Examen réechantillonage

Lucas Chabeau, Etienne Hamard

19/11/2019

Exercice 2 : Approximation de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite par approche MC

On cherche à approximer par une approche Monte-Carlo la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$

pour des valeurs $x > 0$.

1. Proposer une méthode basée sur la loi uniforme, et de préférence la loi $\mathcal{U}(0,1)$.

Nous voulons utiliser une loi $\mathcal{U}(0,1)$ pour résoudre notre problème. Le problème est que notre intégrale est entre $-\infty$ et x. Nous devons faire un changement de variable pour ramener les limites de l'intégrale à $[0,1]$. Nous faisons donc le calcul suivant.

$$I = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$

$$I = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt + \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$

$$I = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt + 2 * \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$

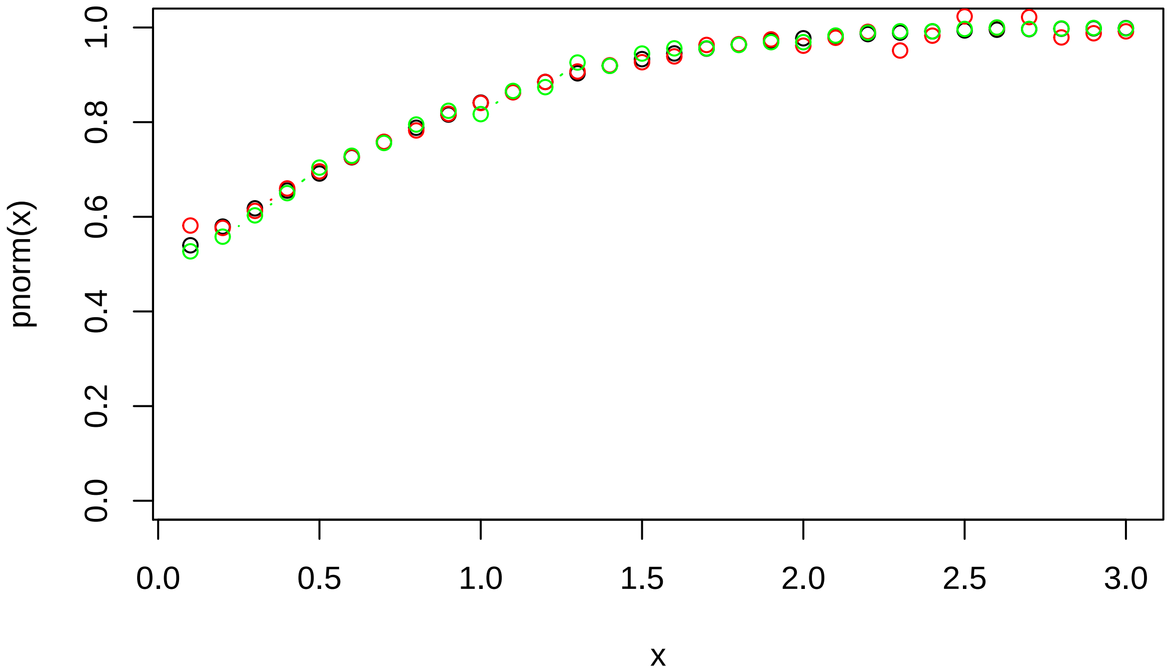
$$I = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-(-\frac{x}{u})^2/2)\frac{x}{u^2}du + 2 * \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-(ux)^2/2)xdu$$

Une fois cette intégrale posée, nous n'avons plus qu'à tirer m valeurs suivants une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ et faire la moyenne des valeurs pour chaque u_i et le quantile x choisi.

2. Proposer une méthode basée sur la loi normale.

Cette fois-ci nous n'avons pas à modifier la formule de notre intégrale. Il faut juste prendre en compte le fait que la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ donne des valeurs dans $\mathbb{R}$. Or nous voulons une intégrale entre $]-\infty; x]$. Nous ajoutons donc une fonction indicatrice qui fera que seules les valeurs tirées inférieures à x sont prises en compte. Nous n'avons ensuite qu'à calculer la moyenne des valeurs aléatoires tirées inférieures à x.

3. Comparer les valeurs obtenues par les deux procédures à la valeur réelle donnée par R via la fonction pnorm pour des valeurs croissantes de $x \in [0.1, 3]$. On considérera un nombre de tirages $n = 1000$.



4. Comparer la variance et les intervalles de confiance des deux estimateur pour les valeurs croissantes de $x \in [0.1, 3]$ et interpréter les résultats obtenus.

5. Comment modifier la procédure si $x < 0$?