

MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA BALL AND PLATE

Aluno: Rafael da Silveira Castro
Professor: Jeferson Vieira Flores

Resumo

Este trabalho apresenta a construção e o controle de um sistema *Ball and Plate*. O protótipo construído tem o objetivo de regular a posição ou trajetória de uma esfera rolante sobre uma plataforma pelo comando da orientação desta placa. A teoria de controle *Linear Quadratic Gaussian* é aplicada neste projeto e o monitoramento da esfera utiliza um método de servo-visão baseado em posição. Os resultados comprovam a eficiência do sistema no seguimento de diferentes trajetórias.

Palavras-chave: Sistema *Ball and Plate*; Controle Digital; LQG; Servo-Visão.

MODELLING AND IMPLEMENTATION OF A BALL AND PLATE SYSTEM

Aluno: Rafael da Silveira Castro
Professor: Jeferson Vieira Flores

Abstract

This work presents the construction and control of a Ball and Plate system. The constructed prototype aims to balance a free rolling ball on a platform by orienting this plate. The Linear Quadratic Gaussian Control theory is applied on this project. The ball sensing method uses a position-based servo-vision algorithm. Experimental results illustrate the system behavior following different trajectories.

Key-words: Ball and Plate System; Digital Control; LQG; Servo-Vision.

1. INTRODUÇÃO

O desafio de controle de sistemas de equilíbrio está em constante estudo pela ciência para aplicações que variam da robótica até o transporte (Andrews et al., 2004). Neste contexto destaca-se a manipulação de uma esfera rolante sobre uma plataforma orientável, sistema conhecido como *Ball and Plate* (Bola e Placa). Implementações práticas deste sistema são muito utilizadas como ferramentas laboratoriais para fins educacionais bem como para pesquisas no ramo de engenharia de controle (Ker et al., 2007).

O objetivo principal do controle de um sistema *Ball and Plate* é permitir a acomodação ágil da esfera em qualquer posição da placa, além de impor à bola o seguimento de trajetórias arbitrárias, em formatos circulares e quadrados por exemplo. Esta tarefa deve ser realizada apenas pela alteração orientação da plataforma.

Este trabalho contribui com a modelagem e implementação física de um protótipo *Ball and Plate*, composto por uma placa orientável atuada por servo-motores. A estratégia de controle adotada basicamente segue a metodologia *Linear Quadratic Gaussian Control* (LQG) e o monitoramento da posição da esfera é realizado por servo-visão através de uma *webcam*. O sistema desenvolvido permite tanto a predefinição da trajetória de referência para a esfera quanto o reconhecimento em tempo real da trajetória por meio de uma ponteira laser.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Trabalhos prévios sobre sistemas *Ball and Plate*

A pesquisa em sistemas *Ball and Plate* vem despertando um crescente interesse pela comunidade acadêmica. Diversas publicações de modelagem e implementação deste sistema são encontradas nos últimos anos nas principais conferências e jornais internacionais de robótica, automação e controle. Estes trabalhos apresentam metodologias que diferem principalmente quanto à estratégia de controle adotada, à estrutura de manipulação da placa e ao monitoramento da esfera.

2.1.1. Estrutura Mecânica

Em geral, a estrutura mecânica dos sistemas *Ball and Plate* previamente realizados possuem um plataforma inclinável em ambos os eixos longitudinal e latitudinal. Isto significa dois graus de liberdade de rotação, portanto, são necessários para construção ao menos dois atuadores lineares ou rotacionais, além de um mecanismo para transferência do movimento destes atuadores para a placa.

Muitos projetos utilizam motores de corrente contínua (Andrews et al., 2004; Ding et al., 2007; Awtar et al., 2002; Waldwogel, 2010) ou servo-motores (Zia, 2011; Bordianu et al., 2012). A vantagem na utilização deste último é o baixo custo e a praticidade para aplicação no projeto, dado que estes dispositivos já possuem internamente um controle de posição em malha-fechada, em contrapartida aos projetos com motores tradicionais. A desvantagem na utilização dos servos-motores é a pouca disponibilidade de potência para construção de estruturas de maior porte.

Dentre os projetos com atuadores rotacionais citados previamente, Zia (2011), Bordianu et al. (2012) e Awtar et al. (2007) fixam a plataforma inclinável em seu

centro por uma junta universal para restringir a movimentação. A orientação é comandada por dois braços articulados, cada um conectado ao eixo do motor e à placa por outras duas juntas universais. Este aspecto construtivo é relativamente simples e requer poucos materiais, entretanto é capaz de cumprir com bom desempenho o objetivo da manipulação da esfera, conforme os resultados obtidos nestes trabalhos.

Outro mecanismo mais sofisticado, utilizado por Andrews et al. (2004), Ding et al. (2007) e Waldwogel (2010) consiste na construção de uma moldura em torno da placa, neste caso cada eixo de rotação está acoplado diretamente na placa. Este método é muito mais complexo que o anterior e necessita de um cuidadoso planejamento mecânico.

Apesar da preferência pelos motores em implementações *Ball and Plate* podem ser encontrados projetos com atuadores lineares magnéticos (Ker et al., 2007), além de braços robóticos para orientação direta da plataforma (Lee and Park, 2003; Bätz et al., 2008).

2.1.2. Estratégia de Controle

O problema de controle em um sistema *Ball and Plate* consiste em regular a trajetória ou posição da esfera pelo comando dos atuadores mecânicos responsáveis pela orientação da plataforma. Na literatura encontram-se diversas teorias de controle aplicadas para a solução deste problema.

Waldwogel (2010) realiza a comparação entre os métodos *Proportional Integral Derivative (PID)*, *Linear Quadratic Gaussian (LQG)* e *Model Predictive Control (MPC)* para trajetórias quadradas e circulares. Seus resultados comprovam um menor erro de seguimento nos controles *LQG* e *MPC* em relação ao *PID*, no entanto pouca diferença entre *MPC* e *LQG*. Este último, contudo, leva certa vantagem pela maior facilidade em sua síntese e melhor eficiência computacional que o *MPC*.

Fan et al. (2003) utiliza um esquema de controle de Lógica *Fuzzy* em múltiplas hierarquias, que simultaneamente equilibra a esfera e planeja trajetórias para o desvio de obstáculos sobre a placa. Seus resultados, comprovados apenas por simulações, mostram a condução da bola por obstáculos estreitos sem nenhuma colisão.

Já Moarref et al. (2008) utiliza um método de controle composto por um *PID* supervisionado por Lógica *Fuzzy*. Este controle permite o reajuste dos ganhos proporcional, integral e derivativo baseado na dinâmica observada. Os resultados comprovam uma redução no tempo de resposta comparado a um *PID* comum.

Andrews et al. (2004) desenvolve também o *LQG* e obtém resultados práticos que constata um tempo de acomodação de cerca de 2 segundos, além de mínimo sobre-sinal e erro em regime para o posicionamento da esfera em qualquer localização da placa. Suas conclusões também afirmam uma boa resposta perante à aplicação de distúrbios externos na bola.

Entre outras estratégias já aplicadas com sucesso para o controle de sistemas *Ball and Plate* estão: *Backstepping Control* (Moarref et al., 2008), *Sliding-Mode Control* (Lee and Park, 2003) e *Auto-Disturbance Rejection Controller (ADCR)* (Duan et al., 2009).

2.1.3. Monitoramento da Esfera

Um dos principais fatores para a correta implementação de um controle para o sistema *Ball and Plate* é a técnica de sensoriamento da esfera. Para qualquer estratégia de controle que se deseja utilizar é necessária uma metodologia para a medição da posição da bola sobre a placa. Para viabilização desta tarefa, a literatura está dividida principalmente entre dois métodos distintos.

Uma destas maneiras consiste na utilização de uma tela sensível ao toque (*display touch screen*) acoplado ou constituindo a placa (Andrews et al., 2004; Ker et al., 2007; Zia, 2011; Bordianu et al., 2012; Awtar et al., 2002). O outro método largamente utilizado é o monitoramento por um dispositivo de aquisição de imagens como uma *webcam* (Lee and Park, 2003; Ding et al., 2007; Moarref et al., 2008; Waldwogel, 2010).

O *display touch screen* apresenta vantagem de permitir um período de amostragem menor que o tempo de aquisição de quadros das *webcams* comerciais, além de não necessitar da lógica extra de processamento de imagem. A utilização da câmera constitui uma solução mais complexa, no entanto mais versátil e com menor custo que a solução com a tela sensível ao toque.

Dentre as maneiras para programação de aplicações com tratamento e aquisição de imagens em tempo real destaca-se o software MATLAB com os pacotes *Image Processing Toolbox* e *Image Acquisition Toolbox*, solução adotada por Moarref et al. (2008) em sua implementação do controle para o *Ball and Plate*. Estas bibliotecas possuem funções para comunicação com os dispositivos visuais além de diversas ferramentas para o processamento dos *frames* como transformações geométricas, detecção de objetos, ajuste de contraste e balanço de cores, análise de formas, filtragem de ruído e criação de histogramas.

2.2. Servo-motores

A utilização de servo-motores é um método popular e econômico para produção de movimento. Estes dispositivos possuem internamente um motor de corrente contínua, uma caixa de redução de engrenagens e um controle eletrônico de posição realimentado por um potenciômetro.

Os servo-motores são comandados por sinais digitais modulados em largura de pulso (PWM). O tempo dos pulsos de controle possui uma relação linear com a posição angular desejada no motor. Em geral o tempo alto varia de 1 a 2 milissegundos, correspondendo a movimentação do eixo em 180 graus. O tempo em nível lógico baixo deve completar o período do PWM, geralmente 20 milissegundos.

