

# O problema da espira circular percorrida por corrente uniforme: uma abordagem numérica da Lei de Biot-Savart.

LUCAS DE PAULA OLIVEIRA, 11222179  
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

## Resumo

*O presente trabalho se dedica a fazer uma análise numérica da Lei de Biot-Savart associada ao problema da espira circular percorrida por uma corrente  $I$  uniforme, e determinar as componentes do campo magnético em todo o espaço. Ao longo do estudo são feitos testes de validade e comparações entre o modelo genérico construído e modelos aproximados conhecidos, tais como: modelo do dipolo magnético, modelo de campo magnético para uma espira com raio  $a$  muito maior do que as dimensões do espaço em estudo, e o modelo do solenóide infinito (associação vertical de espiras circulares).*

## 1. INTRODUÇÃO

Durante muito tempo ao longo da história da humanidade, os fenômenos da eletricidade e do magnetismo intrigaram os cientistas e pesquisadores. Hoje se sabe que eletricidade e magnetismo são, na verdade, dois aspectos de um único fenômeno: o *eletromagnetismo*. Contudo, até meados do século XVIII esses dois conceitos eram tratados como coisas completamente distintas dentro da comunidade científica.

Foi somente no início do século XIX, com a divulgação dos experimentos envolvendo correntes elétricas e agulhas magnéticas projetados pelo físico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851) [2], que esses conceitos começaram a apresentar uma certa conexão.

Os experimentos desenvolvidos pelo físico em questão motivaram diversos outros pesquisadores a não só replicar os resultados apresentados, mas também a explorar novas possibilidades. Foi dentro desse contexto que os cientistas franceses Jean-Baptiste Biot e Félix Savart desenvolveram e apresentaram uma das primeiras leis físicas responsáveis por descrever matematicamente o "campo magnético" gerado por uma determinada distribuição de corrente. Conhecida atualmente como *Lei de Biot-Savart*, ela carrega a seguinte formulação:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \boldsymbol{\tau}}{r^3} d\tau' \quad (1)$$

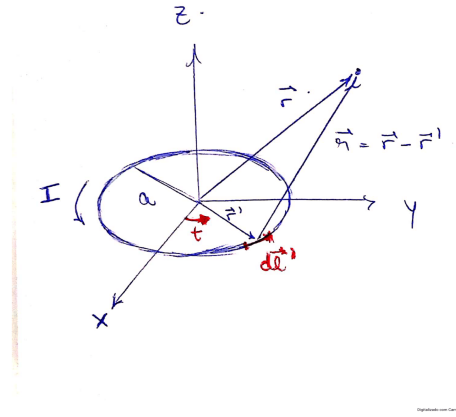
sendo  $\mathbf{r}$  o ponto de observação do campo,  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente elétrica,  $\mathbf{r}'$  a posição de cada elemento da distribuição de corrente,  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  o vetor posição relativa entre o ponto de observação e um ponto da distribuição de corrente,  $d\tau'$  o elemento de volume da integração e

$\mu_0$  a constante de permeabilidade magnética do vácuo ( $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ).

Pelo fato de envolver integrações e propriedades do cálculo vetorial, a equação (1) costuma ser muito complicada de se resolver analiticamente. São poucos os casos (em geral, situações simplificadas) nas quais a conta em questão pode ser resolvida manualmente.

A grande maioria dos problemas, portanto, exige a aplicação de técnicas e métodos computacionais para que o campo  $\mathbf{B}$  possa ser identificado corretamente em cada ponto do espaço.

O caso do campo magnético gerado por uma espira circular percorrida por uma corrente uniforme, problema que será abordado em maior detalhe no presente trabalho, não é diferente.



**Figura 1:** Representação esquemática do problema com base em um sistema de coordenadas convenientemente escolhido de modo a aproveitar a simetria da espira.

A integração da Lei de Biot-Savart é feita sobre uma distribuição volumétrica de corrente, mas no caso da espira circular essa distribuição de corrente é linear. Portanto, a equação (1) deve ser readequada para que a resolução desse problema seja possibilitada. Ao fazer essa readequação, a integral volumétrica apresentada se transforma em uma integral de linha, de modo que para esse problema em específico a Lei de Biot-Savart assume a seguinte forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2)$$

A modelagem matemática, agora, se resume ao desenvolvimento de uma correspondência entre os vetores da equação (2) e suas respectivas coordenadas no sistema de referência adotado. Conforme indicado na legenda da Figura 1, o sistema de referência adotado foi convenientemente escolhido de modo a aproveitar a *simetria azimutal* da espira.

Dito isso, usando *coordenadas cilíndricas* na parametrização do vetor  $\mathbf{r}'$  e do elemento de linha  $d\mathbf{l}'$  da espira, tem-se as seguintes relações:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (3)$$

$$\mathbf{r}' = (a \cos t)\hat{\mathbf{x}} + (a \sin t)\hat{\mathbf{y}} \quad (4)$$

$$d\mathbf{l}' = adt[(-\sin t)\hat{\mathbf{x}} + (\cos t)\hat{\mathbf{y}}] \quad (5)$$

É possível ainda simplificar as equações (4) e (5) definindo-se os versores unitários  $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{x}} \cos t + \hat{\mathbf{y}} \sin t$  e

$\hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin t + \hat{\mathbf{y}} \cos t$ . Em termos desses novos versores (os quais, em conjunto com  $\hat{\mathbf{z}}$ , definem a base vetorial ortonormal do sistema de coordenadas cilíndricas), as equações em questão podem ser reescritas como:

$$\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{s}}' \quad (6)$$

$$d\mathbf{l}' = adt\hat{\mathbf{t}}' \quad (7)$$

nas quais o sobrescrito "''" foi utilizado para indicar que o parâmetro  $t$  dos versores se refere aos elementos da espira, e não a um ponto qualquer no espaço.

Por fim:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= -a\hat{\mathbf{s}}' + x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \\ &= (x - a \cos t)\hat{\mathbf{x}} + (y - a \sin t)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (8)$$

$$r = \sqrt{(x - a \cos t)^2 + (y - a \sin t)^2 + z^2} \quad (9)$$

Substituindo essas relações na equação (2), efetuando os produtos vetoriais e separando corretamente as componentes do campo magnético, obtém-se:

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{az \cos t}{r^3} dt \quad (10)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{az \sin t}{r^3} dt \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B_z(x, y, z) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \frac{a[(y - a \sin t) \sin t + (x - a \cos t) \cos t]}{r^3} dt \end{aligned} \quad (12)$$

nas quais o denominador é apresentado explicitamente na equação (9).

