

Descrição da evolução temporal do pêndulo duplo através de simulações numéricas.

LUCAS DE PAULA OLIVEIRA

Instituto de Física, Universidade de São Paulo -SP

Resumo

O presente trabalho tem como propósito estudar o problema do pêndulo duplo através de simulações numéricas (i.e., resoluções numéricas das equações de movimento do sistema) com base no método Runge-Kutta de ordem 2 (RK-2). Os principais casos avaliados foram: o regime $m_1 \gg m_2$, para o qual observa-se um comportamento harmônico nas coordenadas da massa m_1 e um comportamento caótico nas coordenadas da massa m_2 ; e o caso de condições iniciais simétricas $\theta_1(t=0) = -\theta_2(t=0)$, para o qual observa-se um comportamento harmônico sujeito a fenômenos de interferência.

1. INTRODUÇÃO

O problema do pêndulo duplo é um dos mais tradicionais dentro do contexto da mecânica clássica. As equações de movimento associadas podem ser obtidas facilmente utilizando os princípios do formalismo lagrangeano e hamiltoniano.

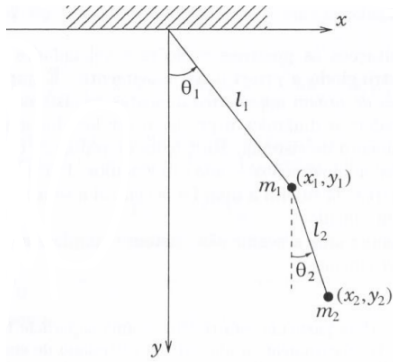


Figura 1: Representação esquemática do pêndulo duplo (Figura disponível em [2])

Considerando a parametrização em termos das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 definidas na Figura 1 e tomando como zero da energia de potencial de cada massa os respectivos pontos de equilíbrio (i.e., $\theta_1 = 0$ para a massa m_1 e $\theta_2 = 0$ para a massa m_2), a lagrangiana e a hamiltoniana do problema são dadas por:

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 (\dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1)(\dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos \theta_1) - m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2) \quad (1)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \cdot \left[\left(\frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1 l_1^2} + \frac{(m_1 + m_2) p_{\theta_2}^2}{2m_1 m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta_1}^2 p_{\theta_2}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \right) + (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2) \right] \quad (2)$$

As variáveis p_{θ_1} e p_{θ_2} (também chamadas de *momentos conjugados*) expressas na função hamiltoniana (2) são obtidas a partir de derivações da função lagrangeana:

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (3)$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4)$$

Uma vez com esses resultados em mãos, finalmente podemos escrever as equações de movimento associadas:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{l_2 p_{\theta_1} - l_1 p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \quad (5)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{-l_2 p_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 (1 + m_1/m_2) p_{\theta_2}}{l_1 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \quad (6)$$

$$\frac{dp_{\theta_1}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 - A(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) + B(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) \quad (7)$$

$$\frac{dp_{\theta_2}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_2} = -m_2gl_2 \sin \theta_2 + A(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) - B(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) \quad (8)$$

nas quais as funções $A(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$ e $B(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$, apresentadas em 7 e 8 são definidas como:

$$A(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) = \frac{p_{\theta_1}p_{\theta_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \quad (9)$$

$$B(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) = \frac{1}{2l_1^2l_2^2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \cdot [l_2^2m_2p_{\theta_1}^2 + l_1^2(m_1 + m_2)p_{\theta_2}^2 - l_1l_2m_2p_{\theta_1}p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)] \quad (10)$$

A grande maioria dos sistemas mecânicos de interesse são regidos por equações diferenciais lineares, as quais podem ser resolvidas analiticamente. Mesmo quando nos deparamos com um sistema cujas equações de movimento não são lineares, o que normalmente fazemos é inserir aproximações ao problema de modo que essas equações possam ser transformadas em equações lineares e, portanto, resolvidas com os métodos analíticos usuais.

Entretanto, conforme pode ser observado na descrição matemática do pêndulo duplo feita entre as equações (1) e (8), todas as equações de movimento desse sistema são não lineares e suficientemente complicadas de modo que a resolução analítica do problema seja praticamente ineqüível.

Para solucionar as equações apresentadas e obter, portanto, uma descrição completa da evolução temporal das funções de interesse $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $p_{\theta_1}(t)$ e $p_{\theta_2}(t)$, é necessário empregar métodos numéricos. No contexto do presente trabalho, as equações (5), (6), (7) e (8) serão resolvidas utilizando-se o método Runge-Kutta de ordem 2 a partir de um processo de discretização do tempo (mais detalhes na seção 2).

É importante destacar que, dado o fato de as equações de movimento do pêndulo duplo serem não lineares e suficientemente não triviais, esse sistema pode apresentar uma característica marcante que enriquece uma área de estudo completamente nova e ascendente na física: caos. Isto é, mesmo que o sistema obedeça equações de movimento determinísticas que nos fornecem informação sobre

a posição das massas em qualquer instante de tempo (dadas as condições iniciais), o comportamento desse sistema no futuro é praticamente imprevisível.

O primeiro cientista a detectar os sintomas do caos em sistemas físicos foi o matemático francês Henri Poincaré (1854 - 1912), em seus estudos sobre o problema da interação gravitacional de 3 corpos no contexto astronômico [3].

2. DESCRIÇÃO DO CÓDIGO

O código completo está disponível na íntegra em um arquivo bloco de notas disponibilizado em conjunto com esse documento. Essencialmente, tudo o que é preciso para efetuar as análises necessárias foi compactado em quatro funções principais. São elas:

- *atualiza(theta1, theta2, p_theta1, p_theta2, l1, l2, m1, m2, g, dt)*
- *retorna_dados(theta1_0, theta2_0, p_theta1_0, p_theta2_0, l1, l2, m1, m2, g, dt, Tf)*
- *apresenta_graficos(theta1, theta2, p_theta1, p_theta2, t)*
- *sec_Poincare(theta_plot, p_theta_plot, theta_auxiliar, dt, Tf)*

A função "atualiza" é responsável por tomar os parâmetros constantes do problema ($l1, l2, m1, m2, g$), os parâmetros de tempo (o passo temporal dt e o tempo final da simulação Tf) e os vetores de interesse **no instante atual** ($\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$), e retornar o valor desses mesmos vetores no instante seguinte. A atualização das variáveis é feita com base no método Runge-Kutta de ordem 2. O método Runge-Kutta de ordem 2 (RK-2), por sua vez, foi implementado com o auxílio das equações (5) a (10) da maneira descrita a seguir.

