3.1. Definição de equação diferencial parcial

Definição: Chama-se **equação diferencial parcial** a uma equação que contém uma ou mais funções desconhecidas de duas ou mais variáveis e as suas derivadas parciais em relação a essas variáveis.

Exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad \text{(variáveis independentes x,y,z)}$$

Definição: **Ordem de uma equação diferencial parcial** é a ordem da derivada de maior ordem que surge na equação.

Exemplo:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2x-y$ é uma equação diferencial de ordem 2. u é a variável dependente enquanto que x e y são as variáveis independentes.

Definição: Chama-se **solução** de uma equação diferencial parcial a uma função que verifica identicamente essa equação.

Exemplo: Considere a equação diferencial $u=x\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ onde u é uma função de x e y.

Verifique que as funções $u=xF(y)-[F(y)]^2$ e $u=\frac{x^2}{4}$ são solução da equação.

Sendo $u=xF(y)-[F(y)]^2$, temos $\frac{\partial u}{\partial x}=F(y)$. Fazendo a substituição vem

$xF(y)-[F(y)]^2=xF(y)-[F(y)]^2 \quad \therefore$ É solução

Sendo $u=\frac{x^2}{4}$, temos $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{2}$. Fazendo a substituição vem

$\frac{x^2}{4}=x\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4} \quad \therefore$ É solução

Nas equações diferenciais ordinárias obtínhamos uma expressão geral de todas as soluções da equação diferencial. Nas equações diferenciais parciais não se passa o mesmo, pois como vimos no exemplo anterior, temos duas soluções de uma equação diferencial em que cada uma delas não se pode obter da outra. Nas expressões que definem soluções das equações diferencias parciais podem surgir funções arbitrárias e constantes arbitrárias, situação diferente da que acontecia nas equações diferenciais ordinárias, onde na expressão da solução geral apenas apareciam constantes arbitrárias.

Vamos, antes de estudar um processo de resolução de equações diferenciais parciais, ver que é possível, a partir de uma família de funções por eliminação das constantes e das funções arbitrárias, obter equações diferenciais parciais que a têm como solução.

1. Consideremos a família de superfícies esféricas de centro em *Ox*,

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

sendo *a* e *r* constante arbitrárias. Derivando em ambos os membros em ordem a *y* e a *z*, e considerando *x* como função dessas variáveis, obtém-se

$$\begin{cases} (x-a)\dfrac{\partial x}{\partial y} + y = 0 \\ (x-a)\dfrac{\partial x}{\partial z} + z = 0 \end{cases}$$

onde já foi eliminada a constante *r* e que, por eliminação de a, leva a

$$z\frac{\partial x}{\partial y} - y\frac{\partial x}{\partial z} = 0\,.$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial de 1ª ordem que tem como solução as funções *x=f(y,z)*, dadas pela família das esferas.

2. Consideremos agora a família superfícies esféricas,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2,$$

sendo *a*, *b*, *c* e *r* constante arbitrárias. Derivando em ambos os membros em ordem a *y* e a *z*, e considerando *x* como função dessas variáveis, obtém-se

$$\begin{cases} (x-a)\dfrac{\partial x}{\partial y} + (y-b) = 0 \\ (x-a)\dfrac{\partial x}{\partial z} + (z-c) = 0 \end{cases}$$

onde já foi eliminada a constante *r*. Neste caso não conseguimos eliminar imediatamente as restantes constantes, nem mesmo juntando a equação inicial. A equação diferencial não pode ser de 1ª ordem. Nesse caso teremos de efectuar outras derivadas. Obtemos então

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + (x-a)\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial x}{\partial y} + (x-a)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z \partial y} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + (x-a)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

que por eliminação de *a* leva a

$$\frac{1+\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}} = \frac{1+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}}.$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial de 2ª ordem que tem como solução as funções $x=f(y,z)$, dadas pela família das superfícies esféricas.

Definição: A equação diferencial do tipo

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

onde A, B,....G podem depender de x e de y, mas não de u diz-se equação diferencial parcial linear de ordem 2 em duas variáveis independentes.

Se G for zero, então a equação é homogénea.

Exemplos:

A equação diferencial parcial $x^2\dfrac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^3\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ é linear.

A equação diferencial parcial $M\dfrac{\partial^2 M}{\partial t^2} = txy$ não é linear.

3.2. Resolução utilizando o método de separação de variáveis

Vamos ver agora como determinar a solução de equações diferenciais parciais lineares. Na maior parte das aplicações das equações diferenciais parciais lineares é suficiente determinar soluções que verificam certas condições iniciais e certas condições de fronteira. Vamos ver primeiro um teorema importante para a determinação da solução de equações diferenciais.

Teorema: Se u_1, u_2, ... u_n forem soluções da equação diferencial parcial, então também $c_1u_1+c_2u_2+....+c_nu_n$, onde c_1, c_2, ...c_n são constantes é solução dessa equação.

