7600017 - Introdução à Física Computacional - 2025

Quinto Projeto

29/10/2025

Entrega: 14/11/2025

Instruções

- Use o diretório **proj5_#*usp*** em `/public/IntroFisComp25/projeto5`
- Deixe no diretório apenas 3 arquivos, de nomes `exerA.f90`, `relatorio.tex` e `relatorio.pdf`
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para `entrada/saída`
- **Use precisão dupla em seus resultados**
- Note: se deixar de fazer algum exercício não inclua o arquivo correspondente

Dinâmica Populacional

Em princípio, a equação diferencial que utilizamos anteriormente para descrever o decaimento radioativo de uma amostra de $N(t)$ átomos como função do tempo t

$$dN(t) = \alpha N(t) dt \,, \tag{1}$$

sendo α uma constante negativa, pode também descrever o crescimento populacional de um grupo de seres vivos, se tomarmos α positivo. De fato, nos dois casos, o decréscimo (respectivamente aumento) $dN(t)$ no número de **indivíduos** em um certo intervalo de tempo deve ser proporcional a $N(t)$ e ao intervalo dt, levando à equação acima. No caso de aumento populacional, porém, é fácil ver que o comportamento descrito não seria realístico, já que a equação prevê um crescimento exponencial sem limites. Claramente, devem ser levados em conta outros aspectos nesse caso, como a presença de predadores, escassez de recursos, morte dos indivíduos, etc. Para uma descrição simplificada, podemos limitar o crescimento da população impondo um **corte** se o número atingir um valor máximo N_{max} .

Nosso objetivo será estudar as condições para que um dado valor inicial para o número N de indivíduos na população permaneça constante com o tempo, ou seja vamos procurar por um ponto fixo do mapeamento que leva $N(t) \approx N_i$ a $N(t + \Delta t) \approx N_{i+1}$. Como veremos, o estudo desse mapeamento (muito simples) vai revelar uma grande complexidade e dependência sensível das condições iniciais, definindo um **comportamento caótico** que ilustraremos em nossos exercícios.

Vamos primeiramente discretizar a equação (1), i.e. vamos considerar instantes de tempo sucessivos t e $t + \Delta t$ com Δt fixo, não necessariamente pequeno. (Por exemplo, Δt pode ser o tempo de uma geração de indivíduos.) A equação fica

$$N_{i+1} = (1 + \alpha\Delta t)N_i \approx rN_i\,, \tag{2}$$

onde definimos uma nova constante positiva $r = 1 + \alpha\Delta t > 1$. Vamos agora impor o limite máximo N_{max} para o número de indivíduos, da forma

$$N_{i+1} = rN_i(1 - \frac{N_i}{N_{max}})\,. \tag{3}$$

A descrição será mais simples se mudarmos de variáveis para $x_i \approx N_i/N_{max}$, levando a

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i)\,, \tag{4}$$

sendo $x_i \in [0, 1]$. Note que a Equação (4) define um mapeamento - isto é uma relação de recorrência, ou mapa - $G(x_i)$ levando de x_i a x_{i+1} . Buscamos, portanto, os pontos fixos do mapa $G(x) = rx(1-x)$. Isso pode ser feito computacionalmente **iterando-se** a Equação 4 a partir de diferentes condições iniciais e procurando por convergência. O mesmo pode ser feito graficamente, determinando-se os pontos de intersecção da curva $G(x)$ e a reta x. Claramente, as soluções para o problema dependerão do valor da constante r. Neste projeto, portanto, não vamos integrar uma equação diferencial, mas estudar a evolução do mapa G(x), o chamado **mapa logístico**. Crie um arquivo `relatorio.tex`, compile com o comando `pdflatex` e produza assim o arquivo `relatorio.pdf`, correspondendo ao relatório. Seu relatório deve seguir as especificações abaixo.

Tarefa A: Tratamento Geral

Investigue a ocorrência de pontos fixos para o mapa $G(x)$, isto é encontre valores x^* tais que $G(x^*) = x^*$, para um dado valor de r. Primeiramente, considere as propriedades de $G(x)$ (esboce seu gráfico, etc.) e note que:

(i) $x^* = 0$ é sempre uma solução

(ii) r deve estar entre 1 e 4 (por quê?)

(iii) dado que $0 \leq r \leq 4$, há uma outra solução válida para x^* . Determine-a.

Através do gráfico de G(x) e da reta x, visualize a iteração do mapa G(x) a partir de uma condição inicial x_0 , notando que a sequência $x_i \leftarrow G(x_i) = x_{i+1} \leftarrow G(x_{i+1})$ pode ser **desenhada** com traços retos partindo do eixo x no ponto x_0 e continuando alternadamente na vertical até atingir a curva $G(x_0)$, na horizontal até atingir a reta $x = x_1$ e assim sucessivamente. (Note que tal gráfico contém a mesma informação que a **evolução temporal** i, x_i . Estude também a evolução temporal, para vários valores de x_0 , verificando que os pontos fixos x^* sejam realmente **fixos**, e o que acontece para valores iniciais próximos desses pontos.) Procure fazer esse gráfico - iniciando por exemplo de $x_0 = 0.2$ - para os valores $r = 1$, $r = 2$ e algumas iterações, até que esteja claro que houve convergência para um valor de x. Esse valor está de acordo com seu cálculo no item (iii) acima? Repita agora o gráfico para $r = 3$. A figura ficou mais interessante! o que está ocorrendo?

