

ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA–2020.2–LABORATÓRIO 4

O modelo de Leslie. O modelo de Leslie descreve o comportamento de uma população que não se reproduz continuamente ao longo do tempo, mas sim a intervalos fixos e periódicos como dias, meses ou anos. Para descrevê-lo precisamos conhecer

- a *taxa de sobrevivência* dos indivíduos em uma faixa etária;
- a *taxa de transição* dos indivíduos de uma faixa etária para a seguinte;
- a *taxa de fecundidade* da espécie, dada pela quantidade de descendentes de um indivíduo que nascem, em média, por unidade de tempo enquanto este indivíduo faz parte de uma dada classe etária.

Suponhamos que a população que estamos estudando possa ser subdividida em k faixas etárias. Denotaremos por

$s_{i,i}$ a porcentagem de indivíduos da faixa etária i que continuam nesta faixa etária depois de uma unidade de tempo;

$t_{i,i+1}$ a porcentagem de indivíduos da faixa etária i que atingem a faixa etária $i + 1$ depois de uma unidade de tempo;

$f_{1,i}$ a taxa de fertilidade da faixa etária i .

A *unidade de tempo* mencionada acima depende da espécie que está sendo considerada. Note que

$$0 \leq s_{i,i} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq t_{i,i+1} \leq 1,$$

já que são percentagens, ao passo que $f_{1,i} \geq 0$, uma vez que um indivíduo pode dar origem a muitos outros a cada unidade de tempo. Finalmente, digamos que $p_j(k)$ seja a quantidade média de indivíduos que pertencem à faixa etária j depois de decorrido um tempo k , a partir da primeira contagem feita nesta população. Leslie propôs a seguinte fórmula para os p 's:

$$p_i(k+1) = \begin{cases} f_{1,1}p_1(k) + \cdots + f_{1,k}p_k(k) & \text{para } i = 1. \\ s_{i,i}p_i(k) + t_{i-1,i}p_{i-1}(k) & \text{para } 2 \leq i \leq k-1 \\ s_{i,i}p_i(k) & \text{para } i = k. \end{cases}$$

O próprio Leslie observou que estas equações podem ser descritas compactamente em notação matricial por

$$p(k+1) = L \cdot p(k),$$

em que

$$L = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots & f_{1,n} \\ t_{1,2} & s_{2,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2,3} & s_{3,3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t_{3,4} & s_{4,4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{n-1,n} & s_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p(k) = \begin{bmatrix} p_1(k) \\ \vdots \\ p_n(k) \end{bmatrix}$$

Note que L é uma matriz $n \times n$ e $p(k)$ é uma matriz $n \times 1$. Tendo determinado o número de indivíduos em cada faixa etária de uma população em um dado momento, podemos usar o modelo para prever sua evolução ao longo do tempo, calculando

$$(4) \quad p(k) = L^k \cdot p(0)$$

para vários valores de k , que são inteiros maiores que zero.



Análise de uma população de *Podocnemis expansa*. Neste laboratório aplicaremos o modelo de Leslie à tartaruga-amazônica (*Podocnemis expansa*) cujas taxas de sobrevivência e transição por faixa etária são dadas na tabela 1. Esta espécie só se reproduz a partir dos 11 anos e a quantidade de ovos postos por uma fêmea adulta nas faixas I, II e III são em média 83.31, 84.12 e 77.79. Construa a matriz de Leslie, referente a uma

população de *Podocnemis expansa*, a partir dos dados da tabela e transcreva-a para a sessão do Maxima que você vai usar para responder às questões postas a seguir.

Idade (anos)	Categoria	Tamanho (mm)	Taxa de sobrevivência	Taxa de transição
0-1	Ovos e recém nascidos	50-140	*	0.584
1-10	Juvenis	141-450	0.44	0.0002
11-28	Adultos I	451-600	0.91	0.0225
29-53	Adultos II	601-700	0.93	0.0159
> 53	Adultos III	> 700	0.86	*

TABELA 1. Taxas anuais de sobrevivência de *Podocnemis expansa*

Como a *Podocnemis expansa* é uma espécie ameaçada, o IBAMA deu início a um programa de conservação em um grupo de afluentes do Rio Amazonas. Durante o período de desova, que começa em fevereiro, foi feito um recenseamento da espécie. A partir disso o IBAMA construiu as estimativas da tabela 2 para a quantidade de tartarugas por faixa etária. A população com menos de um ano foi estimada a partir da quantidade de ninhos encontrados nas praias dos rios da área de preservação.