Primeiro foram definidas as variáveis auxiliares $k_1^{\theta_1}$, $k_1^{\theta_2}$, $k_1^{p_{\theta_1}}$ e $k_1^{p_{\theta_2}}$:

$$k_1^{\theta_1} = a_{\theta_1}(t) \cdot \Delta t = \frac{d\theta_1}{dt}(t) \cdot \Delta t \quad (11)$$

$$k_1^{\theta_2} = a_{\theta_2}(t) \cdot \Delta t = \frac{d\theta_2}{dt}(t) \cdot \Delta t \quad (12)$$

$$k_1^{p_{\theta_1}} = a_{p_{\theta_1}}(t) \cdot \Delta t = \frac{dp_{\theta_1}}{dt}(t) \cdot \Delta t \quad (13)$$

$$k_1^{p_{\theta_2}} = a_{p_{\theta_2}}(t) \cdot \Delta t = \frac{dp_{\theta_2}}{dt}(t) \cdot \Delta t \quad (14)$$

Depois as chamadas "variáveis a meio passo":

$$\theta_1 \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \theta_1(t) + \frac{k_1^{\theta_1}}{2} \quad (15)$$

$$\theta_2 \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \theta_2(t) + \frac{k_1^{\theta_2}}{2} \quad (16)$$

$$p_{\theta_1} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = p_{\theta_1}(t) + \frac{k_1^{p_{\theta_1}}}{2} \quad (17)$$

$$p_{\theta_2} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = p_{\theta_2}(t) + \frac{k_1^{p_{\theta_2}}}{2} \quad (18)$$

Posteriormente, as variáveis auxiliares $k_2^{\theta_1}$, $k_2^{\theta_2}$, $k_2^{p_{\theta_1}}$ e $k_2^{p_{\theta_2}}$:

$$k_2^{\theta_1} = a_{\theta_1} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t = \frac{d\theta_1}{dt} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t \quad (19)$$

$$k_2^{\theta_2} = a_{\theta_2} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t = \frac{d\theta_2}{dt} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t \quad (20)$$

$$k_2^{p_{\theta_1}} = a_{p_{\theta_1}} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t = \frac{dp_{\theta_1}}{dt} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t \quad (21)$$

$$k_2^{p_{\theta_2}} = a_{p_{\theta_2}} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t = \frac{dp_{\theta_2}}{dt} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \Delta t \quad (22)$$

E, por fim, foram feitas as atualizações das variáveis de estudo:

$$\theta_1(t + \Delta t) = \theta_1(t) + k_2^{\theta_1} \quad (23)$$

$$\theta_2(t + \Delta t) = \theta_2(t) + k_2^{\theta_2} \quad (24)$$

$$p_{\theta_1}(t + \Delta t) = p_{\theta_1}(t) + k_2^{p_{\theta_1}} \quad (25)$$

$$p_{\theta_2}(t + \Delta t) = p_{\theta_2}(t) + k_2^{p_{\theta_2}} \quad (26)$$

A função "retorna_dados" é a principal função do programa. Basicamente, essa função recebe todos os parâmetros importantes do problema: condições iniciais das variáveis temporais (θ_1 , θ_2 , p_{θ_1} , p_{θ_2}), comprimentos (l_1 , l_2), massas (m_1 , m_2), aceleração gravitacional (g), passo temporal (dt) e tempo total de simulação (T_f); e utiliza a função "atualiza"(descrita anteriormente) para retornar os vetores

θ_1 , θ_2 , p_{θ_1} e p_{θ_2} já totalmente atualizados dentro do tempo total de simulação, bem como o vetor temporal t (discretizado) completo.

A função "apresenta_graficos" é complementar. Ela toma os vetores θ_1 , θ_2 , p_{θ_1} , p_{θ_2} já completamente atualizados, além do vetor de tempo t , e retorna 5 gráficos de interesse:

- $\theta_1(t) \times t$
- $\theta_2(t) \times t$
- $\theta_1(t) \times t$ e $\theta_2(t) \times t$ (em conjunto)
- $p_{\theta_1}(t) \times \theta_1(t)$ (órbita no espaço de fases da massa m_1)
- $p_{\theta_2}(t) \times \theta_2(t)$ (órbita no espaço de fases da massa m_2)

Por fim, a função "sec.Poincare" é responsável por apresentar a seção de Poincaré associada às variáveis θ_1 e p_{θ_1} , considerando os parâmetros temporais dt e T_f e o vetor auxiliar θ_1 .

Todas essas funções foram estruturadas e pensadas de modo que a simulação de algum determinado pêndulo duplo (com parâmetros específicos) fosse bastante simples e rápida. Como exemplo de aplicação, considere que desejemos verificar o comportamento de um pêndulo duplo dados os seguintes parâmetros e condições iniciais: $\theta_1(t = 0) = \pi/2 \text{ rad}$, $\theta_2(t = 0) = \pi/3 \text{ rad}$, $l_1 = 20 \text{ cm}$, $l_2 = 30 \text{ cm}$, $m_1 = 100 \text{ g}$, $m_2 = 60 \text{ g}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $dt = 0.001 \text{ s}$ e $T_f = 30 \text{ s}$

```
theta1_0 = np.pi/2 # rad
theta2_0 = np.pi/3 # rad
p_theta1_0 = 0 # kg*m^2/s
p_theta2_0 = 0 # kg*m^2/s
l1 = 20e-2 # m
l2 = 30e-2 # m
m1 = 100e-3 # kg
m2 = 60e-3 # kg
g = 9.8 # m/s^2
dt = 0.001 # s
Tf = 30 # s
```

(a) Implementação dos parâmetros no programa.

```
theta1, theta2, p_theta1, p_theta2, t = retorna_dados\
(theta1_0, theta2_0, p_theta1_0, p_theta2_0, l1, l2, m1, m2, g, dt, Tf)
apresenta_graficos(theta1, theta2, p_theta1, p_theta2, t)
sec_Poincare(theta1, p_theta1, theta2, dt, Tf)
sec_Poincare(theta2, p_theta2, theta1, dt, Tf)
```

(b) Chamada das funções definidas.

Figura 2: Exemplo de aplicação do programa desenvolvido.

O código apresentado na figura 2 retorna os seguintes resultados:

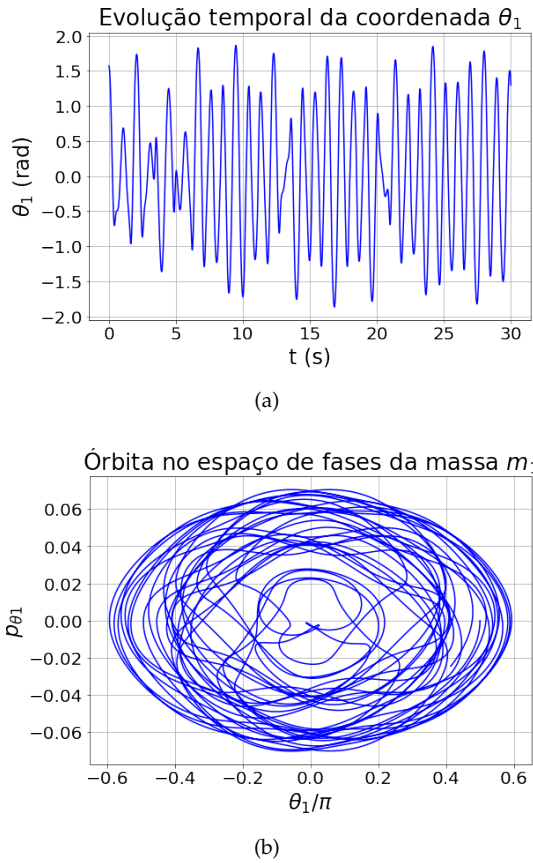


Figura 3: Gráficos de interesse (coordenada angular em função do tempo e órbita no espaço de fases) associados às variáveis "1", características da massa m_1 do pêndulo duplo.

