Examen réechantillonage

Lucas Chabeau, Etienne Hamard

19/11/2019

Exercice 2 : Approximation de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite par approche MC

On cherche à approximer par une approche Monte-Carlo la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$

pour des valeurs $x > 0$.

1. Proposer une méthode basée sur la loi uniforme, et de préférence la loi $\mathcal{U}(0,1)$.

Nous voulons utiliser une loi $\mathcal{U}(0,1)$ pour résoudre notre problème. Le problème est que notre intégrale est entre $-\infty$ et x. Nous devons faire un changement de variable pour ramener les limites de l'intégrale à $[0,1]$. Nous faisons donc le calcul suivant.

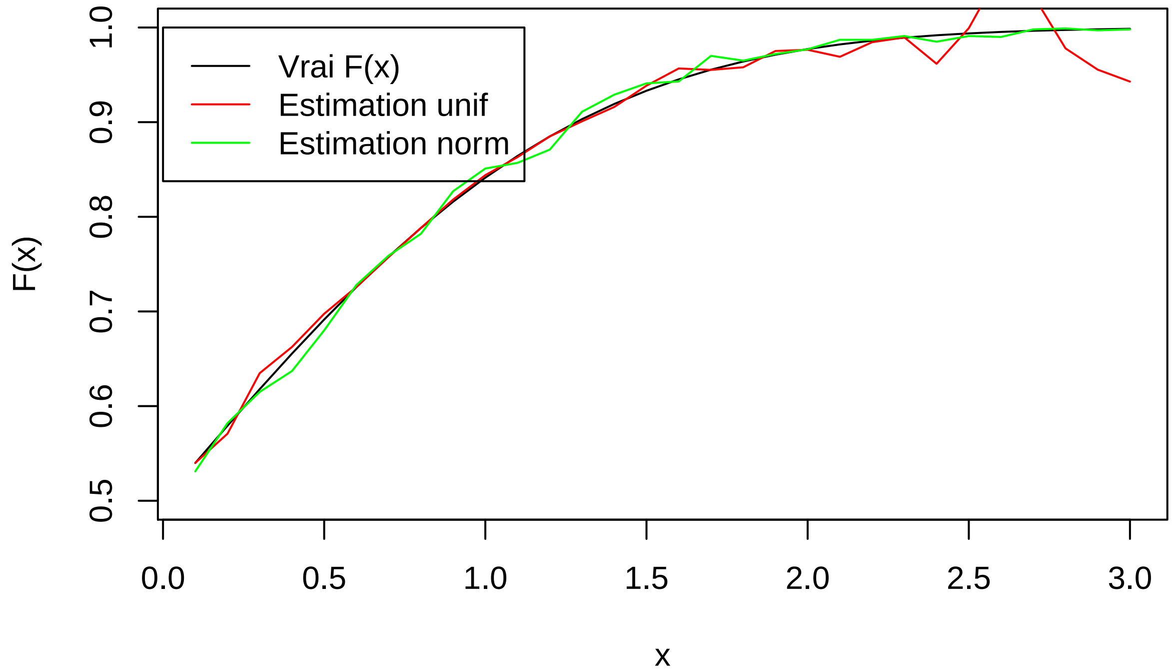
$$I = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$
$$I = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt + \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$
$$I = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt + 2 * \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$$
$$I = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-(-\frac{x}{u})^2/2)\frac{x}{u^2}du + 2 * \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-(ux)^2/2)xdu$$

Une fois cette intégrale posée, nous n'avons plus qu'à tirer m valeurs suivants une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ et faire la moyenne des valeurs pour chaque u_i et le quantile x choisi.

2. Proposer une méthode basée sur la loi normale.

Cette fois-ci nous n'avons pas à modifier la formule de notre intégrale. Il faut juste prendre en compte le fait que la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ donne des valeurs dans $\mathbb{R}$. Or nous voulons une intégrale entre $]-\infty; x]$. Nous ajoutons donc une fonction indicatrice qui fera que seules les valeurs tirées inférieures à x sont prises en compte. Nous n'avons ensuite qu'à calculer la moyenne des valeurs aléatoires tirées inférieures à x.

3. Comparer les valeurs obtenues par les deux procédures à la valeur réelle donnée par R via la fonction pnorm pour des valeurs croissantes de $x \in [0.1, 3]$. On considérera un nombre de tirages $n = 1000$.