2.3. Linear Quadratic Gaussian Control (LQG)

O LQG é a combinação das técnicas de controle *Linear Quadratic Regulator* (LQR) com o *Linear Quadratic Estimator* (LQE) também chamado de Filtro de Kalman. Esta metodologia aplica-se para o controle de plantas com incertezas de modelagem e ruído nas medições dos sensores, supondo distribuições gaussianas para estes. O LQG baseia-se no princípio da separação o qual prova que o projeto da realimentação e do observador de estados podem ser realizados de maneira independente (Dorato et. al., 1995).

O LQR é um método prático para o projeto de uma realimentação de estados pela minimização de uma função de custo. A metodologia consiste em definir um

modelo linear da planta no espaço de estados e especificar parâmetros de penalização da energia desprendida de cada estado e cada sinal de controle.

O Filtro de *Kalman* é um observador de estados ótimo também obtido pela minimização de uma função de custo. Neste caso, os parâmetros de penalização são as covariâncias do ruído dos sensores e da modelagem do sistema. A vantagem na utilização deste estimador é a praticidade de sua síntese, permitindo especificar o quanto confiar na leitura dos sensores em relação ao modelo de equações do sistema.

2.4. Processamento de Imagens na Robótica

Quando um ser humano realiza uma tarefa ele utiliza vários sentidos para lidar com as incertezas envolvidas no seu trabalho e no ambiente. Dentre estes sentidos, a visão pode ser considerada a mais rica informação para a tomada de decisão. A robótica adotou este conceito aplicando aos dispositivos sensores visuais como câmeras.

Nos robôs, a informação visual permite robustez para lidar com acurácia em tarefas complexas em ambientes dinâmicos não conhecidos previamente. Além disso, a solução não requer o contato físico com a planta monitorada para a aquisição das informações, muitas vezes um requisito básico para aplicação (Lee and Park, 2003).

Os sistemas de controle que utilizam o monitoramento visual, conhecidos como sistemas de servo-visão, são classificados em dois tipos: *image-based* (baseado pela imagem) e *position-based* (baseado pela posição).

Nos sistemas *position-based* os dados adquiridos são utilizados para reconstruir a posição ou orientação do objeto monitorado para um espaço cartesiano. Já nos sistemas *image-based* o processamento é realizado diretamente sobre os *pixels* das imagens obtidas (Battistelli et al., 2012).

3. METODOLOGIA DE PESQUISA

O sistema *Ball and Plate* foi elaborado segundo a Estrutura Analítica de Projeto (EAP) apresentada na Figura 1.

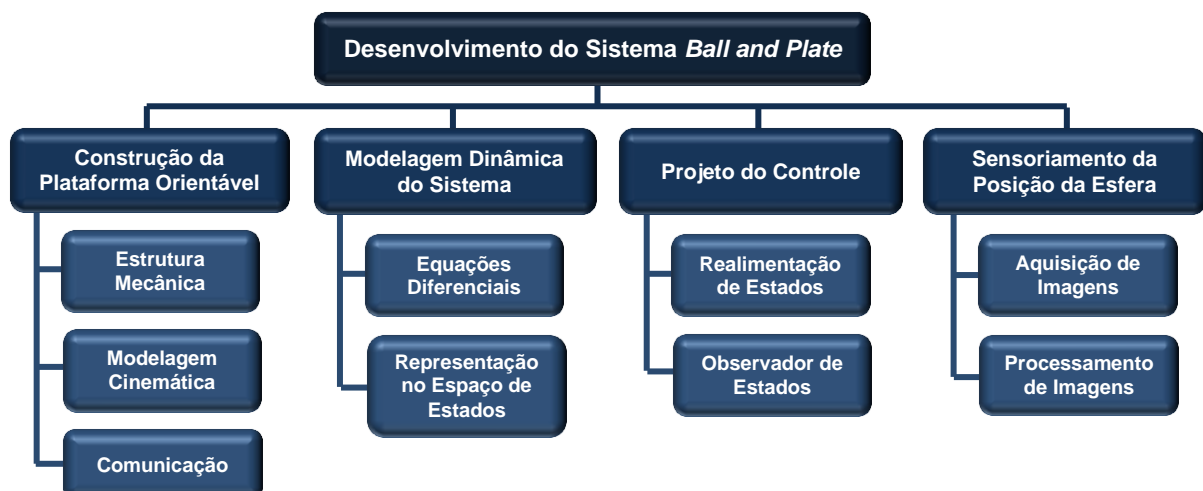


Figura 1 – Estrutura Analítica do Projeto (EAP).

3.1. Construção da Plataforma Orientável

Neste projeto foi construída uma plataforma orientável com dois graus de liberdade de rotação. O protótipo foi projetado para ser comandado por um *PC* via o software *MATLAB*.

3.1.1 Estrutura Mecânica

A Figura 2 apresenta duas vistas da estrutura projetada, destacando os principais componentes. O mecanismo de movimentação da plataforma é inspirado nos trabalhos de Bordianu et al. (2012) e de Awtar et al. (2007).

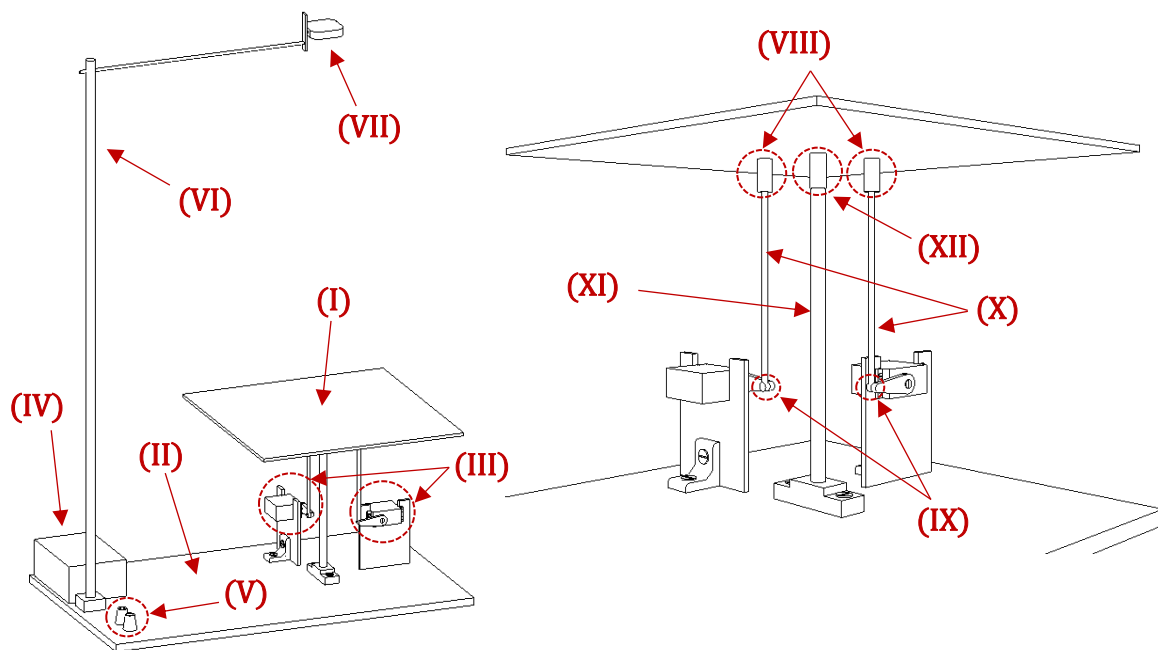


Figura 2 – Esquemático dos componentes da estrutura.

O sistema é construído sobre uma base de madeira retangular (II) de $500 \times 300 \text{ mm}$ e espessura de 20 mm . Sobre esta base encontra-se a estrutura de movimentação da placa, além dos outros componentes auxiliares.

A superfície para a rolagem da esfera (I) é uma placa de acrílico quadrada de $280 \times 280 \text{ mm}$ e espessura de 4 mm . Esta peça é fixada à base por uma haste central (XI) de alumínio com diâmetro de 9 mm . A conexão entre a placa e a haste central (XII) é realizada por uma junta universal de modelo comercial *297c U-Joint*, conforme Figura 3a. A junta universal central é responsável por limitar a movimentação da placa para os dois graus de liberdade de rotação desejados.

Os atuadores do mecanismo (III) são servo-motores digitais *Hextronic HX12K* (Figura 3c). Este modelo possui engrenagens metálicas, torque nominal de 10 kg cm e velocidade nominal de $0,16 \text{ s}/60^\circ$. A tensão recomendada de alimentação é entre 5 V e 7 V DC e a drenagem máxima de corrente é cerca de 2 A . O comando da posição é realizado por sinais *PWM* de 50 Hz . O curso de rotação deste modelo de servo-motor é de 120° .

Para a transferência do movimento de rotação dos servo-motores para a placa foram construídos dois braços articulados (X). Cada braço é constituído de

duas partes móveis: um tubo de fibra de carbono com 4 mm de diâmetro e a extensão unilateral do eixo do servo-motor. A conexão entre a extensão e o tubo (IX) é realizada por uma junta esférica de modelo comercial *Ball and Roller Link*, conforme Figura 3b. Já a conexão entre a o tubo e a placa (VIII) é realizada pela mesma junta universal utilizada na haste central (Figura 3a).



Figura 3 – Foto dos principais componentes da estrutura:
(a) Junta Universal 297c, (b) *Ball and Roller Link* e (c) Servo-Motor Hextronic HX12K.

Sobre a base da estrutura, encontra-se também um suporte de tubos de fibra de carbono (VI) para fixação do dispositivo de aquisição de imagens (VII), o qual será descrito na Seção 3.4. O protótipo também inclui bornes (V) para conexão da tensão de alimentação para os servo-motores e uma caixa (IV) para fixação da placa de prototipagem eletrônica, responsável pela comunicação com os servo-motores.

