Projeto e Análise de Algoritmos I

Aula 11 - Coloração de Grafos

Lucas Nunes Alegre

lnalegre@inf.ufrgs.br

Instituto de Informática

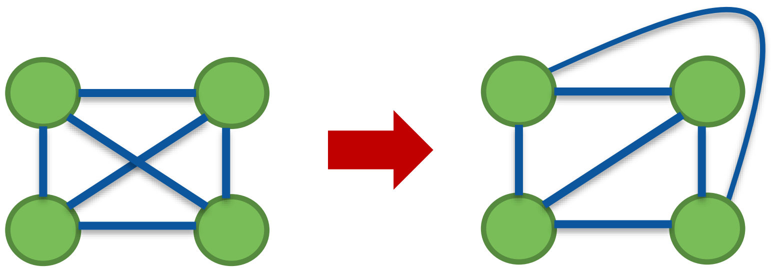
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, Brasil

2025/1

Última Aula: Planaridade

- <u>Grafos Planares</u>

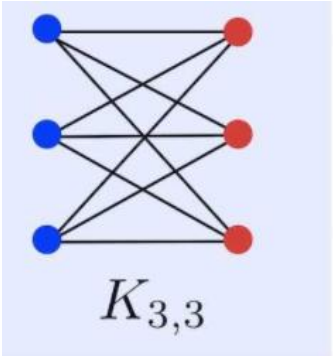


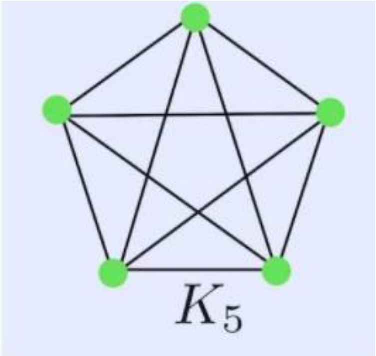
- <u>Fórmula de Euler</u>

$$v + f = e + 2$$

- Teorema (Kuratowski):

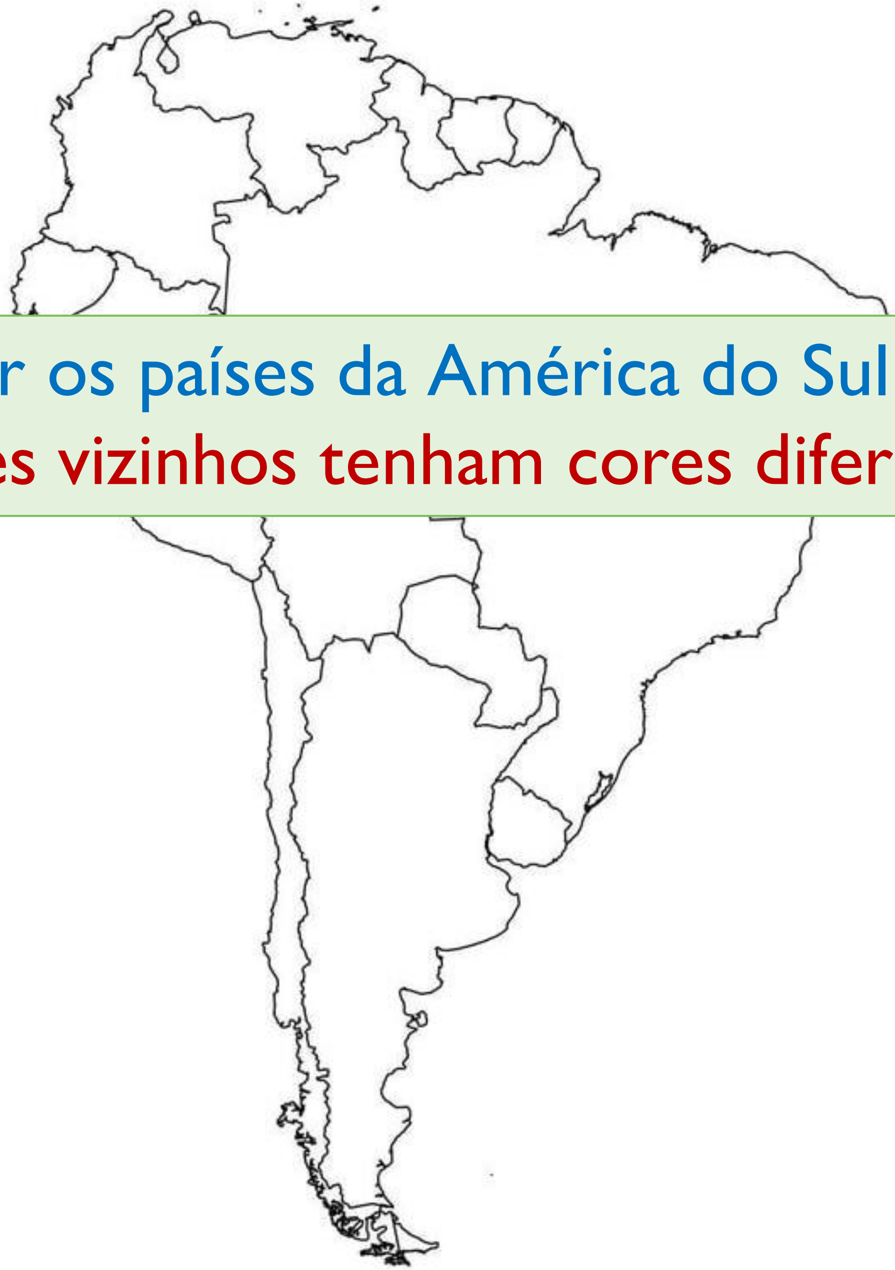
Um grafo simples é não-planar sss possui como subgrafo uma extensão do grafo $K_{3,3}$ ou K_5.





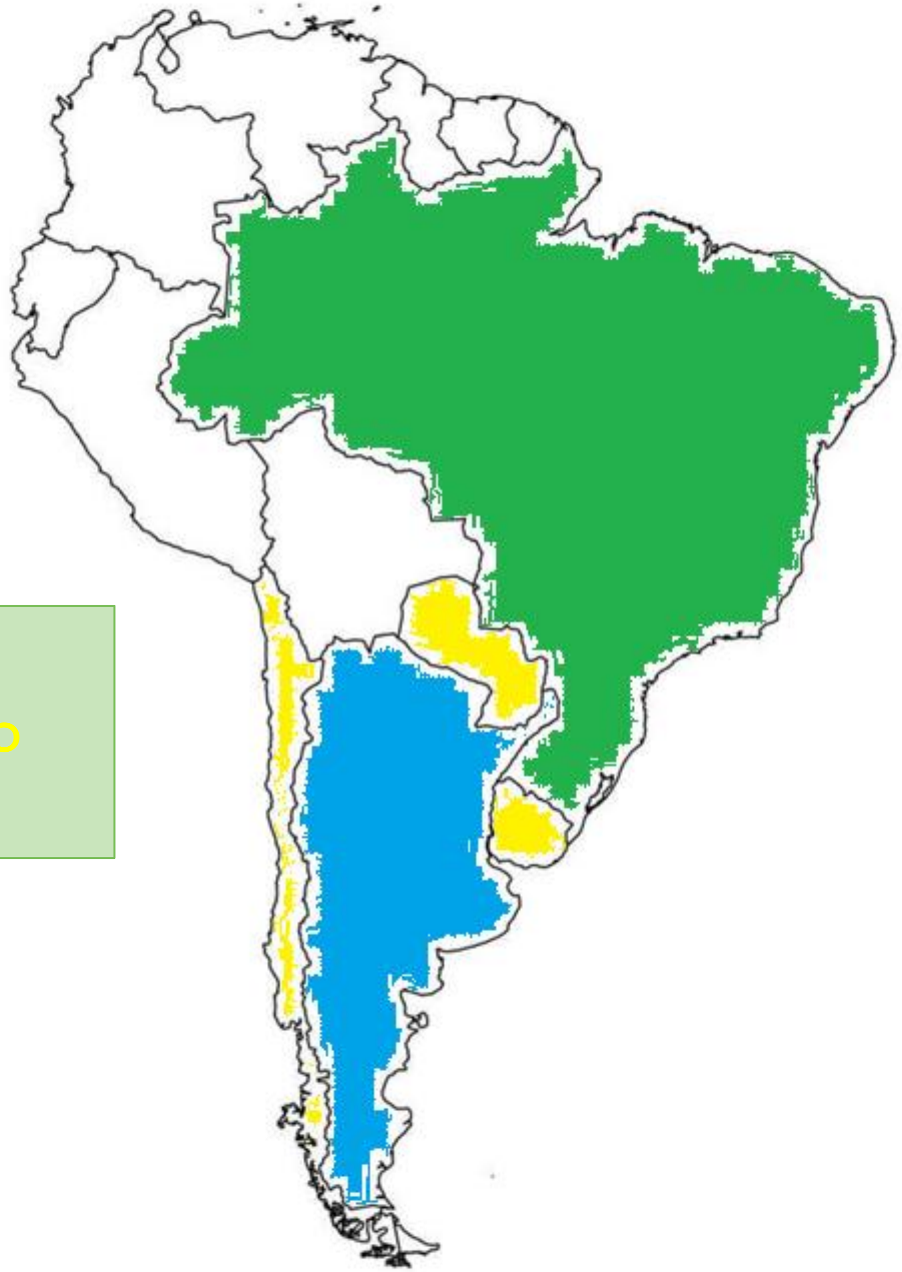
Roteiro: Coloração de Grafos

1. Motivação e Aplicações
2. Definição
3. Número Cromático
4. Limites para o Número Cromático
5. Teorema das 5 Cores
6. Teorema das 4 Cores
7. Algoritmo Guloso