Essencialmente, toda a *informação matemática* do problema está contida nas relações apresentadas. Em especial, as equações (10), (11) e (12), que representam, na verdade, funções de 3 variáveis e associam cada ponto do espaço a uma componente do campo magnético, constituirão a base dos estudos desenvolvidos nas seções posteriores. Será a partir delas que serão construídos os gráficos e campos vetoriais característicos da distribuição de corrente na espira circular, dentro dos quais se encontra a *informação física* de maior interesse.

## 2. UNIDADES DE MEDIDA UTILIZADAS

Antes de adentrar na discussão física do problema, vale fazer um pequeno comentário sobre as unidades de medida do campo magnético que serão utilizados no estudo em questão.

A constante  $\mu_0$  apresentada nas equações anteriores se refere única e exclusivamente ao sistema de unidades nos quais o campo magnético está sendo medido. Essa constante não tem impacto relevante no comportamento geral do campo magnético a não ser por uma readequação nos seus valores de acordo com as unidades do Sistema Internacional. Portanto, deste ponto em diante, o campo magnético será abordado em unidades tais que  $\mu_0 = 1$ .

Nesse novo sistema de unidades (as quais serão chamadas de *u.c.*, "unidades características"), as equações (10), (11) e (12) podem ser reescritas:

$$B_x(x, y, z) = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{az \cos t}{z^3} dt \quad (13)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{az \sin t}{z^3} dt \quad (14)$$

$$B_z(x, y, z) = -\frac{I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a[(y - a \sin t) \sin t + (x - a \cos t) \cos t]}{z^3} dt \quad (15)$$

As quantidades e coordenadas espaciais associadas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $a$ ) estarão sendo medidas em metros, como de costume.

## 3. ANÁLISE DA PRECISÃO NUMÉRICA DOS CÁLCULOS EFETUADOS

Conforme apresentado na seção 1, a determinação do campo magnético em um determinado ponto  $(x, y, z)$  do espaço exige o cálculo de 3 integrais unidimensionais no parâmetro  $t$ , uma para cada componente de  $\mathbf{B}$ . Para a execução de tal tarefa, foi utilizado o método de integração numérica de Simpson através da definição de uma função no script Python.

Denominada "simpson(dB, x, y, z, z\_linha, n)", a função foi desenvolvida de modo a retornar, para o elemento de campo magnético dB em alguma direção, a integral via método de Simpson do parâmetro  $t$ , associado a uma espira localizada no ponto  $(0, 0, z\_linha)$ , dentro do intervalo  $[0, 2\pi]$ , calculada no ponto  $(x, y, z)$ . O parâmetro  $n$ , por sua vez, corresponde ao número de *partições regulares* que estão sendo tomadas sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$  ao longo da integração.

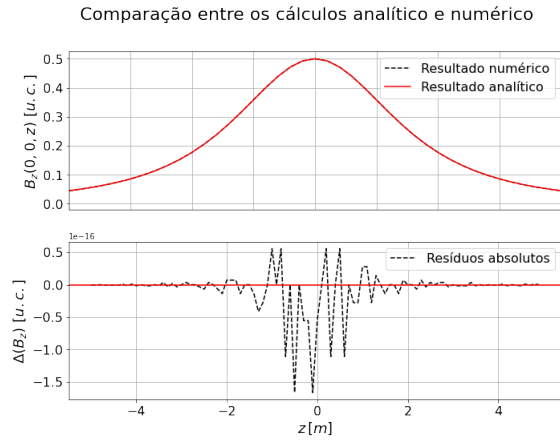
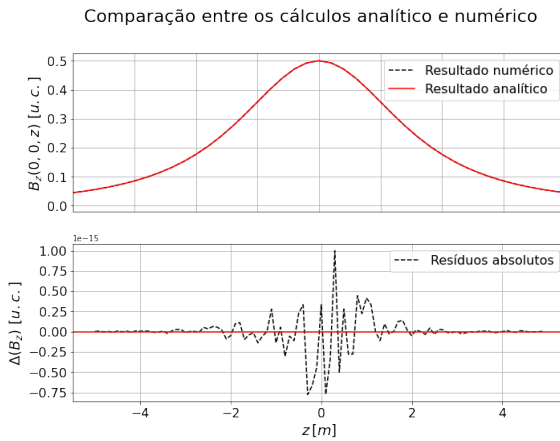
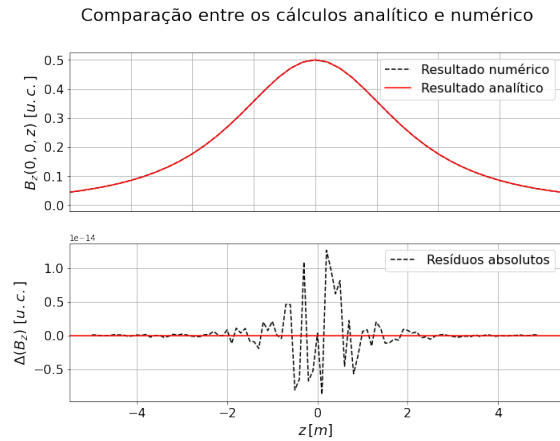
Vale destacar que a implementação do problema em Python considerou uma espira posicionada arbitrariamente numa posição  $z'$  do eixo  $z$ , enquanto as expressões apresentadas na seção 1 foram deduzidas para uma espira posicionada na origem do sistema de coordenadas. A única mudança do caso anterior para este é a readequação  $z \rightarrow z - z'$  nas equações. O script em Python foi introduzido dessa maneira para facilitar a análise do campo magnético gerado por um solenóide, o qual será discutido adiante.

No que se refere à precisão numérica das integrais que deverão ser efetuadas para cada componente do campo, o parâmetro "n" é o principal responsável por definir a qualidade dos cálculos. É importante lembrar, entretanto, que o método de integração de Simpson está associado a um processo matemático de interpolação polinomial que se utiliza de determinadas triplas de pontos do conjunto definido pela partição de  $[a, b]$  em  $n$  intervalos regulares. Portanto não necessariamente um valor grande de  $n$  resultará em melhores aproximações numéricas das integrais desejadas.