Mais detalhes a respeito do projeto mecânico estão dispostos no Apêndice 1.

3.1.2 Modelagem Cinemática

A modelagem cinemática consiste na determinação de relações matemáticas para as posições θ_α e θ_β dos atuadores em função da orientação espacial α e β da plataforma, conforme esquematizado na Figura 4.

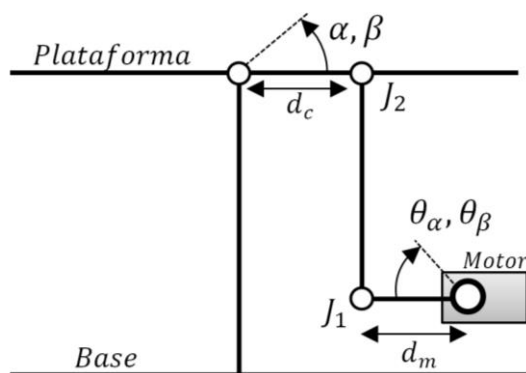


Figura 4 – Diagrama do mecanismo de movimentação da plataforma.

Para encontrar estas relações foram realizadas as seguintes suposições:

- A movimentação dos braços articulados de cada motor são independentes entre si, ou seja, α depende somente de θ_α e β somente de θ_β pelas mesmas relações.
- A altura do deslocamento da junta J_1 é igual à altura do deslocamento da junta J_2 para ambos os braços articulados.

Dadas as considerações citadas, determina-se as seguintes relações geométricas:

$$d_m \sin(\theta_\alpha) = d_c \sin(\alpha), \quad d_m \sin(\theta_\beta) = d_c \sin(\beta). \quad (1)$$

Isolando θ_α e θ_β em (1) obtém-se as seguintes relações:

$$\theta_\alpha = \arcsen\left(\frac{d_c}{d_m} \sin(\alpha)\right), \quad \theta_\beta = \arcsen\left(\frac{d_c}{d_m} \sin(\beta)\right). \quad (2)$$

Para garantir na prática que $\alpha = 0^\circ$ e $\beta = 0^\circ$ (isto é, orientação da placa perpendicular ao sentido da força gravitacional) para $\theta_\alpha = 0^\circ$ e $\theta_\beta = 0^\circ$ foi acrescentado às equações em (2) ângulos de correção γ_α e γ_β :

$$\theta_\alpha = \arcsen\left(\frac{d_c}{d_m} \sin(\alpha)\right) + \gamma_\alpha, \quad \theta_\beta = \arcsen\left(\frac{d_c}{d_m} \sin(\beta)\right) + \gamma_\beta.$$

Para o protótipo construído as dimensões d_c e d_m são respectivamente 50 mm e 30 mm. Já os ângulos de ajuste γ_α e γ_β encontrados experimentalmente são $-7,5^\circ$ e $-11,5^\circ$ respectivamente. A faixa de trabalho, para as inclinações α e β da placa, foi delimitada entre -25° e $+25^\circ$, de modo a não exceder o curso máximo dos motores (entre -60° e $+60^\circ$).

3.1.3 Comunicação

Um importante requisito no projeto da plataforma orientável foi a comunicabilidade com um PC pelo software *MATLAB*, onde são implementadas as rotinas de controle e processamento de imagens do sistema, beneficiando-se assim da gama de funções do *software* e da velocidade de processamento do PC.

Para a comunicação dos ângulos de referência θ_α e θ_β do *MATLAB* aos servo-motores do protótipo foi utilizada a arquitetura esquematizada pela Figura 5.



Figura 5 – Arquitetura de comunicação com os servo-motores.

Esta arquitetura consiste no envio dos ângulos de referência θ_α e θ_β do *MATLAB* para uma placa de prototipagem eletrônica *Arduino Mega 2560* via comunicação *serial*. O *Arduino*, por sua vez, é responsável por gerar os sinais *PWM* para cada servo-motor do protótipo, de acordo com os ângulos recebidos pelo PC.

3.2. Modelagem Dinâmica do Sistema

Esta seção apresenta os métodos para modelagem da dinâmica do sistema *Ball and Plate* e sua representação no espaço de estados (utilizados no projeto do controle da planta).

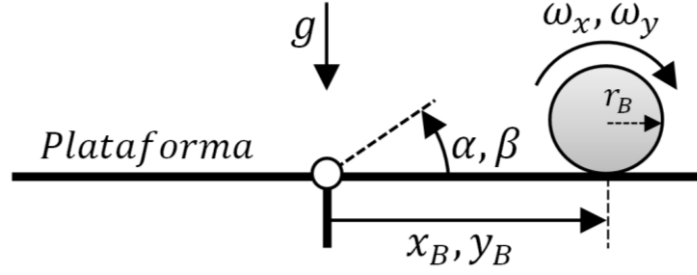


Figura 6 – Esquemático do sistema *Ball and Plate*.

3.2.1 Equações Diferenciais

Para obtenção de um modelo de equações diferenciais da dinâmica do sistema foi aplicada a *Mecânica Lagrangiana* (Deriglazov, 2010) pela derivação da seguinte expressão genérica (*Equação de Euler-Lagrange*):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \quad (3)$$

Este método consiste em determinar uma *Função Lagrangiana*

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i) \quad (4)$$

em função de coordenadas generalizadas q_i do sistema e suas taxas de variação \dot{q}_i , onde T é a energia cinética total do sistema e V a energia potencial total. O termo dissipativo Q_i em (3) representa uma força composta externa atuante no sistema.

O objetivo é a descrição da movimentação da bola, portanto define-se as coordenadas generalizadas do sistema como as coordenadas x_B e y_B da bola sobre a placa. Define-se também o termo Q_i como forças F_x e F_y atuando sobre cada coordenada da esfera. Então escreve-se

$$q_i = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix},$$

e expande-se a *Equação de Euler-Lagrange* em (3) para as coordenadas específicas do sistema em estudo, resultando nas seguintes expressões:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_B} - \frac{\partial L}{\partial x_B} = F_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_B} - \frac{\partial L}{\partial y_B} = F_y. \quad (5)$$

A energia cinética total T do sistema é determinada pela soma das energias cinéticas de translação T_t e de rotação T_r . A energia de translação depende da massa m_B da esfera e das velocidades lineares \dot{x}_B e \dot{y}_B que o objeto translada, pela relação

$$T_t = \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2), \quad (6)$$

já a energia de rotação depende do momento de inércia I_B da esfera e das velocidades angulares ω_x e ω_y que o objeto rotaciona, segundo a relação

$$T_r = \frac{1}{2} I_B (\omega_x^2 + \omega_y^2). \quad (7)$$

Sendo o raio r_B da esfera conhecido, pode-se reescrever a equação (7) em função das velocidades lineares \dot{x}_B e \dot{y}_B pela utilização das igualdades:

$$\omega_x = \frac{\dot{x}_B}{r_B}, \quad \omega_y = \frac{\dot{y}_B}{r_B}.$$

Supondo uma esfera compacta, o momento de inércia I_B em (7) pode ser escrito pela fórmula

$$I_B = \frac{2}{5} m_B r_B^2.$$

Realizando as substituições anteriormente indicadas e somando as energias cinéticas de translação e rotação, em (6) e (7) respectivamente, encontra-se a energia cinética total T do sistema:

$$T = \frac{7}{10} m_B (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2).$$

A energia potencial total V do sistema é dada pela incidência da força gravitacional conforme a relação

$$V = m_B g (x_B \sin(\alpha) + y_B \sin(\beta)).$$

Construindo a *Função Lagrangiana* conforme (4) e aplicando nas expressões em (5) obtém-se as seguintes equações diferenciais que descrevem a movimentação da esfera:

$$\frac{7}{5} \ddot{x}_B(t) + g \sin(\alpha(t)) = \frac{F_x(t)}{m_B}, \quad \frac{7}{5} \ddot{y}_B(t) + g \sin(\beta(t)) = \frac{F_y(t)}{m_B}.$$

Visto que será trabalhado com inclinações pequenas na placa ($\pm 25^\circ$) são válidas as seguintes simplificações:

$$\sin(\alpha(t)) \cong \alpha(t), \quad \sin(\beta(t)) \cong \beta(t).$$

As forças dissipativas $F_x(t)$ e $F_y(t)$ podem ser escritas como

$$F_x(t) = -f_c \dot{x}_B(t) + d_x(t), \quad F_y(t) = -f_c \dot{y}_B(t) + d_y(t),$$

onde f_c é o fator de atrito cinético entre a esfera e placa e $d_x(t)$ e $d_y(t)$ são forças de distúrbios atuantes na esfera.

Para modelar a movimentação $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ em função de suas referências $r_\alpha(t)$ e $r_\beta(t)$ será assumido relações de segunda ordem genéricas, com frequência natural ω_n e fator de amortecimento ξ , conforme:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) + 2 \xi \omega_n \dot{\alpha}(t) + \omega_n^2 \alpha(t) &= \omega_n^2 r_\alpha(t), \\ \ddot{\beta}(t) + 2 \xi \omega_n \dot{\beta}(t) + \omega_n^2 \beta(t) &= \omega_n^2 r_\beta(t). \end{aligned}$$

3.2.2 Representação no Espaço de Estados

Para aplicação das técnicas de projeto de controle foram obtidos dois modelos em espaço de estados a partir das equações diferenciais do sistema: um modelo básico e um modelo aumentado.

Ambos os modelos obtidos possuem sinais de entrada $u_x(t) = r_\alpha(t)$ e $u_y(t) = r_\beta(t)$, além de sinais de saída $z_x(t) = x_B(t)$ e $z_y(t) = y_B(t)$.