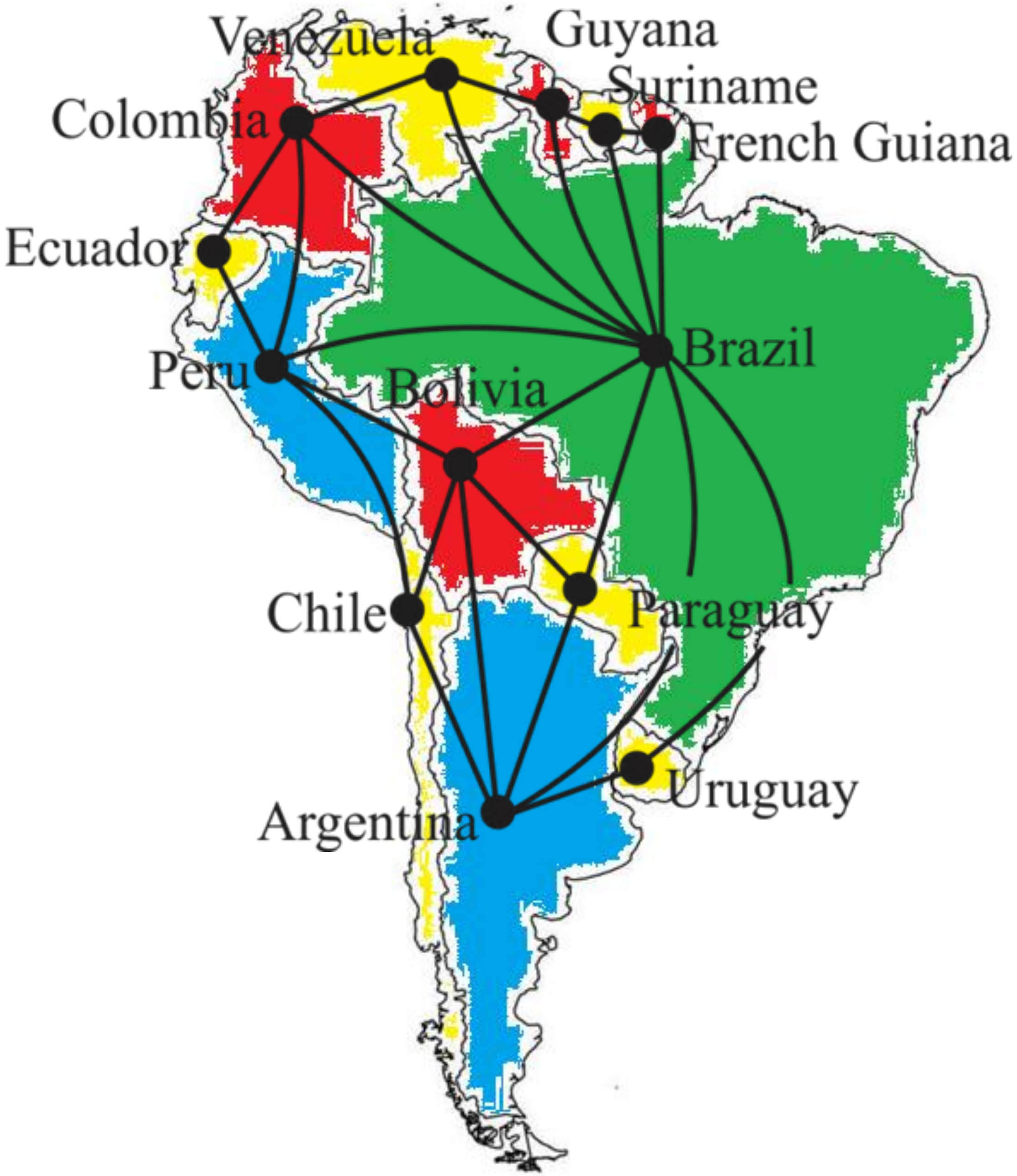


Vamos colorir os países da América do Sul de modo que países vizinhos tenham cores diferentes.

Precisamos de uma terceira cor para o Uruguai.



Não podemos colorir a Bolívia de verde, amarelo ou azul.


Venezuela
Guyana
Suriname
Colombia
French Guiana
Ecuador
Brazil
Peru
Bolivia
Chile
Paraguay
Uruguay
Argentina

Foram necessárias 4 cores para colorir a América do Sul.

Nesta Aula:

Todo grafo planar (e.g., mapas) pode ser colorido com no máximo 4 cores!

Outras Aplicações

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

Grafos E.D

ARQ I Lógica

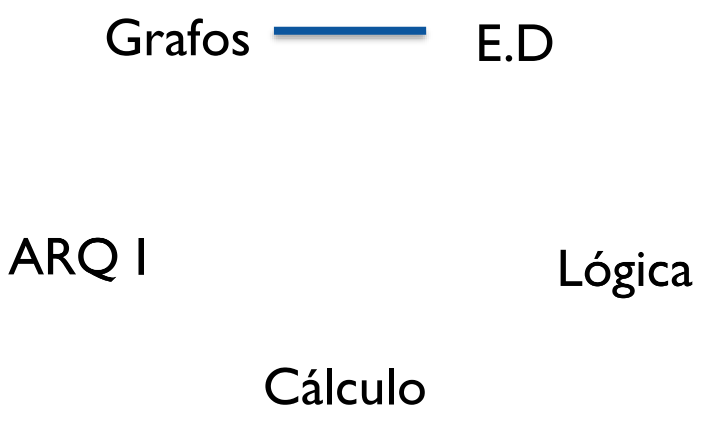
Cálculo

Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

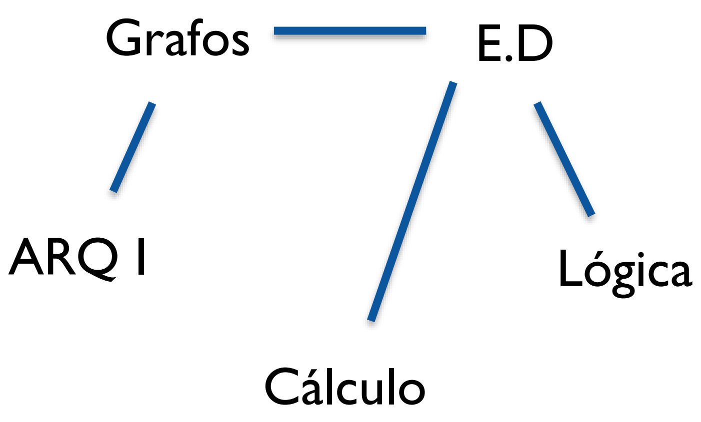


Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.

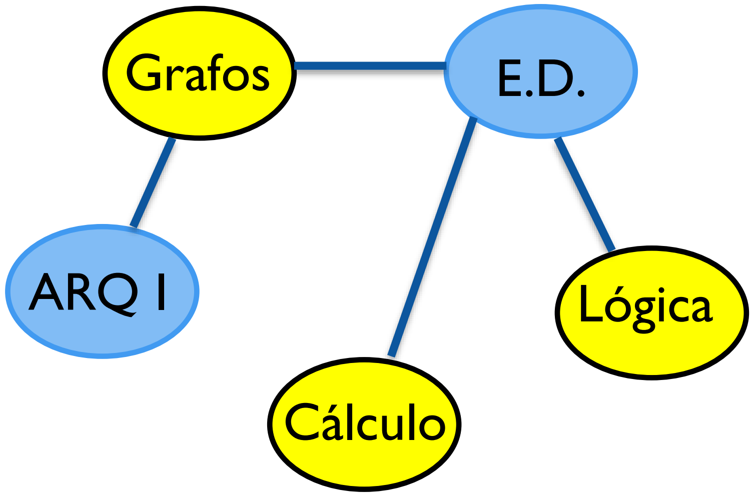


Outras Aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, ARQ I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual o menor número de dias de provas necessário?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Tabela indicando as provas
que cada aluno precisa realizar.



Dia 1: Grafos, Cálculo e Lógica

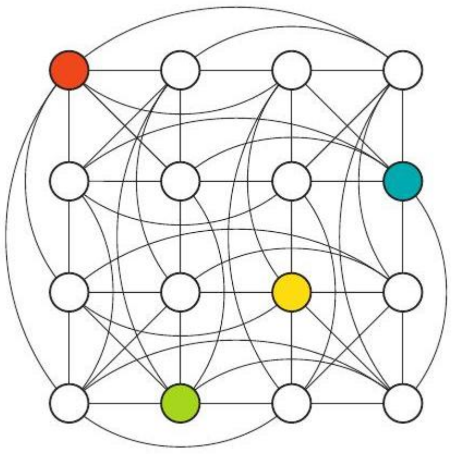
Dia 2: ARQ I e E.D.