Para identificar a melhor escolha de  $n$  (ou, ao menos, uma boa escolha desse parâmetro), tomou-se como base de comparação um caso simplificado do problema em questão: o cálculo do campo magnético ao longo do eixo  $z$  do sistema de coordenadas escolhido. Conforme argumentado na seção 1, a resolução analítica das integrais (10), (11) e (12) só é possível em situações específicas e simplificadas. Manualmente é inviável calculá-las em um ponto  $(x, y, z)$  genérico do espaço, mas para pontos ao longo do eixo  $z$ , ou seja, pontos do tipo  $(0, 0, z)$ , essas componentes podem ser facilmente calculadas analiticamente. Efetuando-se os cálculos, obtém-se as seguintes expressões:

$$B_x(0, 0, z) = B_y(0, 0, z) = 0 \quad (16)$$

$$B_z(0, 0, z) = \frac{I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (17)$$

(a)  $n = 10$ (b)  $n = 100$ (c)  $n = 1000$ 

**Figura 2:** Gráficos comparativos entre os resultados analíticos e os resultados numéricos da componente  $z$  do campo magnético para pontos ao longo do eixo  $z$  e diferentes valores do parâmetro " $n$ ". Corrente ( $I$ ) e raio ( $a$ ) utilizados para gerar os gráficos:  $I = 1$  A e  $a = 1$  m

Observando os gráficos da Figura 2, nota-se que, aparentemente, existe uma dificuldade maior do modelo numérico em aproximar os valores do campo magnético em intervalos de  $z$  mais próximos à origem do sistema de coordenadas. Essa dificuldade, porém, é de fato só aparente. Apesar de serem apresentadas flutuações maiores nessa região, uma verificação mais cuidadosa da ordem de grandeza (apresentada no canto superior esquerdo) dos valores no gráfico de resíduos mostram que o script numérico está funcionando corretamente e que está fornecendo resultados com excelente precisão.

Um fato curioso que também pode ser extraído desses gráficos é o seguinte: quanto maior o valor de  $n$  (em particular, de sua ordem de grandeza), maior é a ordem de grandeza dos resíduos absolutos.

- $n = 10 \Rightarrow$  resíduos  $\sim 10^{-16}$
- $n = 100 \Rightarrow$  resíduos  $\sim 10^{-15}$
- $n = 1000 \Rightarrow$  resíduos  $\sim 10^{-14}$

Conforme argumentado anteriormente, o método de Simpson é estruturado em técnicas de interpolação polinomial. Portanto, muito provavelmente deve haver uma saturação das interpolações ajustadas aos pontos do intervalo quando a quantidade de partições  $n$  cresce muito. Esse fato, por sua vez, acaba prejudicando os resultados numéricos subsequentes e causando a elevação da ordem de grandeza dos resíduos.

Apesar disso, todas as escolhas apresentadas para o parâmetro  $n$  são perfeitamente aceitáveis e, mesmo havendo essa elevação na ordem de grandeza dos resíduos, ainda vale destacar que essas variações encontram-se abaixo de  $\sim 10^{-10}$  (ou seja, são praticamente desprezíveis).

Optou-se por utilizar  $n = 10$  em todas as integrações numéricas necessárias.

#### 4. MANUAL DO CÓDIGO

De modo geral, o script construído contém diversas funções associadas à definição de cada componente do campo magnético e de suas correspondentes integrações numéricas, mas estas não serão incluídas no presente texto. As linhas de código completas utilizadas para o desenvolvimento desse estudo se encontram disponíveis na sua íntegra em um arquivo txt disponibilizado em conjunto com esse documento.

A essência do código construído se concentra em 4 funções principais. São elas:

- `plota_B3d(a)`
- `plota_Bxz(a, l, dl)`

- `plota_B(a, z_max)`
- `plota_modB(a, x_max)`
- `plota_solenóide(l, dl, z_sup, dz)`

A função `plota_B_3d(a)` é uma função que toma como parâmetro de entrada apenas o raio  $a$  da espira circular e retorna como saída uma representação tridimensional do campo vetorial associado a  $\mathbf{B}$  em uma malha cúbica de pontos com dimensões  $4 \times 4 \times 2$ .

A função `plota_B_xz(a, l, dl)` também é responsável por construir uma representação do campo vetorial associado a  $\mathbf{B}$ , mas agora numa malha bidimensional que caracteriza o plano  $xz$  do sistema de coordenadas adotado. Os parâmetros tomados são:  $a$ , o raio da espira;  $l$ , a medida lateral da malha quadrangular simétrica de pontos (i.e., uma malha com dimensões  $l \times l$ );  $dl$ , o espaçamento entre cada ponto da malha. Basicamente, o parâmetro  $l$  controla o tamanho da imagem a ser formada enquanto  $dl$  controla a *quantidade de informação* armazenada dentro dessa imagem.

A função `plota_Bz(a, z_max)`, por sua vez, toma como parâmetros o raio  $a$  da espira circular e um valor limite  $z_{\max}$  no eixo  $z$ , e retorna como saída o gráfico  $B_z(0,0,z) \times z$  (componente  $z$  do campo magnético ao longo do eixo  $z$ ) no intervalo  $[-z_{\max}, z_{\max}]$ .

A função `plota_modB(a, x_max, approach, eps)` toma como parâmetros o raio  $a$  da espira, um valor limite  $x_{\max}$  no eixo  $x$ , uma variável booleana auxiliar chamada "approach" e  $eps$  um valor auxiliar. De maneira geral, se `approach = True`, a função retorna como saída o gráfico  $|B(x,0,0)| \times x$  (módulo do campo magnético ao longo do eixo  $x$ ) em dois intervalos diferentes:  $[0, x_{\max}]$  e  $[a - eps, a + eps]$  (um intervalo simétrico em torno da posição da espira). Se `approach = False`, a função retorna apenas o gráfico  $|B(x,0,0)| \times x$  no intervalo  $[0, x_{\max}]$ .

Por fim, a função `plota_solenóide(a, l, dl, z_sup, dz)` toma como parâmetros o raio  $a$  das espiras em estudo (que define também o raio do solenóide cilíndrico), o tamanho  $l$  da malha quadrangular simétrica, o espaçamento  $dl$  entre os pontos dessa malha, a coordenada máxima  $z_{\sup}$  do solenóide vertical simétrico ao longo do eixo  $z$  e o espaçamento  $dz$  entre as espiras do solenóide. Essa função será pouco utilizada ao longo do estudo que se segue (uma vez que é simplesmente uma modificação da função `plota_B_xz`), mas será de grande ajuda na seção 5.4 quando forem discutidos os "efeitos de borda".

A sequência de imagens a seguir (Figuras 3 a 7) ilustra um exemplo de utilização do código construído.

```
# Input dos parâmetros relevantes
a = 1 # Raio da espira (m)
I = 1 # Corrente (A)
z_linha = 0 # Posição da espira circular no eixo z (m)

l = 4 # comprimento da malha 2d (m)
dl = 0.4 # espaçamento dos pontos da malha 2d (m)

z_max = 3 # coordenada z (m) máxima do plot |Bz(0,0,z)| x z
x_max = 5 # coordenada x (m) máxima do plot |B(x,0,0)| x (x)

z_sup = 1 # coordenada z (m) superior do solenóide (simétrico)
dz = 0.3 # espaçamento entre as espiras do solenóide

approach = True # variável auxiliar da função plota_modB
eps = 0.8 # variável auxiliar da função plota_modB

# Chamada das funções
plota_B_3d(a)
plota_B_xz(a, l, dl)
plota_Bz(a, z_max)
plota_modB(a, x_max, approach, eps)
plota_solenóide(a, l, dl, z_sup, dz)
```

Figura 3: Exemplo de inserção dos parâmetros no programa.