A interpretação dos gráficos será melhor discutida na seção 3.b, mas a título de curiosidade, vale ressaltar que a evolução temporal do ângulo θ_1 não se assemelha em nada com as funções harmônicas conhecidas. Além disso, a órbita da massa m_1 espaço de fases não se fecha em nenhum ponto, é completamente não periódica. Essas características são típicas de sistemas caóticos para os quais, mesmo conhecendo as equações de movimento características, não se pode prever o que acontecerá.

Essas mesmas características podem ser observadas nos gráficos da Figura 4, associados às variáveis "2" da massa m_2 .

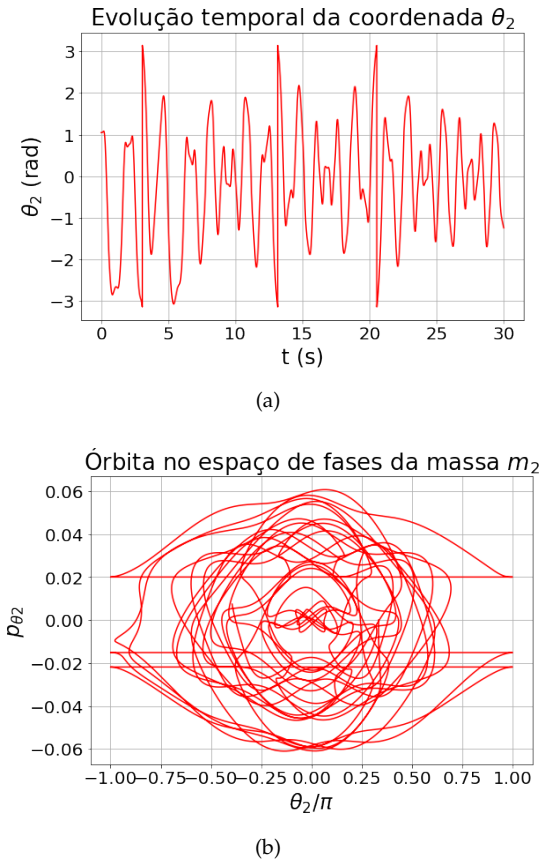


Figura 4: Gráficos de interesse (coordenada angular em função do tempo e órbita no espaço de fases) associados às variáveis "2", características da massa m_2 do pêndulo duplo.

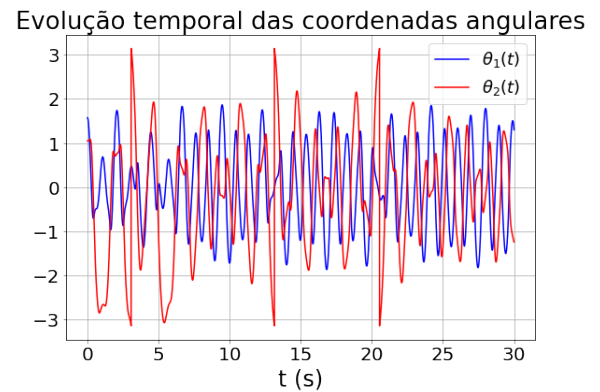
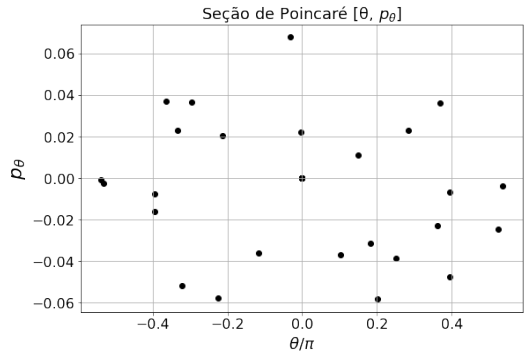
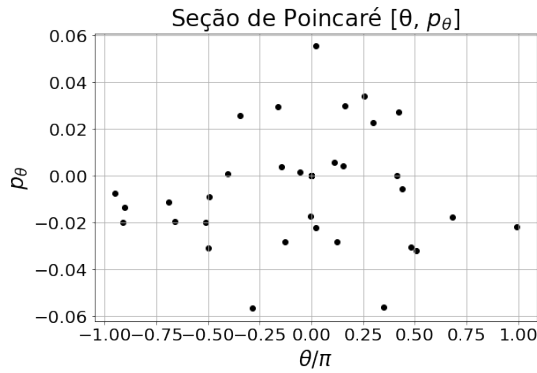


Figura 5: Gráfico comparativo associado à evolução temporal das variáveis θ_1 e θ_2 .

(a) Massa m_1 (b) Massa m_2 **Figura 6:** Seções de Poincaré associadas ao movimento das massas do pêndulo duplo

3. ANÁLISE E DISCUSSÃO DO SISTEMA NO REGIME $m_1 \gg m_2$

A presente seção se dedica ao estudo do pêndulo duplo no qual as massas m_1 e m_2 satisfazem a condição $m_1 \gg m_2$. Intuitivamente, o esperado é que a massa m_1 se comporte aproximadamente como um oscilador harmônico simples, enquanto a massa m_2 apresente um movimento caótico tal como observado nos gráficos anteriores.

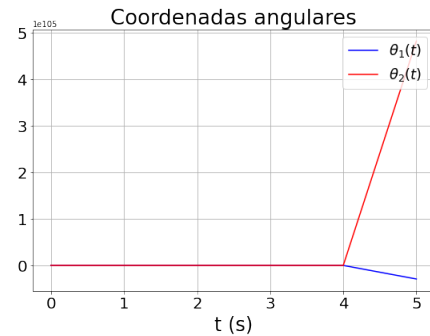
3.a. Escolha do passo temporal dt

Sabemos que, quanto maior o passo temporal, menor é a precisão dos resultados obtidos na simulação numérica. Entretanto, nesse caso a simulação exige menos memória/rendimento computacional e, portanto, leva pouco tempo para ser concluída. Quanto menor o passo temporal, por outro lado, maior é a precisão dos resultados. Apesar disso, o custo computacional passa a

ser maior e, como consequência, o tempo de simulação também aumenta consideravelmente.

A pergunta então é: qual seria o melhor valor de dt de modo que tivéssemos simulações com resultados razoáveis e que, ainda assim, não exigissem tanto tempo para serem concluídas?

Para estudar esse problema, foram feitas 5 simulações distintas com passos temporais de ordens de magnitude diferentes: $dt = 1s$, $dt = 0.1s$, $dt = 0.01s$, $dt = 0.001s$, $dt = 0.0001s$. Todas essas simulações foram feitas com os mesmos parâmetros e condições iniciais (os quais serão indicados nas legendas das figuras para facilitar a identificação), de modo que os resultados pudessem ser coerentemente comparados.

**Figura 7:** Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 1s$. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t = 0) = \pi/2 \text{ rad}$, $\theta_2(t = 0) = \pi/2 \text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t = 0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t = 0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 10 \text{ g}$, $l_1 = l_2 = 10 \text{ cm}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $T_f = 30 \text{ s}$. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.00929 s.

