

Modèle pour la Simulation de Tissus Connectifs

Julien Bosman¹, Christian Duriez², Stéphane Cotin²

¹LIFL/INRIA, ²INRIA

Résumé

A faire

Mots clé : Simulation, Méthodes sans maillage, Mécanique

1. Introduction

La simulation médicale est un domaine de plus en plus actif. Les simulateurs médicaux ont un champ d'application assez vaste allant du diagnostic à la formation des praticiens ou encore en aide à la chirurgie per et post opératoire. Jusqu'à maintenant, les organes simulés étaient directement en contact les uns avec les autres. Cependant, cette situation n'est pas conforme à la réalité. En effet, à l'intérieur du corps humains, les organes sont très rarement en contact direct. Ils sont généralement reliés entre eux par des fibres appelées *tissus connectifs*. Ces tissus peuvent être présent en une couche très fine ou en un volume plus important. Ils sont difficiles à modéliser et à simuler car étant donné qu'ils occupent l'espace présent entre les organes, ils n'ont pas de topologie réellement définie.

2. Etat de l'art

La simulation à base de méthodes sans maillage a été introduite en informatique graphique par Cani et Desbrun dans [DC96] et l'utilisation des *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) – reposant sur l'interaction réciproque d'un ensemble de particules – pour l'animation de modèles très déformables. Les SPH demeurent une méthodes populaires pour l'animation de fluides et d'objets très déformables. Les travaux de [BIT09] apportent une réponse au problème des non-linéarités géométrique en proposant un modèle corotationnel dédié. La méthode des SPH permet également de simuler des matériaux non-newtoniens aux comportements plus complexes notamment dans [PPLT09] et [HMH07]. Cependant, Les SPH souffrent de certains problèmes qui limitent leur utilisation notamment leur faible précision. Le

traitement des frontières est également difficile en raison de la déficience en particule sur le frontières de l'objet. De plus, le phénomène connu sous le nom de *tensile instability*, qui apparaît lorsque l'objet est fortement étiré, rend son utilisation problématique dans le cadre de la simulation de grandes déformation. Parallèlement, d'autres méthodes d'animation sans maillage ont été développées. Des modèles basés sur la mécanique des milieux continus à l'instar de [KNP*04] et de [HWJM10] où les champs de déplacement sont approximatés grâce aux *Moving Least Squares* (MLS). Cependant, l'approximation MLS est impossible si la distribution des nœuds est colinéaire ou coplanaire. En effet, la "moment matrix" devient alors singulière et les fonctions de forme ne peuvent être calculées. Des techniques d'animation, non basées sur la physique, ont également été développées. Dans [MHTG05], les objets sont déformés grâce à un système masse ressort en utilisant la méthode dite de *Shape Matching*, où les points de l'objet sont partitionnés en plusieurs groupes dont on estime une rotation optimale et une translation par rapport à la configuration non déformée. Cette idée est reprise dans [MC11] à la différence près que chaque possède une orientation qui est estimée au grâce à un *Shape Matching* généralisé. Enfin, dans [GBFP11], Gilles *et al.* proposent un modèle compatible avec la mécanique des milieux continus basé sur des repères. Cependant, leur approche concerne essentiellement des objets faiblement échantillonnés. De fait, elle est difficile à utiliser pour modéliser des objets qui doivent se conformer étroitement à des surfaces.

3. Simulation

3.1. Nomenclature

| | |
|--|---|
| $\bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{x}_i$ | coordonnées du nœuds i dans la configuration au repos et déformée |
| $\bar{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i$ | orientation du nœud i dans la configuration au repos et déformée |
| $\bar{\mathbf{p}}_s, \mathbf{p}_s$ | coordonnées globales du point d'intégration s dans la configuration au repos et déformée |
| $\bar{\mathbf{l}}_s^i, \mathbf{l}_s^i$ | coordonnées du point d'intégration s dans le repère i dans la configuration au repos et déformée. |
| $[\bar{\mathbf{R}}_i], [\mathbf{R}_i]$ | matrice de rotation associée à l'orientation du nœud i dans la configuration au repos et déformée |
| $[\mathbf{v}^\wedge]$ | matrice antisymétrique associée au produit vectoriel de \mathbf{v} |
| $[\mathbf{M}]^i$ | $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{M} |
| $[\mathbf{M}]^{i,j}$ | $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{M} |