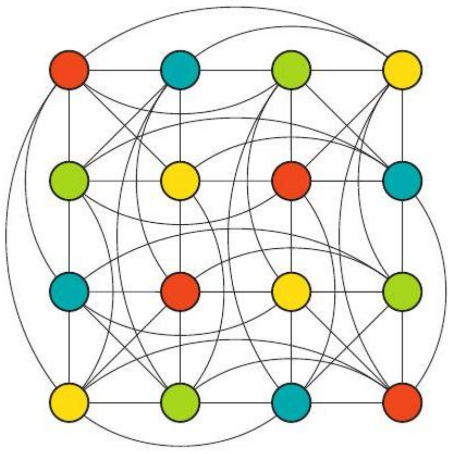
Outras Aplicações

- Sudoku

1			
			2
		4	
	3		

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

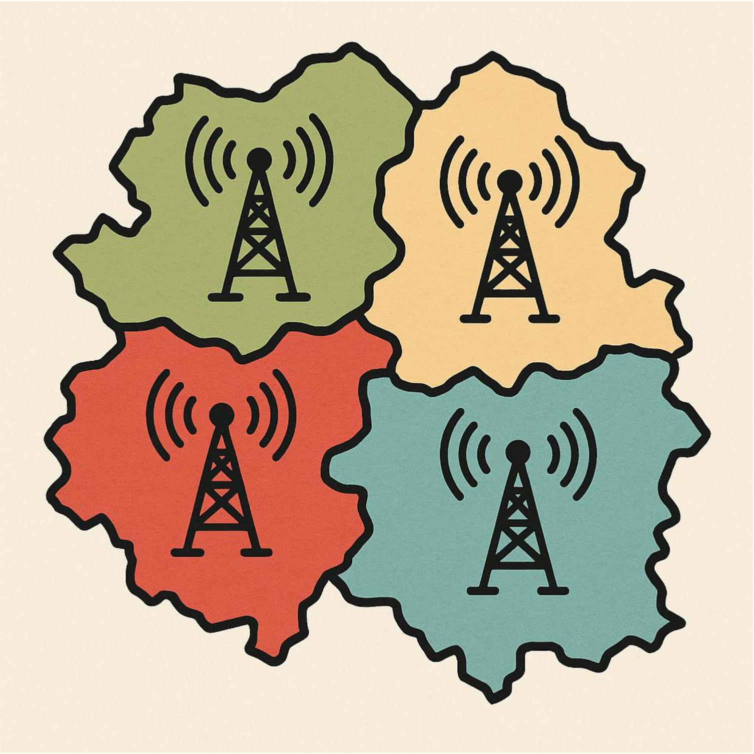




  - Nodos: células do jogo
  - Arestas: restrições
  - Cores: valores de 1 a 4

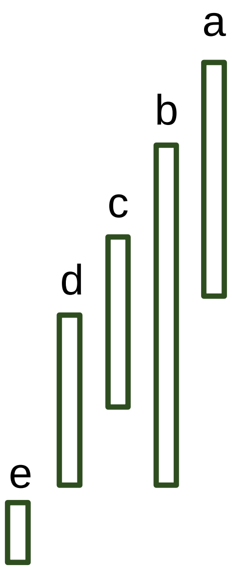
Outras Aplicações

- Frequências de Torres de Rádio
  - Problema: Alocar frequências para torres de rádio.
  - Restrição: Evitar interferência de sinal entre torres próximas.

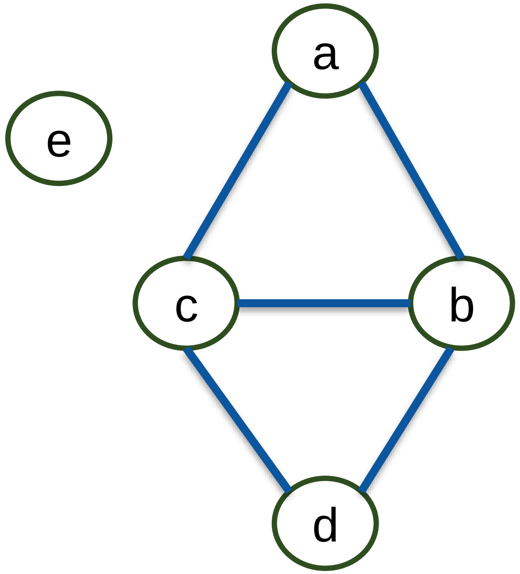


Outras Aplicações

- Alocação de Registradores
  - Como alocar as variáveis em registradores de modo a evitar conflitos?
  - Nodos: variáveis
  - Arestas: restrição temporal entre variáveis
  - Cores: Registradores

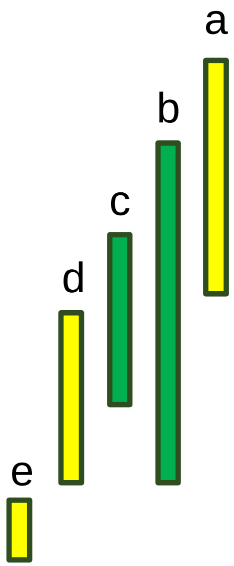


a := 10
b := a * 2
c := b + a
d := b + c
b := d – 1
e := 7

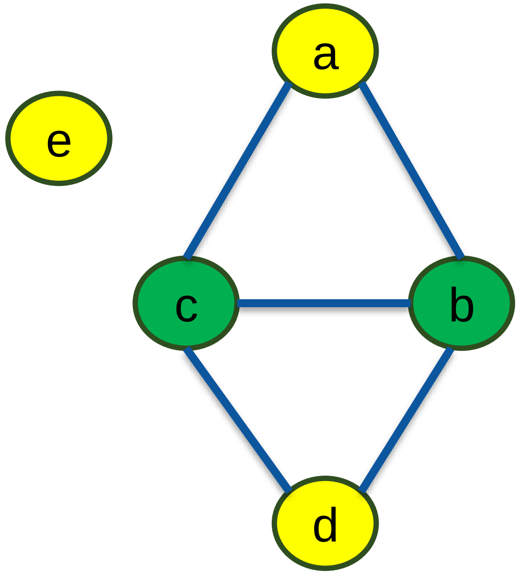


Outras Aplicações

- Alocação de Registradores
  - Como alocar as variáveis em registradores de modo a evitar conflitos?
  - Nodos: variáveis
  - Arestas: restrição temporal entre variáveis
  - Cores: Registradores



a := 10
b := a * 2
c := b + a
d := b + c
b := d – 1
e := 7



R1: a, d, e
R2: b, c

Coloração de Grafos

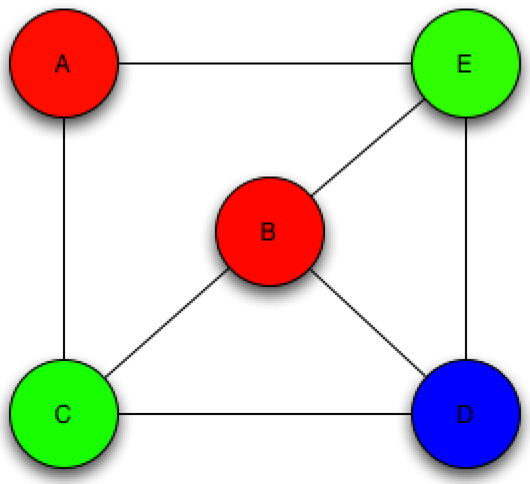
- Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

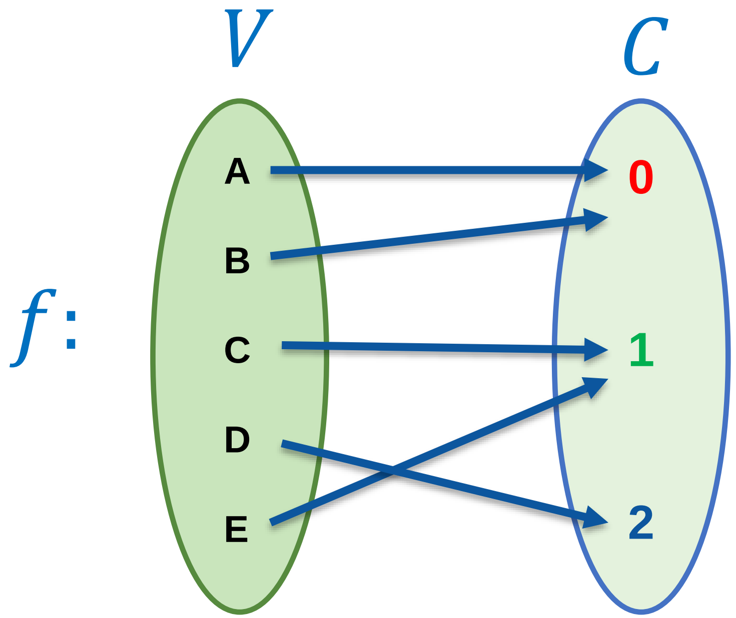
Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Exemplo:





$|img(f)|$ é o **número de cores** da coloração f.

Coloração de Grafos

- Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Definição. Um grafo G é $\boldsymbol{k}$**-colorível** se, e somente se, existe uma coloração de G com no máximo k cores.