Para simplificar a notação segue que $u_{x|y}(t)$ denota tanto $u_x(t)$ quanto $u_y(t)$, da mesma forma que $z_{x|y}(t)$ denota tanto $z_x(t)$ quanto $z_y(t)$. A mesma notação será aplicada aos vetores de estados de cada modelo.

- **Modelo Básico:** Desconsidera a dinâmica dos motores, assumida como muito mais rápida que a dinâmica da esfera. Neste caso, as referências $r_\alpha(t)$ e $r_\beta(t)$ são exatamente os ângulos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ da placa. Também desconsidera a presença de distúrbios externos $d_x(t)$ e $d_y(t)$. Esta representação contempla as características básicas do sistema, portanto foi utilizada para o projeto da realimentação de estados (pelo método *LQR*). O modelo básico é definido com vetores de estados $\varphi_x(t)$ e $\varphi_y(t)$ conforme as relações:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{x|y}(t) = A_\varphi \varphi_{x|y}(t) + B_\varphi u_{x|y}(t) \\ z_{x|y}(t) = C_\varphi \varphi_{x|y}(t) \end{cases}, \quad \varphi_x = \begin{bmatrix} x_B \\ \dot{x}_B \end{bmatrix}, \quad \varphi_y = \begin{bmatrix} y_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix},$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5f_c}{7m_B} \end{bmatrix}, \quad B_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{7}g \end{bmatrix}, \quad C_\varphi = [1 \ 0].$$

- **Modelo Aumentado:** Considera a dinâmica da esfera e a dinâmica do mecanismo de movimentação da placa. Também possui estados adicionais que incluem os distúrbios $d_x(t)$ e $d_y(t)$ assumidos constantes, isto é, $\dot{d}_x(t) \cong 0$ e $\dot{d}_y(t) \cong 0$. Esta representação foi utilizada no projeto do observador de estados (Filtro de *Kalman*) que requer um modelo relativamente preciso para a qualidade das estimações. O modelo aumentado é definido com vetores de estados $\sigma_x(t)$ e $\sigma_y(t)$ conforme as expressões:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{x|y}(t) = A_\sigma \sigma_{x|y}(t) + B_\sigma u_{x|y}(t) \\ z_{x|y}(t) = C_\sigma \sigma_{x|y}(t) \end{cases}, \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} x_B \\ \dot{x}_B \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \\ d_x \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} y_B \\ \dot{y}_B \\ \beta \\ \dot{\beta} \\ d_y \end{bmatrix},$$

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5f_c}{7m_B} & -\frac{5}{7}g & 0 & \frac{5}{7m_B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_n^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_\sigma = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Os estados $\varphi_{x|y}$ do modelo básico e os estados $\sigma_{x|y}$ do modelo aumentado estão relacionados pela seguinte expressão:

$$\varphi_{x|y}(t) = E_\sigma \sigma_{x|y}(t), \quad E_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Visando a aplicação de técnicas de controle em tempo discreto, os modelos contínuos foram convertidos para a representação

$$\begin{aligned} \varphi_{x|y}(k+1) &= \mathcal{A}_\varphi \varphi_{x|y}(k) + \mathcal{B}_\varphi u_{x|y}(k) \\ \sigma_{x|y}(k+1) &= \mathcal{A}_\sigma \sigma_{x|y}(k) + \mathcal{B}_\sigma u_{x|y}(k) \end{aligned}$$

onde k é o número da amostra dado por

$$k = \frac{t}{T_s} \quad (9)$$

sendo T_s o período de amostragem do sistema.

Para encontrar as matrizes \mathcal{A}_i e \mathcal{B}_i dos modelos discretos em função das matrizes A_i e B_i dos modelos contínuos (tanto para $i = \varphi$ quanto para $i = \sigma$) de forma a atender a igualdade em (9) pode-se aplicar a equação de discretização exata (DeCarlo, 1995):

$$\Phi_i = e^{T_s \Omega_i},$$

onde Φ_i e Ω_i são:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Omega_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores dos parâmetros dos modelos estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros dos modelos no espaço de estados.

Parâmetro	Valor
m_B	0,02 kg
r_B	0,0125 m
g	9,81 m/s
ω_n	15 rad/s
ξ	1
f_c	0,025 Ns/m

3.3. Projeto do Controle

O controle do sistema é realizado pelo método *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) (Dorato et. al., 1995), que consiste na combinação de uma realimentação ótima de estados pelo método *Linear Quadratic Regulator* (LQR) com um observador de estados ótimo pelo Filtro de *Kalman*.

3.3.1 Realimentação de Estados – LQR

A lei de controle que regula o sistema consiste na realimentação dos estados estimados $\hat{\varphi}_{x|y}(k)$ por um vetor de ganhos K , conforme a equação

$$u_{x|y}(k) = -K \hat{\varphi}_{x|y}(k) + G_r r_{x|y}(k), \quad (10)$$

onde as referências $r_{x|y}(k)$ são as respectivas posições $z_{x|y}(k)$ desejadas na esfera e G_r é o fator de correção, calculado por

$$G_r = (C_\varphi (I - \mathcal{A}_\varphi + \mathcal{B}_\varphi K)^{-1} \mathcal{B}_\varphi)^{-1},$$

para obtenção de ganho DC unitário entre as referências $r_{x|y}(k)$ e as saídas $z_{x|y}(k)$.

O controlador *LQR* (Dorato et. al., 1995) consiste na solução do vetor de ganhos K que minimiza o funcional de custo

$$J_{LQR} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{x|y}'(k) Q \varphi_{x|y}(k) + u_{x|y}'(k) R u_{x|y}(k)$$

onde as matrizes Q e R penalizam a energia dos estados do sistema e dos sinais de controle, respectivamente.

O ganho K ótimo que minimiza J_{LQR} é calculado pela expressão

$$K = (R + \mathcal{B}_\varphi' P \mathcal{B}_\varphi)^{-1} \mathcal{B}_\varphi' P \mathcal{A}_\varphi,$$

onde a variável P é a solução para a seguinte *Equação de Riccati*:

$$P = \mathcal{A}_\varphi' (P - P \mathcal{B}_\varphi (R + \mathcal{B}_\varphi' P \mathcal{B}_\varphi)^{-1} \mathcal{B}_\varphi' P) \mathcal{A}_\varphi + Q.$$

Esta última equação não possui solução analítica, logo foi utilizada a função “dare” do software *MATLAB* para a resolução numérica.

As matrizes de penalização Q e R foram construídas conforme

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad R = [r_1],$$

onde q_1 representa a importância na minimização do erro de posição da esfera, q_2 representa a importância na minimização das oscilações para evitar elevado sobre-sinal e r_1 a importância na minimização da amplitude do sinal de controle para evitar a saturação. A Tabela 2 apresenta os valores selecionados para estes parâmetros. Os ganhos de realimentação resultantes para esta configuração são:

$$K = [-1,92 \quad -0,85], \quad G_r = -1,92.$$

Tabela 2 – Configuração do controle LQR.

Parâmetro	Valor
q_1	4,6
q_2	0,48
r_1	1

3.3.2 Observador de Estados – Filtro de *Kalman*

A estimação $\hat{\sigma}_{x|y}(k)$ dos estados reais $\sigma_{x|y}(k)$ é realizada pela predição *a priori* (segundo o modelo aumentado sistema) pela equação

$$\hat{\sigma}_{x|y}(k)_{priori} = \mathcal{A}_\sigma \hat{\sigma}_{x|y}(k-1) + \mathcal{B}_\sigma u_{x|y}(k-1)$$

e pela correção *a posteriori* por um vetor de ganhos L , conforme a expressão

$$\hat{\sigma}_{x|y}(k)_{posteriori} = \hat{\sigma}_{x|y}(k)_{priori} + L e_{x|y}(k),$$

onde o termo $e_{x|y}(k)$, expresso por

$$e_{x|y}(k) = z_{x|y}(k) - C_\sigma \hat{\sigma}_{x|y}(k)_{priori},$$

significa o erro entre as saídas medidas e estimadas *a priori* pelo modelo.

Para extrair os estados estimados $\hat{\phi}_{x|y}(k)$ requeridos pela lei de controle em (10) a partir dos estados estimados $\hat{\sigma}_{x|y}(k)$ basta aplicar a relação em (8).

O ganho L ótimo (ganho de *Kalman*) (Dorato et. al., 1995) é encontrado pela minimização do funcional de custo

$$J_{Kalman} = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_{x|y}(k) - \hat{\sigma}_{x|y}(k))^2.$$

Supondo que as medições possuem ruído $v(k)$, que os estados do modelo possuem incerteza $w(k)$ e que ambos $v(k)$ e $w(k)$ possuem distribuição gaussiana, com média zero e matrizes de covariância V e W respectivamente, calcula-se o ganho ótimo L que minimiza J_{Kalman} pela expressão

$$L = \mathcal{A}_\sigma P C_\sigma' (V + C_\sigma P C_\sigma')^{-1},$$

onde P , neste caso, é a solução para a seguinte *Equação de Riccati*:

$$P = \mathcal{A}_\sigma (P - P C_\sigma' (C_\sigma P C_\sigma' - V)^{-1} C_\sigma P) \mathcal{A}_\sigma' + W,$$

a qual novamente foi resolvida pela função “dare” do software *MATLAB*.

As matrizes de covariância W e V foram definidas conforme

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 \end{bmatrix}, \quad V = [v_1],$$

onde aumentando os valores em V e diminuindo em W confia-se mais na predição do modelo, já diminuindo V e aumentando W confia-se mais nas medições. Os valores numéricos selecionados para estes parâmetros estão apresentados na Tabela 3. O ganho de *Kalman* L resultante para estas configurações é

$$L = [0,94 \quad 9,11 \quad -3,34 \quad 32,83 \quad 0,38]'$$

Tabela 3 – Configuração do Filtro de *Kalman*.

