

**Ciências e Tecnologias Espaciais**

**Sensores e Atuadores Espaciais**

**Métodos Numéricos e Aplicações em  
Clusters I – Básico**

**Lista de Exercícios 3**

Professor: Angelo Passaro  
Aluno: Lucas Kriesel Sperotto

27 de Abril de 2012

**1** – Como ficam as equações se o material for homogêneo e anisotrópico, com tensor de anisotropia diagonal?

Tomando a equação de Poisson para meios anisotrópicos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho$$

Como a propriedade é homogênea ela não depende de posição. Pode-se definir um tensor para as propriedades físicas  $[\varepsilon]$  e com a discretização para elementos finitos, o tensor se mantém na forma matricial da integral. Detalhes da montagem do tensor em [5]. Como o tensor é diagonal, assume-se que apenas os elementos diagonais da matriz  $[\varepsilon]$  são não nulos.

$$[\varepsilon] \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho$$

$$\int_{\Omega^{(r)}} [\text{grad}N]^T [\varepsilon^{(r)}] [\text{grad}N] d\Omega \{\phi\}^T = \rho \int_{\Omega^{(r)}} \{N\}^T d\Omega$$

Onde:

$$[\varepsilon^{(r)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Caso os vetores de propriedade física não esteja perfeitamente alinhados com o plano adotado, deve-se usar uma matriz de transformação. Detalhes no livro do Cardoso.

**2** – Como podem ser tratado um material isotrópico, mas cuja propriedade varia continuamente em função da posição (pensar no caso 2D)?

Basta associar a propriedade física a um elemento  $\varepsilon^{(r)}$ :

$$\varepsilon^{(r)} \int_{\Omega^{(r)}} [\text{grad}N]^T [\text{grad}N] d\Omega \{\phi\}^T = \rho \int_{\Omega^{(r)}} \{N\}^T d\Omega$$

**3** – Como seriam modificadas as equações, se utilizarmos elementos triangulares de segunda ordem?

Tendo como exemplo a equação de Poisson na forma matricial para elementos finitos triangulares de primeira ordem:

$$\varepsilon \int_{\Omega^{(r)}} [\text{grad}N]^T [\text{grad}N] d\Omega \{\phi\}^T = \rho \int_{\Omega^{(r)}} \{N\}^T d\Omega$$

As equações para elementos de segunda ordem na sua forma matricial são praticamente as mesmas. As mudanças ocorrerão apenas nos tamanhos dos vetores  $\{N\}$  e  $\{\phi\}^T$  e das matrizes  $[\text{grad}N]$ .

**4** – E se usarmos elementos de outras famílias?

Se por família de elementos entendermos a dimensão do elemento, a forma geométrica (quadrilátero, triangular,...), a resposta para esta pergunta é a mesma resposta da questão 3, as mudanças residirão apenas no vetor das funções de forma e na matriz com suas derivadas.

Agora se considerarmos como família do elemento se ele é do tipo Lagrange ou Hermite, as diferenças nas equações se tornam mais evidentes, alterando a quantidade de soluções obtidas, por exemplo, para elemento de Hermite o vetor  $\{\phi\}$  é composto pelas variáveis de estado e suas derivadas  $\{\phi\} = \{[\phi] [\nabla\phi]\}$ .

**5 – Como tratar condições de Neumann não homogêneas ( $f_s \neq 0$ )?**

Na equação e Poisson:

$$\varepsilon \int_{\Omega^{(\gamma)}} [\text{grad} N]^T [\text{grad} N] d\Omega \{\phi\}^T = \rho \int_{\Omega^{(\gamma)}} \{N\}^T d\Omega$$

aparece um termo adicional:

$$\varepsilon \int_{\Omega^{(\gamma)}} [\text{grad} N]^T [\text{grad} N] d\Omega \{\phi\}^T = - \left( \varepsilon f_s \int_{\Gamma_2^{(\gamma)}} \{N\}^T dS \right) + \left( \rho \int_{\Omega^{(\gamma)}} \{N\}^T d\Omega \right)$$

onde  $\Gamma_2^{(\gamma)}$  é a região do elemento com a condição de Neumann não homogênea, no caso de um elemento de duas dimensões é uma aresta e no caso tridimensional uma superfície. O vetor de funções de base  $\{N\}^T$  na integral em  $\Gamma_2^{(\gamma)}$  terá um tamanho diferente do vetor da outra integral. Um cuidado deve ser tomado para que as parcelas integrais sejam atribuídas no vetor global com os índices corretos.

**6 – Qual a matriz de conexão  $[C\gamma]$  para o exemplo de Saad, cap. 2, pg. 62?**

A matriz  $[C\gamma]$  é construída com dimensões  $n_\gamma \times n_p$ , onde  $n_\gamma$  é o numero de pontos do elemento e  $n_p$  é o numero de pontos do domínio. A matriz montada  $[C\gamma]$  para cada elemento esta exposta na tabela 1.

**Tabela 1 - Montagem das Matrizes  $[C\gamma]$  para cada elemento  $\gamma$ .**

Elemento ( $\gamma$ )	Numeração Local	Numeração Global														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

8	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
13	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
14	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

## Referências:

- [1] CHAPRA, Steven C; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. Trad. Helena Castro. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- [2] SAAD, Y., **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. 2ª Ed. 2000.
- [3] DHATT, G. TOUZOT, G. Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis. 2ª Ed. France: Editeur Paris. 1984.
- [4] CARDOSO, J. R. Introdução ao método dos Elementos Finitos. 1ª Ed. Publicação Independente.
- [5] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Tensor> Acessado em Abril de 2012.