Coloração de Grafos

- Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

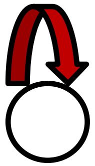
Uma **coloração** de vértices de G é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Definição. Um grafo G é **k-colorível** se, e somente se, existe uma coloração de G com no máximo k cores.

- Importante:
  - Pseudografos não são coloríveis, pois possuem laços.



Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

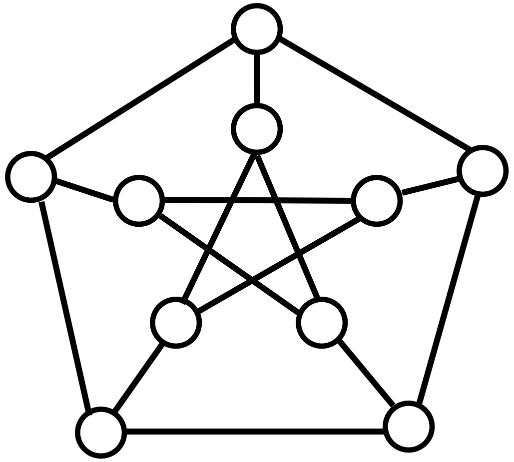
$$G \text{ é } k\text{-cromático} \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

- Exemplo:



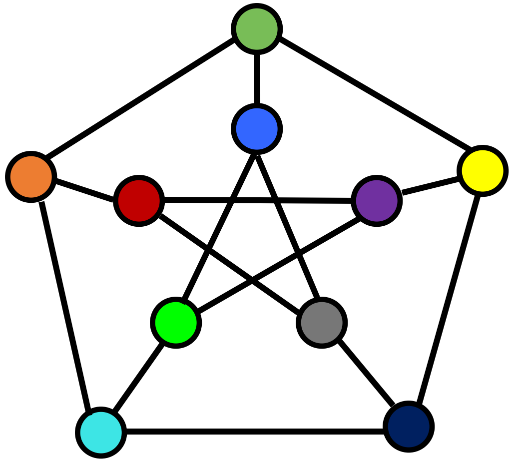
G
(Grafo de Petersen)

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

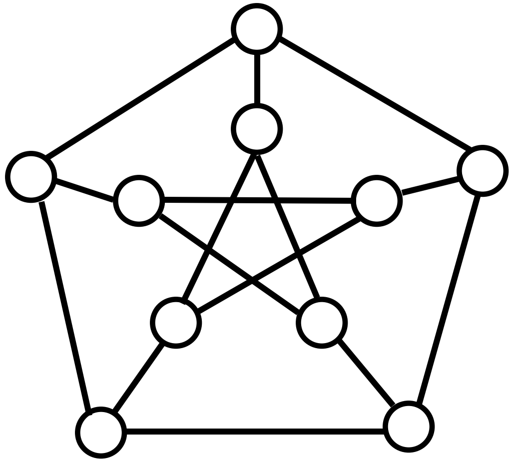
- 10-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

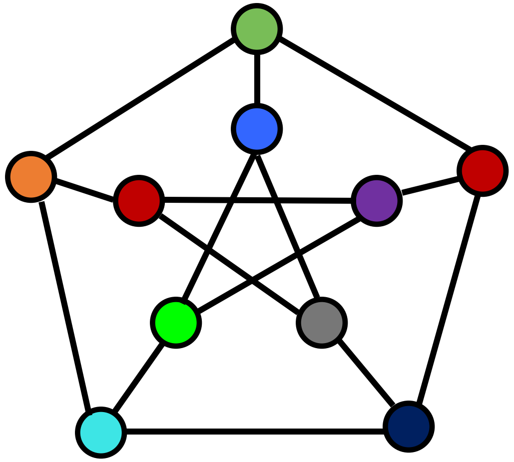
- 10-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

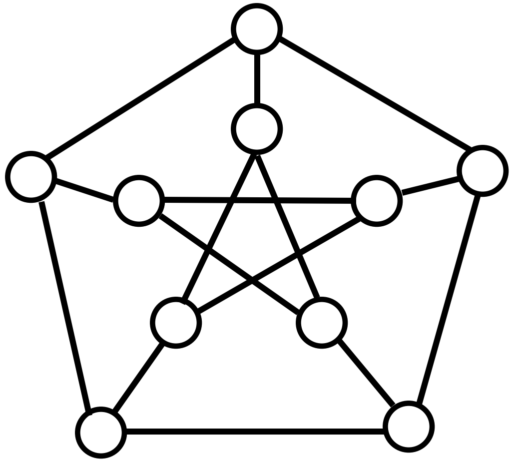
- 10-colorível
- 9-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

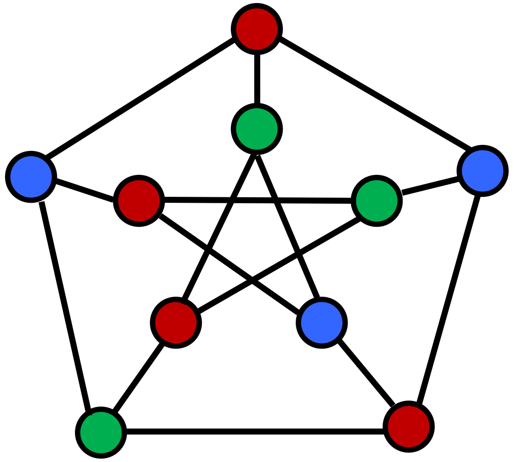
- 10-colorível
- 9-colorível
- …

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

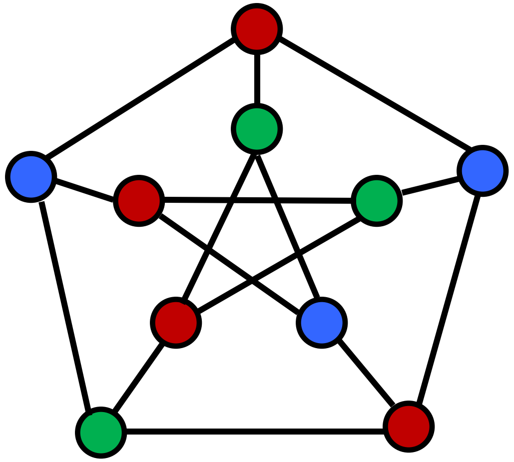
- 10-colorível
- 9-colorível
- …
- <u>3-colorível</u>
- não é 2-colorível

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

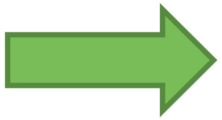
$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

- 10-colorível
- 9-colorível
- ...
- 3-colorível
- não é 2-colorível



3-cromático

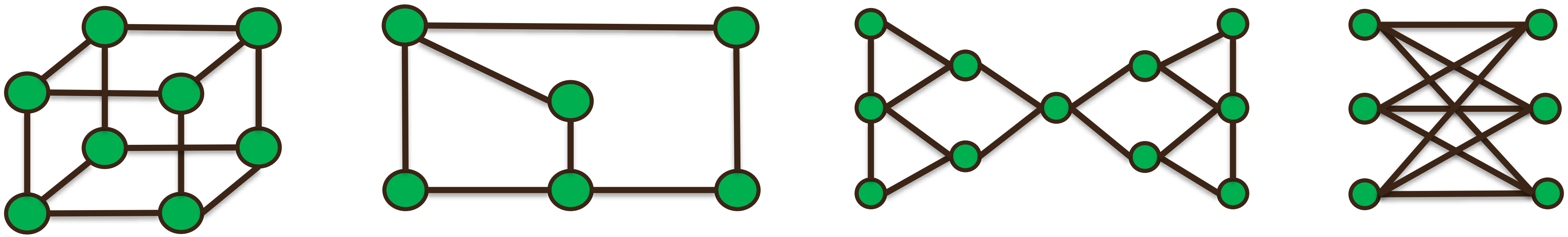
$\boldsymbol{\chi(G) = 3}$

Número Cromático

- Definição. O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \iff \boldsymbol{\chi(G) = k}$$

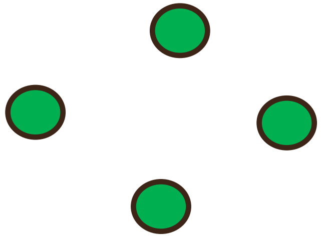
- Exercício: Defina o número cromático dos grafos abaixo:



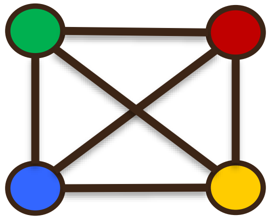
Limites para o Número Cromático

Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

- Se $|V| = 0$, então $\chi(G) = 0.$
- Se $|E| = 0$ e $|V| > 0$, então $\chi(G) = 1.$



- $\chi(G) \leq |V|$.



