}x + C$$

onde C é uma constante arbitrária. Portanto, as curvas características são

$$y = (\pm \frac{3x}{2} + C)^{2/3}$$

Exemplo 7.3. *Equações características da equação de onda* $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ onde $c > 0$ é constante.

A equação característica tem a forma

$$(dx)^2 - c^2(dt)^2 = 0 \implies \frac{dx}{dt} = \pm c$$

Logo, as curvas características são $x + ct = C_1$ e $x - ct = C_2$, onde C_1 e C_2 são constantes.

7.2 Formas Canônicas de uma EDP

Como no caso de cônicas de segundo grau, se a EDP (6.1) é do mesmo tipo em um aberto de \mathbb{R}^2 , podemos achar uma mudança de variável que a coloque em uma forma particularmente simples, a chamada **forma canônica** ou **normal**. A forma canônica de uma equação elítica é:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta), \quad (7.1)$$

e de uma equação parabólica é

$$v_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (7.2)$$

e uma equação hiperbólica tem duas formas canônicas:

$$v_{\xi\eta} = G(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (7.3)$$

ou

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (7.4)$$

O caso hiperbólico tem mais de uma forma canônica porque, embora a equação (7.3) seja normalmente mais simples de resolver, a forma (7.4) é a que generaliza para dimensões maiores.

Para achar uma tal mudança de variáveis é preciso uma certa suavidade dos coeficientes (contínuas e deriváveis) da parte principal. Além disso, a mudança de variável é local, mesmo porque a EDP pode mudar de tipo em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 7.4. *Vamos colocar a equação de onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ na forma (7.3).*

Como vimos no Exemplo 7.3, as curvas características para a equação de onda são da forma $x \pm ct = \text{constante}$. Vamos a fazer então a mudança de variável

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct$$

Como $c > 0$, o jacobiano nunca se anula pois

$$J(t, x) = \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t = c + c = 2c \neq 0$$

Tomando $v(\xi, \eta) = u(x, t)$, obtemos

$$u_{tt} = c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$

e portanto a equação de onda fica

$$-4c^2 v_{\xi\eta} = 0 \implies v_{\xi\eta} = 0$$

Exemplo 7.5. Vamos colocar a equação de Tricomi $yu_{xx} + u_{yy} + 0$ na forma (7.3) no semi-plano $y < 0$.

Como vimos no exemplo 7.2 as curvas características são da forma $(-y)^{3/2} \pm \frac{3x}{2} = \text{constante}$. Vamos a fazer então a mudança de variável

$$\begin{aligned}\xi &= (-y)^{3/2} + \frac{3x}{2} \\ \eta &= (-y)^{3/2} - \frac{3x}{2}\end{aligned}$$

Como $y < 0$, as funções ξ e η são infinitamente diferenciáveis com jacobiano

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{-9(-y)^{1/2}}{2} \neq 0$$

Tomando $v(\xi, \eta) = u(t, x)$, obtemos

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \frac{9}{4}v_{\xi\xi} - \frac{9}{2}v_{\xi\eta} + \frac{9}{4}v_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= \frac{3}{4}(-y)^{-1/2}(v_{\xi} + v_{\eta}) - \frac{9}{4}y(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta})\end{aligned}$$

e portanto v satisfaz a equação

$$v_{\xi\eta} = -\frac{1}{12}\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)^{-1/3}(v_{\xi} + v_{\eta}).$$

Exemplo 7.6. Vamos colocar na forma canônica a equação

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + xu_{yy} = u_x + u_y \tag{7.5}$$

A EDP (7.5) é parabólica no plano inteiro (verifique!) e, sua equação característica é

$$x(dy)^2 - 2x(dx)(dy) + x(dx)^2 = 0$$

Logo, para $x \neq 0$ as curvas características são as retas $y = x + K$, K uma constante arbitrária. Fazendo então a mudança de variável

$$\begin{aligned}\xi &= y - x \\ \eta &= y + x\end{aligned}$$

e tomando $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, u é solução de (7.5) se e somente se v satisfaz

$$(\eta - \xi)v_{\eta\eta} = v_{\eta}.$$

Não discutiremos o caso elítico por ser mais complicado. Observamos apenas que é possível repetir formalmente o que fizemos no caso hiperbólico com o auxílio de funções complexas.

7.3 Exercícios:

1. Calcule as curvas características (se existirem) das equações do exercício 6.1
2. Coloque as equações abaixo na sua forma canônica:

(i) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$

(ii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u + 2u_y$

(iii) $(1 + x^2)^2 u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} = 0$

(iv) $(1 + x^2)^2 u_{xx} - 2(1 + x^2)(1 + y^2)u_{xy} + (1 + y^2)^2 u_{yy} = u^2 x$

(v) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$

(vi) $u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} = 0$

8 O Método de D'Alembert para Resolver a Equação de Onda

Estudaremos agora as vibrações transversais de pequena grandeza que ocorrem num mesmo plano para um cordão que pode ser uma corda de violão, de piano, um fio metálico, etc.

Consideremos um cordão flexível que na posição de repouso coincide com eixo OX. Seja $u = u(x, t)$ a função que representa o desvio da partícula no instante t e na posição x . Logo, a equação de onda Hiperbólica é dada por

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (8.1)$$

onde c é uma constante positiva. Como vimos no exemplo 7.4, as curvas características da equação (8.1) são as retas $x \pm ct = \text{constante}$. Fazendo então a mudança de variável

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{aligned} \quad (8.2)$$

$v(\xi, \eta) = u(x, t)$ satisfaz a EDP

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad (8.3)$$

Mas a EDP (8.3) pode ser resolvida facilmente integrando diretamente primeiro em η e depois em ξ para obter

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) \quad (8.4)$$

onde φ e ψ são funções arbitrárias (de classe C^2). Voltando às variáveis x e t , temos que

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \quad (8.5)$$

Neste exemplo simples, o uso das características nos permitiu achar a solução geral da equação.

Se considerarmos t como sendo o tempo, a transformação $\xi = x + ct$ representa a translação do sistema de coordenadas à esquerda com velocidade c . Desta forma, a função $u(x, t) = \varphi(x + ct)$ descreve uma onda (com formato do gráfico da função φ) movendo-se para esquerda com velocidade c . De maneira análoga, a função $u(x, t) = \psi(x - ct)$ descreve uma onda movendo-se para a direita com velocidade c . Portanto a solução geral (8.10) da equação descreve a superposição de duas ondas movendo-se com velocidade c , uma para esquerda, outra para a direita.

Exemplo 8.1. Vamos tomar $\varphi = \psi$ com

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 4, \\ -x - 4 & \text{se } -4 \leq x < -2, \\ x & \text{se } -2 \leq x < 2, \\ -x + 4 & \text{se } 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

A figura 8.1 mostra o gráfico da função $u(x, t) = \varphi(x + t) + \varphi(x - t)$ para alguns valores de t .

8.1 A Corda Infinita

A equação unidimensional da onda que modela as pequenas oscilações transversais de uma corda infinita sujeita a duas condições iniciais é o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & f \in C^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x, 0) = g(x) & g \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (8.6)$$

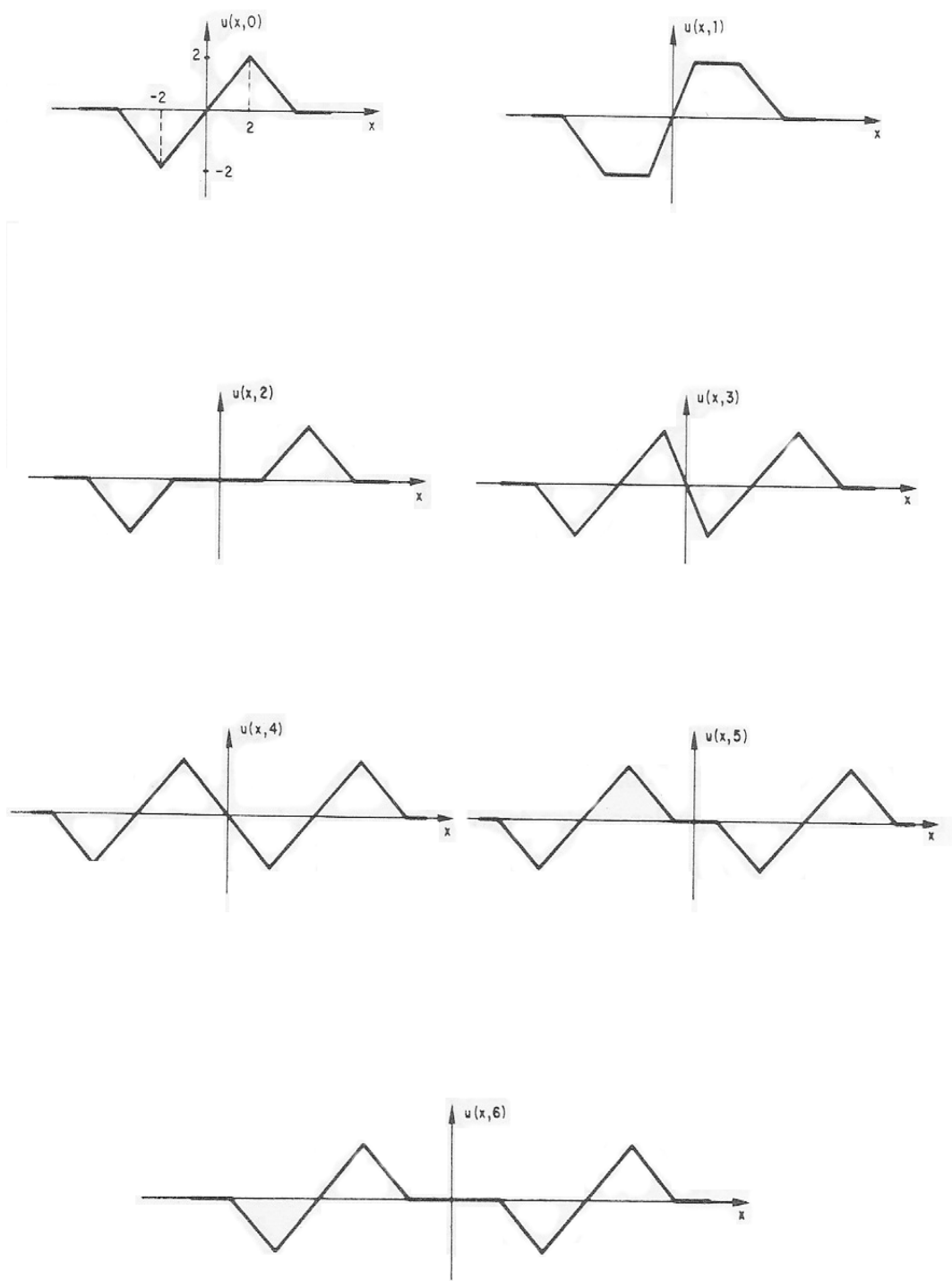


Figura 8.1: O gráfico da função $u(x, t_0)$ para alguns valores de t .

onde $f = f(x)$ é a posição inicial e $g = g(x)$ é a velocidade inicial da corda.