Visualização 3D do campo magnético gerado pela espira

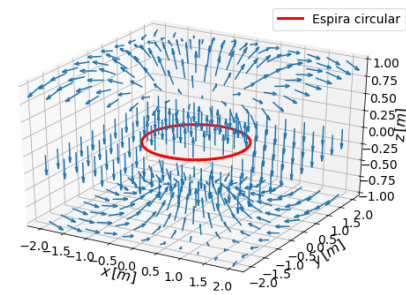


Figura 4: Campo vetorial  $\mathbf{B}$  em representação tridimensional obtido como saída da função `plota_B_3d`. Os vetores estão sendo apresentados somente nos planos  $z = -1$ ,  $z = 0$  e  $z = +1$  para facilitar a visualização e remover o excesso de poluição visual.

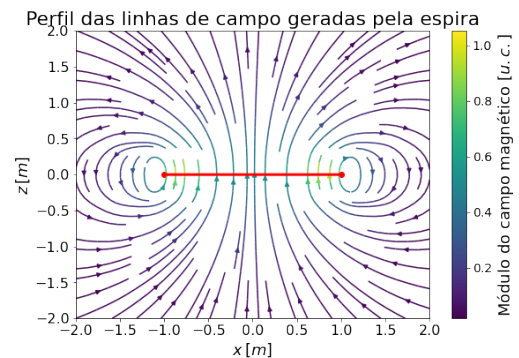
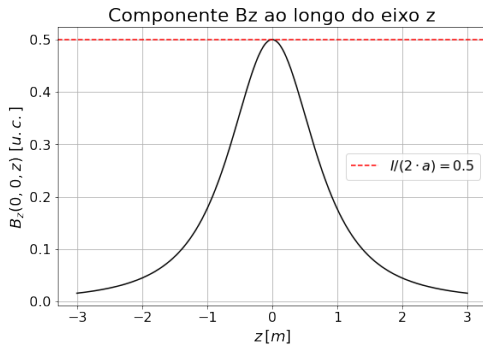
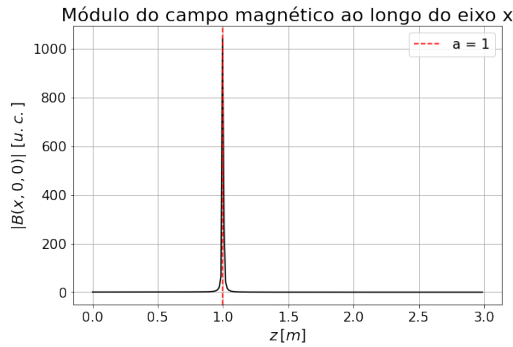


Figura 5: Representação bidimensional do campo vetorial associado a  $\mathbf{B}$  vista no plano  $xz$

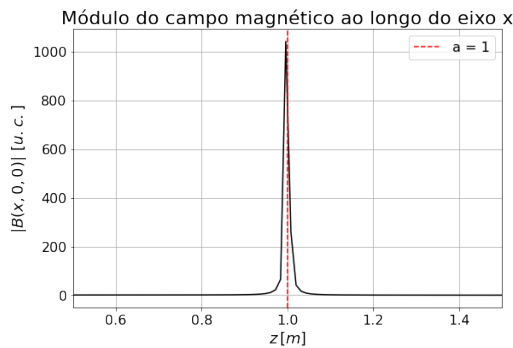


**Figura 6:** Gráfico da componente z do campo magnético ao longo do eixo z fornecido pela função `plota_Bz`

Vale fazer um destaque para a intersecção da curva preta ( $B_z(0,0,z)$ ) com a linha horizontal tracejada em vermelho no ponto  $z = 0$ . De acordo com a equação (17), no ponto  $z = 0$  a componente z do campo magnético deve ser dada por  $I/2 \cdot a$ , e é exatamente o que observamos nessa intersecção. Isso indica, portanto, que ao menos no que se refere à componente z do campo magnético, os cálculos estão consistentes.

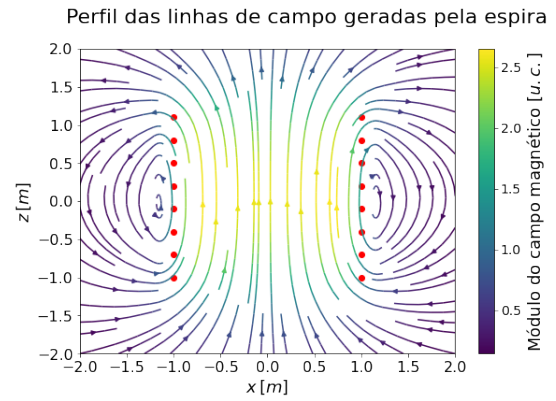


(a)



(b)

**Figura 7:** Gráficos fornecidos pela função `plota_modB`: sem zoom, apresentado na Figura 7(a); e com zoom, apresentado na Figura 7(b)

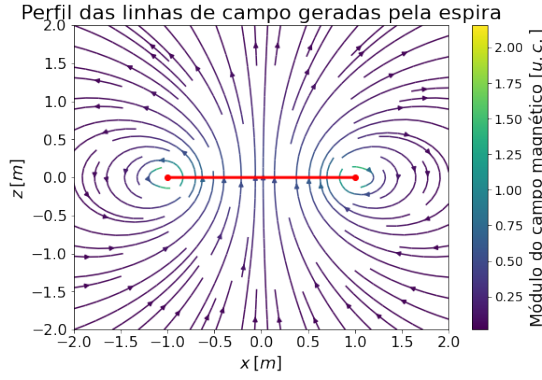


**Figura 8:** Representação bidimensional do campo vetorial associado a  $\mathbf{B}$ , para um sistema com 8 espiras circulares, vista no plano  $xz$

De maneira geral, o funcionamento completo do código está compactado na sequência de figuras apresentada. Apesar disso é necessário fazer uma ressalva para um tópico muito importante que deve ser levado em consideração enquanto o programa estiver sendo utilizado: a escolha do espaçamento  $dl$  entre os pontos da malha 2d (associado às funções `plota_Bxz` e `plota_solenoid`).

