Solutionnaire de l'intra

1) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y=1 \\ x+y+k^2z=k+2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k+2 \end{pmatrix}$

La matrice augmentée est donnée par :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & k+2 \end{array}\right) \underset{L_{31}(-1)}{\overset{L_{21}(-1)}{\sim}} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right)}_{\text{Matrice augmentée échelonnée}}$$

a) si $k=-1$, on obtient le système :

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$, qui est incompatible, car on a une ligne dégénérée $(0 \; 0 \; 0 \,|\, -2)$.

$\Rightarrow$ si $k=-1$, alors le système n'admet aucune solution.

b) si $k=1$, on a le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=-2 \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-z \\ y=-2+z \\ z=z \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-z \\ -2+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \underset{\text{variable libre}}{z} \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ si $k=1$, alors le système admet une infinité de solutions (2 pivots pour 3 inconnues).

c) pour que le système ait une solution unique (3 pivots pour 3 inconnues), alors $k \neq \pm 1$. On obtient ainsi le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_3\left(\frac{1}{k-1}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=-2 \\ (k+1)z=1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = \frac{5k+3}{k+1} \\ y = \frac{-2k-1}{k+1} \\ z = \frac{1}{k+1} \end{cases}}_{\text{Solution unique.}}$$

2) a) v_1, v_2, v_3 L.I ?

On résout le système homogène $AX=0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{L_{41}(2)}{\overset{L_{21}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \end{array}\right) \underset{L_{42}(-1)}{\overset{L_{32}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

Ce système admet une seule solution $X=0$ (3 pivots pour 3 inconnues) $\Rightarrow$ v_1, v_2 et v_3 sont L.I

b) $v \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$?

On résout le système : $AX = v$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{L_{41}(2)}{\overset{L_{21}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 2 \end{array}\right) \underset{L_{42}(-1)}{\overset{L_{32}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{array}\right)$$

Ce système est incompatible $\Rightarrow$
$v \notin \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

3) $T : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$T(a + bX + cX^2) = \begin{pmatrix} a \\ c - 2b - 2a \end{pmatrix}.$$

a) T linéaire $\Leftrightarrow \forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,
$T(\alpha_1 P_1(X) + \alpha_2 P_2(X)) = \alpha_1 T(P_1(X)) + \alpha_2 T(P_2(X))$.

$P_1(X) = a_1 + b_1 X + c_1 X^2$, $P_2(X) = a_2 + b_2 X + c_2 X^2$.

$$T(\alpha_1 P_1(X) + \alpha_2 P_2(X)) = T\Big((\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) X + (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2) X^2\Big).$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 - 2\alpha_1 b_1 - 2\alpha_2 b_2 - 2\alpha_1 a_1 - 2\alpha_2 a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 - 2b_1 - 2a_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 - 2b_2 - 2a_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 T(P_1) + \alpha_2 T(P_2)$$

3

b) $\mathrm{Ker}(T) = \{p(X) \in \mathbb{R}_2[X] : T(p(X)) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$

$T(p(X)) = \begin{pmatrix} a \\ c-2b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c-2b-2a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 2b \end{cases} \Rightarrow$

$\mathrm{Ker}(T) = \{bX + 2bX^2\} = \mathrm{Vect}\{X + 2X^2\}$.

$\mathrm{Ker}(T) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \Rightarrow T$ n'est pas injective

c) $\mathrm{Im}(T) = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \exists p(X) \in \mathbb{R}_2[X] ; T(p(X)) = y \right\}$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c-2b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = y_1 \\ c-2b-2a = y_2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow T$ est surjective.

d) T n'est pas un isomorphisme, car elle n'est pas injective.

4) $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \operatorname{tr}(MA) = 0, \text{ où } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

$W \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^{2\times 2} \iff \forall A_1, A_2 \in W$ et $c, d \in \mathbb{R}$:

$\Rightarrow cA_1 + dA_2 \in W$.

$$\operatorname{tr}(M(cA_1 + dA_2)) = \operatorname{tr}(McA_1 + MdA_2)$$
$$= c\,\underbrace{\operatorname{tr}(MA_1)}_{\substack{= 0 \\ \text{car } A_1 \in W}} + d\,\underbrace{\operatorname{tr}(MA_2)}_{\substack{= 0 \\ \text{car } A_2 \in W}}$$
$$= c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{tr}(M(cA_1 + dA_2)) = 0 \Rightarrow cA_1 + dA_2 \in W$.

Famille génératrice de W ?

W est constitué des matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$\operatorname{tr}(MA) = 0$, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{tr}(MA) = (a + 2c + 3b + 4d) = 0$

$\Rightarrow a = -3b - 2c - 4d$.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b - 2c - 4d & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = b\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de W.

b) B est antisymétrique $\Rightarrow$

$$B^T = -B \Rightarrow \det(B^T) = \det(-B) = (-1)^3 \det(B) = -\det(B)$$

On sait que :

$$\det(B) = \det(B^T) = -\det(B) \Rightarrow \det(B) = 0.$$