Como a solução da equação de onda é da forma

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

usando as condições iniciais poderemos escrever:

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \psi(x) &= f(x) \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) &= g(x)\end{aligned}\tag{8.7}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x) \\ \psi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x)\end{aligned}\tag{8.8}$$

Integrando as equações (8.8) de zero a x , temos que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds \\ \psi(x) &= \psi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds\end{aligned}\tag{8.9}$$

Como de (8.7), $\varphi(0) + \psi(0) = f(0)$ obtemos

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\tag{8.10}$$

Então, se u é solução de (8.6), u é dada por (8.10). (Verifique que de fato u definida por (8.10) é solução de (8.6)...!!!)

A expressão (8.10) mostra claramente que o valor da solução no ponto (x_0, t_0) depende apenas dos dados iniciais no intervalo fechado com extremos $x_0 - ct_0$ e $x_0 + ct_0$: os dados iniciais podem ser alterados arbitrariamente fora desse intervalo sem mudar o valor da solução no ponto (x_0, t_0) . Esse intervalo é chamado o intervalo de dependência do ponto (x_0, t_0) (Ver fig 8.2).

8.2 Exercícios

1. Resolva a equação de onda (8.6) para $c = 1$, $g \equiv 0$ e $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Calcular no ponto (2,10) o valor da solução da equação de onda (8.6) para $c = 1$, $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2$.

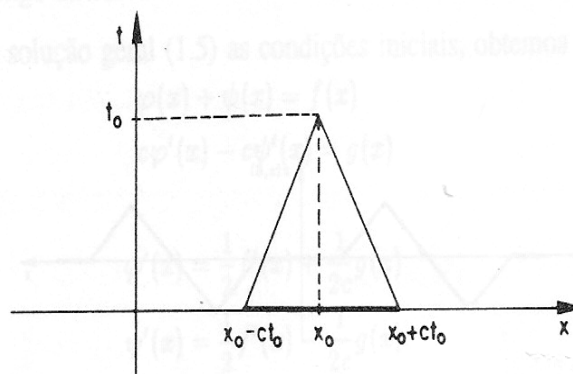


Figura 8.2: O intervalo de dependência do ponto (x_0, t_0) .

3. Ache todas as soluções em $C^2(\mathbb{R}^2)$ do problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = 1, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

onde $c > 0$ é constante.

4. Ache todas as soluções em $C^2(\mathbb{R}^2)$ do problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

onde $c > 0$ é constante.

5. Verifique que u definida por (8.10) é solução de (8.6).

9 O Método de Fourier das Variáveis Separáveis

9.1 Séries Infinitas

Um processo que intrigou matemáticos por séculos foi a soma de infinitos termos, a qual pode resultar em um número, como em

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

Outras vezes a soma infinita era infinita, como em

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty,$$

e algumas vezes era impossível definir a soma infinita, como em

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ?$$

Nesta seção, estudaremos como as séries infinitas formam a base para uma técnica notável que nos permite expressar funções diferenciáveis como polinômios infinitos (chamados de séries de potências) e, ao mesmo tempo, calcular o erro quando truncamos esses polinômios para torná-los finitos. Veremos também como usar somas infinitas de termos trigonométricos, chamados séries de Fourier, para representar funções importantes usadas nas aplicações da ciência e engenharia.

9.1.1 Séries de Potências

Definição 9.1. *Uma série de potência de $(x - a)$ é uma soma infinita da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \dots$$

A seguir uma técnica mais geral para a construção de séries de potências que representam funções diferenciáveis.

Teorema 9.1. *(Teorema de Taylor) Se $f(x)$ é uma função que tem todas as derivadas até a $(n + 1)$ -ésima ordem, numa vizinhança I do ponto \underline{a} (i.e: I é um intervalo que contém o ponto \underline{a}), então para cada $x \in I$ existe um número c entre x e \underline{a} tal que*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \mathcal{R}_n(x) \quad (9.1)$$

onde o termo complementar $\mathcal{R}_n(x)$ se calcula segundo a fórmula

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}. \quad (9.2)$$

Observação 9.1. *Se $\mathcal{R}_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in I$, dizemos que a série de Taylor gerada por f em torno de \underline{a} converge para f em I e escrevemos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \quad (9.3)$$

Exemplo 9.1. Represente em séries de Taylor as seguintes funções com $a = 0$.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. e^x | 5. $\cosh x$ |
| 2. $\text{sen } x$ | 6. $\ln(1+x)$ |
| 3. $\cos x$ | 7. $\frac{1}{1-x}$ |
| 4. $\sinh x$ | 8. $(1+x)^n$ |

Sol.:

1. Se $f(x) = e^x$, então $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1, \dots$. Logo,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{R}_n(x) \end{aligned} \quad (9.4)$$

onde

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (9.5)$$

Consequentemente,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Se $f(x) = \text{sen } x$, então $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(iv)}(0) = 0 \dots$, logo

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \mathcal{R}_n(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \mathcal{R}_n(x), \end{aligned} \quad (9.6)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\mathcal{R}_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{2n}(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.7)$$

Consequentemente,

$$\text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

3. Se $f(x) = \cos x$, então $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(iv)}(0) = 1 \dots$,
logo

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x),\end{aligned}\quad (9.8)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\mathcal{R}_{2n-1}(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.9)$$

Consequentemente,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}.$$

4. Se $f(x) = \sinh x$, então $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$, $f^{(iv)}(0) = 0 \dots$,
logo

$$\begin{aligned}\sinh x &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x),\end{aligned}\quad (9.10)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\mathcal{R}_{2n-1}(x) = \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{2n}(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.11)$$

Consequentemente,

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

5. Se $f(x) = \cosh x$, então $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(iv)}(0) = 1 \dots$,
logo

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x),\end{aligned}\quad (9.12)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\mathcal{R}_{2n-1}(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{2n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.13)$$

Consequentemente,

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}.$$

6. Se $f(x) = \ln(1+x)$, então $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1!$, $f'''(0) = 2!$, $f^{(iv)}(0) = -3! \dots$, logo

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{-3!}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \mathcal{R}_n(x), \end{aligned} \quad (9.14)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.15)$$

Consequentemente,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k.$$

7. Se $f(x) = \frac{1}{1-x}$, então $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2!$, $f'''(0) = 3!$, $f^{(iv)}(0) = 4! \dots$, logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \dots + \frac{n!}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \mathcal{R}_n(x), \end{aligned} \quad (9.16)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\mathcal{R}_n(x) = x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.17)$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

8. Se $f(x) = (1+x)^\alpha$, então $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \dots$, logo

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \mathcal{R}_n(x), \end{aligned} \quad (9.18)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (9.19)$$

Consequentemente,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k.$$

9.2 Séries de Fourier

9.2.1 Jean Baptiste Joseph Fourier

Os primeiros trabalhos de Fourier sobre o problema da propagação de calor e sobre o uso das séries de Fourier datam do período entre 1804 e 1807. Em 21 de Dezembro desse último ano, Fourier apresentou, em uma memorável sessão da Academia Francesa das Ciências, um trabalho que iria abrir um novo capítulo na história da matemática: a criação da Análise Armônica, ou como também se conhece através de seus trabalhos, análise de Fourier.



Figura 9.1: Jean Baptiste Joseph Fourier.

Em 1822 apresentou sua obra *Theorie analytique de la Chaleur* (Teoria analítica do calor), onde havia deduzido uma equação que descrevia a condução do calor através dos corpos sólidos, a equação do calor ($u_t = k u_{xx}$), mas apresenta também uma forma excepcional para resolver inúmeras equações diferenciais parciais, o método de separação de variáveis, procedimento que de certo modo, havia sido utilizado já por Bernoulli.

A aplicação da técnica de separação de variáveis da equação do calor, o conduziu a escrever a solução em forma de séries trigonométricas, e ainda chegou a afirmar que qualquer função $f(x)$ periódica de período 2π , poderia se escrever como uma série da forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)].$$

E para a equação acima, encontrou as fórmulas (de Fourier) que permitem calcular os coeficientes da série associada a função.

Devemos admitir que o trabalho original de Fourier está longe do rigor que é exigido na atualidade, e muitas hipóteses foram tomadas sem demonstrações. A idéia de somas infinitas, convergência pontual e convergência uniforme ainda não tinham sido estabelecidas como nos moldes atuais. Com o desenvolvimento da análise, o suporte que faltava para o trabalho de Fourier foi colocado com êxito, mostrando que suas idéias e intuições estavam absolutamente corretas. Apesar da falta de rigor, não devemos desmerecer de forma alguma o trabalho de Fourier. Muito pelo contrário, desprovido das ferramentas matemáticas modernas, ele conseguiu chegar muito longe e apontar um caminho promissor para o desenvolvimento da matemática na época. A análise de Fourier mostrou-se tão importante que constitui atualmente um ramo específico da matemática.

Definição 9.2. *A série de funções da forma*

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \quad (9.20)$$

ou simplificada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} \quad (9.21)$$

*chama-se de **série trigonométrica**. Os números constantes a_0, a_1, \dots, a_k e b_1, b_2, \dots, b_k são os coeficientes da série.*

Definição 9.3. *No conjunto de pontos x em que a série (9.21) for um número finito, ela define uma função f cujo valor em cada ponto x , é a soma da série para este valor. Neste caso, a série (9.21) é chamada de **série de Fourier** de f e*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}. \quad (9.22)$$

O nosso objetivo é determinar que funções podem ser representadas como a soma de uma série de Fourier e achar um processo para calcular os coeficientes da série de Fourier.

Previamente lembremos a seguinte definição.

Definição 9.4. *Uma função f é **periódica**, se $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$. Dizemos que T é o período de f .*

Exemplo 9.2. A função $\sin 5x = \sin 5(x + \frac{2\pi}{5})$, é uma função periódica de período $T = \frac{2\pi}{5}$. Com efeito, $\sin 5(x + \frac{2\pi}{5}) = \sin(5x + 2\pi) = \sin 5x$

Observação 9.2. Como as funções seno e cosseno são periódicas então a função (9.22) é periódica.

9.3 Cálculo dos coeficientes de Fourier de $f(x)$

Queremos calcular os coeficientes de Fourier de uma função $f(x)$ contínua por partes com uma representação em série de Fourier similar a (9.22). Consideraremos os seguintes casos:

- f é uma função de período 2π .
- f é uma função de período $2L \neq 2\pi$.
- f é uma função par ou ímpar de período $2L$.
- f é uma função não periódica.