Parâmetro	Valor
w_1	1
w_2	1
w_3	2000
w_4	2000
w_5	2
v_1	10

3.4. Sensoriamento da Posição da Esfera

Neste projeto foi desenvolvido um método de servo-visão *position-based*, que consiste na dedução das coordenadas cartesianas x_B e y_B pelos *pixels* das imagens obtidas. O problema central é medir corretamente a posição da esfera para qualquer postura da plataforma. Para isto, é detectado os cantos da placa e, por relações geométricas, é calculada a posição relativa à placa. A mesmas rotinas desenvolvidas para detecção da posição da bola foram utilizadas para detecção do ponto luminoso de uma ponteira *laser*, para indicar a trajetória de referência da esfera em tempo real.

Para realização do sensoriamento visual, a plataforma de acrílico do protótipo, a base e a mesa sobre o qual a estrutura foi colocada foram cobertos por uma cartolina preta fosca. A esfera utilizada e os adesivos de sinalização dos cantos da placa possuem coloração branca para melhor destaque destes objetos na imagem.

3.4.1 Aquisição de Imagens

A captura das imagens é realizada por uma *webcam USB Microsoft VX-800* (Figura 7a). Este dispositivo apresenta uma resolução de 640×480 *pixels* e uma taxa de transmissão de 30 quadros por segundo. Para aquisição das imagens no *software MATLAB* são utilizadas funções do pacote *Image Acquisition Toolbox*, que oferece suporte tanto para o *setup* do dispositivo quanto para a leitura dos quadros da câmera.

A captura dos frames, realizada no laço de controle do programa, é efetuada pela a função “*trigger*”. Para armazenar a imagem em uma matriz de dados foi aplicada a função “*getdata*”. A Figura 7b apresenta um exemplo de *frame* adquirido, onde nota-se o destaque das marcações dos cantos da placa e da esfera contra os demais elementos do protótipo.

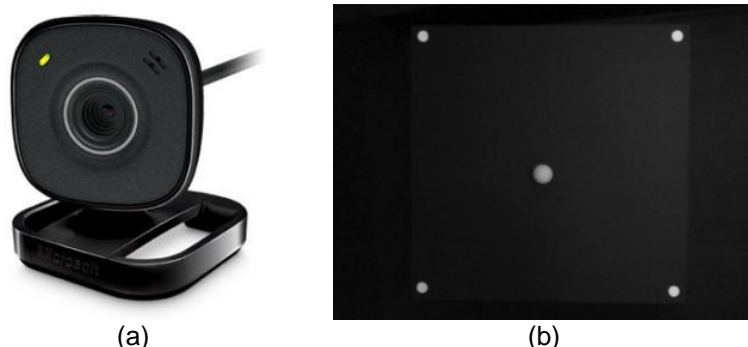


Figura 7 – (a) Webcam Microsoft VX-800 e (b) exemplo de um *frame* obtido pela câmera.

3.4.2 Processamento de Imagens

O processamento de cada *frame* gerado pela câmera é constituído de dois passos distintos para determinar a posição da esfera:

- **Etapa I:** Localização das posições na imagem (em pixels) da esfera e das quatro marcações dos cantos da placa.
- **Etapa II:** Determinação da posição cartesiana x_B e y_B da bola sobre a placa (em metros) a partir da informação da Etapa I.

A programação da Etapa I foi desenvolvida utilizando o pacote de funções *Image Processing Toolbox* do software *MATLAB*. No algoritmo implementado, primeiramente é utilizada a função “*im2bw*” que converte a matriz da imagem, originalmente no espaço *grayscale* (valor dos *pixels* de 0 a 255), para o espaço binário (valor dos *pixels* de 0 ou 1).

Após a obtenção da imagem binária, é utilizada a função “*bwconncomp*” para localizar e separar os objetos na imagem e a função “*regionprops*” para determinar o centroide e área de cada objeto. Pelo centroide identifica-se a posição de cada objeto na imagem. Já pela área diferencia-se a esfera das marcações, dado que a área ocupada pela esfera na imagem é sempre a maior.

Para implementação da Etapa II foram encontradas relações matemáticas geométricas que realizam a transferência do sistema de coordenadas da imagem para o sistema de coordenadas físico da plataforma. A elaboração das equações é baseada nas definições seguintes.

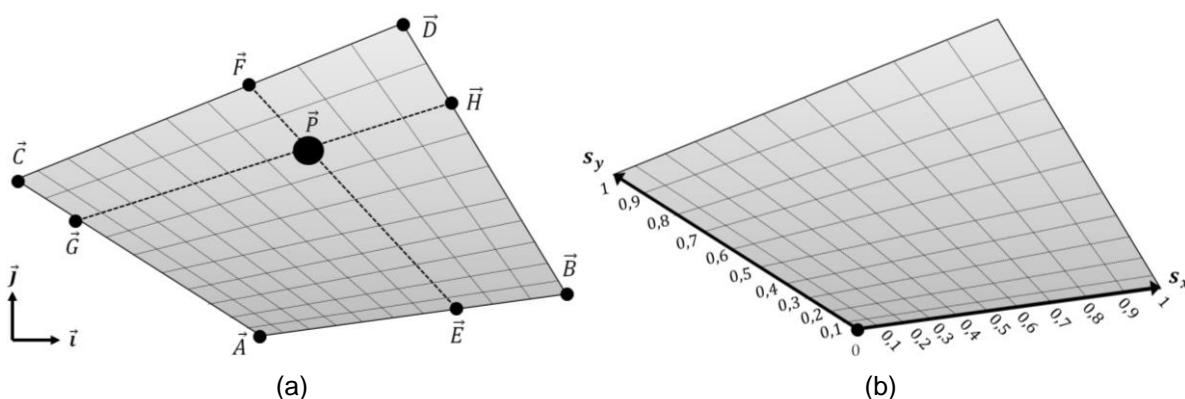


Figura 8 – Diagramas da imagem: (a) pontos importantes na imagem e (b) sistema de coordenadas normalizado em relação à placa.

Define-se \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} e \vec{D} os vetores posição dos cantos na imagem e define-se \vec{P} o vetor posição da bola na imagem, conforme a Figura 8a. Estes vetores possuem componentes nas coordenadas \vec{i} e \vec{j} da imagem segundo a notação $\vec{V} = V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j}$.

Define-se também um sistema de coordenadas normalizado em relação à placa conforme esquematizado pela Figura 8b. O objetivo, portanto, consiste em encontrar s_x e s_y que determinam a localização de \vec{P} .

Pelas definições dadas, são escritas as seguintes expressões:

$$\overrightarrow{AE} = s_x \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CF} = s_x \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AG} = s_y \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BH} = s_y \overrightarrow{BD} \quad (11)$$

Utilizando a propriedade da soma de vetores (isto é, $\vec{V} = \vec{U} + \vec{UV}$), as relações em (11) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= s_x (\vec{B} - \vec{A}) + \vec{A}, & \vec{F} &= s_x (\vec{D} - \vec{C}) + \vec{C} \\ \vec{G} &= s_y (\vec{C} - \vec{A}) + \vec{A}, & \vec{H} &= s_y (\vec{D} - \vec{B}) + \vec{B} \end{aligned}$$

Aplicando a condição de colinearidade entre os pontos \vec{E} , \vec{P} e \vec{F} e entre os pontos \vec{G} , \vec{P} e \vec{H} pelo método do determinante, ou seja

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & 1 \\ F_1 & F_2 & 1 \\ P_1 & P_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} G_1 & G_2 & 1 \\ H_1 & H_2 & 1 \\ P_1 & P_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

encontram-se as seguintes equações de segunda ordem que determinam s_x e s_y :

$$\lambda_x s_x^2 + \mu_x s_x + \eta_x = 0, \quad \lambda_y s_y^2 + \mu_y s_y + \eta_y = 0. \quad (12)$$

Os coeficientes λ_x , λ_y , μ_x , μ_y , η_x e η_y são determinados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \lambda_x &= (B_1 - A_1)(D_2 - C_2) - (B_2 - A_2)(D_1 - C_1) & \lambda_y &= (C_1 - A_1)(D_2 - B_2) - (C_2 - A_2)(D_1 - B_1) \\ \mu_x &= C_2(B_1 - A_1) + A_1(D_2 - C_2) - C_1(B_2 - A_2) - A_2(D_1 - C_1) + P_1(B_2 - A_2 - D_2 + C_2) + P_2(B_1 - A_1 - D_1 + C_1) & \mu_y &= B_2(C_1 - A_1) + A_1(D_2 - B_2) - B_1(C_2 - A_2) - A_2(D_1 - B_1) + P_1(C_2 - A_2 - D_2 + B_2) + P_2(C_1 - A_1 - D_1 + B_1) \\ \eta_x &= A_1C_2 - A_2C_1 + P_1(A_2 - C_2) + P_2(A_1 - C_1) & \eta_y &= A_1B_2 - A_2B_1 + P_1(A_2 - B_2) + P_2(A_1 - B_1) \end{aligned}$$

Os polinômios que resolvem s_x e s_y , conforme apresentado em (12), são de segunda ordem, portanto existem duas soluções para estas variáveis. A solução correta será sempre a que possui menor módulo, onde \vec{P} fica entre \vec{E} e \vec{F} e entre \vec{G} e \vec{H} nas retas que cruzam por estes pontos.

Para obter a posição da esfera x_B e y_B em relação ao centro da plataforma (conforme a modelagem dinâmica realizada) basta aplicar as fórmulas

$$x_B = d_p \left(s_x - \frac{1}{2} \right), \quad y_B = d_p \left(s_y - \frac{1}{2} \right),$$

onde d_p representa a dimensão do lado da placa entre as marcações (para o protótipo construído: $d_p = 0,28 \text{ m}$).