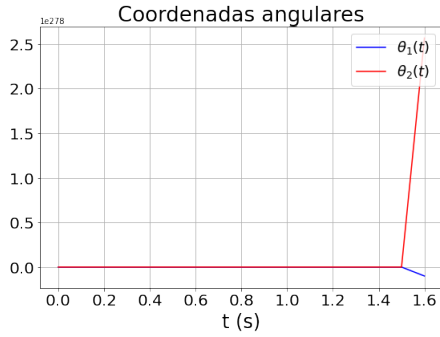


Figura 8: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.1$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $m_1 = 200$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.03009 s.

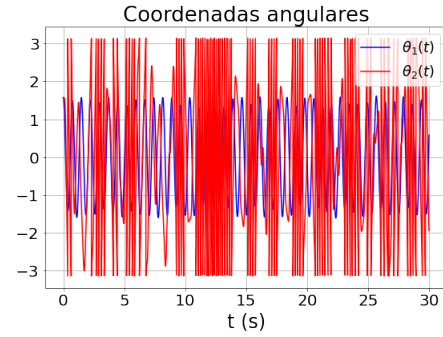


Figura 10: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.001$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $m_1 = 200$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 2.30621 s.

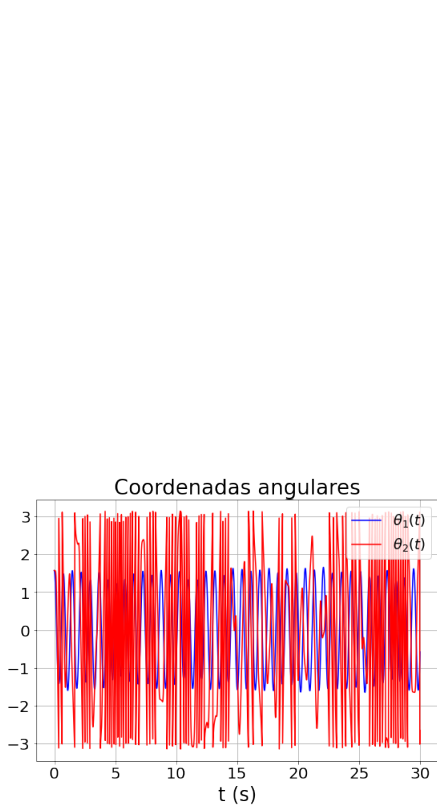


Figura 9: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.01$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $m_1 = 200$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.25384 s.

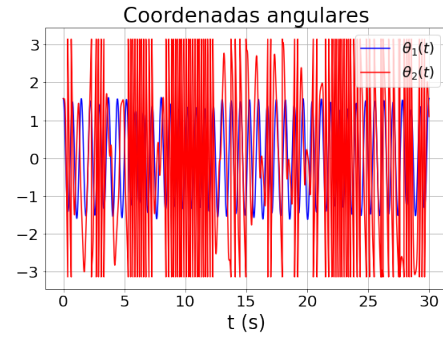


Figura 11: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.0001$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg · m²/s, $m_1 = 200$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 22.89383 s.

Conforme discutido nos parágrafos iniciais, as principais preocupações aqui são com respeito à coerência dos cálculos numéricos e à velocidade de simulação. Os gráficos apresentados nas figuras 7 e 8 claramente indicam que os cálculos efetuados pelo programa divergiram em algum ponto. Essa conclusão é corroborada pelo tamanho das ordens de magnitude dessas coordenadas angulares, expressas no canto superior esquerdo dos eixos verticais. Portanto, não podemos usar esses resultados em qualquer análise subsequente uma vez que estes não possuem nenhum significado físico.

Os gráficos das figuras 9, 10 e 11, por outro lado, são todos convergentes. Os padrões da curva $\theta_2(t)$ apresentados

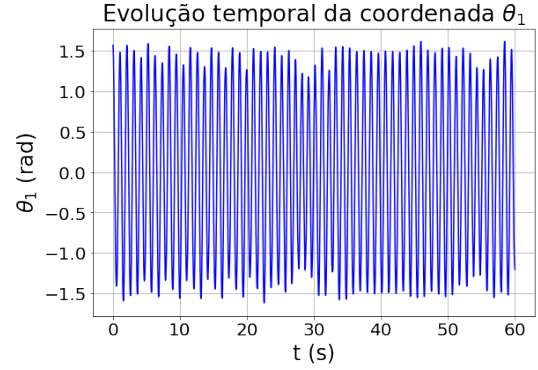
nessas figuras podem causar alguma estranheza, mas é importante atentar para o fato de que todas essas simulações foram feitas utilizando $m_1 = 20 \cdot m_2$ (limite $m_1 \gg m_2$, que é justamente o caso em que temos maior interesse em estudar). A partir do passo temporal $dt = 0.01 \text{ s}$, portanto, incrementar a precisão de dt (i.e., diminuir sua ordem de grandeza) é apenas uma questão de refinamento dos cálculos. Vale destacar, entretanto, que a cada redução na ordem de grandeza do passo temporal ($dt \rightarrow dt/10$), o tempo de simulação aumenta em aproximadamente 10x. Desse modo é praticamente inviável efetuar uma simulação com um grau de precisão arbitrariamente longo (o tempo exigido para esses cálculos seria muito grande).

Portanto, tendo em vista as discussões apresentadas, conclui-se que o melhor passo temporal para se utilizar nas simulações subsequentes do pêndulo duplo é $dt = 0.001 \text{ s}$.

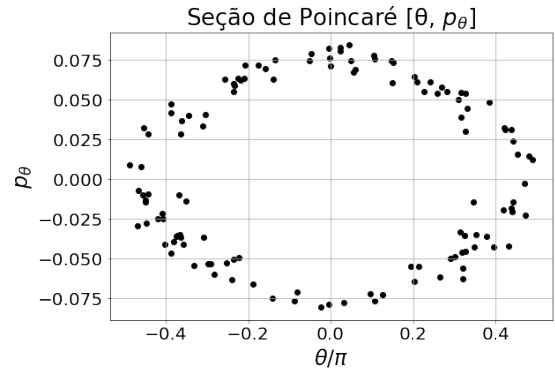
Uma análise dos mesmos passos temporais em diferentes regimes de massa (i.e., $m_1 = m_2$ e $m_1 \ll m_2$) também sugerem a mesma escolha de dt , fato que corrobora a conclusão tomada. A única ressalva ocorre para o regime $m_1 \ll m_2$, no qual a escolha $dt = 0.001 \text{ s}$ ainda fornece resultados divergentes caso os comprimentos l_1 e l_2 sejam mantidos iguais. De todo modo, para a grande maioria dos sistemas essa escolha é suficientemente boa e razoável. Por esse motivo, o passo temporal $dt = 0.001 \text{ s}$ também será utilizado nas simulações do caso completo (seção 4). Os gráficos dessas simulações estão disponíveis na seção 6 (figuras 19 a 28).

3.b. Análise do caso $m_1 \gg m_2$

Conforme supracitado no primeiro parágrafo da seção 3.b, a principal expectativa para o sistema nessas condições é que a massa m_1 se comporte aproximadamente como um oscilador harmônico simples típico, portanto é nela que serão concentrados os esforços de análise no decorrer dessa subseção.