Ao fazer uma análise atenta da Figura 5, que representa um exemplo de saída da função `plota_Bxz`, pode-se observar que as curvas do campo magnético não fecham exatamente nas extremidades da espira circular. Existe uma defasagem entre o resultado que seria esperado teoricamente e o resultado numérico que está sendo apresentado nessa figura. Fenômeno semelhante também pode ser observado na Figura 8. Entretanto, **isso não significa que o código esteja funcionando incorretamente**. Essencialmente, o problema que está ocorrendo é que o espaçamento  $dl = 0.4$  (apresentado na Figura 3) utilizado para a confecção do exemplo não é ideal para descrever o campo nesse espaço. Ou seja, é necessário reduzir o valor desse parâmetro (i.e., acrescentar mais pontos à malha), de modo que o programa possa calcular as componentes do campo em mais pontos do espaço e, assim, obter uma maior quantidade de informação sobre  $\mathbf{B}$ . Esse procedimento irá refinar as estimativas do campo magnético em todos os pontos da malha associada e, em particular, também nas extremidades da espira.





**Figura 9:** Figura 5 reproduzida utilizando os mesmos parâmetros anteriores ( $a = 1\text{ m}$ ,  $I = 1\text{ A}$ ,  $l = 4\text{ m}$ ), mas  $dl = 0.16\text{ m} < 0.4\text{ m}$

De fato, fazendo essa mudança no parâmetro  $dl$  obtém-se exatamente a configuração das linhas de campo que se esperaria obter para o sistema em questão.

Mas existe um problema em reduzir o parâmetro  $dl$  arbitrariamente. A partir da Figura 7, observa-se que ao menos no que se refere aos cálculos numéricos sendo efetuados pelo programa, o campo magnético apresenta um comportamento de *divergência* no ponto  $(a, 0, 0)$ . E de fato isso ocorre. No caso particular do campo magnético avaliado no ponto  $(a, 0, 0)$ , a única componente não nula é a componente  $z$ . Nesse ponto,  $B_z = B_z(a, 0, 0)$  é dado por:

$$B_z(a, 0, 0) = -\frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos t - a^2}{a^3 [(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{3/2}} dt \quad (18)$$

a qual pode ser reescrita como uma soma de duas integrais distintas:

$$B_z(a, 0, 0) = -\left(\frac{I}{4\pi}\right) \cdot \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{3/2}} dt + \left(\frac{I}{4\pi}\right) \cdot \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{3/2}} dt \quad (19)$$

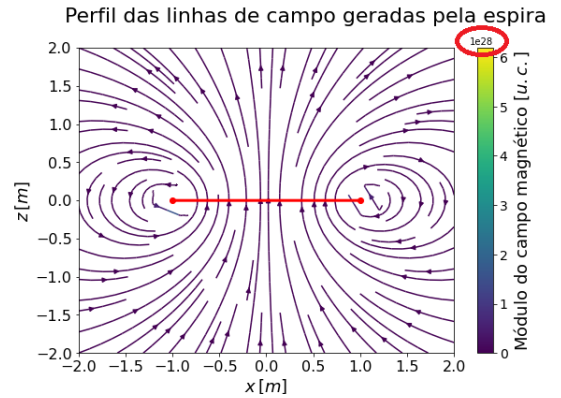
O problema ocorre no limite em que  $t \rightarrow 0$ . Nesse limite, o denominador dos integrandos tende a 0 e, portanto, as funções sendo integradas "explodem". A expectativa, portanto, é que as integrais (área abaixo da função) também estejam explodindo. Felizmente, nesse caso ambos os integrandos possuem primitivas que podem ser analiticamente determinadas e escritas em termos de funções elementares. Utilizando o software *Wolfram Mathematica* para obtê-las, tem-se:

$$\int \frac{\cos t}{[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{3/2}} dt = -\frac{\cot(\frac{t}{2}) \csc(\frac{t}{2}) - 3 \ln(|\csc(\frac{t}{2}) + \cot(\frac{t}{2})|)}{8} \quad (20)$$

$$\int \frac{1}{[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{3/2}} dt = -\frac{\cot(\frac{t}{2}) \csc(\frac{t}{2}) + \ln(|\csc(\frac{t}{2}) + \cot(\frac{t}{2})|)}{8} \quad (21)$$

Das expressões (20) e (21) percebe-se que, no limite  $t \rightarrow 0$  as funções  $\csc(t/2), \cot(t/2) \rightarrow 0$ . Portanto,  $\ln(|\csc(\frac{t}{2}) + \cot(\frac{t}{2})|) \rightarrow +\infty$ . Ou seja, ambas as integrais que definem  $B_z(a, 0, 0)$ , única componente não nula do campo magnético nesse ponto, são divergentes.

É necessário tomar muito cuidado, então, com as escolhas do parâmetro  $dl$ . De fato, diminuí-lo irá gerar representações bidimensionais mais ricas e coerentes do campo vetorial de interesse. Contudo, algumas escolhas específicas de  $dl$  podem gerar malhas espaciais que incluem os pontos  $x = \pm a$ , ou valores muito próximos. Essencialmente não há problemas com essa questão, exceto pelo fato de que o campo magnético diverge nesses pontos e, com isso, toda a informação do campo vetorial  $\mathbf{B}$  é perdida pelos cálculos numéricos. Para evitar esse tipo de problema, recomenda-se inserir valores com casas decimais ímpares nesse parâmetro.



**Figura 10:** Exemplo de gráfico bidimensional (no plano  $xz$ ) no qual as integrais numéricas divergem. Escolha de parâmetros:  $a = 1\text{ m}$ ,  $I = 1\text{ A}$ ,  $l = 4\text{ m}$ ,  $dl = 0.2\text{ m}$ .

## 5. DISCUSSÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

A expansão multipolar é uma ferramenta física muito útil na resolução de diversos problemas pelo fato de sim-

plificar a maior parte do tratamento matemático, que seria complexo e custoso caso o problema de interesse fosse ser estudado em seus mínimos detalhes. De modo geral, o primeiro termo não nulo da expansão fornece uma primeira aproximação para o potencial associado ao campo em estudo, enquanto os demais termos da expansão fornecem correções para esse resultado.

No que se refere à magnetostática, o primeiro termo não nulo da expansão (e portanto a primeira aproximação para o potencial vetor em um determinado ponto do espaço) é, em geral, o **termo de dipolo** [1], definido por:

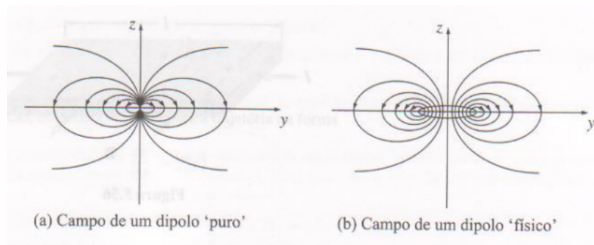
$$\mathbf{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (22)$$

sendo  $\mathbf{m} = I \int d\mathbf{a}$  o chamado "momento de dipolo magnético". A interpretação desse objeto é simplesmente essa: dada uma espira sendo percorrida por uma determinada corrente  $I$ , existe um momento de dipolo magnético associado. O momento de dipolo magnético é definido inicialmente dessa maneira por simples conveniência/simplificação do termo apresentado na expansão multipolar, mas ele possui uma grande importância física, principalmente no estudo das propriedades magnéticas dos materiais.