O mesmo método aplicado para medir a posição da esfera foi utilizado para determinar a localização do ponto de *laser* de referência, apenas redefinindo \vec{P} como a localização na imagem deste ponto luminoso, ao invés da esfera. A diferenciação é realizada considerando o ponto *laser* como o objeto de menor área na imagem.

4. RESULTADOS

A Figura 9 a seguir apresenta fotos do protótipo finalizado. O custo aproximado para sua construção foi de R\$300,00.

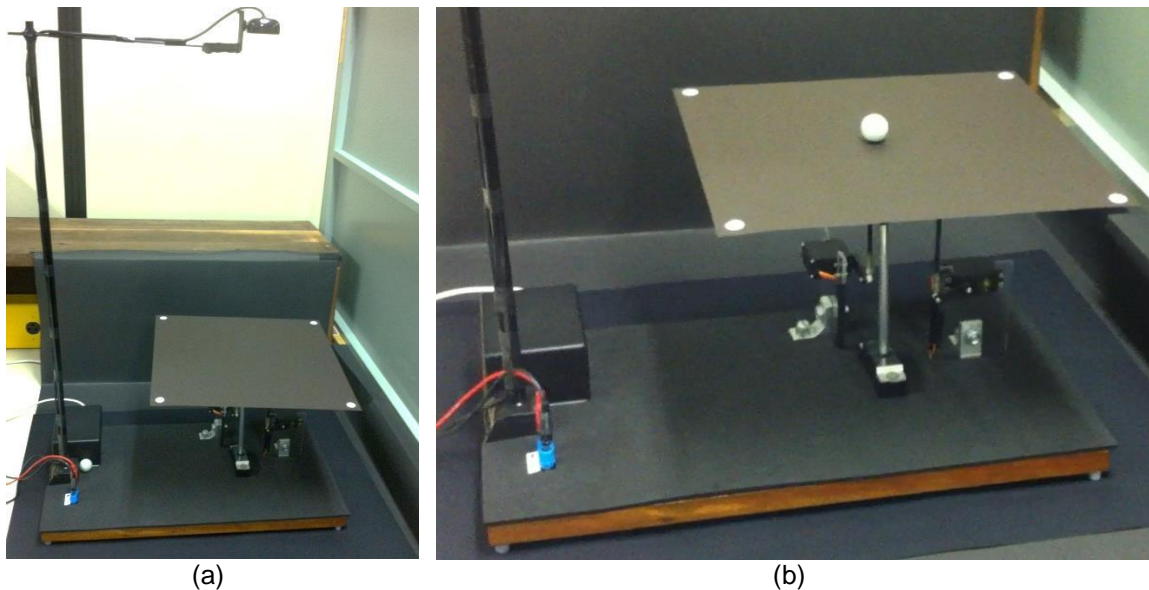


Figura 9 – Fotos do protótipo: (a) vista completa da estrutura e (b) detalhes da plataforma.

Para avaliar experimentalmente o desempenho do sistema foram definidos três cenários:

- **Cenário I:** Ondas quadradas de referência para as coordenadas x_B e y_B com período de 150 amostras, amplitude de 70 mm e defasagem de 90° entre as coordenadas para gerar uma trajetória em formato quadrado.
- **Cenário II:** Ondas senoidais de referência para as coordenadas x_B e y_B com período de 70 amostras, amplitude de 100 mm e defasagem de 90° entre as coordenadas para gerar uma trajetória em formato circular.
- **Cenário III:** Referenciamento em tempo real de trajetórias de formatos variados pela utilização da ponteira laser.

O controle foi implementado em tempo discreto em um *PC*, pelo *software MATLAB*, com período de amostragem médio T_s de 0,0338 s, onde 0,0334 s corresponde ao tempo de aquisição da câmera e 0,0004 s ao tempo de processamento do controle.

Os gráficos subsequentes apresentam, em linha contínua, a resposta real da movimentação da esfera e em linha tracejada a trajetória de referência.

Pela análise do resultado no Cenário I, nas Figuras 10 e 12a, pode-se avaliar a resposta ao degrau do sistema: com tempo de acomodação em torno de 1 s, além de mínimo sobre-sinal e erro de regime.

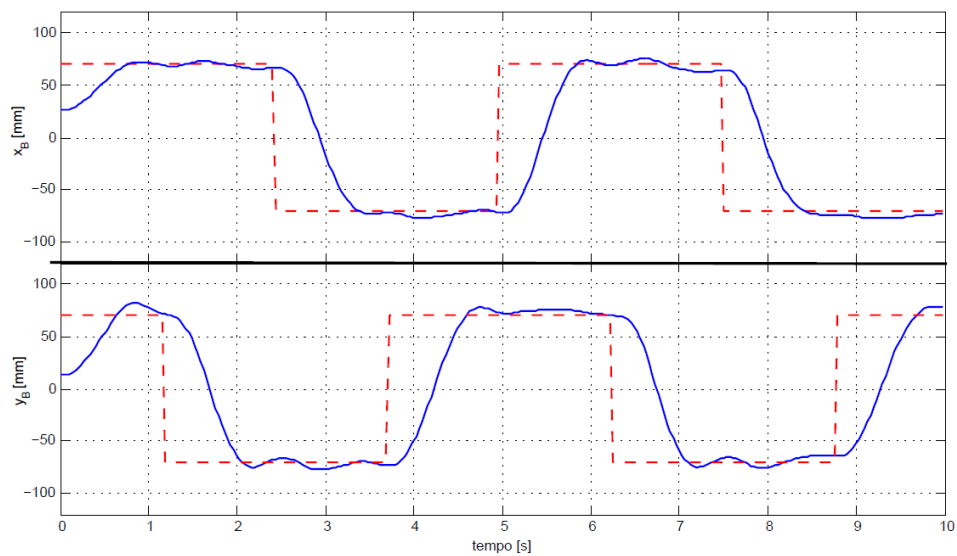


Figura 10 – Resposta temporal no Cenário I.

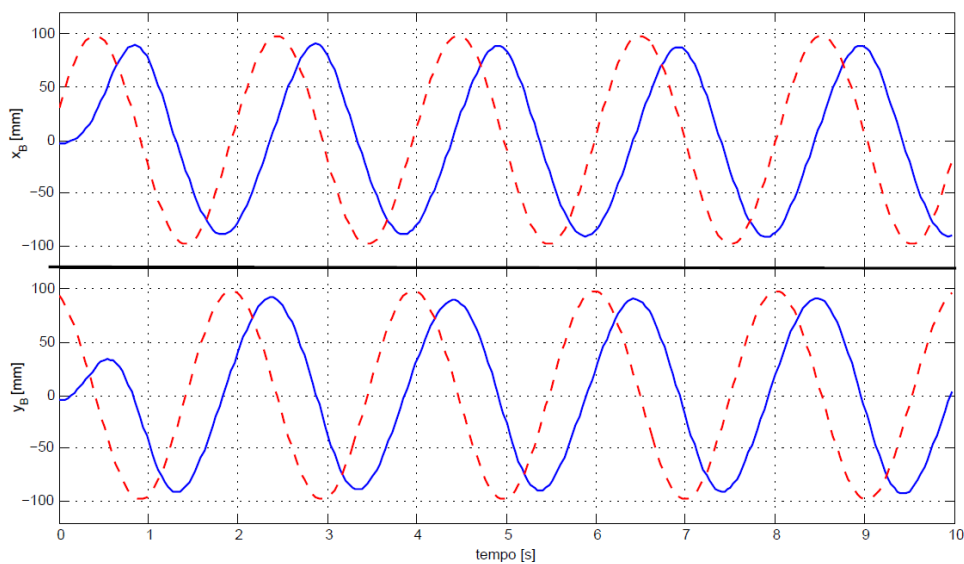


Figura 11 – Resposta temporal no Cenário II.

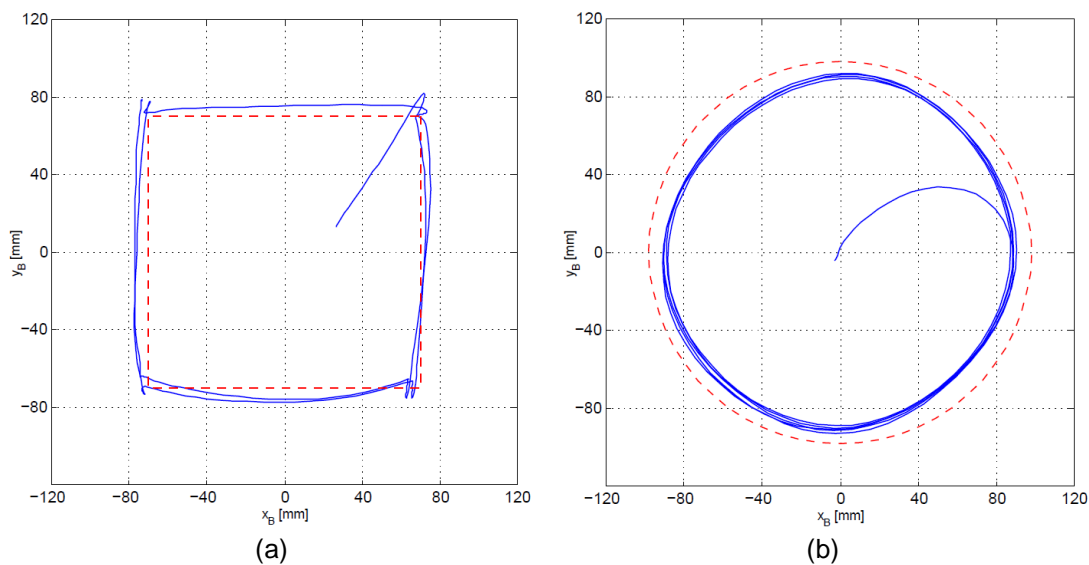


Figura 12 – Trajetórias da esfera: (a) no Cenário I e (b) no Cenário II.