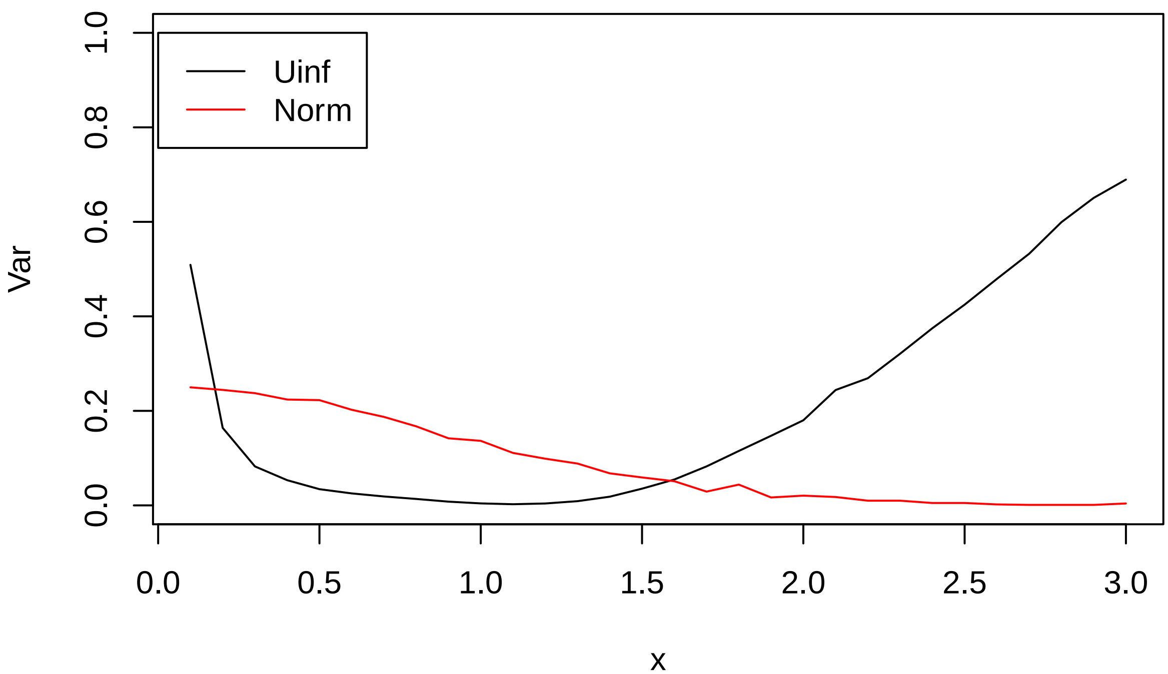
Nos estimations semblent plutôt satisfaisantes tant que x ne séloigne pas trop de 0. Plus on s'éloigne, moins l'estimation par la loi uniforme semble bonne. Pour l'estimation par loi normale en revanche, les estimations semblent meilleures que celles par la méthode basée sur la loi uniforme quand x grandit.

4. Comparer la variance et les intervalles de confiance des deux estimateur pour les valeurs croissantes de $x \in [0.1, 3]$ et interpréter les résultats obtenus.

On rappelle la variance V_n des estimateurs :

$$V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (g(Xi) - S_n)\text{š}$$

où S_n est l'estimation ponctuelle.



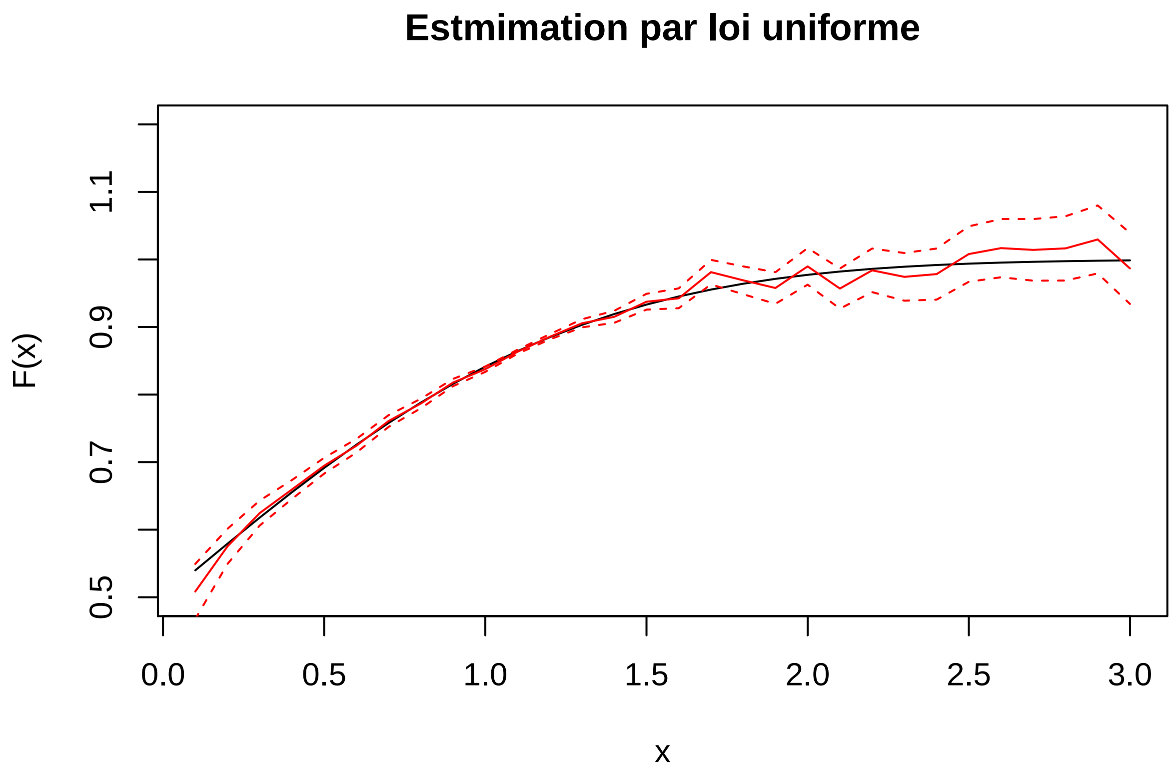
En fonction de la valeur de x la variance sera plus avntageuse pour l'estimation par loi uniforme que par loi normale et inversement.