Limites para o Número Cromático

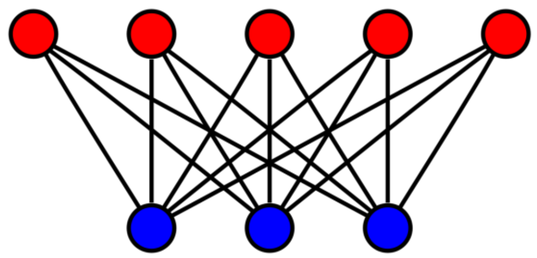
Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

- Se G é bipartido, então

Limites para o Número Cromático

Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

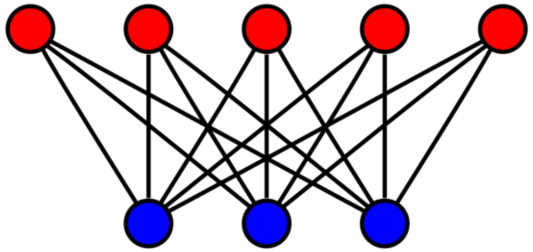
- Se G é bipartido, então $\chi(G) = 2$



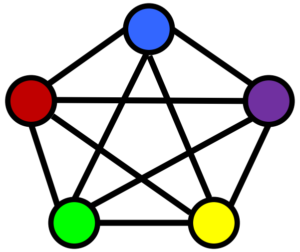
Limites para o Número Cromático

Seja $\chi(G)$ o número cromático de um grafo simples $G = (V, E)$.

- Se G é k-partido, então $\chi(G) = k$



- $\omega(G) \leq \chi(G)$, onde $\omega(G)$ é o tamanho do maior clique de G
  - Em um clique cada nodo deve obrigatoriamente ter uma cor diferente.



$\chi(K_5) = 5$

Limites para o Número Cromático

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, onde $\Delta(G)$ é o maior grau de algum vértice em V. Então:

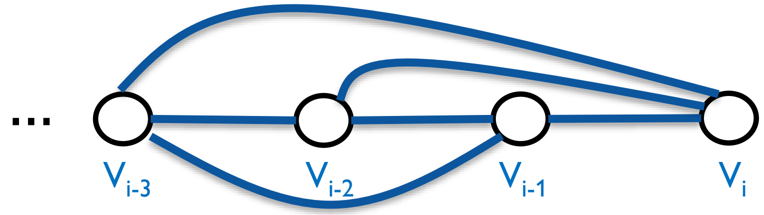
$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ideia: Se algum vértice u possui n vizinhos, então podemos colorir cada vizinho com uma cor diferente, e u com uma cor adicional ($n + 1$).

Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.



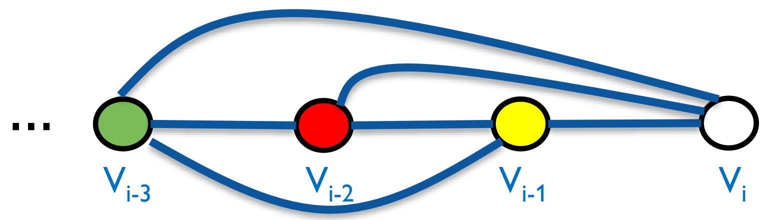
$\Delta(G) = 3$

Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Para cada vértice v_i, atribua a primeira cor em C que não ocorre em nenhum dos vizinhos já coloridos de v_i.
- Pior caso: Há $\Delta(G)$ vizinhos adjacentes de v_i com cores diferentes. Portanto precisamos de uma cor adicional $\Delta(G) + 1$.

$\Delta(G) = 3$

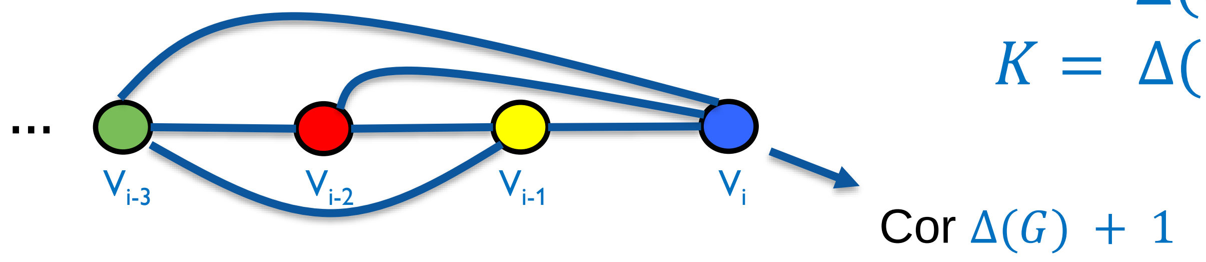


Limites para o Número Cromático

Demonstração.

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma permutação arbitrária dos vértices em V.
- Seja $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ um conjunto de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Para cada vértice v_i, atribua a primeira cor em C que não ocorre em nenhum dos vizinhos já coloridos de v_i.
- Pior caso: Há $\Delta(G)$ vizinhos adjacentes de v_i com cores diferentes. Portanto precisamos de uma cor adicional $\Delta(G) + 1$.

$$\Delta(G) = 3$$
$$K = \Delta(G) + 1 = 4$$



Coloração e Grafos Planares

- Restringindo nossa atenção a grafos planares, obtemos resultados mais precisos.

- Conjectura das 4 Cores
  - É sempre possível colorir um mapa usando no máximo 4 cores?

- Postulado em 1852 por Francis Guthrie,

ao colorir o mapa dos condados da Inglaterra.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Lema. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e planar. Então existe pelo menos um vértice v com no máximo 5 vizinhos.

Prova. Por contradição, assuma que para todo vértice $v \in V$, v tem pelo menos 6 vizinhos.

Pela fórmula de Euler (aula passada), temos:

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Porém, se todo vértice tem pelo menos 6 vizinhos, então:

$$|E| \geq \frac{6|V|}{2} = 3|V|$$

Contradição.

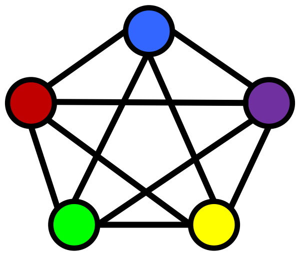
Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso base ($n \leq 5$). G possui $n \leq 5$ vértices.

Trivial: Cada vértice pode receber uma cor diferente.



$\chi(G) \leq 5$

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Hipótese: $P(n-1)$. Se G é simples, planar e possui $n-1$ vértices, então $\chi(G) \leq 5$.

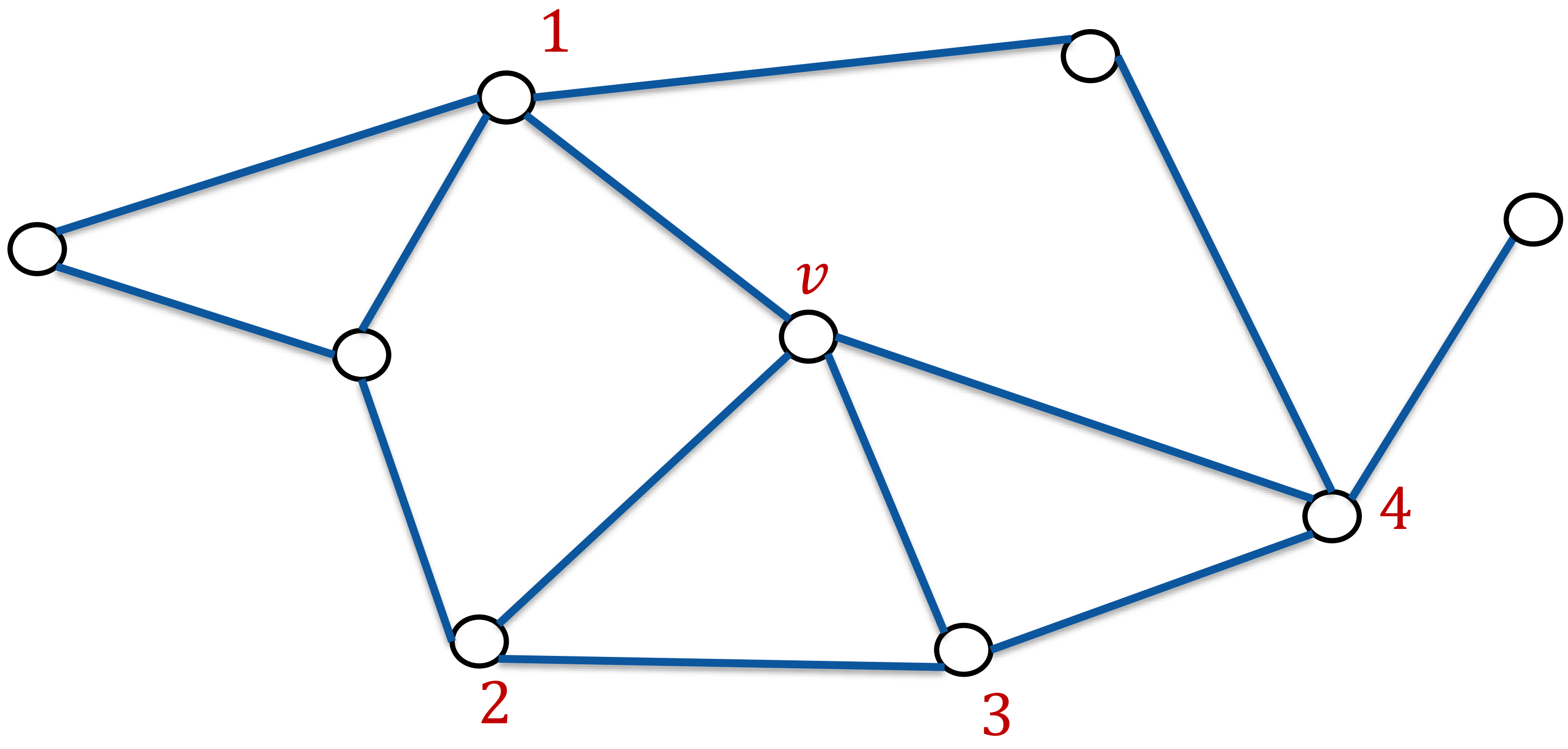
Vamos demonstrar que $P(k < n) \rightarrow P(n)$.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos.