9.3.1 f é de período 2π

Seja $f(x)$ definida em $[-\pi, \pi]$ tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (9.23)$$

Integrando ambos lados de (9.23) no intervalo $[-\pi, \pi]$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx. \quad (9.24)$$

Calculando por separado cada integral do segundo membro temos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx &= a_0 \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx dx &= a_k \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_k \left(\frac{\sin k\pi - \sin(-k\pi)}{k} \right) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx dx &= -b_k \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -b_k \left(\frac{\cos k\pi - \cos(-k\pi)}{k} \right) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo as equações anteriores em (9.24) temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi.$$

Portanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (9.25)$$

Por outro lado, multiplicando ambos os termos da equação (9.23) por $\cos nx$ e integrando em $[-\pi, \pi]$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} dx \\ &= \pi a_n, \end{aligned} \quad (9.26)$$

já que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \pi, & n = k \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0, \quad \forall k, n. \quad (9.27)$$

Logo,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (9.28)$$

Analogamente, multiplicando (9.23) por $\sin nx$ e integrando esta expressão em $[-\pi, \pi]$ temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} dx. \quad (9.29)$$

Usando (9.27) e a seguinte identidade,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \pi, & n = k \end{cases} \quad (9.30)$$

obtem-se que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (9.31)$$

Os coeficientes determinados pelas formulas (9.25), (9.28) e (9.31) chamam-se coeficientes de Fourier da função f , e a série trigonométrica (9.21) com tais coeficientes é chamada **série de Fourier** da função f .

Exemplo 9.3. Ache a série de Fourier da função periódica f no intervalo $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi] \end{cases} \quad (9.32)$$

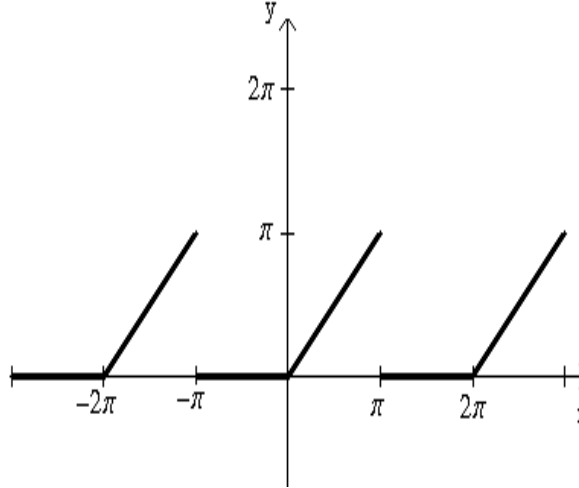


Figura 9.2:

Sol.: Como esta função é periódica em $[-\pi, \pi]$ (Fig. 9.2), então usando (9.25), (9.28) e (9.31) temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ x \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k} dx \right\} = -\frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{\cos kx}{k^2 \pi} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{k^2 \pi} (\cos(k\pi) - 1) \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{k} \cos k\pi + \frac{\sin kx}{k^2} \Big|_0^{\pi} \right\} \\ &= -\frac{1}{k} \cos k\pi \end{aligned} \quad (9.35)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2 \pi} (\cos(k\pi) - 1) \cos kx - \frac{1}{k} \cos k\pi \sin kx \right\} \end{aligned} \quad (9.36)$$

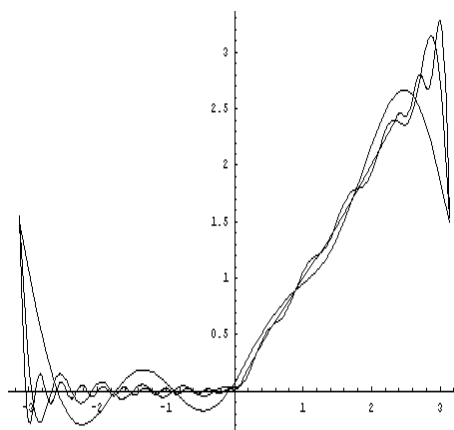


Figura 9.3: Aproximação da função $f(x)$ para $k \leq 3$, $k \leq 10$, $k \leq 20$

Observação 9.3. Se f é uma função periódica em $[-\pi, \pi]$ então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx \quad (\text{Ver fig. 9.4}) \quad (9.37)$$

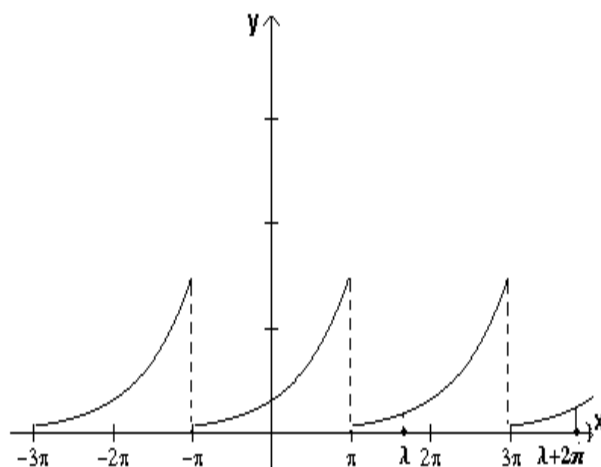


Figura 9.4:

9.3.2 f é de período $2L$, com $2L \neq 2\pi$

Consideremos a mudança de variável $x = \frac{L}{\pi} t$ de modo que $f\left(\frac{L}{\pi} t\right)$ é uma função periódica de t , de período 2π , isto é

$$f\left(\frac{L}{\pi} (t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi} + 2L\right) = f(x + L) = f(x) = f\left(\frac{L}{\pi} t\right).$$

Então, $f\left(\frac{L}{\pi} t\right)$ admite um o desenvolvimento de Fourier da forma

$$f\left(\frac{L}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sen kt). \quad (9.38)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} t\right) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} t\right) \cos kt dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} t\right) \sen kt dt \end{aligned} \quad (9.39)$$

Logo, voltando a variável x $\left(x = \frac{L}{\pi} t \text{ e } dt = \frac{\pi}{L} dx\right)$ temos que a série de Fourier de f é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sen \frac{k\pi x}{L}\right), \quad (9.40)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \frac{\pi}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \frac{\pi}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \frac{\pi}{L} \sen \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{k\pi x}{L} dx \end{aligned} \quad (9.41)$$

Exemplo 9.4. Calcular a série de Fourier da função periódica em $[-3, 3]$ (Fig. 9.5)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{se } -3 \leq x < 0. \end{cases} \quad (9.42)$$

Sol.: Usando (9.41) temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \int_0^3 1 dx = 1 \\ a_k &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{k\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 \cos \frac{k\pi x}{3} dx = \frac{1}{k\pi} \sen \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 = 0 \\ b_k &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sen \frac{k\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 \sen \frac{k\pi x}{3} dx = -\frac{1}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \end{aligned} \quad (9.43)$$

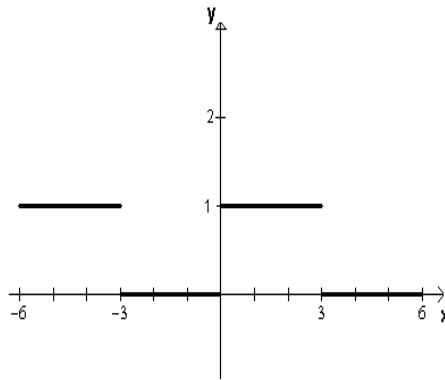


Figura 9.5:

Portanto,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{3} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \sin \frac{k\pi x}{3} \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{3}.
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

Na Figura (9.6) é mostrada a aproximação da função.

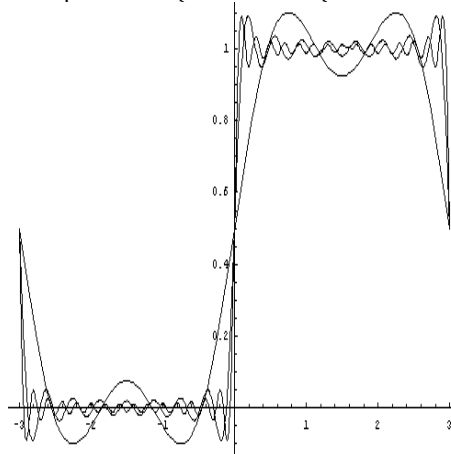


Figura 9.6: Aprox. da função $f(x)$ em $[-3, 3]$ para $k \leq 3$, $k \leq 15$, $k \leq 30$

9.3.3 f é par ou ímpar, de período $2L$

Se uma função $g(x)$ é uma função par em $[-L, L]$ ($g(x) = g(-x)$), então

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx. \quad \text{De fato,}$$

$$\int_{-L}^L g(x) dx = \int_{-L}^0 g(x) dx + \int_0^L g(x) dx = \int_0^L g(-x) dx + \int_0^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx$$

Analogamente, se $g(x)$ é uma função ímpar em $[-L, L]$ ($g(x) = -g(-x)$), então

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 0. \quad \text{De fato,}$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L g(x) dx &= \int_{-L}^0 g(x) dx + \int_0^L g(x) dx = \int_0^L g(-x) dx + \int_0^L g(x) dx \\ &= - \int_0^L g(x) dx + \int_0^L g(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (9.45)$$

• Se uma **função par** $f(x)$ se desenvolve em série de Fourier em $[-L, L]$, o produto $f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ é também par e o produto $f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ é uma função ímpar, já que a função $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ é par e $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ é ímpar, então

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \\ a_k &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = 0. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Portanto, a série de Fourier de uma função par f é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (9.47)$$

• Analogamente, se uma **função ímpar** $f(x)$ se desenvolve em série de Fourier em $[-L, L]$, o produto $f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ é também ímpar e o produto $f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ é uma função par, então

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = 0 \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0 \\ b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Portanto, a série de Fourier de uma função ímpar f é dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (9.49)$$

Exemplo 9.5. Ache a Série de Fourier da função periódica $f(x) = x^2$ em $[-1, 1]$. (Fig. 9.7)

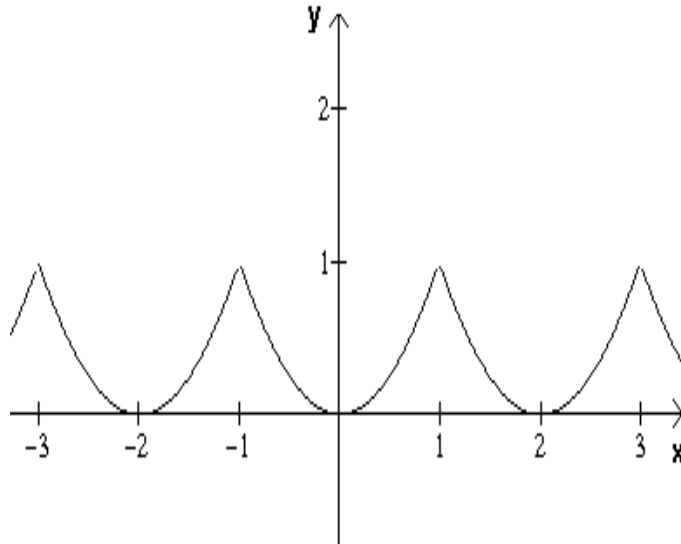


Figura 9.7:

Sol.: Como $f(x)$ é par e periódica em $[-1, 1]$, então usando (9.46) temos

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\
 a_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \cos kx dx = 2 \left\{ x^2 \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^1 - \int_0^1 2x \frac{\sin kx}{k} dx \right\} \\
 &= \frac{2}{k} \sin k - \frac{4}{k} \left\{ -x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos kx}{k} dx \right\} \\
 &= \frac{2}{k} \sin k + \frac{4}{k^2} \cos k - \frac{4}{k^2} \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{2}{k} \sin k + \frac{4}{k^2} \cos k - \frac{4}{k^3} \sin k \\
 b_k &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.50}$$

Consequentemente,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{k} \sin k + \frac{4}{k^2} \cos k - \frac{4}{k^3} \sin k \right\} \cos kx. \tag{9.51}$$

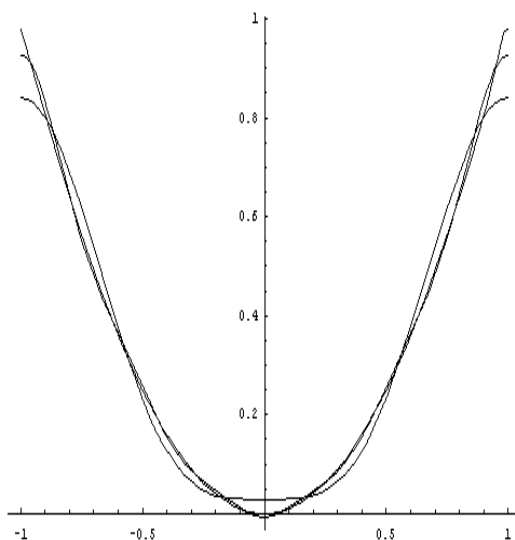


Figura 9.8: Aproximação da função $f(x) = x^2$ para $k \leq 2$, $k \leq 5$, $k \leq 20$

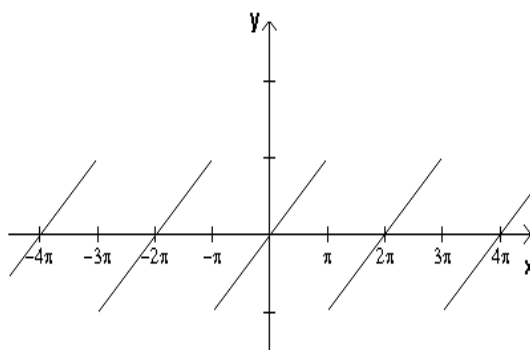


Figura 9.9:

Exemplo 9.6. Calcular a série de Fourier da função periódica $f(x) = x$ definida em $[-\pi, \pi]$. (Fig. 9.9)

Sol.: Como esta função é ímpar e periódica em $[-\pi, \pi]$, então usando (9.48) temos

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \tag{9.52}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ -x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k} \, dx \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left\{ \pi \frac{\cos k\pi}{k} \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{k}, & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ -\frac{2}{k}, & \text{se } k \text{ é par} \end{cases} \end{aligned} \tag{9.53}$$

Consequentemente,

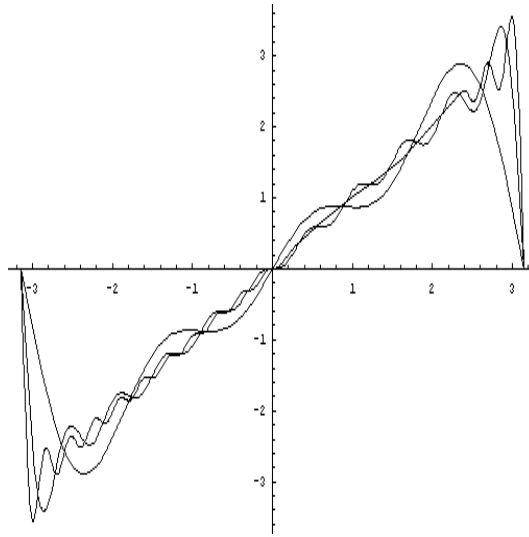


Figura 9.10: Aprox. da função $f(x) = x$ para $k \leq 3$, $k \leq 10$, $k \leq 20$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} \quad (9.54)$$

9.3.4 f é não periódica

Suponhamos que a função contínua por partes esteja definida num intervalo $[a, b]$.

Podemos representar esta função $f(x)$ nos pontos de continuidade por uma série de Fourier. Para isso, devemos considerar uma função arbitrária periódica $g(x)$ de período $2\mu > |b - a|$ que coincida com a função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Logo, como $g(x)$ se desenvolve em série de Fourier, $f(x)$ também se desenvolverá em série de Fourier.

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$f(x) \Big|_{[a,b]} = g(x). \quad (9.55)$$

Por outro lado, se $f(x)$ é definida no intervalo $[0, L]$ completamos a função de modo arbitrário no intervalo $[-L, 0]$. Logo, podemos desenvolver em série de Fourier a função f periódica de período $2L$ em $[-L, L]$. Podemos completar a função de forma par ou ímpar dependendo se desejarmos que a série esteja em função de cossenos ou de senos. (Ver Fig. 9.11)

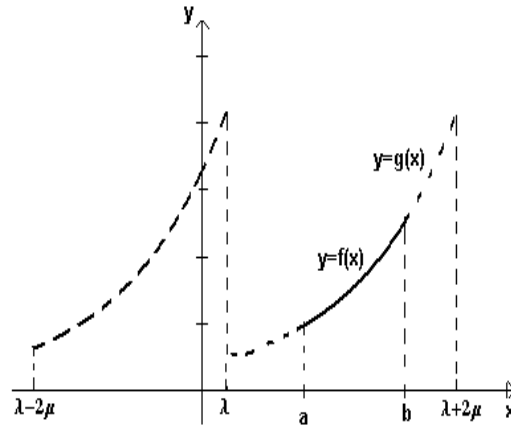


Figura 9.11: Extensão Periódica da função f .

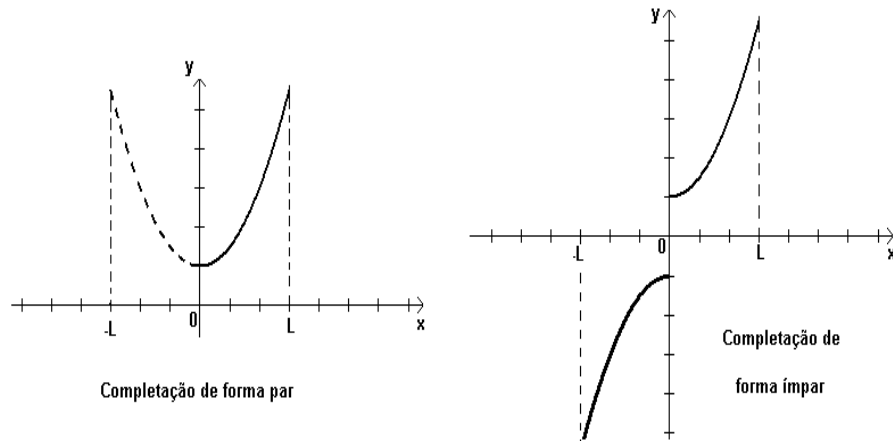


Figura 9.12: Completação de forma par e ímpar da função f .

9.4 Separação de Variáveis

Definição 9.5. Uma solução de uma EDP de duas variáveis independentes x e y é uma função $u(x, y)$ que possui todas as derivadas parciais que aparecem na equação (6.1) e que satisfaz a equação em alguma região do plano xy .

Para achar soluções particulares de uma EDP usaremos um método chamado **método de separação de variáveis**, o qual consiste em procurar soluções $u(x, y)$ da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (9.56)$$

de modo que a EDP seja reduzida a duas EDO's.

Exemplo 9.7. Ache a solução da EDP $u_{xx} = 4u_y$.

Sol.: Se $u(x, y) = X(x)Y(y)$ então substituindo na EDP temos:

$$X''(x)Y(y) = 4X(x)Y'(y). \quad (9.57)$$

Logo,

$$\frac{X''(x)}{4X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \alpha \quad (\text{constante}). \quad (9.58)$$

Como o membro esquerdo da igualdade anterior é independente de y e é igual ao membro direito, que é independente de x , concluímos que cada membro da eq. (9.58) deve ser uma constante. Distinguímos os seguintes casos:

Caso I Se $\alpha = \lambda^2 > 0$, então

$$\frac{X''(x)}{4X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda^2. \quad (9.59)$$

conduzem a

$$X''(x) - 4\lambda^2 X(x) = 0 \quad \text{e} \quad Y'(y) - \lambda^2 Y(y) = 0. \quad (9.60)$$

Estas equações admitem as soluções $X(x) = \tilde{c}_1 e^{2\lambda x} + \tilde{c}_2 e^{-2\lambda x}$ e $Y(y) = c_3 e^{\lambda^2 y}$ ou

$$X(x) = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x \quad \text{e} \quad Y(y) = c_3 e^{\lambda^2 y}.$$

Consequentemente

$$u(x, y) = (C_1 \cosh 2\lambda x + C_2 \sinh 2\lambda x) e^{\lambda^2 y} \quad (9.61)$$

Caso II Se $\alpha = -\lambda^2 < 0$, então

$$\frac{X''(x)}{4X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\lambda^2. \quad (9.62)$$

conduzem a

$$X''(x) + 4\lambda^2 X(x) = 0 \quad Y'(y) + \lambda^2 Y(y) = 0. \quad (9.63)$$

Estas equações admitem as soluções

$$X(x) = c_4 \cos 2\lambda x + c_5 \sin 2\lambda x \quad \text{e} \quad Y(y) = c_6 e^{-\lambda^2 y}.$$

Consequentemente

$$u(x, y) = (C_3 \cos 2\lambda x + C_4 \sin 2\lambda x) e^{-\lambda^2 y} \quad (9.64)$$

Caso III Se $\alpha = 0$, então

$$\frac{X''(x)}{4X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0. \quad (9.65)$$

conduzem a

$$X''(x) = 0 \quad Y'(y) = 0. \quad (9.66)$$

Estas equações admitem as soluções

$$X(x) = c_7 x + c_8 \quad \text{e} \quad Y(y) = c_9$$

Consequentemente

$$u(x, y) = C_5 x + C_6. \quad (9.67)$$

Note-se que a solução adotada vai depender das condições iniciais e de fronteira para obter soluções não nulas..