(a) Evolução temporal da coordenada angular θ_1 ao longo da simulação



(b) Seção de Poincaré das variáveis θ_1 e p_{θ_1} associadas à massa m_1

Figura 12: Resultados da simulação numérica do pêndulo duplo para as variáveis da massa m_1 . Parâmetros utilizados: $\theta_1(t=0) = \pi/2 \text{ rad}$, $\theta_2(t=0) = \pi/2 \text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $l_1 = l_2 = 20 \text{ cm}$, $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 10 \text{ g}$, $dt = 0.001 \text{ s}$, $T_f = 60 \text{ s}$.

O comportamento de $\theta_1(t)$ é perfeitamente coerente com o padrão esperado de um oscilador harmônico típico. É claro, vale destacar, a função representada graficamente na Figura 12(a) não é perfeitamente harmônica. Existem ciclos nos quais a amplitude total é maior, outros nos quais ela é menor. Além disso, os ciclos não possuem um período único; ora a oscilação é mais lenta, ora mais veloz.

Contudo, todas essas flutuações são muito pequenas de tal forma que o movimento da massa m_1 pode ser aproximado como o movimento de um oscilador harmônico com bom grau de confiabilidade. Tal afirmação é corroborada pelo padrão da Seção de Poincaré expresso na Figura 12(b). Conforme pode ser observado, o movimento de m_1 evolui em torno de um único "atrator", que é justamente o pêndulo simples de massa m_1 e comprimento l_1 .

A correspondência entre a evolução temporal das coor-

denadas da massa m_1 e a evolução temporal do sistema atrator associado pode ser verificada diretamente com base na observação das oscilações da Figura 12(a). Dado que o sistema atrator é um pêndulo simples legítimo, sua frequência natural de oscilação deve ser $\omega_0^2 = g/l_1$ e, portanto, seu período de oscilação é dado por $T = 2\pi\sqrt{l_1/g}$. Substituindo os valores utilizados ($l_1 = 20$ e $g = 9.8 \text{ m/s}^2$), obtemos o resultado $T_0 \approx 0.9 \text{ s}$

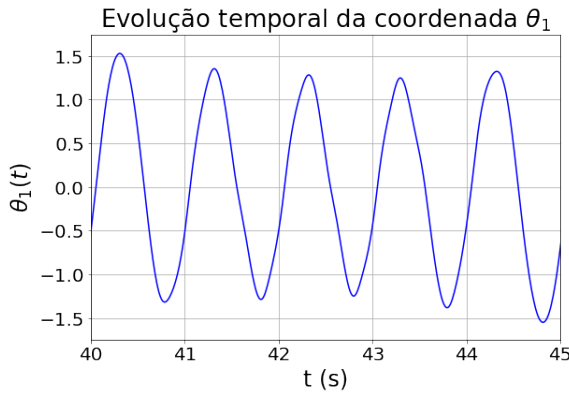
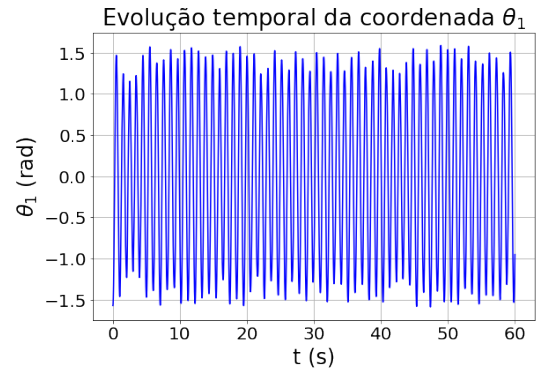
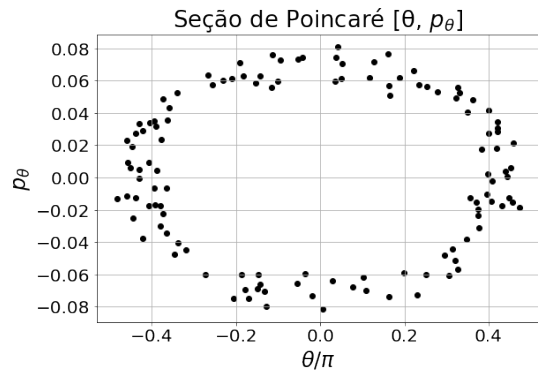


Figura 13: Representação da evolução temporal da coordenada angular θ_1 ao longo dos instantes de tempo 40 s e 45 s. O intervalo de tempo foi escolhido propositalmente após um longo período de simulação para que o comportamento da massa m_1 estivesse próximo o suficiente do comportamento do sistema atrator.

Observando as oscilações associadas ao intervalo de simulação apresentadas na Figura 13, temos que o intervalo de tempo entre um determinado pico e o pico subsequente é, na ordem em que aparecem na figura: $\approx 1 \text{ s}$, $\approx 1 \text{ s}$, $\approx 1 \text{ s}$, $\approx 1.05 \text{ s}$. O erro percentual médio entre os períodos obtidos e o período esperado é de aproximadamente 15%. Entretanto este é um resultado razoável considerando o fato de que, somado ao erro aleatório associado à estimativa dos períodos com base na Figura 13, os nossos resultados estão completamente sujeitos a erros numéricos associados não só à capacidade computacional do computador mas também à escolha do passo temporal dt .



(a) Evolução temporal da coordenada angular θ_1 ao longo da simulação



(b) Seção de Poincaré das variáveis θ_1 e p_{θ_1} associadas à massa m_1

Figura 14: Resultados da simulação numérica do pêndulo duplo para as variáveis da massa m_1 com a condição inicial "refletida". Parâmetros utilizados: $\theta_1(t=0) = -\pi/2 \text{ rad}$, $\theta_2(t=0) = -\pi/2 \text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $l_1 = l_2 = 20 \text{ cm}$, $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 10 \text{ g}$, $dt = 0.001 \text{ s}$, $T_f = 60 \text{ s}$.

Nos gráficos da figura 14 temos exatamente o mesmo sistema, mas com as condições iniciais "refletidas" com relação ao plano de simetria do problema. Uma pergunta interessante que pode ser feita é: será que o sistema é sensível às condições iniciais? Ou seja, dada uma modificação nas condições iniciais, como esse sistema evoluirá ao longo do tempo?

Classicamente, vários sistemas mecânicos não são sensíveis às condições iniciais. O caso mais simples é o do sistema massa-mola amortecido e forçado. Independentemente das condições iniciais impostas, existe um instante de tempo a partir do qual todos os termos transientes iniciais somem, e o sistema passa a evoluir exatamente como exigido pelo forçamento externo. Em outras palavras, o sistema massa-mola amortecido e forçado é um sistema mecânico legitimamente determinístico. A

questão da sensibilidade às condições iniciais é, neste sentido, uma característica típica de sistemas caóticos para os quais mesmo conhecendo-se as equações de movimento que controlam o sistema é impossível prever o que irá acontecer [3].