O rotacional dessa expressão fornece o "campo magnético de dipolo" correspondente, cuja expressão genérica é dada por [1]:

$$\mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}] \quad (23)$$

A espira circular em estudo possui momento de dipolo magnético  $\mathbf{m} = I \cdot \pi a^2 \hat{\mathbf{z}}$  e, portanto, possui também um campo magnético de dipolo associado. Esse campo, por sua vez, assume diferentes configurações espaciais dependendo das dimensões da espira.



**Figura 11:** Diferenças na distribuição espacial do campo magnético de acordo com as características do momento de dipolo magnético em estudo [1]

Apesar do termo de dipolo representar a principal contribuição para o potencial vetor e para o campo magnético na grande maioria dos sistemas relevantes,

existem correções de ordem superior (quadrupolares, octopolares, etc) não nulas. Dipolos magnéticos para os quais essas contribuições possam vir a apresentar certa relevância são chamados "dipolos físicos", cujas dimensões são comparáveis às dimensões do espaço analisado. Dipolos magnéticos para os quais essas contribuições ou não existem ou são pouco relevantes, são chamados de "dipolos puros". [1]

A verdade é que é impossível construir um dipolo puro, pois esse objeto corresponderia a um circuito infinitesimalmente pequeno percorrido por uma corrente infinitamente grande (de modo que o produto  $Ia$  ainda permanecesse finito). Apesar da artificialidade envolvendo a definição de sistemas compostos por dipolos magnéticos puros, i.e., sistemas para os quais o campo magnético gerado no espaço tem contribuição unicamente dipolar, qualquer sistema pode ser considerado como sendo composto por um dipolo magnético puro sempre que os pontos de interesse estiverem muito afastados da distribuição de corrente. Em outras palavras: a aproximação de dipolo magnético puro para um determinado sistema é sempre boa quando as dimensões do sistema são muito menores do que as dimensões da região em estudo. [1]

Tendo em mente essas discussões, portanto, é possível tirar algumas conclusões sobre as características do campo magnético gerado pela espira circular em estudo. Ele pode apresentar características tanto de dipolo físico quanto de dipolo puro, e a dominância de uma característica sobre a outra (e vice-versa) depende especialmente das dimensões típicas do problema. Nesse caso, essas dimensões são o raio  $a$  da espira e o tamanho  $l$  da malha bidimensional.

### 5.a. Campo de dipolo físico

Uma vez que um campo magnético típico de um dipolo físico pode ser facilmente obtido a partir de combinações básicas dos parâmetros  $a$  e  $l$ , esse caso em especial não será de muito interesse para o presente estudo. O campo magnético apresentado na Figura 9, por exemplo, pode ser considerado o campo de um dipolo físico.

Esta seção foi dedicada apenas para enfatizar que a espira circular percorrida por uma determinada corrente  $I$  é, em geral, um dipolo físico. Ou seja, ao se estudar esse sistema dentro de dimensões cotidianas usuais, sempre é necessário levar em conta contribuições de ordem superior (quadrupolares, octopolares, etc). Essa é, na verdade, mais uma das dificuldades associada à resolução analítica do campo magnético completo nesse e em outros problemas com distribuições de corrente mais gerais.

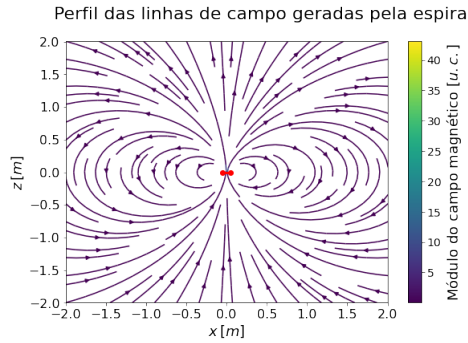
É por isso que os métodos numéricos têm bastante



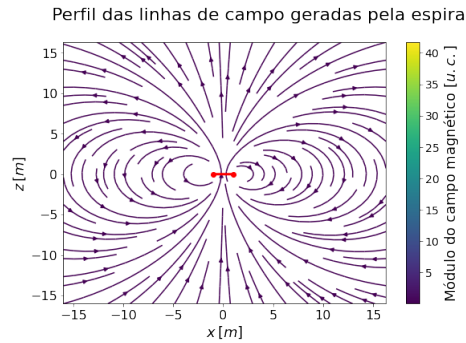
empregabilidade. A resolução numérica das integrais (13), (14) e (15) já liquida o problema de determinação do campo magnético em uma determinada região do espaço como um todo; incluindo automaticamente não só contribuições quadrupolares, octopolares e outras, como também os "efeitos de borda" (que serão discutidos posteriormente).

### 5.b. Campo de dipolo puro

O campo de dipolo puro para o sistema em questão pode ser obtido de duas maneiras. A primeira delas é fazendo  $a \rightarrow 0$ , enquanto a outra é fazendo  $l \rightarrow +\infty$  (i.e.,  $r \rightarrow +\infty$ ). Por simplicidade, ambos os casos serão estudados para uma corrente  $I = 1$  A, já que diferentes valores escolhidos para esse parâmetro, nesse caso, apenas alterariam o módulo do campo magnético nos diferentes pontos do espaço. Em outras palavras: alterar  $I$  não altera a configuração das linhas de campo; altera apenas a densidade de linhas distribuídas no espaço.



(a) Configuração das linhas de campo magnético obtidas para combinação de parâmetros:  $a = 0.05$  m,  $l = 4$  m,  $dl = 0.012$



(b) Configuração das linhas de campo magnético obtidas para a combinação de parâmetros:  $a = 1$  m,  $l = 32$  m,  $dl = 0.012$

**Figura 12:** Configuração de dipolo puro em diferentes regimes de aproximação. N

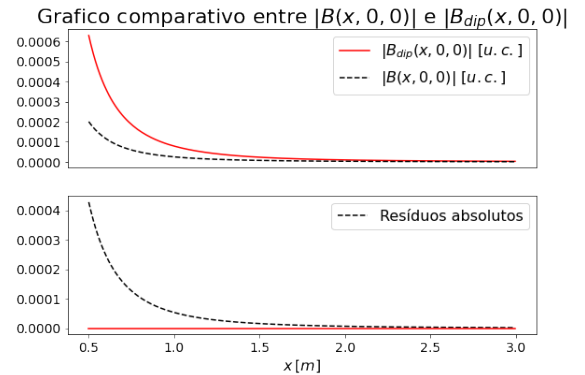
É interessante comparar a semelhança dos gráficos apresentados nas figuras 12(b) e 12(a) tanto entre si quanto com o gráfico de dipolo puro apresentado na Figura 11. De fato, tanto o regime de aproximação  $a \rightarrow 0$  quanto o regime  $l \rightarrow +\infty$  fornecem uma configuração espacial nas linhas de campo magnético típica de um sistema composto por um dipolo magnético puro. Um ponto importante que vale a pena ser ressaltado é que esses dois regimes de aproximação estão, na verdade, dentro de uma mesma hipótese: dimensão do sistema (nesse caso, da espira circular) muito pequena quando comparada à dimensão espacial típica da região de estudo, ou seja  $a/r \ll 1$ . Conforme argumentado em parágrafos anteriores, é exatamente nessa condição que o campo magnético de dipolo se torna uma boa aproximação para se utilizar em cálculos/análises subsequentes, portanto os resultados obtidos nos gráficos da Figura 12 são perfeitamente consistentes entre si.