Observação 9.4. *A separação de variáveis não é um método geral para achar soluções particulares, algumas EDP's lineares simplesmente não são separáveis. Por exemplo,*
 $u_{xx} - u_y = x$

Teorema 9.2. *(Princípio de Superposição) Se u_1, u_2, \dots, u_n são soluções de uma equação de derivadas parciais linear homogênea, então a combinação linear*

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n,$$

também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1, c_2, \dots, c_n .

9.5 Exercícios

1. Nos problemas seguintes determine se a função dada é periódica ou não.

$$\begin{array}{ll}
a) \sin 5x & d) \sinh 2x \\
b) f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \leq x < 2n \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1 \end{cases}, n \in \mathbb{Z} & e) \tan \pi x \\
c) f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \leq x < 2n \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1 \end{cases}, n \in \mathbb{Z} & f) \sin \frac{\pi x}{L} \\
& g) x^2 \\
& h) \cos 2\pi x
\end{array}$$

2. Ache a série de Fourier de

$$\begin{array}{ll}
a) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & e) f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \\
b) f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & f) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi/2 \end{cases} \\
c) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & g) f(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ 1+x, & 0 \leq x < 5 \end{cases} \\
d) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & h) f(x) = \begin{cases} 2+x, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \end{cases}
\end{array}$$

3. Determine se a função é par, ímpar, ou nenhuma de elas.

$$\begin{array}{ll}
a) \sin 3x & e) x \cos 3x \\
b) x^2 + x & f) x^3 - 4x \\
c) e^{|x|} & g) 2|x| - 1 \\
d) f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases} & h) f(x) = \begin{cases} x+5, & -2 \leq x < 0 \\ -x+5, & 0 \leq x < 2 \end{cases}
\end{array}$$

4. Desenvolva a função dada em uma série de cossenos ou senos, conforme o caso.

$$\begin{array}{ll}
a) f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & e) f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0 \\ x-1, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \\
b) f(x) = \begin{cases} x-1, & -\pi < x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & f) f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases} \\
c) f(x) = |x|, -\pi < x < \pi & g) f(x) = \cos x, -\pi/2 < x < \pi/2 \\
d) f(x) = |\sin x|, -\pi < x < \pi & h) f(x) = x|x|, -1 < x < 1
\end{array}$$

5. Use o método de separação de variáveis para achar, se possível, soluções em forma de produto para a equação de derivadas parciais dada.

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \\ b) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y} \\ d) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

10 Equação de Onda

10.1 A corda Finita

Consideremos uma corda (fio) uniforme, fino e flexível, com comprimento L o qual está fortemente esticado entre dois suportes fixos, em um mesmo nível horizontal, de modo que o eixo coordenado X seja coincidente com a corda.

Suponhamos que a vibração da corda seja no plano vertical XY , de tal maneira que cada ponto da corda se mova na direção perpendicular ao eixo X e paralelamente ao eixo das ordenadas (vibrações transversais). Isto é, não existe movimento na direção horizontal pois as componentes horizontais das tensões se anulam. A corda elástica pode ser a corda de um violino, ou um cabo de retenção, ou uma linha de transmissão. O objetivo é determinar a forma da corda em qualquer momento e a lei de movimento de cada ponto da corda em função do tempo.

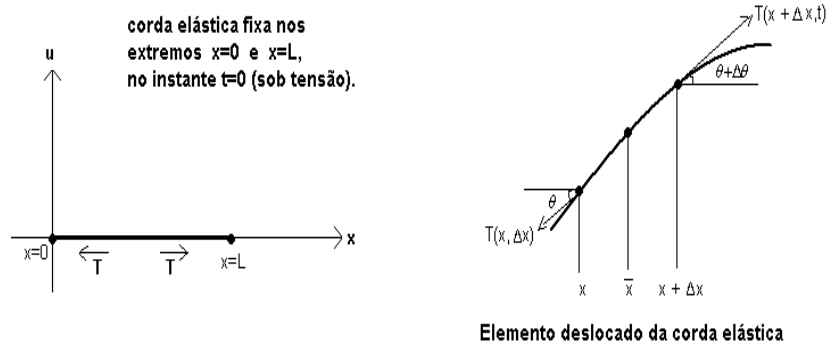
A fim de determinar a equação diferencial que rege o movimento da corda, consideramos as forças que atuam sobre um pequeno elemento de corda de comprimento Δx situado entre os pontos x e $x + \Delta x$.

Denotemos por $u(x, t)$ o deslocamento vertical no instante $t > 0$ do ponto x da corda desde sua posição de equilíbrio. Então, para qualquer valor fixo de t , a forma da corda no instante t é definida por $u = u(x, t)$. Logo, temos algumas suposições para encontrar uma solução:

- A corda é perfeitamente flexível e não oferece resistência a vibração.
- A corda é homogênea, isto é, com densidade linear constante ρ (ρ é a massa por unidade de comprimento).
- Os deslocamentos $u(x, t)$ são pequenos se comparados com o comprimento da corda.

- Como a corda é perfeitamente flexível a tensão $T(x, t)$ no ponto (x, t) atua tangencialmente ao longo da onda e seu módulo é o mesmo em todos os pontos dela. Esta força é infinitamente maior do que o peso da corda, por isso a atuação da gravidade é nula.

Com estas suposições podemos esperar soluções $u(x, t)$ que descrevam bem a realidade física. Assim, num determinado instante t visualizamos a corda fixa nos pontos 0 e L como na figura seguinte:



Consideremos $I = [x, x + \Delta x]$, onde $0 < x < L$. Como não existe movimento na direção horizontal, as tensões se anulam e daí temos que:

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \cos \theta = 0 \quad (10.1)$$

Pela Segunda Lei de Newton a resultante das forças verticais é igual ao produto da massa m ($m = \rho \Delta x$) pela aceleração. Sendo assim, temos:

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin \theta = \rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t) \quad (10.2)$$

onde \bar{x} é a coordenada do centro de massa do elemento da corda que está sendo analisado. Como é claro, \bar{x} está no intervalo $(x, x + \Delta x)$. Note-se que o peso da corda que atua na vertical para baixo, não aparece em (10.2), pois, esta é considerada desprezível.

Denotando por $T_V = T(x, t) \sin \theta$ a tensão vertical e $T_H = T(x, t) \cos \theta$ a tensão horizontal (não depende de x), de (10.1-10.2) temos que:

$$\begin{aligned} T_H(x + \Delta x, t) &= T_H(x, t) \\ T_V(x + \Delta x, t) - T_V(x, t) &= \rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Logo, dividindo por Δx a segunda igualdade temos

$$\frac{T_V(x + \Delta x, t) - T_V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t)$$

Consequentemente, tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ temos que $\bar{x} \rightarrow x$ e

$$\frac{d}{dx} T_V(x, t) = \rho u_{tt}(x, t).$$

Por outro lado, $\tan \theta = \frac{T_V(x, t)}{T_H(x, t)} = \frac{T_V(x, t)}{T_H(t)}$, então

$$\frac{d}{dx} [T_H(t) \tan \theta] = \rho u_{tt}(x, t)$$

Porém, $\tan \theta = u_x(x, t)$, logo

$$T_H(t) \frac{d}{dx} [u_x(x, t)] = \rho u_{tt}(x, t).$$

Portanto,

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad \text{onde} \quad c^2 = \frac{T_H(t)}{\rho} \quad (10.4)$$

Para pequenos movimentos da corda é possível assumir $T_H = T$ não dependendo de t .

Como $T = \text{massa} \times \text{aceleração}$ e $\rho = \frac{\text{massa}}{\text{comprimento}}$, então:

$$c = \sqrt{\frac{\text{massa} \times \text{aceleração} \times \text{comprimento}}{\text{massa}}} = \sqrt{\frac{\text{comprimento}^2}{\text{tempo}^2}} = \text{velocidade}$$

É possível identificar c com a velocidade com que uma pequena perturbação (a onda) se desloca ao longo da corda.

Observe que a velocidade c é diretamente proporcional com a tensão da corda T e inversamente com a densidade linear do material da corda.

10.2 Solução por Separação de Variáveis

O deslocamento vertical de uma corda elastica de comprimento L , presa nas extremidades e vibrando em um plano vertical é determinado pela equação de onda com condição inicial

e de contorno

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & 0 < x < L, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (10.5)$$

Observe-se que $u(x, t)$ é o deslocamento vertical da corda no ponto x no instante t . Além disso, a corda é perturbada de sua posição de equilíbrio $f(x)$ e depois libertada com velocidade $g(x)$ no instante $t = 0$, a fim de vibrar livremente.

Para resolver o problema (10.5) usaremos o método de separação de variáveis ou também chamado método de Fourier.

Supondo $u(x, t) = X(x)T(t)$ então

$$X(x) T''(t) = c^2 X''(x) T(t). \quad (10.6)$$

Pelas condições de fronteira $u(0, t) = X(0) T(t) = 0$ e $u(L, t) = X(L) T(t) = 0$ resulta que

$$X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0. \quad (10.7)$$

Separando as variáveis temos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \alpha, \text{ com } \alpha \text{ sendo uma constante.} \quad (10.8)$$

Consideramos três casos:

1º Caso Se $\alpha = \lambda^2 > 0$, então

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda^2. \quad (10.9)$$

Logo,

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda^2 c^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (10.10)$$

Resolvendo a EDO $X'' - \lambda^2 X = 0$ usando a equação característica: $r^2 - \lambda^2 = 0$, encontramos que $r = \pm \lambda$, logo

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Mais pelas condições iniciais $X(0) = X(L) = 0$, resulta que

$$C_1 = -C_2 \quad \text{e} \quad C_1 e^{\lambda L} = -C_2 e^{-\lambda L}. \quad (10.11)$$

Uma vez que $L > 0$ temos que $C_1 = C_2 = 0$, logo $X(x) = 0$, $\forall x \in [0, L]$. Portanto,

$$u(x, t) = 0 \quad (10.12)$$

2º Caso Se $\alpha = 0$, então

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = 0. \quad (10.13)$$

Consequentemente $X''(x) = 0$ cuja solução é $X(x) = Ax + B$. Pelas condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ resulta que $A = 0$ e $B = 0$, logo $X(x) = 0$. Portanto,

$$u(x, t) = 0. \quad (10.14)$$

3º Caso Se $\alpha = -\lambda^2 < 0$, então

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2. \quad (10.15)$$

Logo,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0 \\ T(0) = T(L) = 0 \end{cases} \quad (10.16)$$

Para resolver a EDO $X'' + \lambda^2 X = 0$ usamos a equação característica: $r^2 + \lambda^2 = 0$, cujas raízes são $r = \pm \lambda i$. Logo

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (10.17)$$

onde A e B são constantes reais.