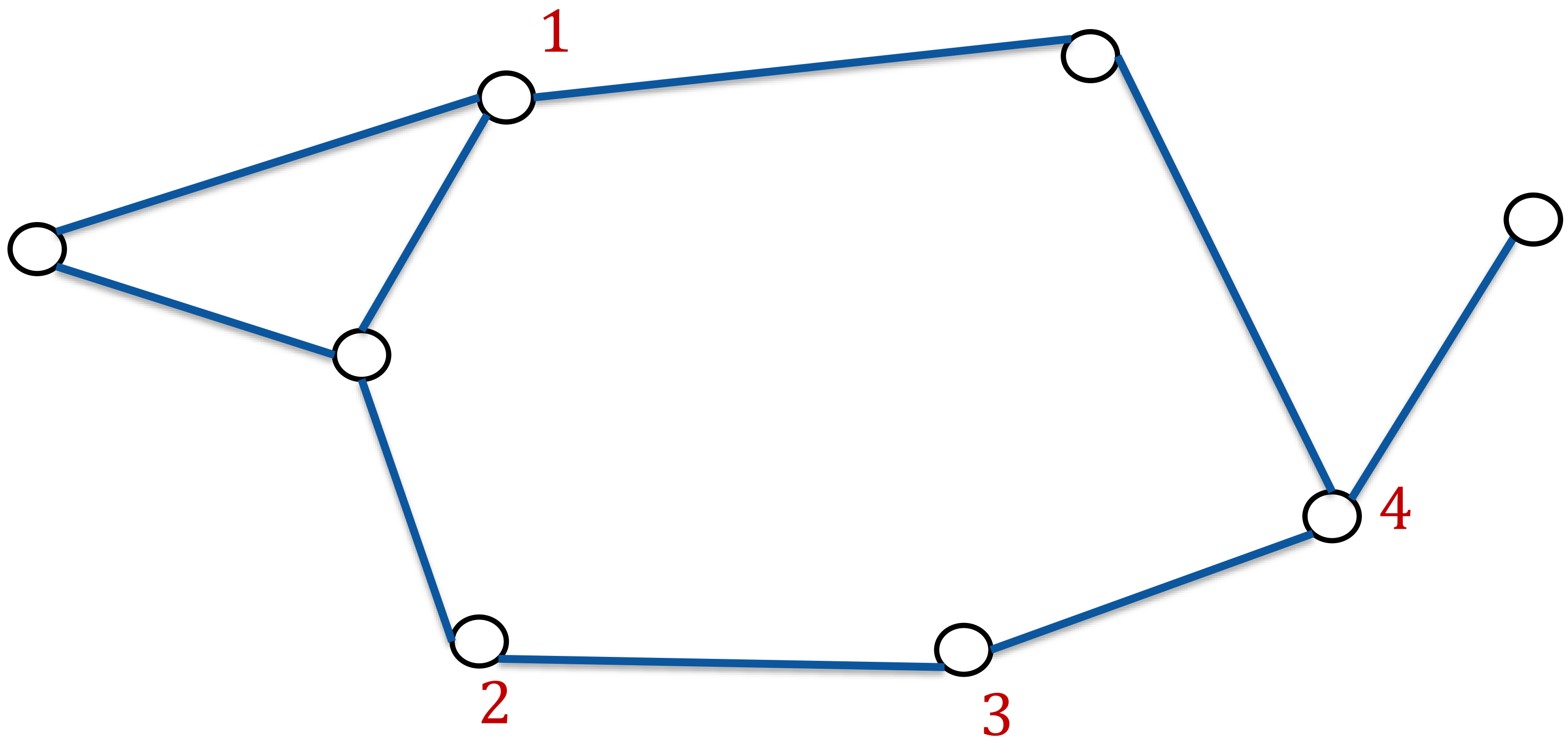
Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos. Ao remover v, G tem $n - 1$ vertices.

$P(n-1)$.



Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

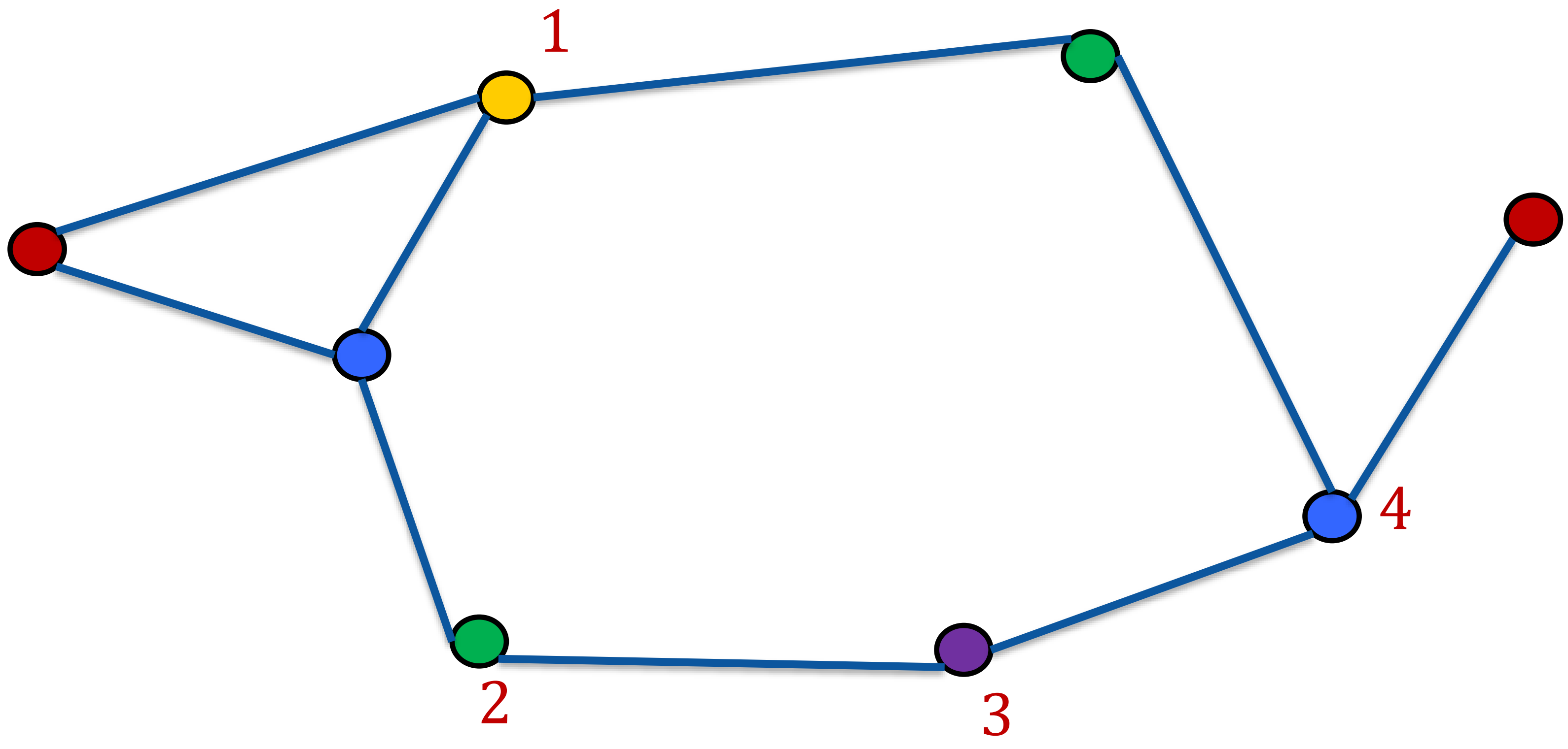
Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos. Ao remover v, G tem $n-1$ vertices.

$P(n-1)$.

O grafo é

5-colorível.



Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

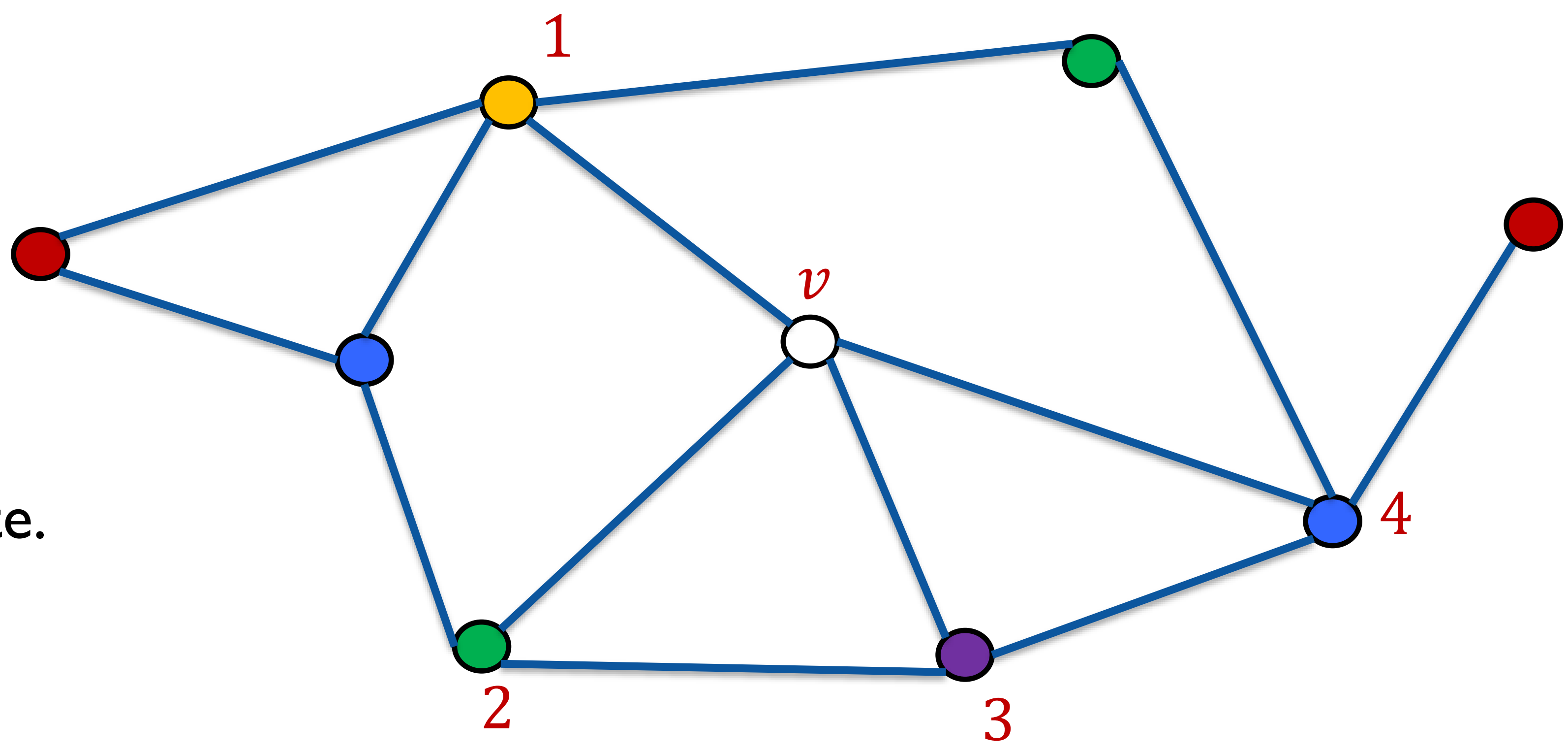
Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos. Ao remover v, G tem $n-1$ vertices.

$P(n-1) \rightarrow \boldsymbol{P(n)}$.

Reintroduzimos v,

alocando a cor restante.



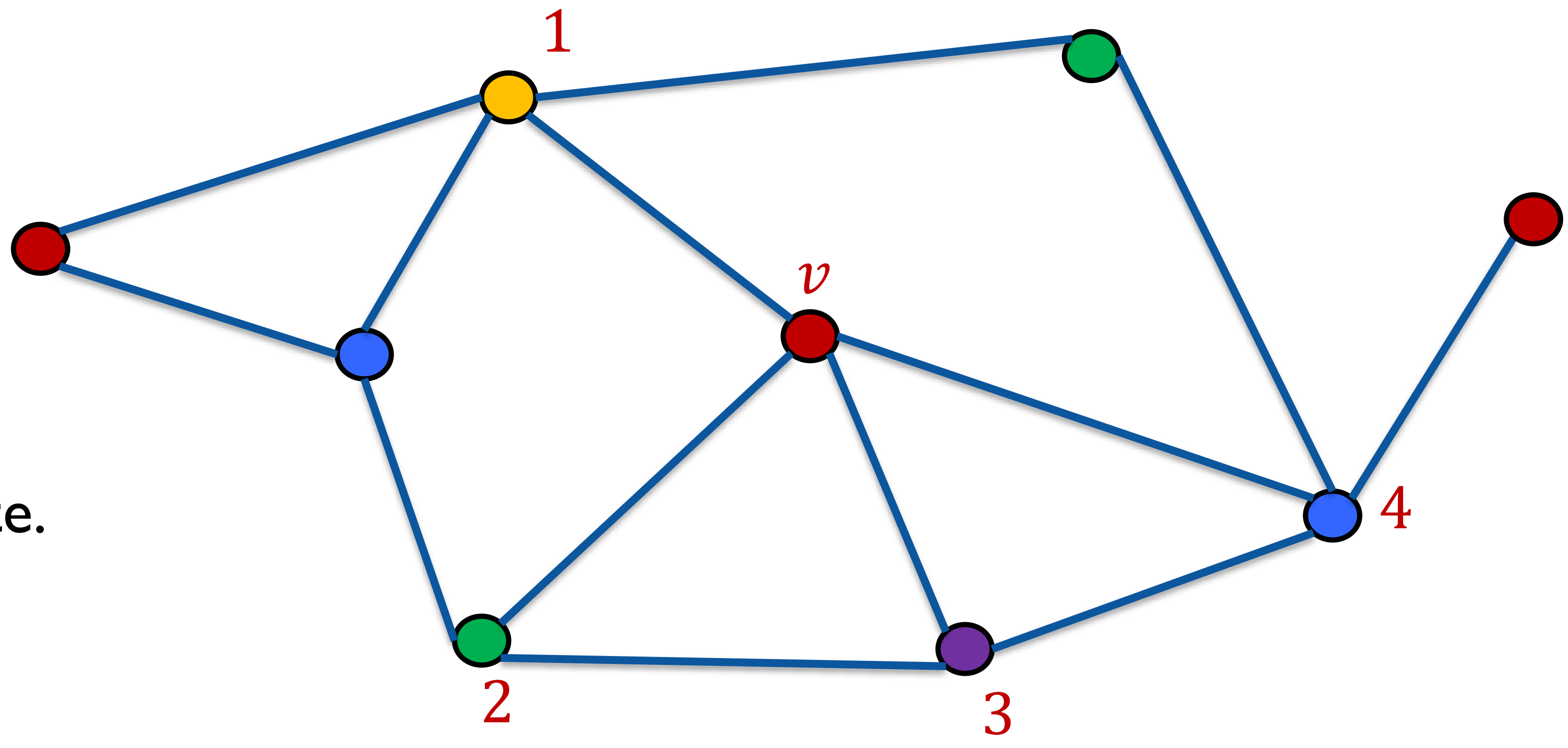
Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 1: v tem no máximo 4 vizinhos. Ao remover v, G tem $n-1$ vertices.

$P(n-1) \rightarrow \boldsymbol{P(n)}$.



Reintroduzimos v,

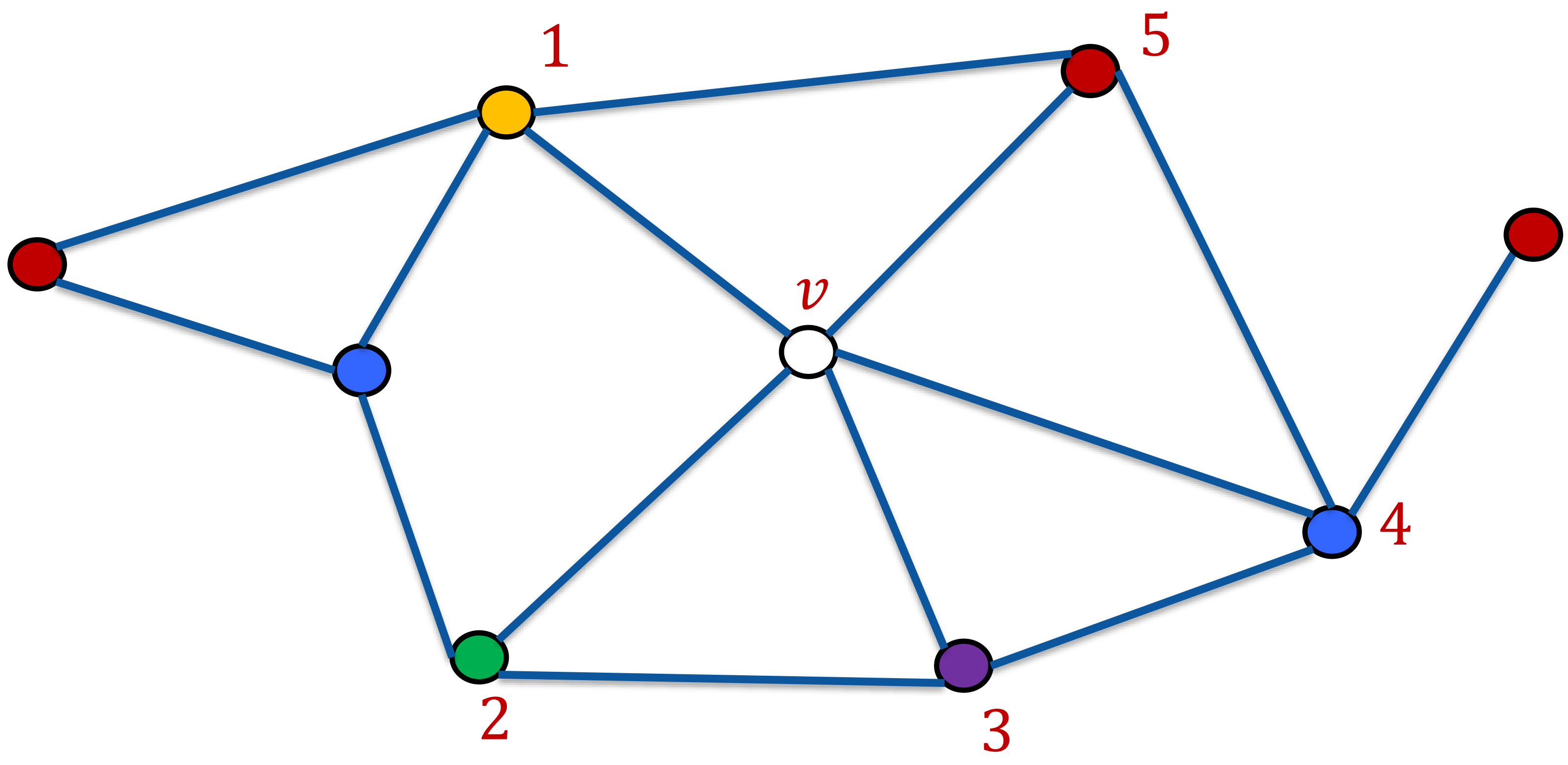
alocando a cor restante.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