Vamos então resolver equações diferenciais utilizando o método de separação de variáveis, o qual reduz uma equação diferencial parcial a várias equações diferenciais ordinárias. Para resolver uma equação diferencial por este método, supõe-se então que uma solução se pode escrever como o produto de duas funções desconhecidas, em que uma delas é função de apenas uma das variáveis independentes e a outra das restantes. A equação resultante escreve-se de modo a que um dos membros dependa apenas de uma das variáveis e o outro das variáveis restantes. Sendo assim cada um dos membros terá de ser uma constante, o que vai permitir determinar as soluções.

Exemplo: Resolva a equação diferencial $3\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0,$ com a condição $u(x,0)=4e^{-x}$.

Consideramos *u(x,y)= X(x)Y(y).*

Como *u(x,y)* é solução da equação diferencial temos e atendendo a que $\frac{\partial u}{\partial x}=X'Y$ e $\frac{\partial u}{\partial y}=XY'$ vem *3X'Y+2XY'=0.*

Então $\frac{3X'}{X}=-\frac{2Y'}{Y}$. Como *X* é apenas função de *x* e *Y* função de *y*, cada termo desta igualdade tem de ser constante, igual a *K*.

Obtemos então as equações

$\frac{3X'}{X}=K$ e $\frac{2Y'}{Y}=K$, que são equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{3X'}{X}=K\Rightarrow \quad X=C_1e^{\frac{K}{3}x}$$

$$\frac{2Y'}{Y}=K\Rightarrow \quad Y=C_2e^{\frac{K}{2}y}$$

Então *u(x,y)=* $C_1e^{\frac{K}{3}x}C_2e^{\frac{K}{2}y}=Ce^{\frac{K}{3}x+\frac{K}{2}y}$

A condição $u(x,0)=4e^{-x}$ leva a

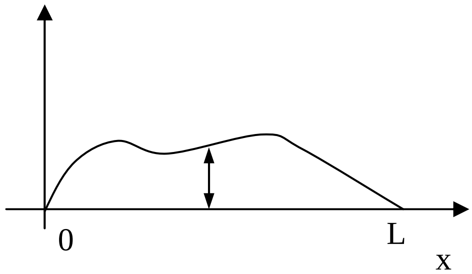
$$Ce^{\frac{K}{3}x}=4e^{-x}\Leftrightarrow\begin{cases}c=4\\ \frac{K}{3}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=4\\ K=-3\end{cases}$$

Logo $u(x,y)=4e^{-x-\frac{3}{2}y}$

Vamos agora estudar algumas equações diferenciais com aplicações em física e nas engenharias.

1. Equação das cordas vibrantes

Considere-se uma vibração transversal de uma corda flexível, em que as extremidades estão fixas nos pontos x=0 e x=L. A corda é posta em movimento.



Suponhamos que não há forças externas a actuar na corda e que esta vibra unicamente em função da elasticidade.

A elongação da corda, num dado instante, isto é, o deslocamento u(x,t) de um ponto arbitrário *x* da corda no instante *t* é dado pela solução da equação diferencial $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, em que a^2 é dada pelo quociente entre a tensão e a massa da corda (pode ser ou não constante).

Há outros fenómenos físicos que também se resolvem por meio de uma equação diferencial deste tipo. Por exemplo num tambor, no estudo das vibrações das membranas, utiliza-se a equação das membranas vibrantes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$. Temos também a equação que serve para estudar a propagação das ondas sonoras, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$.

Nota: Estas três equações são equações das ondas nos caso uni, bi e tri dimensionais.

Um exemplo de problema utilizando esta equação será:

Resolva a equação das cordas vibrantes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 0<x<2, t>0,

satisfazendo as condições iniciais :

u(x,0)=3 sin πx $\rightarrow$ Posição da corda no instante inicial

$u_t(x,0)=0$ $\rightarrow$ Velocidade da corda no instante inicial

e satisfazendo as condições de fronteira

u(0,t)=u(2,t)=0 $\rightarrow$ Posição das extremidades da corda em qualquer instante

2. Equação do calor

Considere-se um quadrilátero com dois lados paralelos ao eixo dos *xx*, sendo a sua superfície lateral isolada de modo a que não deixe entrar nem sair calor do prisma. A condutividade térmica, *k*, o calor específico, *c* e a densidade (massa por unidade de comprimento), ρ, consideram-se constantes. A temperatura *u(x,t)* na barra num dado instante, isto é a temperatura numa faixa perpendicular ao eixo dos *xx* a passar pelos pontos de abcissa *x* num dado instante, (o fluxo do calor faz-se na direcção e sentido positivo do eixo dos *xx*) é solução da equação diferencial $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$, onde $a=\frac{k}{c\rho}$.

A equação da difusão ou do calor tem equações correspondentes nos casos bi e tri dimensionais, que são:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \text{ e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Um exemplo de problema utilizando esta equação será:

Resolva a equação diferencial $2\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}$ 0<x<3, t>0,

com as condições iniciais

u(x,0)=5 sin 4πx - 3sin 8πx +2 sin 10πx → Repartição da temperatura no instante inicial

e com as condições de fronteira

u(0,t)=u(3,t)=0 → Condições impostas nas faces do muro, considerando-se uma das faces a começar no eixo dos *xx* .

3. Equação de Laplace

Se nas equações bi e tri dimensionais do calor considerarmos a temperatura independente do tempo, temos as equações de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$