Usando a condição de fronteira $X(0) = 0$ em (10.17) tem-se que, $A + 0 = 0$ e portanto $A = 0$. Análogamente, de $X(L) = 0$, resulta que $A \cos \lambda L + B \sin \lambda L = 0$, o que implica que $B \sin \lambda L = 0$. Como $B \neq 0$, então $\sin \lambda L = 0$. Isto é, $\lambda L = n\pi$, $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Portanto, uma solução da EDO dada em (10.16) é

$$X_n(x) = B \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Agora para cada $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ resolvemos o problema:

$$T''(t) + \lambda_n^2 c^2 T(t) = 0. \quad (10.18)$$

A equação característica associada a (10.18) é dada por $r^2 + \lambda_n^2 c^2 = 0$ a qual tem por solução $r = \pm \lambda_n c i = \pm \frac{n\pi c}{L} i$. Portanto,

$$T_n(t) = C \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + D \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right). \quad (10.19)$$

Consequentemente,

$$u_n(x, t) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(C \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + D \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right) \quad (10.20)$$

são soluções do problema (10.5). Logo, pelo princípio de superposição, uma solução formal do problema (10.5) é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\tilde{C} \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + \tilde{D} \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (10.21)$$

e também solução se a série for convergente.

Resta apenas escolher $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ para que seja satisfeita a condição inicial. Como, $u(x, 0) = f(x)$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \quad \forall x \in [0, L].$$

Mas isto é a série de Fourier em senos de $f(x)$ desde que escolhamos:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (10.22)$$

Por outro lado, como $u_t(x, 0) = g(x)$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x), \quad (10.23)$$

de onde resulta que

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (10.24)$$

Exemplo 10.1. Encontre a solução da equação da onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{4} \text{sen } \pi x, \quad u_t(x, 0) = 10 \text{ sen } 2\pi x \end{cases} \quad (10.25)$$

Sol.: Substituindo $L = 3$, $c = 5$ e a função $f(x) = \frac{1}{4} \text{sen } \pi x$ em (10.22), temos:

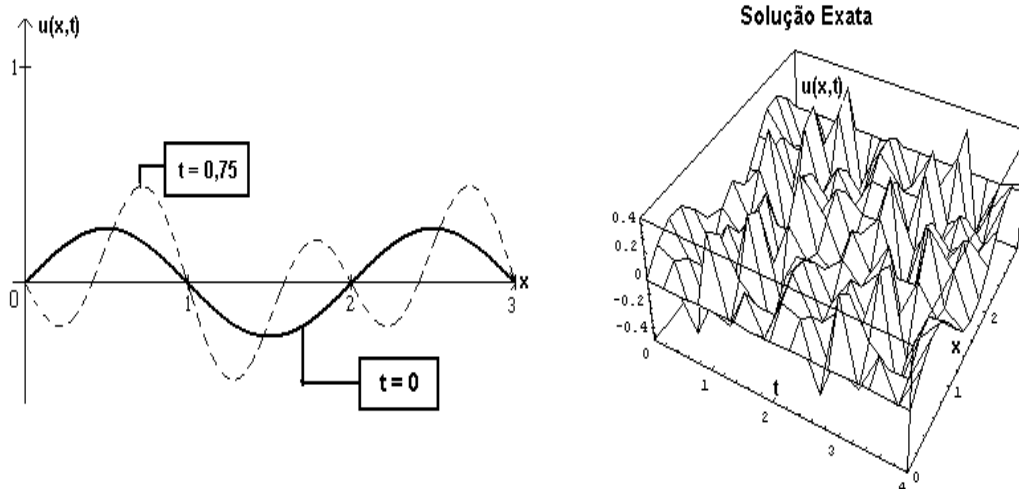
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{1}{4} \text{sen } \pi x \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{3} \right) dx = \frac{1}{6} \int_0^3 \text{sen } \pi x \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{3} \right) dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6} \int_0^3 \left\{ \frac{\cos(\pi x - \frac{n\pi x}{3}) - \cos(\pi x + \frac{n\pi x}{3})}{2} \right\} dx, & \text{se } n \neq 3 \\ \frac{1}{6} \int_0^3 \left\{ \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \right\} dx, & \text{se } n = 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{12(\pi - \frac{n\pi}{3})} \text{sen} \left(\pi x - \frac{n\pi x}{3} \right) - \frac{1}{12(\pi + \frac{n\pi}{3})} \text{sen} \left(\pi x + \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_0^3, & \text{se } n \neq 3 \\ \frac{x}{12} - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{24\pi} \Big|_0^3, & \text{se } n = 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 3 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } n = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.26)$$

Analogamente, para $g(x) = 10 \text{ sen } 2\pi x$, substituindo em (10.24), obtemos:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{5n\pi} \int_0^3 10 \text{ sen } 2\pi x \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{3} \right) dx = \frac{4}{n\pi} \int_0^3 \text{sen } 2\pi x \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{3} \right) dx \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \int_0^3 \left\{ \frac{\cos(2\pi x - \frac{n\pi x}{3}) - \cos(2\pi x + \frac{n\pi x}{3})}{2} \right\} dx, & \text{se } n \neq 6 \\ \frac{4}{6\pi} \int_0^3 \left\{ \frac{1 - \cos(4\pi x)}{2} \right\} dx, & \text{se } n = 6 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi(2\pi - \frac{n\pi}{3})} \text{sen} \left(2\pi x - \frac{n\pi x}{3} \right) - \frac{2}{n\pi(2\pi + \frac{n\pi}{3})} \text{sen} \left(2\pi x + \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_0^3, & \text{se } n \neq 6 \\ \frac{x}{3\pi} - \frac{\text{sen}(4\pi x)}{12\pi^2} \Big|_0^3, & \text{se } n = 6 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 6 \\ \frac{1}{\pi}, & \text{se } n = 6 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.27)$$

Assim, a solução exata de (10.25) é

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \cos 5\pi t \text{sen } \pi x + \frac{1}{\pi} \text{sen } 10\pi t \text{sen } 2\pi x.$$



Exemplo 10.2. Encontre a solução da equação de onda

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(x - 1), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (10.28)$$

Sol.: Em (10.28) temos que $f(x) = x(x - 1)$, $g(x) = 0$, $c = 1$ e $L = 1$, então de (10.21)

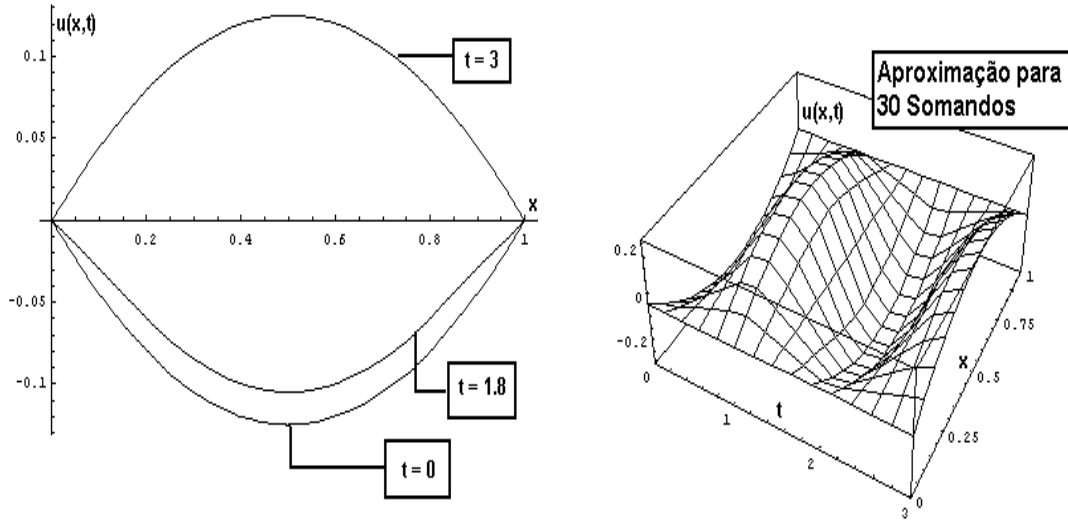
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x), \quad (10.29)$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \int_0^1 (x^2 - x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx - 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= -2 x^2 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + 4 x \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} \Big|_0^1 + 4 \frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^3} \Big|_0^1 + 2 x \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - 2 \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} \Big|_0^1 \\ &= -2 \frac{\cos n\pi}{n\pi} + 4 \frac{\cos n\pi}{(n\pi)^3} - \frac{4}{(n\pi)^3} + 2 \frac{\cos n\pi}{n\pi} = 4 \frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^3} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ for par} \\ -\frac{8}{(n\pi)^3}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.30)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{n=\text{ímpar}} \frac{-8}{(n\pi)^3} \cos(n\pi t) \sin(n\pi x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos((2n-1)\pi t) \sin((2n-1)\pi x).
 \end{aligned} \tag{10.31}$$



10.3 A Solução de d'Alembert para a Corda Finita

Um enfoque alternativo ao método de separação de variáveis foi dado por d'Alembert. Este método, além de achar uma solução que verifique as oscilações de uma corda vibrante, nos fornecerá informação adicional valiosa sobre ela.