3.2. Cinématique

Les objets déformables sont discrétisés par un ensemble de nœuds et de points d'intégration (figure 1). Les nœuds sont des repères à six degrés de liberté (DDL) :

$$\mathbf{q}_i = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ r_1 \ r_2 \ r_3]^t = [\mathbf{x}_i \ \mathbf{r}_i]^t \quad (1)$$

où \mathbf{x}_i sont les coordonnées du nœud et \mathbf{r}_i le vecteurs rotation correspondant à l'orientation du nœud. Les points d'intégration ne possèdent que trois DDL. Dans la mesure où l'on utilise une formulation en lagrangien total, la position globale des points d'intégration est exprimée en fonction de leur position dans chacun des repères dans la configuration non déformée. Les coordonnées d'un point d'intégration s dans le repère i dans la configuration non déformée est donné par :

$$\bar{\mathbf{l}}_s^i = [\bar{\mathbf{R}}_i]^t \cdot [\bar{\mathbf{p}}_s - \bar{\mathbf{x}}_i] \quad (2)$$

où $\bar{\mathbf{R}}_i$ et $\bar{\mathbf{x}}_i$ sont la matrice de rotation et les coordonnées du repère i et $\bar{\mathbf{p}}_s$ les coordonnées du point d'intégration s dans la configuration non déformée. Ainsi, les coordonnées du point d'intégration s dans la configuration déformée sont donnés par :

$$\mathbf{p}_s = \sum_i w_s(\bar{\mathbf{x}}_i) \left(\mathbf{x}_i + [\mathbf{R}_i] \cdot \bar{\mathbf{l}}_s^i \right) \quad (3)$$

où $w_s(\cdot)$ est une fonction de forme associée au point d'intégration s et \mathbf{x}_i et \mathbf{R}_i les coordonnées et la rotation du repère i dans la configuration déformée. La fonction de forme $w_s(\cdot)$ peut être à support compact (du type *fonction de Wendland*) ou non (*fonction de Shepard* par ex).

De la même façon, la cinématique des repères est influencée par le mouvement des points d'intégration qui lui sont associés. La variation de l'orientation du repère i dans en fonction des déplacements des points d'intégration est donné

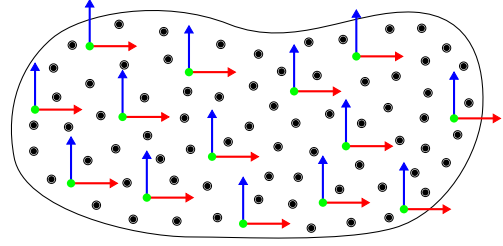


Figure 1: Discretisation des objets

par :

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{d\mathbf{p}} = \sum_s w_s(\mathbf{x}_i) (\mathbf{l}_s^i \wedge d\mathbf{p}_s) \quad (4)$$

où \mathbf{l}_s^i sont les coordonnées du point d'intégration s dans le repère i

3.3. Dynamique

3.3.1. Expression des forces internes

L'approche employée dans ces travaux se base sur la mécanique des milieux continus (MMC). Les matériaux étudiés sont considérés comme continus, c'est-à-dire qu'ils sont étudiés à une échelle microscopique, mais une échelle suffisamment grande pour négliger les espaces inter-moléculaires. La MMC permet de mettre en relation un déplacement (*i.e.* les déformations subies par un point) avec une force de rappel selon le schéma suivant :

$$\underbrace{\mathbf{u}_i}_{\text{déplacements}} \rightarrow \underbrace{\mathbf{F}_i}_{\text{gradient de déformation}} \rightarrow \underbrace{\mathbf{L}_i}_{\text{tenseur de déformation}} \rightarrow \underbrace{\boldsymbol{\xi}_i}_{\text{tenseur de contrainte}} \rightarrow \underbrace{\mathbf{f}_i}_{\text{force}}$$

La méthode décrite dans cet article utilise une formulation en lagrangien total. Dans une formulation en lagrangien total les déplacements sont évalués par rapport à la configuration non déformée de l'objet contrairement à la formulation en lagrangien updatée où ils sont évalués par rapport à la configuration de l'objet au pas de temps précédent. Le calcul des forces internes fait appel au principe des *travaux virtuels* :

$$\delta W = \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{f} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{L}^t}{\partial \mathbf{q}} \{ \mathbf{S} \} d\Omega \quad (5)$$

avec $\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I})$ est le tenseur de déformation de *Green-Lagrange* où \mathbf{F} est le gradient de déformation. \mathbf{S} est le second tenseur de contrainte de *Piola-Kirchoff* dans la notation de *Voigt*. La dérivée du tenseur de Green-Lagrange par rapport au degrés de liberté des repères est donné par :