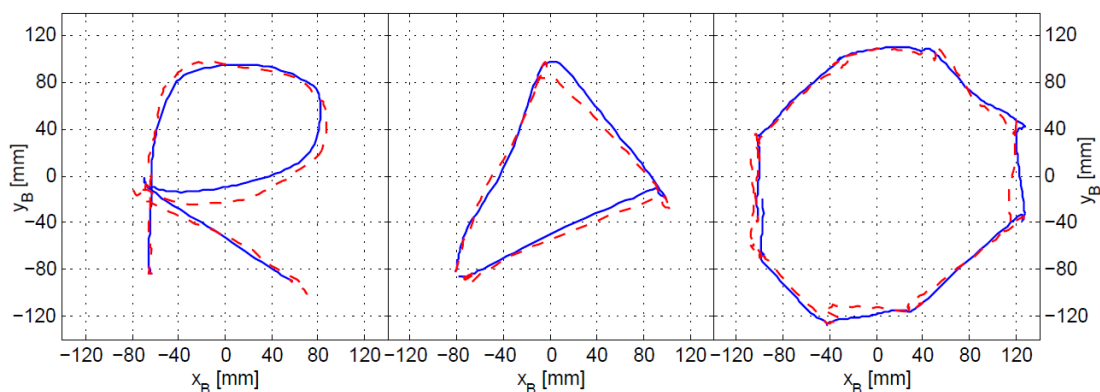


Figura 13 – Trajetórias da esfera no Cenário III.

No Cenário II foram aplicadas referências senoidais com período de 2 s. Verificou-se, pelas Figuras 11 e 12b, pequenos erros de fase e amplitude, dado que nenhuma metodologia de seguimento de referências senoidais (pelo Princípio do Modelo Interno) foi incorporada ao projeto.

No Cenário III foi comprovada a robustez do método desenvolvido de servo-visão para o seguimento de trajetórias definidas em tempo real, conforme apresentado na Figura 13.

Resultados complementares estão dispostos no Apêndice 2 (Sinais de Controle) e no Apêndice 3 (Análise do Observador de Estados). Alguns dos cenários apresentados nesta seção também podem ser visualizados pelo vídeo com o endereço: <http://www.youtube.com/watch?v=N6IVamTIsLk/>.

5. CONCLUSÕES

Neste projeto foi desenvolvido um protótipo e metodologias de controle para um sistema *Ball and Plate*, atingindo os objetivos de posicionamento ágil da esfera e seguimento de trajetórias na placa. O método desenvolvido de servo-visão *position-based* combinado com o Filtro de *Kalman* permitiu estimações suaves e precisas, um importante fator para o correto controle de posição da esfera.

A perspectiva de trabalhos futuros é a aplicação das técnicas de controle ressonante e repetitivo para correção dos erros de amplitude e fase em referências periódicas senoidais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREWS, G.; COLASUONNO, C. and HERRMANN, A. Ball on plate balancing system. Control Systems Design, Final Project Report, Rensselaer Polytechnic Institute, April 28, 2004.

AWATAR, S.; BERNARD, C.; BOKLUND, N.; CRAIG, K.; MASTER, A. and UEDA, D. Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system. Mechatronics, vol. 12, pp. 217-228, 2002.

BATTISTELLI, M.; CALLEGARI, M.; PALMIERI, G. and PALPACELLI, M. A Comparison between position-based and image-based dynamic visual servos in the control of a translating parallel manipulator. Journal of Robotics, 2012.

BÄTZ, G.; LEE, K. and WOLLHERR, D. Basketball Robot: Ball-on-Plate with Pure Haptic Information. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Pasadena, CA, USA, May 19-23, 2008.

BORDIANU, V.; BRAESCU, F. C.; FERARIU, L. and GILCA, R. Ball on plate balancing system for multi-discipline educational purposes. 16th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), October 12-14, 2012.

DECARLO, R. Linear Systems: A State Variable Approach with Numerical Implementation. Prentice Hall, NJ, 1995.

DERIGLAZOV, A. Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism. Springer, 2010.

DING, C.; SUI, Z.; TITAN, Y.; WANG, H. and ZHANG, X. Tracking control of ball and plate system with a double feedback loop structure. Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Harbin, China, 2007.

DORATO, P; CERONE, V. and ABDALLAH, C. C. T. Linear Quadratic Control: An Introduction. KRIEGER PUBLISHING Company (FL), 1995.

DUAN, H.; TIAN, Y. and WANG, G. Trajectory tracking control of ball and plate system based on Auto-Disturbance Rejection Controller. Proceedings of the 7th Asian Control Conference, Hong Kong, China, August 27-29, 2009.

FAN, X.; TENG, S. and ZHANG, N.. Trajectory planning and tracking of ball and plate system using hierarchical fuzzy control scheme. Fuzzy Sets and Systems, vol. 144, pp. 297-312, 2003.

KER, C. C.; LIN, C. E. and WANG, R. T. Tracking and balance control of ball and plate system. Journal of the Chinese Institute of Engineers, vol. 30, pp. 459-470, 2007.

KHASHABI, D. and NOKHBEH, M. Modelling and control of ball-plate system. Final Project Report, Amirkabir University of Technology, 2011.

LEE, Y. J. and PARK, J. H. Robust visual servoing for motion control of the ball on a plate. Mechatronics, vol. 13, pp. 723-738, 2003.

MOARREF, M.; SAADAT, M. and VOSSOUGH, G.. Mechatronic design and position control of a novel ball and plate system. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation Congress Centre, Ajaccio, France, June 25-27, 2008.

WALDWOGEL, R. MPC control of a ball and plate system. Master Thesis. Institute für Automatik, Eidgenössische Technische Hochschule (ETH), Zurich, September, 2010.

ZIA, A. Polar and polygon path traversal of a ball and plate system. International Conference on Electrical and Control Engineering (ICECE), September 16-18, 2011.

APÊNDICE 1 – PROJETO MECÂNICO

A Figura 14 a seguir apresenta o projeto mecânico detalhado do protótipo elaborado neste projeto.

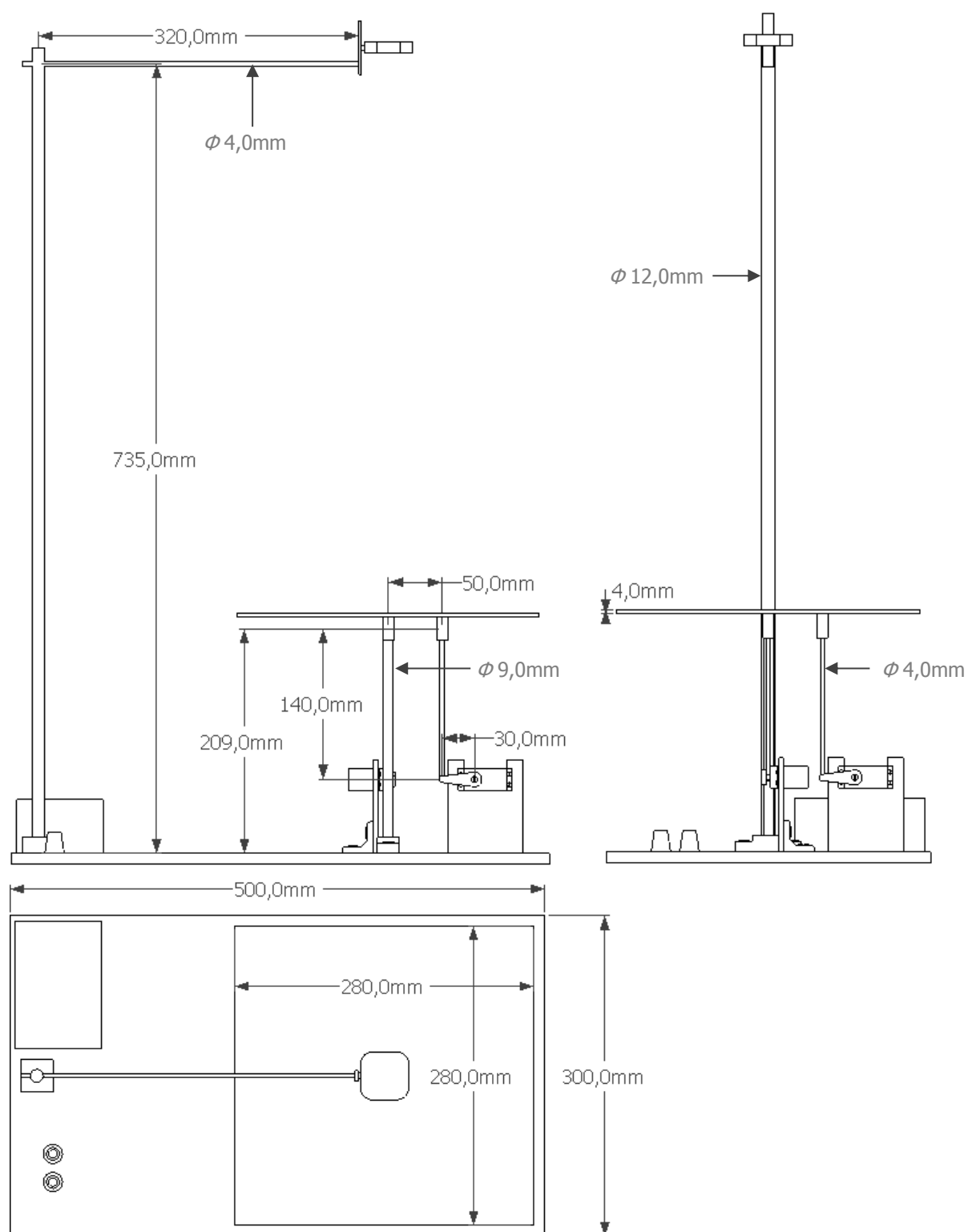


Figura 14 – Projeto mecânico detalhado do protótipo.