Uma maneira de verificar se o pêndulo duplo em estudo ($m_1 \gg m_2$) apresenta sensibilidade às condições iniciais é verificar o que acontece com a função definida por $\Delta\theta = \theta'_1(t) - \theta_1(t)$. Se o sistema em questão for de fato sensível, devemos observar flutuações não desprezíveis em torno do valor 0. Caso ele não seja sensível, a função em questão deve ou ser nula em todos os instantes ou apresentar flutuações praticamente desprezíveis.

Evolução temporal da variação das coordenadas angulares

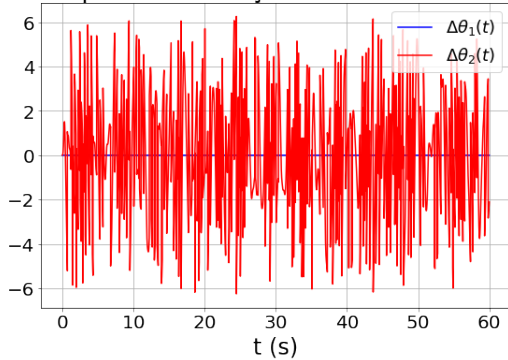


Figura 15: Representação gráfica das funções $\Delta\theta_1$ e $\Delta\theta_2$, definidas pela diferença entre as coordenadas θ_1 e θ_2 obtidas nas simulações das figuras 12 e 14, respectivamente.

A coordenada angular θ_2 não é o foco do estudo da presente seção, mas foi incluída na Figura 15 apenas por vias de comparação. A função $\Delta\theta_1$ é praticamente imperceptível na Figura 15: uma linha contínua totalmente não perturbada no valor 0. A função $\Delta\theta_2$, por outro lado, é completamente aleatória; não apresenta nenhum padrão ou de decaimento ao longo de tempo e suas flutuações em torno do zero são totalmente não desprezíveis.

A principal conclusão que se pode tirar desse resultado é que a massa m_1 de fato é insensível às condições iniciais. Seu movimento será sempre o mesmo ao longo do tempo independentemente dos valores inseridos em $t = 0$ s. Esse resultado tem total sentido físico uma vez que, dentro do regime $m_1 \gg m_2$, o comportamento da massa m_1 tende a se aproximar do comportamento do sistema atrator dado pelo pêndulo simples com fio de comprimento l_1 e massa m_1 , conforme discutido em parágrafos anteriores.

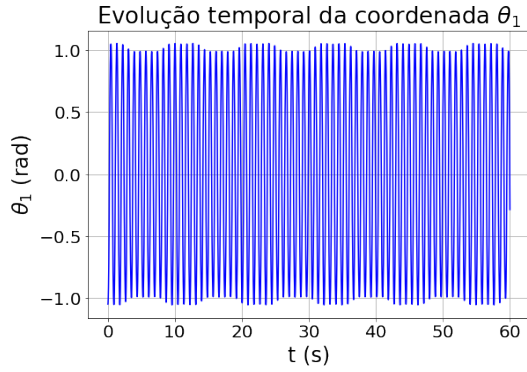
A massa m_2 , por outro lado, é completamente sensível às condições iniciais. A mudança nos valores $\theta_2(t = 0)$ em ambas as situações gerou "órbitas" (i.e., padrões de movi-

mento) completamente distintos. Com respeito à massa m_2 , portanto, a conclusão é que seu movimento é caótico. Ou seja, mesmo conhecendo as equações de movimento que o governam, é impossível prever onde essa massa estará em instantes de tempo futuros.

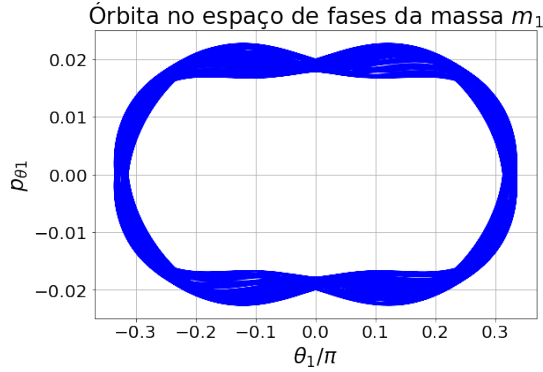
4. ANÁLISE DO SISTEMA EM REGIME ARBITRÁRIO.

Esta seção dedica-se ao estudo de um pêndulo duplo sem restrição de massa, i.e., as massas m_1 e m_2 podem ser quaisquer. Neste caso, será estudado o sistema composto por uma combinação particular de condições iniciais em θ_1 e θ_2 : a combinação simétrica $\theta_1(t = 0) = -\theta_2(t = 0)$.

Tomando valores pequenos para os ângulos θ dentro da condição imposta no parágrafo anterior e parâmetros de massa e comprimento "fisicamente plausíveis", ou seja, que permitam a evolução natural do sistema sem que sejam apresentados comportamentos caóticos, é razoável esperar que esse sistema apresente um bom comportamento nas variáveis angulares. Em outras palavras, é razoável esperar que esse sistema apresente alguma particularidade física típica de sistemas harmônicos usuais e que não haja comportamento caótico de qualquer natureza.

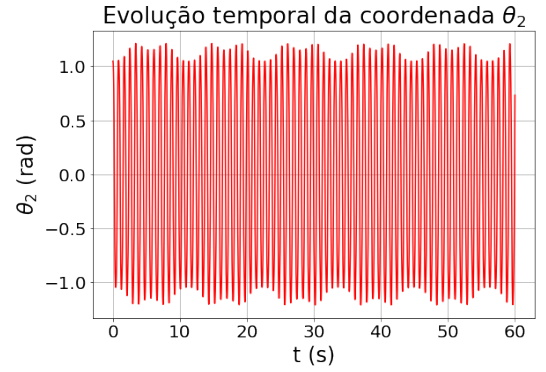


(a)

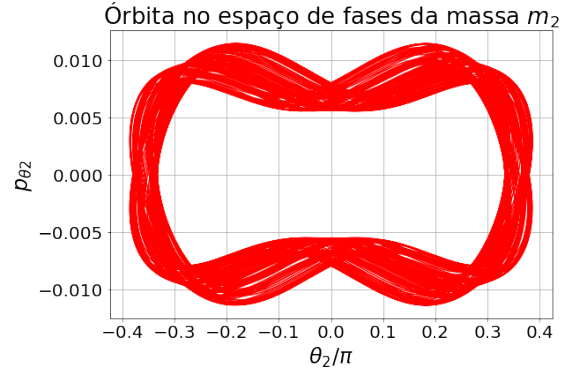


(b)

Figura 16: Comportamento das variáveis associadas à massa m_1 ao longo do tempo. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = -\pi/3 \text{ rad}$, $\theta_2(t=0) = \pi/3 \text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $l_1 = l_2 = 20 \text{ cm}$, $m_1 = m_2 = 50 \text{ g}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $dt = 0.001 \text{ s}$, $T_f = 60 \text{ s}$.