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^t}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{F} + \mathbf{F}^t \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (6)$$

La première étape consiste à calculer le tenseur de déformation en un point d'intégration s c'est-à-dire $\mathbf{F}_s = \nabla \mathbf{u}_s$. Il

faut donc calculer la dérivée spatiale de l'équation (3). On remarque alors que seuls les termes $w_s(\mathbf{x}_i)$ et $\bar{\mathbf{I}}_s^i$ sont concernés. Or, en reprenant l'équation (2) on remarque que :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_s^i}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial([\bar{\mathbf{R}}_i]^t \cdot [\bar{\mathbf{p}}_s - \bar{\mathbf{x}}_i])}{\partial \mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{R}}_i]^t \quad (7)$$

on obtient alors le gradient de déformation au point d'intégration s :

$$\mathbf{F}_s = \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial \mathbf{X}} = \sum_i \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{x}_i + [\mathbf{R}_i] \cdot \bar{\mathbf{I}}_s^i) + w_{is} [\mathbf{R}_i] [\bar{\mathbf{R}}_i]^t \right] \quad (8)$$

où $w_{is} = w_s(\mathbf{x}_i)$. Afin d'obtenir la dérivée du tenseur de *Green-Lagrange* de l'équation (6) il est nécessaire de calculer la dérivée du tenseur de déformation par rapport à $\delta \mathbf{q}$ qui est une matrice 3×3 . On exprime alors ces neuf valeurs en fonction d'une variation infinitésimale de déplacement et d'orientation, c'est-à-dire en fonction de $\delta \mathbf{x}$ et $\delta \mathbf{r}$:

$$\delta \mathbf{F}_{IJ} = \sum_i \left(\delta \mathbf{x}_i + [-\mathbf{R}_i(\bar{\mathbf{I}}_s^i)^\wedge]^t \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) \frac{\partial w_{is}}{\partial \mathbf{x}_j} + [-\mathbf{R}_i(r_{ij}^0)^\wedge]^t \cdot \delta \mathbf{r}_i w_{is} \quad (9)$$

avec $\mathbf{R}_i(\bar{\mathbf{I}}_s^i)$ la rotation de $\bar{\mathbf{I}}_s^i$ par \mathbf{R}_i , $[\mathbf{v}^\wedge]$ la matrice antisymétrique 3×3 associée au produit vectoriel, $[\mathbf{M}]^i$ et $[\mathbf{M}]^j$ correspondent respectivement à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{M} et $r_{ij}^0 = [\mathbf{R}_i^0]^j$. En réécrivant les neuf valeurs de $\delta \mathbf{F}^s$ sous forme d'un vecteur colonne, l'équation (9) peut être exprimée sous la forme d'un produit matrice-vecteur :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{F}_{11}^s \\ \delta \mathbf{F}_{12}^s \\ \vdots \\ \delta \mathbf{F}_{33}^s \end{bmatrix} = \sum_i \mathbf{B}^{i,s} \cdot \delta \mathbf{q}_i \quad (10)$$

avec $\delta \mathbf{q}_i^t = [\delta \mathbf{x}_i \ \delta \mathbf{r}_i]^t$. La matrice \mathbf{B} est donnée en annexe. De la même façon, il est également possible d'écrire $\partial L / \partial q$ sous la forme d'un produit matrice-vecteur. En effet :

$$\begin{aligned} \delta L_{12} &= \frac{1}{2} \left([\delta \mathbf{F}^t]^1 \cdot [\mathbf{F}]^2 + [\mathbf{F}^t]^1 \cdot [\delta \mathbf{F}]^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left([\delta \mathbf{F}_{11} \ \delta \mathbf{F}_{21} \ \delta \mathbf{F}_{31}] \cdot [\mathbf{F}]^2 + [\mathbf{F}^t]^1 \cdot [\delta \mathbf{F}_{12} \ \delta \mathbf{F}_{22} \ \delta \mathbf{F}_{32}] \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Or, d'après l'équation (10) :

$$[\delta \mathbf{F}_{11} \ \delta \mathbf{F}_{21} \ \delta \mathbf{F}_{31}] = [B_1 \cdot \delta \mathbf{q} \ B_3 \cdot \delta \mathbf{q} \ B_7 \cdot \delta \mathbf{q}] \quad (12)$$

avec B_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{B} d'où :

$$\begin{aligned} \delta L_{12} &= \\ \frac{1}{2} &[\mathbf{F}_{12} B_1 + \mathbf{F}_{11} B_4 + \mathbf{F}_{31} B_7 + \mathbf{F}_{11} B_2 + \mathbf{F}_{21} B_5 + \mathbf{F}_{31} B_8] \cdot \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (13)$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} \delta L_{11}^s \\ \delta L_{12}^s \\ \vdots \\ \delta L_{33}^s \end{bmatrix} = \sum_i \mathbf{M}^{i,s} \cdot \delta \mathbf{q}_i \quad (14)$$