Inclua os resultados de suas investigações (cálculos, gráficos, respostas às perguntas acima) em seu relatório.

Tarefa B: Rumo ao Caos

Como vimos acima, não basta ser um ponto fixo do mapa $G(x)$ para um valor de x ser **estável** na evolução da população estudada. De fato, se x_0 for ponto fixo seu valor permanecerá constante, mas o que ocorre para valores iniciais x_0 arbitrários, próximos (ou não) do ponto fixo, depende da estabilidade do ponto fixo, que por sua vez depende do valor do parâmetro r. Para r maior do que 3 (e menor do que aproximadamente 3.5) o ponto fixo x^* calculado no exercício acima torna-se instável, e o mapa **converge** para um comportamento oscilatório, entre dois valores x_1 e x_2 . Sabendo disso, como você encontraria os valores x_1 e x_2 ? Realize mais testes da evolução do sistema, aumentando progressivamente o valor de r e verificando que para valores logo acima de $r \approx 3.545$ o ciclo de oscilação será entre quatro valores **fixos**. Esse fenômeno é conhecido como duplicação de período, e é observado logo **antes da ocorrência de caos** no sistema. Vamos portanto investigar a instauração do caos, procurando por duplicações sucessivas de período, e anotando os valores correspondentes de r em que elas começam a ocorrer. Tome agora a razão entre diferenças de valores sucessivos de r, e verifique que esse valor é constante (!)

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \tag{5}$$

Calcule assim a constante de Feigenbaum δ e compare o valor obtido ao dado na literatura. Dessa forma você pode prever para qual valor de r a duplicação de períodos será infinita, e a partir desse valor de r o sistema perde completamente a previsibilidade. Registre seus resultados no relatório.

Tarefa C: O Caos!

Agora que sabemos que o sistema evoluirá para o caos à medida que aumentamos a constante r, vamos implementar o cálculo do chamado expoente de Lyapunov, que de certa forma quantifica a falta de controle que temos sobre o número de indivíduos da população a partir de um número inicial x_0 . De fato, a perda de controle é melhor ilustrada em termos da sensibilidade da evolução temporal às condições iniciais, o que tomamos como definição do caos. Dessa forma investigaremos se duas estórias que começam praticamente idênticas permanecem próximas ou se, como frequentemente observamos em fenômenos realísticos, uma pequena diferença em x_0 levará a evoluções temporais dramaticamente diversas.

Calculemos, portanto, a diferença entre $G^{(i)}(x_0)$ - definida como aplicação do mapa i vezes a partir da condição inicial x_0 - e $G^{(i)}(x_0 + \epsilon)$. O mesmo pode ser feito numericamente, em código `fortran`. Estime o valor de

$$d(i) = |G^{(i)}(x_0 + \epsilon) - G^{(i)}(x_0)| \tag{6}$$

como função de i, e obtenha seu comportamento para tempos longos, verificando que ele é exponencial e calculando o expoente λ correspondente, o expoente de Lyapunov. Realize seus testes para $r < 3$ e para $r > 3.6$.

Outra forma de estimar λ é supor um comportamento exponencial para d com o tempo i e relacioná-lo à derivada do **mapa** $G^{(i)}(x)$, i.e. a i-ésima aplicação de $G(x)$ como definido acima, notando que ϵ é pequeno. Fazendo isso e utilizando a regra da cadeia múltiplas vezes, obtemos

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} ln|G'(x_j)| \tag{7}$$

onde os x_j foram obtidos por aplicação de $G(x)$ a partir do valor inicial x_0. Simplifique a expressão acima para o mapa $G(x) = rx(1-x)$ e realize o cálculo numericamente (usando seu programa), comparando ao valor de λ obtido no limite de grandes valores de i como acima. Inclua seus resultados no relatório. Em seu programa `exerA.f90` leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- x_0

- r

- ϵ

A saida do programa é dada por:

A) Um arquivo: `distA_out.dat` contendo respectivamente (em cada linha) os dados: tempo i, população x_i (a partir de x_0), distância $d(i)$, em três colunas.

B) O valor de λ obtido diretamente pelo decaimento exponencial e também o valor estimado pela soma na Eq. (7). Forneça os dois valores no terminal, cada um em uma linha (como última palavra da linha).

Programe seu código para calcular d até que o comportamento exponencial esteja bem evidenciado, e calcule assim o valor de λ, descartando (se necessário) as primeiras iterações do mapa.

Nota: utilize como dados para teste: $r = 3.6$, $x_0 = 0.1$, $\epsilon = 10^{-5}$ e número máximo de iterações 1000.