

# 7600017 - Introdução à Física Computacional - 2025

Prof. Guilherme Sipahi

Terceiro Projeto

01/10/2025

Entrega: 10/10/2025

## Instruções

- Use o diretório **proj3\_#usp** em `/public/IntroFisComp25/projeto3`
- Deixe no diretório apenas 4 arquivos, de nomes `exer1.f90`, `exer2.f90`, `output2.txt`, `trajexata.txt`, `exer3A.f90`, `exer3B.f90` e `graf3.pdf`
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para `entrada/saída`
- Use **precisão dupla em seus resultados**
- **Se deixar de fazer algum exercício não inclua o arquivo correspondente**

## Método de Euler

O objetivo deste projeto é o cálculo da velocidade de uma bicicleta em função do tempo, levando-se em conta os efeitos resistivos (hidrodinâmicos) do ar.

- 1) Ignoremos inicialmente o efeito resistivo do ar e a segunda lei de Newton nos dá

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \quad (1)$$

sendo  $m$  a massa do sistema **ciclista + bicicleta** e  $F$  a força que o ciclista emprega (devido à sua energia interna) para o movimento. Supomos aqui que não haja atritos nas engrenagens da bicicleta de forma que praticamente toda a força empregada pelo ciclista é transmitida ao movimento do sistema **ciclista + bicicleta**. A questão é: como se calcula  $F$ ? Podemos, ao invés de aplicar (1), tratar o problema de outra forma. Estudos fisiológicos de ciclistas corredores mostraram que a potência

$P$  fornecida pelos ciclistas é de aproximadamente 400 W para corridas de duração da ordem de uma hora. Então temos

$$\frac{dE}{dt} = P \quad (2)$$

e

$$mv \frac{dv}{dt} = P, \quad (3)$$

o que implica em

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv}. \quad (4)$$

De novo, desprezamos o atrito devido às engrenagens da bicicleta e o atrito da roda com o solo. Resolvendo-se a equação (4) temos

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2Pt/m}. \quad (5)$$

Discretizando a equação (4) acima usando a relação para a derivada de dois pontos para frente, i.e.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \quad \text{com } t_i = i \Delta t \quad \text{e } i = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

temos a relação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i} \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \quad (7)$$

conhecida como **método de Euler**.

Escreva um programa com nome `exer1.f90` que calcule, usando a equação (7), a velocidade como função do tempo. Use  $m = 80 \text{ kg}$  para a massa do sistema ciclista+bicicleta e  $P = 400 \text{ W}$ . Leia a partir do terminal, **em uma única linha**, o intervalo de tempo total  $T$  (em s),  $\Delta t$  (em segundos) e a velocidade inicial  $v_0$  (pequeno, mas diferente de zero) em  $m/s$ . A saída do programa deve ser o arquivo `vel1_out.dat`, com a velocidade em função do tempo para um intervalo de tempo  $T$ , no formato

```
t      v(t)
```

A primeira linha do arquivo deve ser

```
0      v0
```

e o número de linhas do arquivo será  $1 + \text{int}(T/\Delta t)$ .

- 2) Vamos agora generalizar o método para o movimento bidimensional. Vamos considerar um projétil disparado por um canhão de grande porte e ignorar a resistência do ar. As equações do movimento são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= -g \end{aligned} \quad (8)$$

sendo  $x$ , a coordenada horizontal do projétil e  $y$ , a coordenada vertical.

Como temos equações diferenciais de segunda ordem, temos que adequar a abordagem. Poderíamos usar diferenças finitas para calcular a segunda derivada mas, reformulando as equações da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g\end{aligned}\tag{9}$$

Usando a estratégia do método de Euler, podemos reescrever as equações acima como

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + v_{x,i}\Delta t \\ v_{x,i+1} &= v_{x,i} \\ y_{i+1} &= y_i + v_{y,i}\Delta t \\ v_{y,i+1} &= v_{y,i} - g\Delta t\end{aligned}\tag{10}$$

Assuma  $\Delta t = 0,1s$  e velocidade inicial  $v = 500\text{ m/s}$ .

Escreva um programa com nome [exer2.f90](#) que calcule a trajetória do projétil desde o lançamento das coordenadas

$$(x, y) = (0, 0)$$

até o momento em que a coordenada  $y$  seja novamente zero. O programa deve pedir o ângulo de inclinação do lançador. O arquivo de saída, [output2.txt](#), deve conter a trajetória em duas colunas: a primeira com o valor de  $x$  e a segunda, o de  $y$ .

Com o programa, calcule as trajetórias para ângulos de  $35^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$  e  $55^\circ$  e determine qual ângulo de lançamento leva o projétil mais longe. Calcule a trajetória exata para este último ângulo usando o mesmo  $\Delta t$  e inclua num arquivo chamado [trajexata.txt](#).

## Método de Euler-Cromer

O método de Euler é simples e muito útil. Entretanto, como todo método numérico, pode não ser apropriado para todos os casos. Usando o movimento de um pêndulo, vamos avaliar as suas limitações do método de Euler e propor o uso de outro método que fazendo uma pequena modificação, possibilita a sua resolução.

- 3) Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa  $m$  é suspensa por uma haste de comprimento  $l$  e massa desprezível. Indicamos com  $\theta$  o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento é

$$m a_\theta = m l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m g \sin \theta$$

e consequentemente temos a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta .$$

Caso as oscilações sejam pequenas, usamos  $\sin \theta \approx \theta$  e obtemos a aproximação harmônica do problema

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta .$$

cujas soluções são dadas por

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} ,$$

sendo  $\theta_0$  e  $\phi$  constantes que fixam o movimento.

Escreva um código que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização das equações acima é (método de Euler)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \rightarrow \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t ,$$

onde  $t = i \Delta t$ . Faça sempre  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , isto é, quando  $\theta$  ultrapassar  $\pi$  faça  $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$  ou, se  $\theta$  ficar menor que  $-\pi$ , faça  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ . Neste programa calcule também  $E(t)$ , sendo  $E$  a energia total do sistema. Você notará que a solução está incorreta e que a energia total não é constante. Isto nos diz que a discretização escolhida não é adequada. Uma ligeira modificação no método de Euler consertará este problema. Para isso é suficiente considerar as equações (de Euler-Cromer)

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1}\Delta t ,$$

Escreva um programa com estas novas equações e mostre graficamente a ausência dos problemas antes apontados.

Em seus programas leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- a massa **m**
- o comprimento da haste **l**
- o ângulo  **$\theta_0$**

- $\Delta t$
- o tempo total  $T_{\text{sim}}$  de simulação

Use  $\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$ . No código `exer3A.f90` use o método de Euler e no código `exer3B.f90` o método de Euler-Cromer. A saída, nos arquivos `exer3A_out.dat` e `exer3B_out.dat`, deve ser no formato:

```
t      theta(t)
```

Além disso, você deve preparar o arquivo `graf3.pdf` com dois gráficos:

- o primeiro com a solução exata para  $\theta(t)$ , comparando-a com a solução numérica pelo método de Euler (código `exer3A.f90`) e com o método de Euler-Cromer (código `exer3B.f90`);
- o segundo com a energia total (cinética mais potencial) como função do tempo, para o caso 1 (método de Euler) e para o caso 2 (método de Euler-Cromer).

Para esses gráficos use  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 0.04 \text{ s}$  e  $\theta_0 = 10^\circ$ . (Converta o ângulo para radianos em seu programa!) Acompanhe o movimento por  $10 \text{ s}$ , começando do máximo deslocamento ( $\theta = \theta_0$ ) e com velocidade zero.