Tomando a expressão (23) e avaliando a sua forma para o problema em questão em pontos ao longo do eixo x, tem-se:

$$B_{dip}(x, 0, 0) = -\frac{m}{4\pi x^3} \hat{z} \quad (24)$$

sendo  $m = I\pi a^2$ .

Uma outra maneira de avaliar a concordância do campo gerado pela espira com o campo típico de um dipolo puro é comparar o resultado analítico dado pela expressão (24) com os resultados numéricos do módulo para o campo magnético ao longo do eixo x  $|B(x, 0, 0)|$ . Se a afirmação  $a/r \ll 1 \Rightarrow \mathbf{B} \approx \mathbf{B}_{dip}$  for de fato válida, deve-se observar os valores no gráfico de resíduos tenderem a 0 para valores espaciais suficientemente afastados da espira circular que compõe o sistema em estudo.



**Figura 13:** Comparação entre os resultados dados pela expressão analítica  $|B_{dip}|$  e os resultados numéricos para  $|B|$ . Parâmetros utilizados:  $a = 0.01$  m,  $I = 1$  A

É possível observar que, de fato, os resíduos absolutos começam a ficar cada vez mais próximos de 0, ou seja, os resultados numéricos e os resultados analíticos do campo de dipolo começam a entrar em concordância, para valores de  $x$  tais que  $x \geq 1.5$ . Dado que  $a = 0.01 \text{ m}$ , ter uma concordância mais expressiva para valores espaciais que satisfaçam o intervalo supracitado significa dizer que os dois modelos são coerentes quando  $x \sim 150 \times a$ . De fato, nesse regime de distância tem-se  $a/x = a/r \ll 1$ , resultado que é consistente com a afirmação apresentada e os resultados dos gráficos apresentados na Figura 12.

### 5.c. O problema dos efeitos de borda

Uma última análise interessante que pode ser feita nesse problema e que não está diretamente vinculada ao dipolo magnético da espira em si se refere ao comportamento do campo magnético nas extremidades da espira circular em estudo. Conforme pode ser observado nas figuras 4 e 9, as linhas de campo magnético possuem uma certa uniformidade na região próxima ao centro da espira, mas apresentam curvas acentuadas nas regiões mais próximas às extremidades. Esse tipo de fenômeno é conhecido como "efeito de borda", e se manifesta tanto no cálculo do campo elétrico em sistemas eletrostáticos quanto do campo magnético em sistemas magnetostáticos (tal como o sistema atual).

A presença desse efeito no sistema composto pela espira circular já está automaticamente incluída na Lei de Biot-Savart geral (equações 13, 14 e 15). Se alguém desejasse calcular o campo magnético manualmente, não haveriam complicações adicionais nas contas como consequência dos efeitos de borda, mas é claro que as equações supracitadas já são complicadas o suficiente de se resolver manualmente, independentemente dos efeitos que incluam ou não.

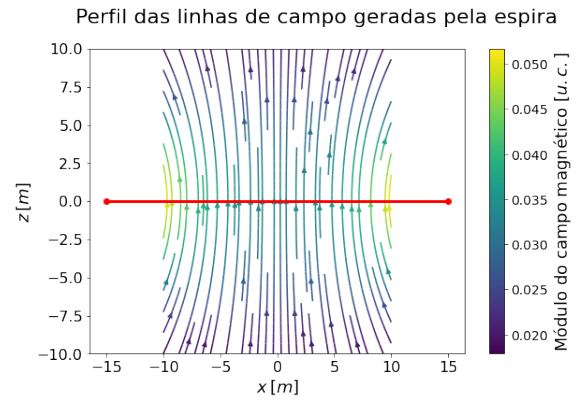
É claro que obter o campo magnético desse problema em toda a sua generalidade manualmente é uma tarefa impossível, mas muitas vezes uma simples intuição sobre o seu comportamento já é suficiente para permitir a conclusão de diversas informações físicas. Dentro desse contexto, existem três possíveis situações para as quais é possível obter o campo magnético no espaço sem que haja necessidade lançar mão de algoritmos computacionais. Essas situações, conforme argumentado na seção 1, são casos simplificados, mas completos em informação física e úteis em diversas aplicações. A primeira delas já foi explorada na sub-seção anterior, e se refere ao regime de aproximação  $a/r \ll 1$ . Nesse limite, o campo magnético gerado pela espira pode ser aproximado como o campo de um dipolo magnético legítimo, cuja formulação ma-

temática é dada pela equação (23).

As outras duas situações são:

1. Regime de aproximação  $a/r \gg 1$
2. Sistema composto por diversas espiras circulares alinhadas verticalmente e sendo percorridas pela mesma corrente  $I$  (solenóide)

O regime de aproximação  $a/r \gg 1$  é válido quando as dimensões da espira são muito maiores do que a dimensão da região em estudo. Em geral, ele pode ser utilizado quando houver interesse em se determinar o campo magnético de uma espira muito grande numa região próxima ao centro. Nesse caso, as componentes  $x$  e  $y$  do campo magnético se tornam aproximadamente nulas, e a única componente presente passa a ser a componente  $z$ , dada pela equação (17).



**Figura 14:** Representação das linhas de campo magnético na região próxima ao centro da espira. Parâmetros utilizados:  $a = 15 \text{ m}$ ,  $l = 15 \text{ m}$ ,  $dl = 0.137 \text{ m}$ .