En substituant l'équation (14) à l'équation (5) et en divisant par $\delta \mathbf{q}$ on obtient :

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{M}^t \{ \mathbf{S} \} d\Omega \quad (15)$$

Cependant, l'équation (15) nous donne l'expression de la force dans le cas continu. Etant donné que cette intégrale ne peut être résolue analytiquement, hormis pour des cas simples, il est nécessaire de passer à une version discrète. L'intégrale de l'équation (15) doit être évaluée sur la totalité du domaine Ω occupé par l'objet. Pour ce faire, sous la forme discrète, on utilise les points d'intégration, aussi appelés *points de Gauss* qui échantillonnent l'objet. On obtient ainsi l'expression discrète de la force en un nœud :

$$\mathbf{f}_i = \sum_s \mathbf{M}^{i,s} \{ \mathbf{S}^s \} w_s(\mathbf{x}_i) \quad (16)$$

où \mathbf{S} en notation de Voigt est calculé grâce à la *loi de Hooke* qui est une loi de comportement décrivant des matériaux parfaitement élastiques (*i.e.* qui reviennent parfaitement à leur forme d'origine). Cette loi est linéaire, c'est-à-dire que la force de rappel est proportionnelle à l'élongation. Ainsi :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{L}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{L} \quad (17)$$

avec λ et μ qui sont les *coefficients de Lamé*

3.3.2. Formulation implicite

La formulation précédente (équation 16) est utilisable avec un solveur explicite. En effet, en utilisant le principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) :

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{f}^{int} + \mathbf{f}^{ext} \quad (18)$$

puis en effectuant successivement deux intégrations sur le temps, on peut obtenir les nouvelles positions et les nouvelles vitesses de chaque nœud au pas de temps suivant.

Cependant, bien qu'ils soient rapides, les solveurs explicites présentent certains désavantages, notamment l'instabilité. Les oscillations et l'introduction d'énergie supplémentaire conduisent la simulation à "exploser". Une solution couramment employée pour répondre à ce problème consiste à utiliser des pas de temps très court avec pour effet de ralentir la simulation. Pour ces raisons, on utilise un solveur implicite qui est inconditionnellement stable – une propriété intéressante dans le cadre de la simulation d'objets déformables. Les solveurs implicites permettent de résoudre un problème non-linéaire de manière itérative selon la méthode de *Newton-Raphson* [FDD*12]. Pour permettre au solveur de résoudre l'équation du mouvement, il est

nécessaire de linéariser la force, c'est-à-dire dériver l'expression de la force par rapport aux repères. Cela revient à exprimer la variation de la force en fonction d'une variation infinitésimale de la contrainte. En effet, d'après [BLM00] on a :

$$\delta \mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{M}^t \{ \delta \mathbf{S} \} d\Omega \quad (19)$$

avec :

$$\{ \delta \mathbf{S} \} = \mathbf{C} \{ \delta \mathbf{L} \} \quad (20)$$

ou la matrice \mathbf{C} donnée en annexe est la matrice des coefficients élastiques associés à la loi de Hooke. En substituant l'équation (14) à l'équation (19) on obtient :

$$\delta \mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{M}^t \mathbf{C} \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{q} d\Omega \quad (21)$$

De même qu'avec l'équation (15), il est nécessaire de passer à une formulation discrète afin d'être capable d'intégrer l'équation (21)

$$\delta \mathbf{f}_i = \sum_s \mathbf{M}^{i,s} \cdot \Delta \mathbf{S}^s \quad (22)$$

avec :

$$\Delta \mathbf{S}^s = \sum_i \mathbf{C} \mathbf{M}^{i,s} \cdot \delta \mathbf{q}_i \quad (23)$$

qui exprime la variation de la contrainte en un point d'intégration en fonction d'une variation des DDL différents nœuds.

3.4. Figures en couleur

Etant donné qu'il s'agit d'une publication électronique, il n'y a aucune censure à avoir sur les figures en couleur (cf figure 2).