L'intervalle de confiance est ainsi défini par

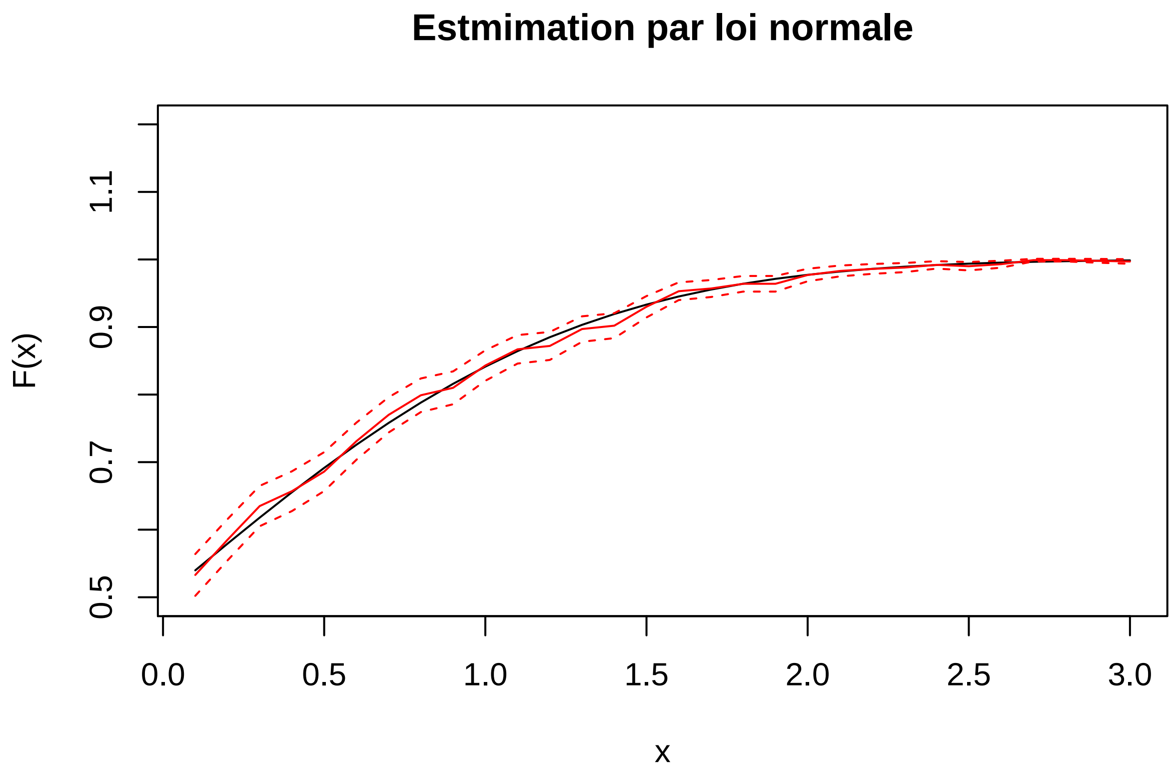
$$[S_n - t_{\alpha/2}\sqrt{V_n/n}; S_n + t_{\alpha/2}\sqrt{V_n/n}]$$

Commençons par regarder les estimations par loi uniforme. Le graphique ci-dessous nous montre en noir la vrai fonction de répartition de la loi normale et en rouge l'estimation ponctuelle entourée par son intervalle de confiance à 95% (en pointillés).

Comme prévu en regardant la variance, nous avons un intervalle de confiance très restreint pour x compris entre 0.5 et 1 puis nous voyons que cet intervalle s'élargit de plus en plus au fur et à mesure que x grandit.



Regardons maintenant le même graphique pour l'estimation par loi normale.



Ici c'est l'inverse, la méthode basée sur la loi normale a un intervalle de confiance qui se restreint au fur et à mesure que x augmente.

Nous concluons que pour des valeurs de x comprises entre 0.2 environ et 1.5, la méthode de Monte Carlo basée sur une loi uniforme sera mailleure que celle basée sur une loi normale. Pour les autres valeurs, ce sera l'inverse.

5. Comment modifier la procédure si $x < 0$?