APÊNDICE 2 – SINAIS DE CONTROLE

Este apêndice apresenta os sinais de controle da planta durante a execução de alguns cenários de testes discutidos na Seção 4 (Resultados).

Os sinais de controle do sistema são os ângulos r_α e r_β de referência para a plataforma orientável. A Figura 15 apresenta estes sinais durante a execução do Cenário I (trajetória quadrada) e a Figura 16 para a execução do Cenário II (trajetória circular).

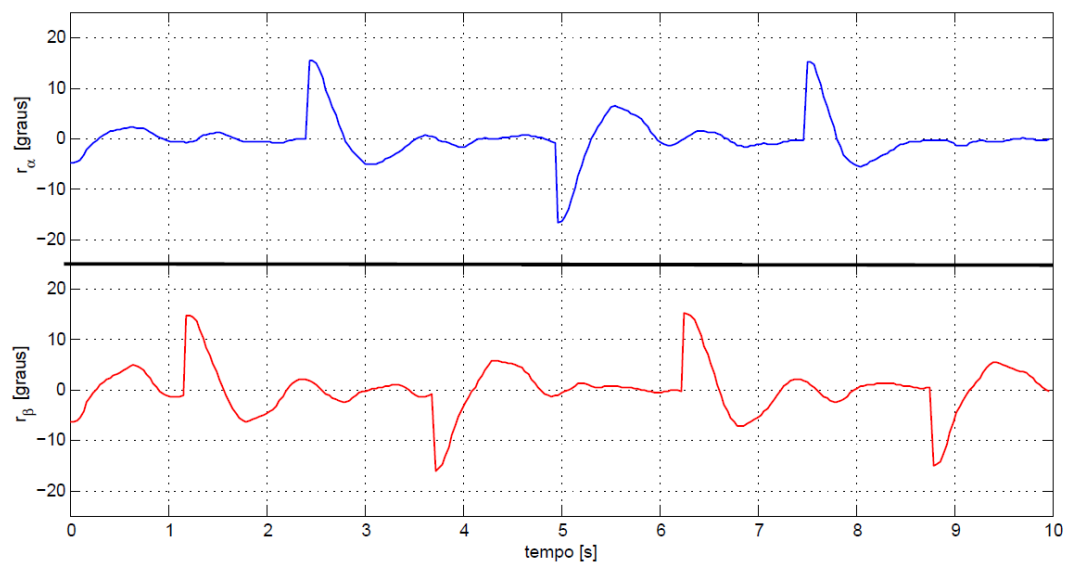


Figura 15 – Sinais de controle da planta no Cenário I.

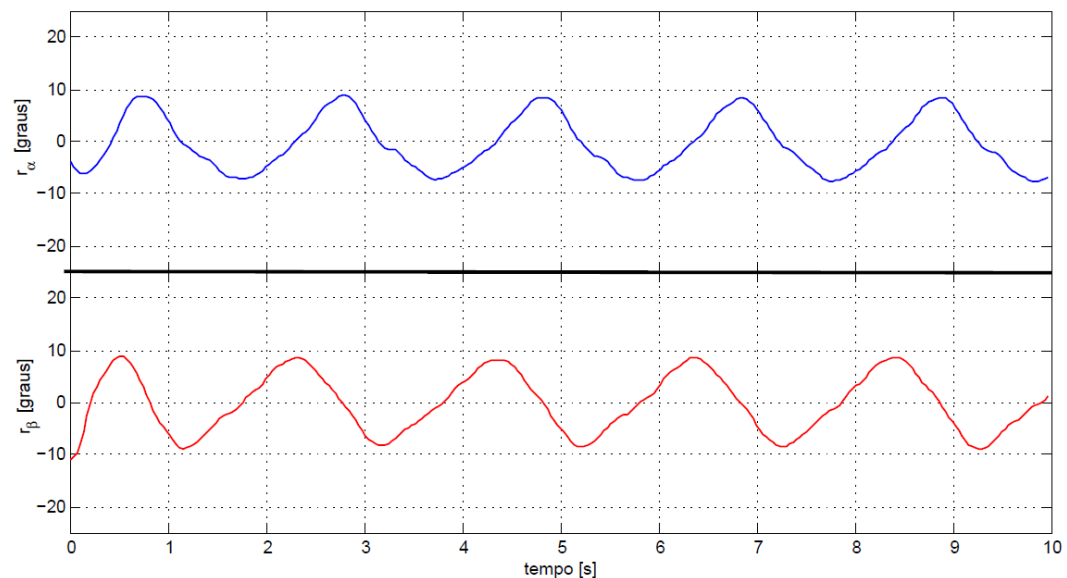


Figura 16 – Sinais de controle da planta no Cenário II.

Pela análise dos gráficos nota-se que não houve saturação dos sinais de controle, visto que a faixa para as inclinações α e β da placa foi projetada entre -25° e $+25^\circ$.

APÊNDICE 3 – ANÁLISE DO OBSERVADOR DE ESTADOS

Esta análise tem o objetivo de avaliar o desempenho do observador de estados projetado. Para realização deste estudo foi efetuada a comparação da velocidade estimada \dot{x}_B da esfera pelo Filtro de *Kalman* desenvolvido em relação a uma estimação comum.

- **Estimação Comum:** A velocidade da bola \dot{x}_B é calculada pela diferença da posição atual $x_B(k)$ em relação à posição anterior $x_B(k - 1)$ dividido pelo período de amostragem T_s do sistema, conforme a seguinte relação:

$$\dot{x}_B(k) \cong \frac{x_B(k) - x_B(k - 1)}{T_s}.$$

- **Estimação com Filtro de *Kalman*:** Utiliza a metodologia descrita na Seção 3.3.2, onde realiza-se a predição *a priori* dos estados pelo modelo dinâmico do sistema e a correção *a posteriori* pelas medições obtidas.

O gráfico apresentado na Figura 17 demonstra as amostras \dot{x}_B estimadas por ambos os métodos citados durante um trecho das execuções dos cenários de teste.

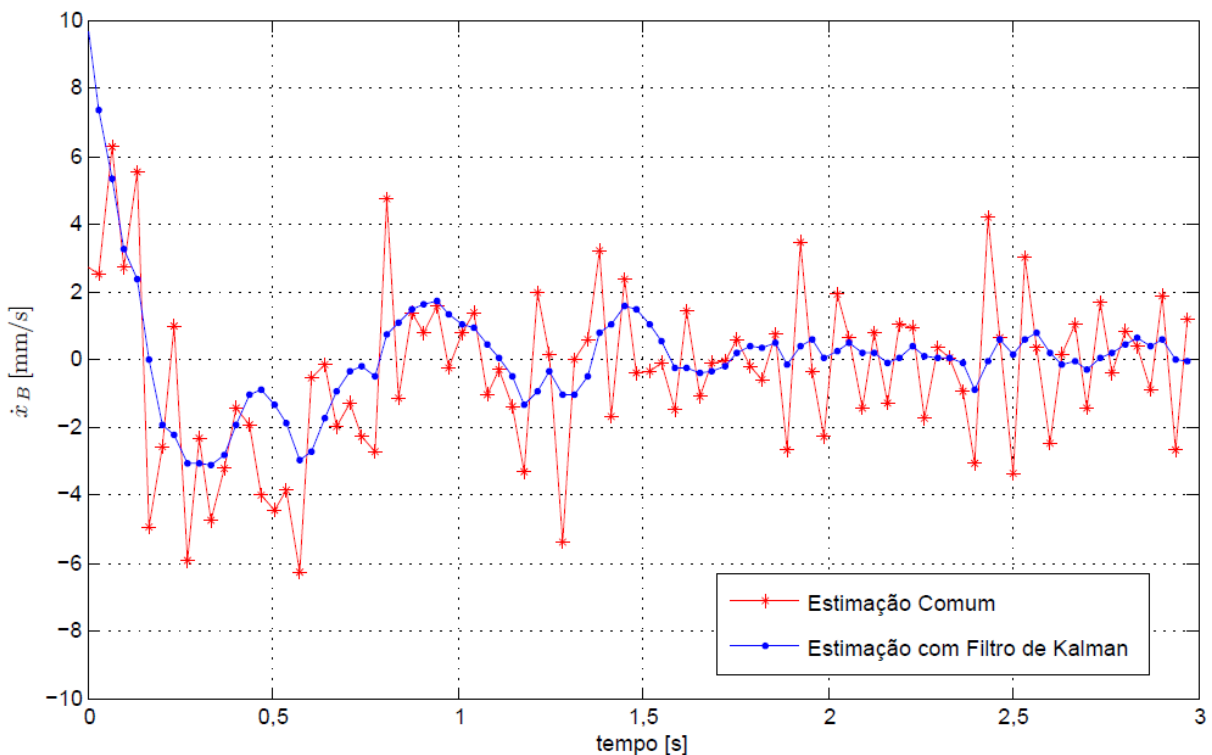


Figura 17 – Análise comparativa da estimação de velocidade.

Nota-se que a estimação comum amplifica demasiadamente o ruído das medições. Já o Filtro de *Kalman*, que pondera de forma ótima as predições pelo modelo do sistema e os resultados das medições, é capaz de gerar estimativas bem menos oscilatórias.