(a)



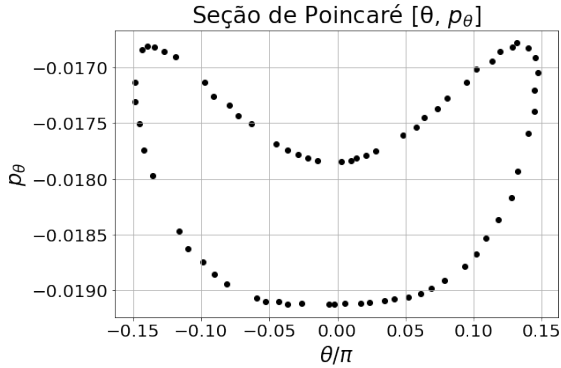
(b)

Figura 17: Comportamento das variáveis associadas à massa m_2 ao longo do tempo. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = -\pi/3 \text{ rad}$, $\theta_2(t=0) = \pi/3 \text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $l_1 = l_2 = 20 \text{ cm}$, $m_1 = m_2 = 50 \text{ g}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $dt = 0.001 \text{ s}$, $T_f = 60 \text{ s}$.

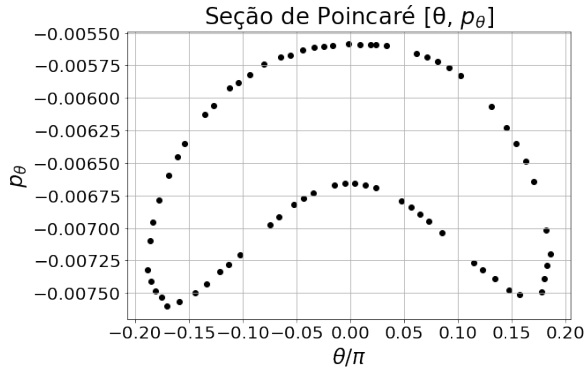
Os gráficos das figuras 16 e 17 confirmam a expectativa anunciada nos primeiros parágrafos da seção. As órbitas no espaço de fases do movimento de ambas as massas têm o formato elipsoidal típico de movimentos harmônicos conhecidos. A princípio não conseguimos concluir se o movimento é periódico ou não apenas com base na observação dessas figuras (ou seja, é difícil afirmar com clareza se temos órbitas fechadas). A análise das Seções de Poincaré apresentadas na Figura 18, entretanto, indicam que esse sistema (com as condições iniciais e parâmetros implementados) possui um conjunto finito de diferentes sistemas atratores, cada um com sua frequência e órbita características no espaço de fases.

Uma característica importante que pode ser extraída dessas figuras está incluída nas figuras 16(b) e 17(a). As funções θ_1 e θ_2 apresentam um incremento e um decremento na amplitude em determinados intervalos de tempo. Essa observação se refere a um fenômeno muito comum

típico de sistemas ondulatórios sujeitos à superposição de frequências: o fenômeno de batimento [1]. Ou seja, as massas m_1 e m_2 não só possuem um movimento harmônico bem comportado, como também têm modos normais que interagem entre si, criando um padrão de interferência que ora aumenta ora diminui a amplitude da coordenada angular θ_1 , e vice-versa para a coordenada angular θ_2



(a) Seção de Poincaré das variáveis θ_1 e p_{θ_1} , associadas à massa m_1



(b) Seção de Poincaré das variáveis θ_2 e p_{θ_2} , associadas à massa m_2

Figura 18: Seções de Poincaré do pêndulo duplo em estudo. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = -\pi/3 \text{ rad}$, $\theta_2(t=0) = \pi/3 \text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $l_1 = l_2 = 20 \text{ cm}$, $m_1 = m_2 = 50 \text{ g}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $dt = 0.001 \text{ s}$, $T_f = 60 \text{ s}$.

5. CONCLUSÃO

As principais conclusões que podem ser extraídas das análises feitas para o sistema do pêndulo duplo é que o caos é extremamente presente. Mesmo podendo ser encontradas condições que gerem comportamentos do tipo harmônico nas coordenadas relevantes, quaisquer

pequenas perturbações (sejam elas nas condições iniciais, sejam elas nos parâmetros constantes) são potencialmente influentes na geração de um sistema com evolução imprevisível.

Outro ponto relevante é a questão da interpretação dos diferentes tipos de pêndulos. Os gráficos $\theta(t)xt$ e as órbitas no espaço de fases (para ambas as massas) fornecem informações bastante úteis sobre a evolução temporal do pêndulo, contudo as Seções de Poincaré são essenciais na análise do problema. É através dele que são identificadas as principais características associadas (sejam elas caóticas ou harmônicas) e os sistemas atratores correspondentes (quando existem).

Em suma, conforme pode-se observar nas discussões feitas ao longo das seções anteriores, o sistema do pêndulo duplo é extremamente rico. Os casos avaliados aqui constituem apenas uma pequena fração de toda a completude de casos possíveis. Existem muitos outros parâmetros e condições iniciais não explorados no corpo deste trabalho que podem ocasionar nos mais variados comportamentos e fenômenos de extremo interesse em diversas áreas da física.

6. FIGURAS COMPLEMENTARES

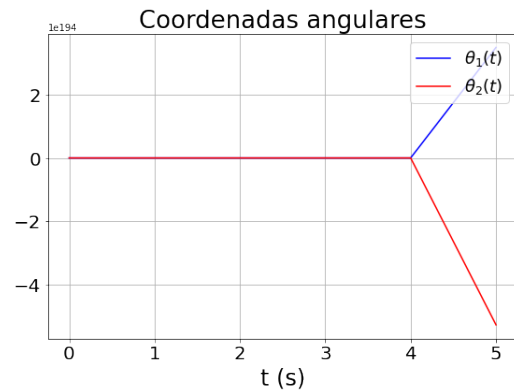


Figura 19: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 1 \text{ s}$. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2 \text{ rad}$, $\theta_2(t=0) = \pi/2 \text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t=0) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $m_1 = 10 \text{ g}$, $m_2 = 10 \text{ g}$, $l_1 = l_2 = 10 \text{ cm}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $T_f = 30 \text{ s}$. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.00706 s .

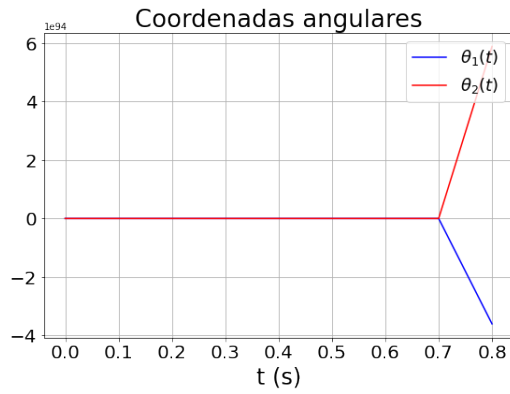


Figura 20: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.1$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.05010 s.

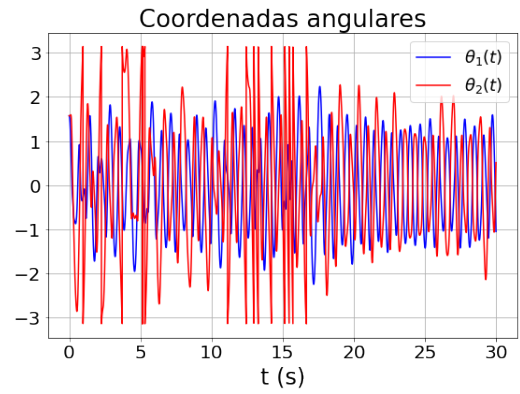


Figura 22: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.001$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 2.39464 s.