Faixa etária	População estimada
0-1	20000
1-10	2500
11-28	1800
29-53	1200
> 53	800

TABELA 2. População na área de proteção

Na tentativa de aumentar a população de tartarugas adultas desta espécie, o IBAMA cogita aplicar, na área protegida, uma das duas seguintes estratégias:

Estratégia 1: soltar 300 tartarugas adultas, criadas em cativeiro a cada ano, por 5 anos consecutivos;

Estratégia 2: soltar 2000 tartarugas recém nascidas ao longo de 10 anos consecutivos.

Você foi contratado pelo IBAMA para produzir um relatório que contenha

- uma projeção do comportamento da população de *Podocnemis expansa* ao longo de 30 anos com e sem as intervenções propostas pelo IBAMA;

- recomendações sobre a melhor maneira de recompor a população desta tartaruga na área de proteção, diante das duas estratégias propostas pelo IBAMA.

Você deve usar o modelo de Leslie, baseado nos dados fornecidos acima, para investigar o comportamento da população e sua análise deve incluir o que ocorreria se, na estratégia 1, todas as 300 tartarugas adultas pertenceram à mesma faixa etária, ou se forem distribuídas igualmente pelas três faixas etárias das tartarugas adultas. Suas conclusões devem, então, ser sistematizadas em um relatório curto, ilustrado com gráficos que justifiquem suas afirmações e que aborde os dois pontos requisitados pelo IBAMA.

Sua solução deste laboratório deve consistir em um único arquivo `.wxmx`. No início do arquivo devem estar os cálculos que você fez para gerar os dados do seu relatório. Em seguida, deve estar o relatório propriamente dito, que deve ser escrito usando células de texto, intercaladas por células de input, onde são exibidos os gráficos que justificam seu texto. O relatório deve encerrar com sua conclusão sobre a melhor estratégia a ser tomada pelo IBAMA para conservar esta população de tartarugas. Mas lembre-se que a decisão cabe ao IBAMA, seu papel consiste apenas em informar os dirigentes do órgão sobre as previsões do modelo em cada caso.

Algumas sugestões. Usei as seguintes funções do Maxima enquanto preparava este laboratório:

`A^k` calcula a k -ésima potência da matriz quadrada A ;

`sum(expr,i,i0,i1)` quando $expr$ é uma função de i , calcula a soma dos valores desta expressão para i inteiro variando de i_0 a i_1 ;

`makelist(expr,i,i0,i1)` quando $expr$ é uma função de i , calcula a lista dos valores desta expressão para i inteiro variando de i_0 a i_1 .

Para desenhar os gráficos você deve utilizar o pacote `draw`. Se `lp` for uma lista de pontos,

```
wxdraw2d(points_joined=true,color=blue,points(lp));
```

desenha os pontos de `lp` interligados por uma reta azul, o que é conveniente para nossos gráficos porque temos um ponto correspondente à população a cada ano. Cada gráfico sobre a evolução da população ao longo dos 30 anos deve conter uma curva ilustrando o que ocorre em cada uma das cinco faixas etárias, todas em uma mesma imagem, mas pintadas de cores diferentes. A legenda para a faixa etária que cada cor representa deve constar no próprio gráfico mas, se você preferir, pode pôr o número da

faixa etária ao lado da curva correspondente. Para minimizar a quantidade de código necessária para gerar as figuras que aparecerem ao longo do relatório, você pode definir `grafico` usando `gr2d` e gerá-lo no relatório escrevendo apenas `wxdraw(grafico)`. No caso do exemplo dado acima, escreveríamos:

```
grafico:gr2d(points_joined=true,color=blue,points(lp));
```

na parte do arquivo onde foram feitos os cálculos e

```
wxdraw(grafico);
```

no lugar do relatório onde desejamos que este gráfico apareça.

Referência. Os dados na tabela 1 foram adaptados do artigo:

S. C. Mogollones, D. J. Rodríguez, O. Hernández e G. R. Barreto, *A Demographic Study of the Arrau Turtle (*Podocnemis expansa*) in the Middle Orinoco River, Venezuela*, Chelonian Conservation and Biology, **9** (2010), 79–89.