4. Conclusion

A faire

Références

- [BIT09] BECKER M., IHMSEN M., TESCHNER M. : Corotated SPH for deformable solids.
- [BLM00] BELYTSCHKO T., LIU W. K., MORAN B. : *Nonlinear Finite Elements for Continuum Structures*. Wiley, 2000.
- [DC96] DESBRUN M., CANI M. : Smoothed particles : A new paradigm for animating highly deformable bodies. *Proceedings of the Eurographics workshop on Computer animation and simulation* (1996), 61–76.
- [FDD*12] FAURE F., DURIEZ C., DELINGETTE H., ALLARD J., GILLES B., MARCHESSEAU S., TALBOT H., COURTECUISSE H., BOUSQUET G., PETERLIK I., COTIN S. : SOFA : A Multi-Model Framework for Interactive Physical Simulation. In *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery*, Payan Y., (Ed.). Springer, juin 2012.
- [GBFP11] GILLES B., BOUSQUET G., FAURE F., PAI D. : Frame-based elastic models. *ACM Trans. Graph.* Vol. 30, Num. 2 (2011).
- [HMH07] HOSSEINI S. M., MANZARI M. T., HANNANI S. K. : A fully explicit three-step SPH algorithm for simulation of non-Newtonian fluid flow. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. Vol. 17, Num. 7 (2007), 715–735.
- [HWJM10] HORTON A., WITTEK A., JOLDES G. R., MILLER K. : A meshless Total Lagrangian explicit dynamics algorithm for surgical simulation. *Integration The Vlsi Journal*, Num. March (2010), 977–998.
- [KNP*04] KEISER R., NEALEN A., PAULY M., GROSS M., ALEXA M. : Point Based Animation of Elastic, Plastic and Melting Objects. *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation* (2004), 141–151.
- [MC11] MÜLLER M., CHENTANEZ N. : Solid simulation with oriented particles. *ACM Trans. Graph.* Vol. 30, Num. 4 (juillet 2011), 92 :1–92 :10.
- [MHTG05] MÜLLER M., HEIDELBERGER B., TESCHNER M., GROSS M. : Meshless deformations based on shape matching. *ACM Trans. Graph.* Vol. 24, Num. 3 (juillet 2005), 471–478.
- [PPLT09] PAIVA A., PETRONETTO F., LEWINER T., TAVARES G. : Particle-based viscoplastic fluid/solid simulation. *Comput. Aided Des.* Vol. 41, Num. 4 (avril 2009), 306–314.



Figure 2: Les figures en couleurs ou en noir et blanc peuvent être placées n'importe où dans le document.

Appendices

A. Calcul de la matrice B

$\mathbf{B}^{i,s} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w_{is}}{\partial x} & 0 & 0 & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial x} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^x, -[\mathbf{R}_i(r_{,x}^0)^\wedge]^x, w_{is} \right] \\ \frac{\partial w_{is}}{\partial y} & 0 & 0 & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial y} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^x, -[\mathbf{R}_i(r_{,y}^0)^\wedge]^x, w_{is} \right] \\ \frac{\partial w_{is}}{\partial z} & 0 & 0 & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial z} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^x, -[\mathbf{R}_i(r_{,z}^0)^\wedge]^x, w_{is} \right] \\ 0 & \frac{\partial w_{is}}{\partial x} & 0 & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial x} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^y, -[\mathbf{R}_i(r_{,x}^0)^\wedge]^y, w_{is} \right] \\ 0 & \frac{\partial w_{is}}{\partial y} & 0 & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial y} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^y, -[\mathbf{R}_i(r_{,y}^0)^\wedge]^y, w_{is} \right] \\ 0 & \frac{\partial w_{is}}{\partial z} & 0 & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial z} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^y, -[\mathbf{R}_i(r_{,z}^0)^\wedge]^y, w_{is} \right] \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_{is}}{\partial x} & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial x} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^z, -[\mathbf{R}_i(r_{,x}^0)^\wedge]^z, w_{is} \right] \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_{is}}{\partial y} & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial y} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^z, -[\mathbf{R}_i(r_{,y}^0)^\wedge]^z, w_{is} \right] \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_{is}}{\partial z} & \left[\frac{\partial w_{is}}{\partial z} [-\mathbf{R}_i(\tilde{\mathbf{p}}_s^{l,i})^\wedge]^z, -[\mathbf{R}_i(r_{,z}^0)^\wedge]^z, w_{is} \right] \end{bmatrix}$$

avec $w_{is} = w_s(\mathbf{x}_i)$

5. Matrice de Hooke

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(2-\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

où E et ν sont respectivement le *module de Young* et le *coefficient de Poisson*.