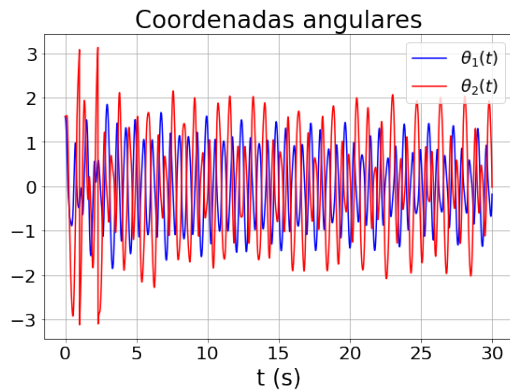


Figura 21: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.01$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.23121 s.

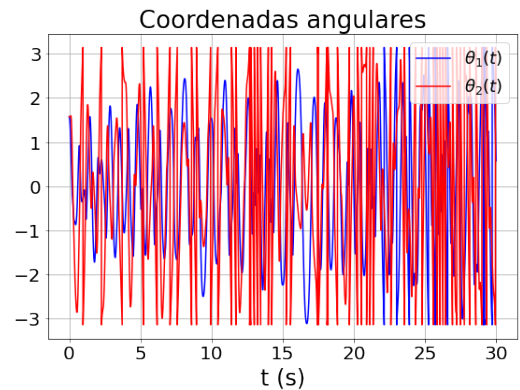


Figura 23: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.0001$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t=0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t=0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 10$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 22.80155 s.

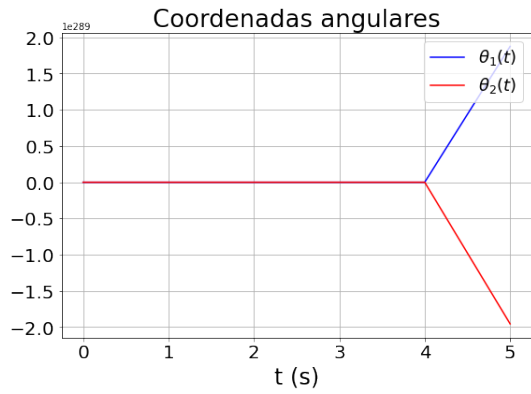


Figura 24: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 1$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t = 0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t = 0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 200$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.00959 s.

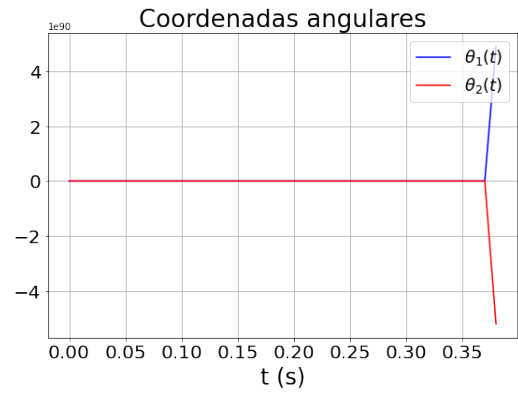


Figura 26: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.01$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t = 0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t = 0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 200$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.24265 s.

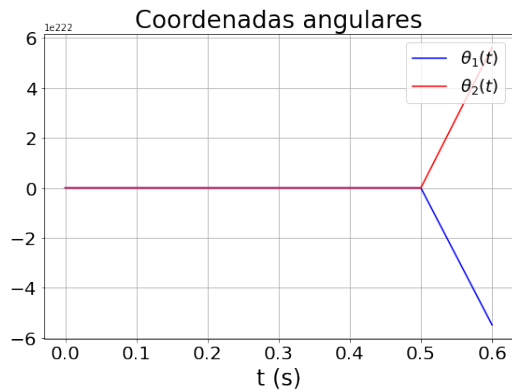


Figura 25: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.1$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t = 0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t = 0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 200$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 0.03256 s.

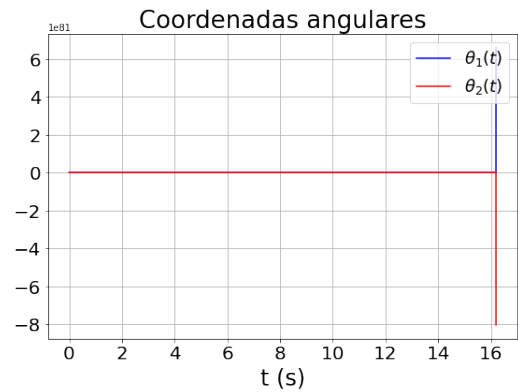
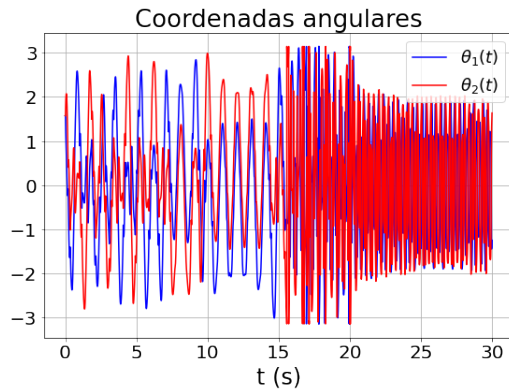


Figura 27: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.001$ s. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t = 0) = \pi/2$ rad, $\theta_2(t = 0) = \pi/2$ rad, $p_{\theta_1}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $p_{\theta_2}(t = 0) = 0$ kg \cdot m²/s, $m_1 = 10$ g, $m_2 = 200$ g, $l_1 = l_2 = 10$ cm, $g = 9.8$ m/s², $T_f = 30$ s. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 2.30723 s.



REFERÊNCIAS

- [1] H.M. Nussenzveig. *Curso De Fisica Basica, V.2: FLUIDOS, OSCILAÇÕES E ONDAS, CALOR*. ED-GARD BLUCHER. ISBN: 9788521207474. URL: https://books.google.com.br/books?id=%5C_TtSvgAACAAJ.
- [2] *Revisão de Mecânica Analítica - IFRGS, Prof. Nelson Luiz Reyes Marques*. URL: https://nelsonreyes.com.br/Mec_Anal%5C%C3%5C%ADtica_REVIS%5C%C3%5C%830_M_A.pdf.
- [3] J.R. Taylor e S.L.L.J.R. Taylor. *Classical Mechanics*. G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series. University Science Books, 2005. ISBN: 9781891389221. URL: <https://books.google.com.br/books?id=P1kCtNr-pJsC>.

Figura 28: Evolução temporal das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 para o passo temporal $dt = 0.0001\text{ s}$. Parâmetros de simulação: $\theta_1(t=0) = \pi/2\text{ rad}$, $\theta_2(t=0) = \pi/2\text{ rad}$, $p_{\theta_1}(t=0) = 0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $p_{\theta_2}(t=0) = 0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $m_1 = 10\text{ g}$, $m_2 = 200\text{ g}$, $l_1 = l_2 = 10\text{ cm}$, $g = 9.8\text{ m/s}^2$, $T_f = 30\text{ s}$. Tempo necessário para a conclusão do programa (cálculo das variáveis temporais): 22.57455 s.