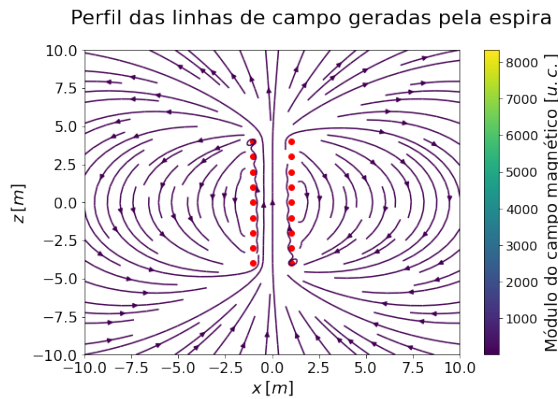
Uma observação atenta da Figura 14 permite verificar que, de fato, os efeitos de borda são desprezíveis na região central da espira, que se enquadra no regime de aproximação  $a/r \gg 1$ . No caso da simulação efetuada, a curvatura nas linhas de campo magnético começa a ficar mais evidente na região do espaço tal que  $|x| > 5$ . Qualquer estudo que fosse vir a ser efetuado sobre o campo magnético na região  $|x| < 5$ , por exemplo, poderia considerar normalmente a expressão (17) e nenhuma (ou pouquíssima) informação física seria perdida.

Uma outra maneira de se obter manualmente o campo magnético em uma determinada região do espaço é aproveitando eventuais simetrias das linhas de campo (normalmente encontradas com base em argumentos físicos), e aplicando a *Lei de Ampère* em sua forma integral [1]:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I \quad (25)$$

Nesse ponto é necessário dar um passo a frente e fazer uma abstração a mais com relação ao problema em estudo. É claro que as linhas de campo magnético produzidas por uma única espira circular não possuem nenhuma simetria evidente, então a Lei de Ampère não poderia ser utilizada para determinar o campo magnético correspondente. Mas uma observação importante é a seguinte: nas proximidades do centro da espira, as linhas de campo são aproximadamente verticais. Esse fato é muito mais simples de ser observado no caso  $a/r \gg 1$ , cuja aproximação de campo vertical na região central é perfeitamente legítima (caso explorado nos parágrafos anteriores), mas aparece também em outros gráficos já apresentados ao longo desse estudo.

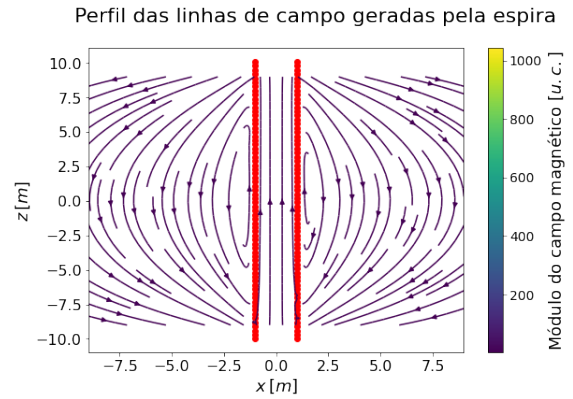
Se houvesse uma forma de “colimar” as linhas de campo magnético produzidas por essa espira de modo que estas fossem aproximadamente verticais em uma determinada região, o problema em estudo possuiria uma simetria legítima e a Lei de Ampère-Maxwell poderia, então, ser aplicada. Essa colimação, por sua vez, pode ser obtida, mas não no sistema composto por uma única espira. Esse efeito irá aparecer em um problema muito semelhante, mas ainda assim distinto, que é o problema do campo magnético gerado por um sistema de  $N$  espiras circulares verticalmente alinhadas.



**Figura 15:** Configuração das linhas de campo magnético em um sistema composto por 9 espiras verticalmente alinhadas. Parâmetros utilizados:

É interessante notar, na Figura 15, que os efeitos de borda ainda existem, mas estes estão totalmente concentrados nas extremidades superior e inferior da associação de espiras. No interior da associação as linhas de campo são praticamente verticais em toda a extensão do objeto construído. No limite em que a quantidade de espiras e o tamanho do solenóide tendem ao infinito (i.e., quando a quantidade de espiras por unidade de comprimento aumenta e

a dimensão da altura  $h = 2 \cdot z_{sup}$  se torna muito grande em comparação com as dimensões da região em estudo) deve-se obter um campo perfeitamente vertical no interior do solenóide.



**Figura 16:** Configuração das linhas de campo de um solenóide infinito. Parâmetros utilizados:  $a = 1$  m,  $I = 1$  A,  $l = 20$  m,  $dl = 0.017$  m,  $z_{sup} = 10$  m,  $dz = 0.3$  m

No sistema apresentado na Figura 16, que se enquadra na aproximação de solenóide infinito, o campo magnético possui configuração completamente vertical na região interna às espiras, conforme esperado. Além disso, pode-se notar que a densidade das linhas de campo na região imediatamente fora do solenóide é muito baixa, de modo que a hipótese de campo magnético nulo nessa porção do espaço seja totalmente coerente. Aplicando esses conceitos à Lei de Ampère, obtém-se manualmente (de uma maneira muito simples e direta), que o campo magnético no interior do solenóide é dado por  $\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}$ , ou  $\mathbf{B} = n I \hat{\mathbf{z}}$  no sistema de unidades características que está sendo utilizado no presente estudo. No resultado anterior,  $n$  representa a “densidade linear” de espiras, ou seja, quantidade de espiras por unidade de comprimento.

## 6. CONCLUSÃO

De modo geral, a principal conclusão que se pode extrair com base nas informações e tópicos discutidos ao longo do corpo desse trabalho é que a determinação manual e analítica do campo magnético no espaço é, na grande maioria dos casos, uma tarefa muito complicada. Foi visto que, mesmo no sistema composto por uma única espira circular percorrida por uma corrente uniforme  $I$ , um sistema completamente simples, as integrais da Lei de Biot-Savart já são totalmente inviáveis de serem resolvidas. A menos que aproximações sejam feitas com o propósito de simplificar os cálculos (como a aproximação de dipolo

$a/r \ll 1$ , por exemplo) ou que o sistema possua simetrias que possam ser aproveitadas no cálculo da Lei de Ampère, o emprego de ferramentas numéricas e computacionais é fundamental e indispensável.

Ademais, conclui-se que o sistema magnetostático composto por uma única espira circular é bastante rico em informação física, e possui conceitos que podem ser utilizados e estendidos para outros tipos de sistemas. Um exemplo com grande aplicabilidade prática é o próprio sistema composto do solenóide infinito, que pode ser interpretado como uma associação vertical de espiras circulares.

Um outro caso, este que possui um forte vínculo com Mecânica Quântica, por exemplo, é o sistema composto por um átomo hidrogenóide. O movimento circular or-

bital do elétron em uma determinada órbita eletrônica é totalmente análogo a uma espira circular sendo percorrida por uma corrente  $I$  uniforme, portanto resultados podem ser vinculados e exportados para o estudo particular do problema em questão.

#### REFERÊNCIAS

- [1] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 2013.
- [2] Joab Silas da Silva Júnior. *Experimento de Oersted*. URL: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/experimento-oersted.htm>.