Assim, dividimos o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < L, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L, \end{array} \right. \tag{10.32}$$

em dois problemas de contorno separados

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{tt}(x, t) = c^2 z_{xx}(x, t) \\ z(0, t) = z(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ z(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ z_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w_{tt}(x, t) = c^2 w_{xx}(x, t) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ w_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{array} \right. \quad (10.33)$$

Deste modo, é fácil verificar que

$$u(x, t) = z(x, t) + w(x, t) \quad (10.34)$$

é solução do problema (10.32), onde

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10.35)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (10.36)$$

Sabendo que $\text{sen } A \cos B = \frac{\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)}{2}$ em (10.35) temos que

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi ct}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi ct}{L}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) \right\} \\ z(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = F(x), \quad \forall x. \end{aligned} \quad (10.37)$$

onde $F(x)$ é a extensão ímpar em $[-L, L]$ da função $f(x)$. Logo,

$$z(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ F(x+ct) + F(x-ct) \right\} \quad (10.38)$$

Analogamente, verifica-se que

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \left\{ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi ct}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi ct}{L}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \left\{ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) \right\} \\ w_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = G(x), \quad \forall x. \end{aligned} \quad (10.39)$$

onde $G(x)$ é a extensão ímpar em $[-L, L]$ da função $g(x)$. Logo,

$$w_t(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ G(x + ct) + G(x - ct) \right\} \quad (10.40)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^t w_t(x, s) ds &= \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ G(x + cs) + G(x - cs) \right\} ds \\ w(x, t) - w(x, 0) &= \frac{1}{2} \int_0^t G(x + cs) ds + \frac{1}{2} \int_0^t G(x - cs) ds \\ w(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_x^{x+ct} G(y) dy - \frac{1}{2c} \int_x^{x-ct} G(y) dy \\ &= \frac{1}{2c} \int_x^{x+ct} G(y) dy + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^x G(y) dy \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(y) dy \end{aligned} \quad (10.41)$$

Finalmente, resulta que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ F(x + ct) + F(x - ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(y) dy \quad (10.42)$$

Observação 10.1. É importante notar que a solução (10.42) satisfaz as condições iniciais impostas. De fato, desde que F e G são ímpares temos que

$$u(0, t) = \frac{1}{2} \left\{ F(ct) + F(-ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} G(y) dy = 0. \quad (10.43)$$

Por outro lado, desde que F e G são periódicas em $[-L, L]$, $F(x + 2L) = F(x)$ e $G(y + 2L) = G(y)$. Mais ainda, já que F e G são ímpares, para $x = ct - L$ e $y = cs - L$, temos que

$$F(ct + L) = F(ct - L) = -F(L - ct) \quad e \quad G(cs + L) = G(cs - L) = -G(L - cs),$$

então

$$\begin{aligned} u(L, t) &= \frac{1}{2} \left\{ F(L + ct) + F(L - ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} G(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -F(L - ct) + F(L - ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^L G(y) dy + \frac{1}{2c} \int_L^{L+ct} G(y) dy \\ &= \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^L G(y) dy + \frac{c}{2c} \int_0^t G(L + cs) ds = \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^L G(y) dy - \frac{1}{2} \int_0^t G(L - cs) ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^L G(y) dy + \frac{1}{2c} \int_L^{L-ct} G(y) dy \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.44)$$

Exemplo 10.3. Encontre a solução para os tempos $t = 1.8$ e $t = 3$ da equação de onda

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(x - 1), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (10.45)$$

Sol.: Dos dados do problema (10.45) temos que $f(x) = x(x - 1)$, $g(x) = 0$, $c = 1$ e $L = 1$, e de (10.42) resulta que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ F(x + t) + F(x - t) \right\} \quad (10.46)$$

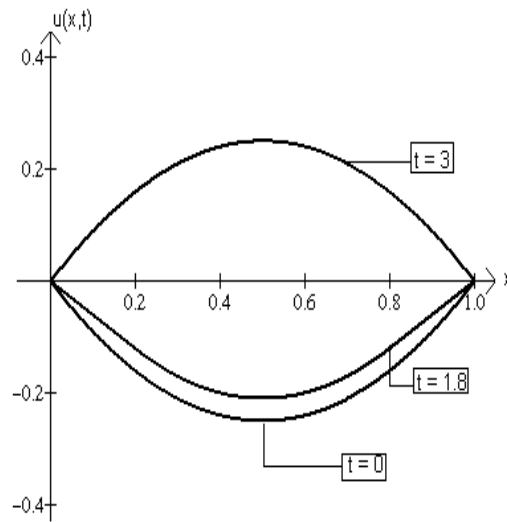
é a solução de (10.45), sendo F a extensão periódica ímpar de $f(x)$ em $[-1, 1]$, isto é $F(\xi) = -F(-\xi)$.

Assim, para $t = 1.8$ temos da periodicidade de F , $F(\xi + 2) = F(\xi)$, que

$$F(x + 1.8) = F(x - 0.2) = -F(0.2 - x) \quad \text{e} \quad F(x - 1.8) = F(x + 0.2).$$

Desde que $0 \leq x < 0.2$, $F(x - 0.2) = -F(0.2 - x) = -f(0.2 - x)$. Por outro lado se, $0.8 \leq x \leq 1$, $F(x + 0.2) = F(x + 0.2 - 2) = F(x - 1.8) = -F(1.8 - x) = -f(1.8 - x)$. Logo,

$$\begin{aligned} u(x, 1.8) &= \frac{1}{2} \left\{ F(x + 1.8) + F(x - 1.8) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ F(x - 0.2) + F(x + 0.2) \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{-f(0.2 - x) + f(x + 0.2)}{2}, & \text{se } 0 \leq x < 0.2 \\ \frac{f(x - 0.2) + f(x + 0.2)}{2}, & \text{se } 0.2 \leq x < 0.8 \\ \frac{f(x - 0.2) - f(1.8 - x)}{2}, & \text{se } 0.8 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1/5 - x)(x + 4/5) + (x + 1/5)(x - 4/5)}{2}, & \text{se } 0 \leq x < 0.2 \\ \frac{(x - 1/5)(x - 6/5) + (x + 1/5)(x - 4/5)}{2}, & \text{se } 0.2 \leq x < 0.8 \\ \frac{(x - 1/5)(x - 6/5) - (9/5 - x)(4/5 - x)}{2}, & \text{se } 0.8 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -3x/10, & \text{se } 0 \leq x < 1/5 \\ x^2 - x + 1/25, & \text{se } 1/5 \leq x < 4/5 \\ 3x/5 - 3/5, & \text{se } 4/5 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.47)$$



Para $t = 3$ temos que

$$F(x+3) = F(x+1) = F(x-1) \quad \text{e} \quad F(x-3) = F(x-1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(x, 3) &= \frac{1}{2} \left\{ F(x+3) + F(x-3) \right\} = F(x-1) = -F(1-x) \\ &= -f(1-x) = -(1-x)(-x) \\ &= x(1-x) \end{aligned} \tag{10.48}$$

10.4 Exercícios

1. Encontre a solução da equação da onda usando o método de Fourier

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

com os dados abaixo:

- a) $f(x) = \frac{1}{4} x(L-x)$, $g(x) = 0$, $c = 1$
- b) $f(x) = 0$, $g(x) = \sin x$, $c = 1$, $L = \pi$
- c) $f(x) = \frac{1}{10} \sin 2x$, $g(x) = 0$, $c = 2$, $L = \pi$.
- d) $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $c = 10$, $L = 1$.

2. Use o método de Fourier para resolver a equação da onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

com os dados abaixo:

a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $c = 1$, $L = \pi$

b) $f(x) = \frac{1}{10} \cos 5x$, $g(x) = 0$, $c = 2$, $L = \pi$.

c) $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $c = 10$, $L = 1$.

3. Suponha que a função $F(x)$ é duas vezes diferenciável para todo x . Use a regra da cadeia para verificar que as funções $y(x, t) = F(x + at)$ e $y(x, t) = F(x - at)$ satisfazem a equação $y_{tt} = a^2 y_{xx}$.

4. Encontre a solução da equação da onda usando o método de D'Alembert

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

com os dados abaixo:

a) $f(x) = 0$, $g(x) = \sin x$, $c = 1$, $L = \pi$

b) $f(x) = x^3(x - 1)^3$, $g(x) = \cos(\pi x - \pi/2)$, $c = 1$, $L = 1$

c) $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = x^2 - x$, $c = 1$, $L = 1$.

d) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos^2 x - 1$, $c = 1$, $L = \pi$.

11 Equação do Calor

Consideremos uma vara que se estende ao longo do eixo x . Assumimos que a vara tem seção transversal perpendicular ao eixo x , com área A que é feita de um material homogêneo, de forma que possamos supor que:

- A seção transversal da vara é tão pequena que u é constante em cada seção transversal;
- A superfície lateral da vara é isolada de modo que não passe calor através dela;
- A vara tem comprimento L e que sua função-temperatura é $f(x)$ no instante $t = 0$.

Se cada extremo da vara fosse fixada num bloco grande de gelo teríamos as condições de fronteira

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Assim, combinando tudo isto, temos o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - c \partial_x^2 u = 0 & \text{em } Q = (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in (0, T) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (11.1)$$

onde c é a condutividade térmica do material da vara. A equação (11.1) modela a variação de temperatura $u(x, t)$ com a posição x e o tempo t numa vara aquecida que se estende ao longo do eixo x .

11.1 Solução por Separação de Variáveis

Procuraremos uma solução particular da forma:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Substituindo-se na equação (11.1) obtemos:

$$X(x)T'(t) = cX''(x)T(t)$$

Separando as variáveis obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{cT(t)} = \alpha, \quad \alpha \text{ constante.} \quad (11.2)$$

1^{er} Caso Se $\alpha = -\lambda^2 < 0$, então temos as seguintes EDO's

$$\text{a)} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2 c \quad \Rightarrow \quad (\ln T(t))' = -\lambda^2 c \quad \Rightarrow \quad T(t) = C e^{-\lambda^2 ct}, \quad C = cte.$$

b) $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ (*E.D.O. de 2ª ordem*), cujo polinômio característico é $p(r) = r^2 + \lambda^2 = 0$, com raízes $r = \pm \lambda i$. Logo, a solução desta EDO é

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

Portanto, uma solução particular é:

$$u(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) C e^{-\lambda^2 ct}$$

Utilizando as condições de fronteira, obtemos que:

$$u(0, t) = A C e^{-\lambda^2 ct} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad (11.3)$$

$$u(L, t) = B C e^{-\lambda^2 ct} \sin \lambda L = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (11.4)$$

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos soluções particulares da forma

$$u_n(x, t) = B C \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 ct} = B C \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 ct}.$$

Portanto, pelo princípio de superposição, a solução geral de (11.1) é

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 ct} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (11.5)$$

Por outro lado, se $f(x)$ admite um desenvolvimento em séries de Fourier em $[0, L]$, das condições de fronteira obtemos que

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}.$$

Da igualdade acima é claro que $a_0 = 0$, $a_n = 0$, e

$$B_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Para o caso $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$ obtemos soluções nulas.

Exemplo 11.1. *Suponha que uma vara de 50 cm de comprimento é imersa em vapor até que sua temperatura seja de 100° C ao longo dela toda. No instante $t = 0$, sua superfície lateral é isolada e suas duas extremidades são enterradas em gelo a 0°C. Calcule a temperatura no seu ponto médio após meia hora, se a vara é feita de:*

1. ferro ($c = 0,25$).

2. concreto ($c = 0,005$)

Sol.: Seja $L = 50$ e $f(x) = 100$, então o problema consiste em achar $u(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t - c \partial_x^2 u = 0 \\ u(0, t) = u(50, t) = 0 \\ u(x, 0) = 100, \quad \forall x \in (0, 50). \end{cases} \quad (11.6)$$

Usando (11.5) temos que

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-(\frac{n\pi}{50})^2 ct} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{50} \int_0^{50} 100 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50} dx = -4 \left(\frac{50}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi x}{50} \Big|_0^{50} = \frac{200}{n\pi} [1 - \cos n\pi] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ for par} \\ \frac{400}{n\pi}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Consequentemente

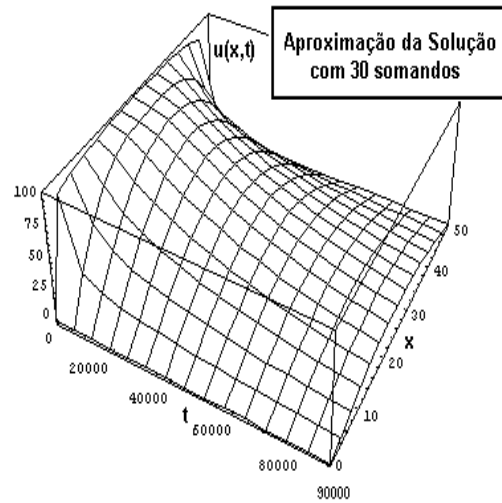
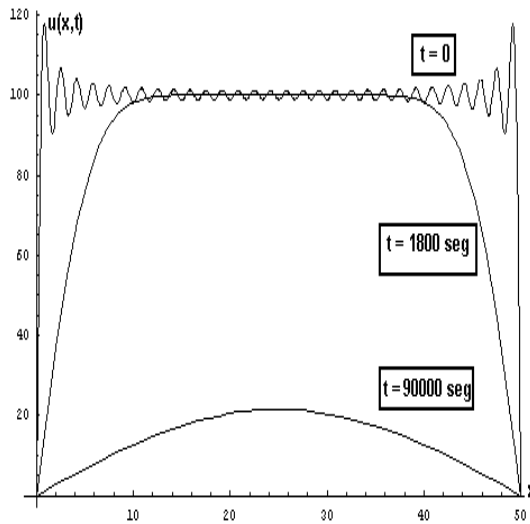
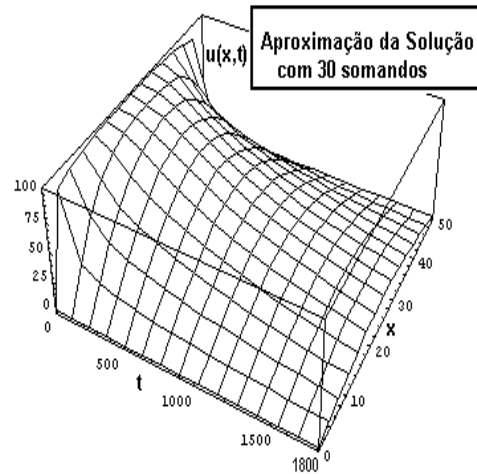
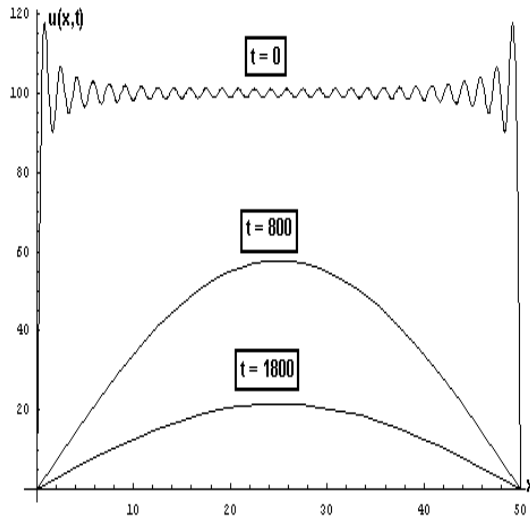
$$u(x, t) = \sum_{n=\text{ímpar}} \frac{400}{n\pi} e^{-(\frac{n\pi}{50})^2 ct} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right). \quad (11.8)$$

Assim, quando o material é ferro, a temperatura no ponto médio $x = 25$ cm, no instante $t = 30 \text{ min} = 1800 \text{ seg.}$ é:

$$\begin{aligned} u(25, 1800) &= \frac{400}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} e^{(-\frac{450 n^2 \pi^2}{50^2})} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} e^{(-\frac{9(2n-1)^2 \pi^2}{50^2})} \approx 21,54^\circ C. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Quando o material é concreto, a temperatura no ponto médio $x = 25$ cm, no instante $t = 30 \text{ min} = 1800 \text{ seg.}$ é:

$$\begin{aligned} u(25, 1800) &= \frac{400}{\pi} \sum_{n \in \text{ímpar}} \frac{1}{n} e^{(-\frac{9 n^2 \pi^2}{50^2})} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} e^{(-\frac{9(2n-1)^2 \pi^2}{50^2})} \approx 100^\circ C. \end{aligned} \quad (11.10)$$



11.2 Exercícios

1. Encontre a solução da equação de calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

com os dados abaixo:

a) $f(x) = x(L - x)$, $k = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases}$, $k = 2$

c) $f(x) = x \cos x$, $k = 1$, $L = \pi/2$.

$$d) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}, \quad k = 1, \quad L = 2.$$

2. Achar a solução do problema de condução de calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 100 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x - 2 \sin 5\pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

12 Equação de Laplace

A equação de Laplace descreve a distribuição de temperatura numa placa retangular em estado estacionário (não existe dependência do tempo). Portanto, não tem condições iniciais, somente condições de contorno.

Assim, o problema consiste em achar $u = u(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 & \text{em } Q = (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_1(x) & u(x, b) = f_2(x) \\ u(0, y) = g_1(y) & u(a, y) = g_2(y) \end{cases} \quad (12.1)$$

12.1 Solução por Separação de Variáveis

Consideremos

$$f_1(x) = f_2(x) = 0, \quad \forall x \in [0, a] \quad (12.2)$$

$$g_1(y) = 0, \quad \forall y \in [0, b] \quad (12.3)$$

Procura-se uma solução particular da forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Substituindo-se na equação (12.13) obtém-se:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha, \quad \alpha \text{ constante.} \quad (12.4)$$

Consequentemente, temos as EDO's

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0, \quad X(0) = 0 \quad (12.5)$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0. \quad (12.6)$$

1^{er} Caso Se $\alpha = \lambda^2 > 0$, as soluções das EDO's são

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}; \quad X(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad (12.7)$$

$$Y(y) = C_3 \cos \lambda y + C_4 \sin \lambda y; \quad Y(0) = C_3 = 0, \quad Y(b) = C_4 \sin \lambda b = 0. \quad (12.8)$$

Logo, de (12.7) e (12.8) temos que: $C_2 = -C_1$, $C_3 = 0$, $C_4 \neq 0$ e $\lambda b = n\pi$.
Consequentemente,

$$X(x) = C_1 (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) = 2C_1 \sinh \lambda x = 2C_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \quad (12.9)$$

$$Y(y) = C_4 \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (12.10)$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ uma solução particular é:

$$u_n(x, y) = C \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Logo, pelo princípio de superposição, temos que a solução geral de (12.13) é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (12.11)$$

Por outro lado, se $g_2(y)$ admite um desenvolvimento em séries de Fourier em $[0, b]$, das condições de fronteira obtemos que

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = g_2(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right\}.$$

Da igualdade acima é claro que $a_0 = 0$, $a_n = 0$, e

$$C_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = b_n = \frac{2}{b} \int_0^b g_2(y) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy,$$

isto é,

$$C_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g_2(y) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \quad (12.12)$$

Para o caso $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ temos soluções nulas.

Exemplo 12.1. Achar $u = u(x, t)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{em } Q = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = 0 \\ u(0, y) = 0 \quad u(1, y) = y \end{array} \right. \quad (12.13)$$

Sol.: Desde que

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 y \sin(n\pi y) dy \\ &= \frac{2}{\sinh n\pi} \left\{ -y \frac{\cos n\pi y}{n\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi y) dy \right\} \\ &= \frac{2}{\sinh n\pi} \left\{ -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin(n\pi y) \Big|_0^1 \right\} \\ &= -\frac{2}{\sinh n\pi} \frac{(-1)^n}{n\pi}, \end{aligned} \quad (12.14)$$

então,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sinh n\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sinh n\pi x \sin n\pi y. \quad (12.15)$$

A figura 12.1 mostra o gráfico da solução.

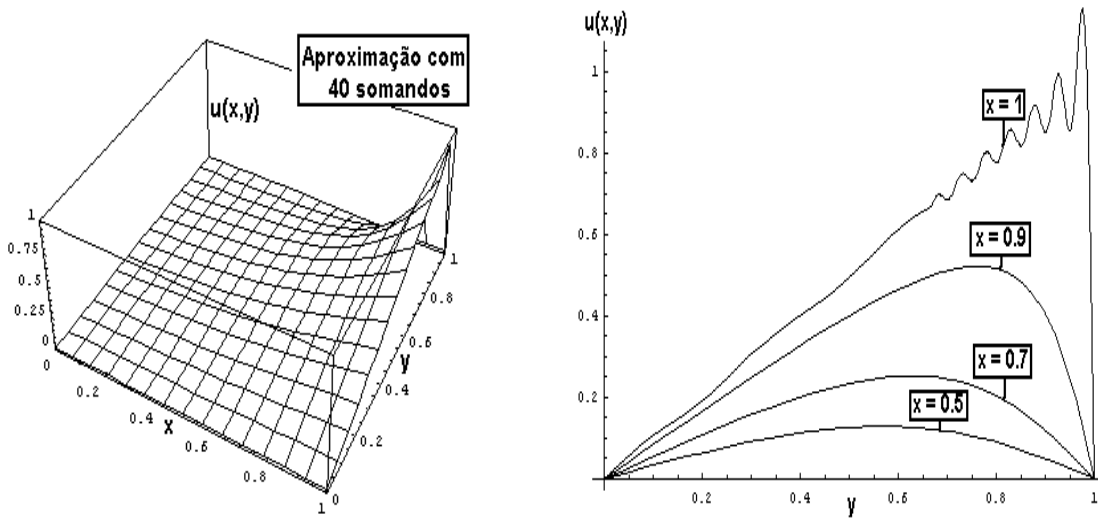


Figura 12.1:

12.2 Exercícios

1.

a) Achar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que também satisfaz às condições de contorno:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

b) Achar a solução se $f(x)$ for dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2; \\ 1 - x, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. Achar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que também satisfaz às condições de contorno:

a) $u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$

b) $u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0, \quad u(0, y) = 1, \quad u(\pi, y) = 1.$

c) $u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = y, \quad u(1, y) = 0.$

Referências

- [1] Valeria de Magalhães Iório, *EDP Um Curso de Graduação*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1991.
- [2] Luiz Adauto Medeiros e Nirzi G. de Andrade, *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*. Editora LTC, 1978.
- [3] William E. Boice e Richard C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Editora LTC, 1998.