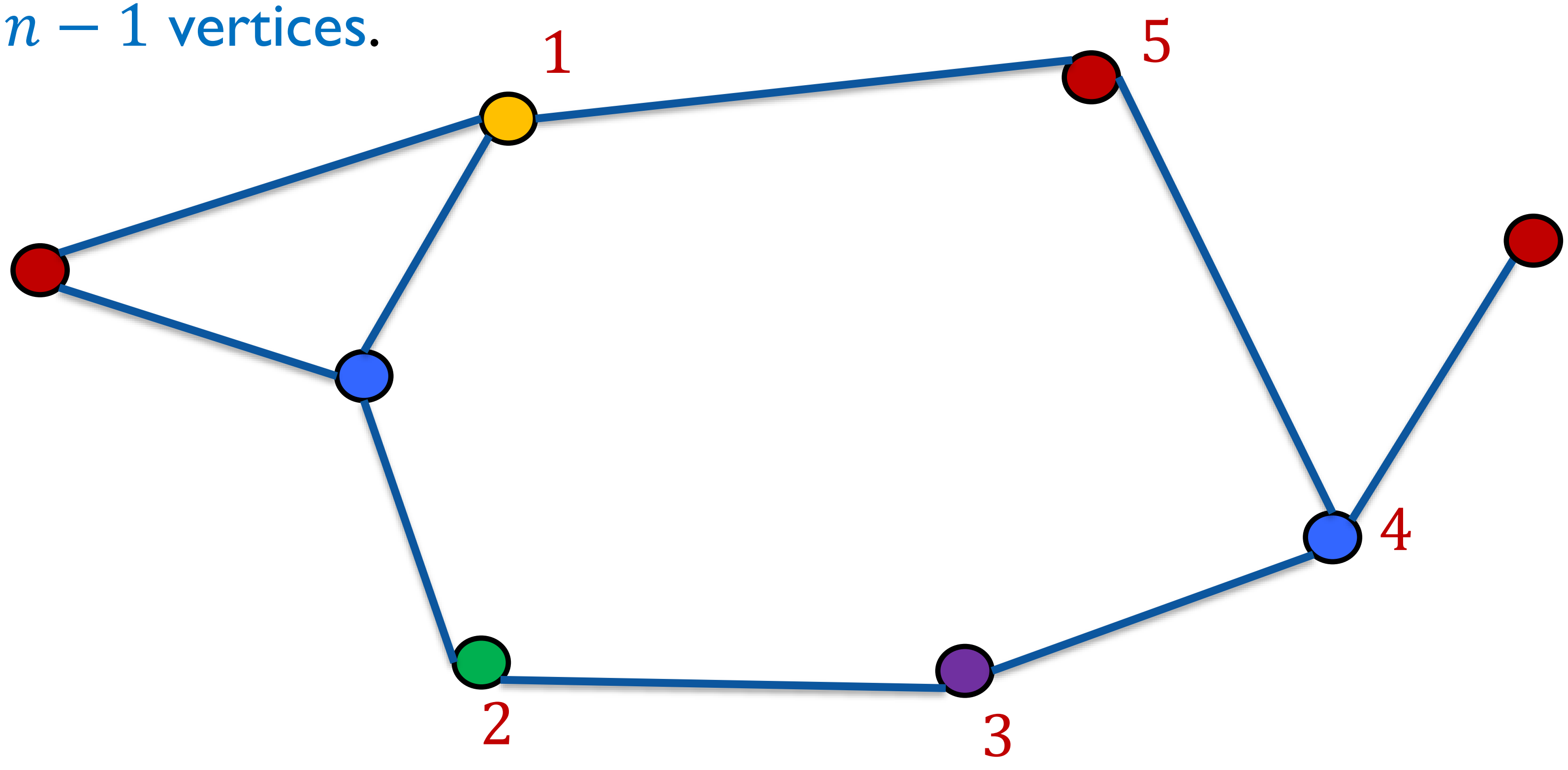
Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.

Ao remover v, G tem $n - 1$ vertices.

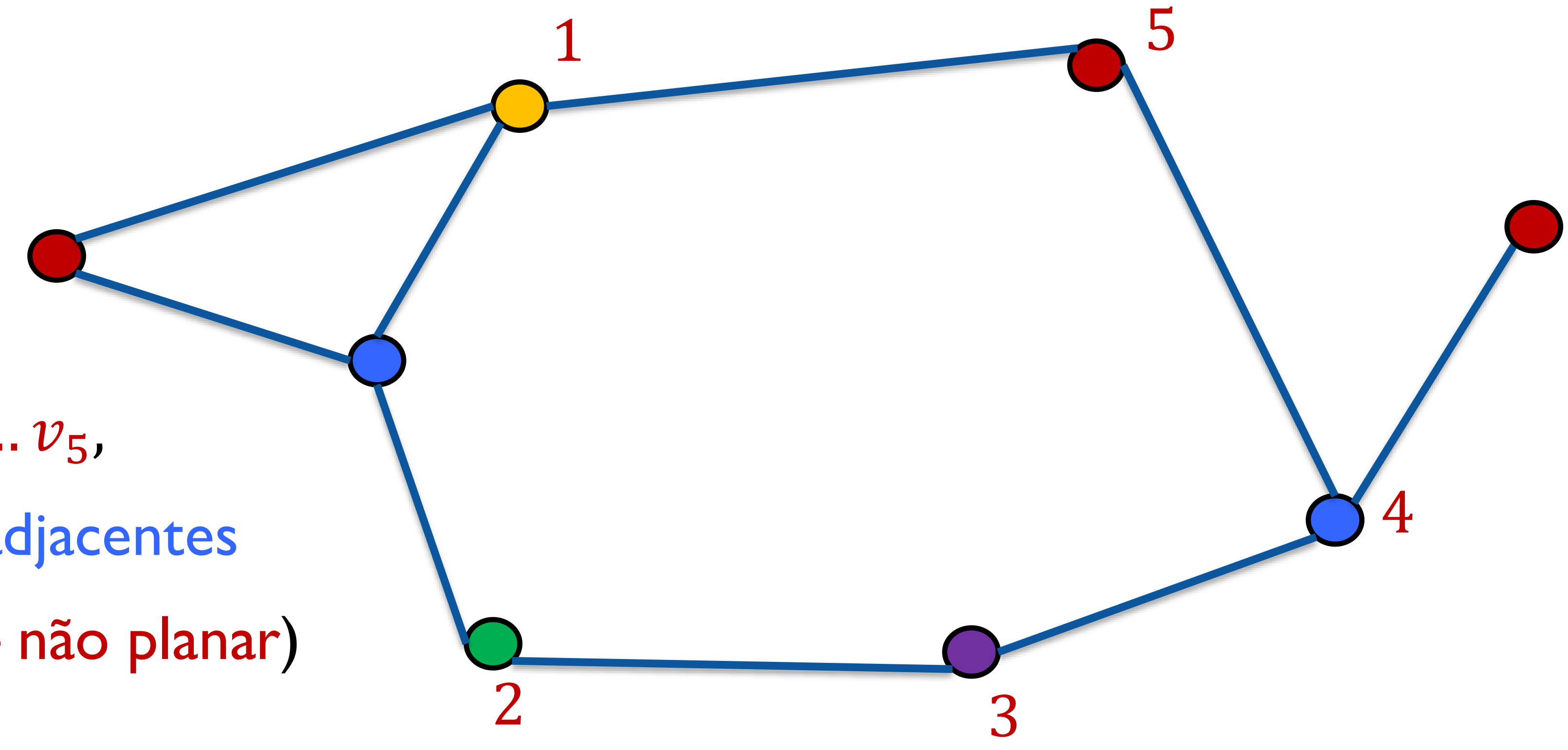


Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Entre os vizinhos $v_1 \ldots v_5$,

deve haver dois não-adjacentes

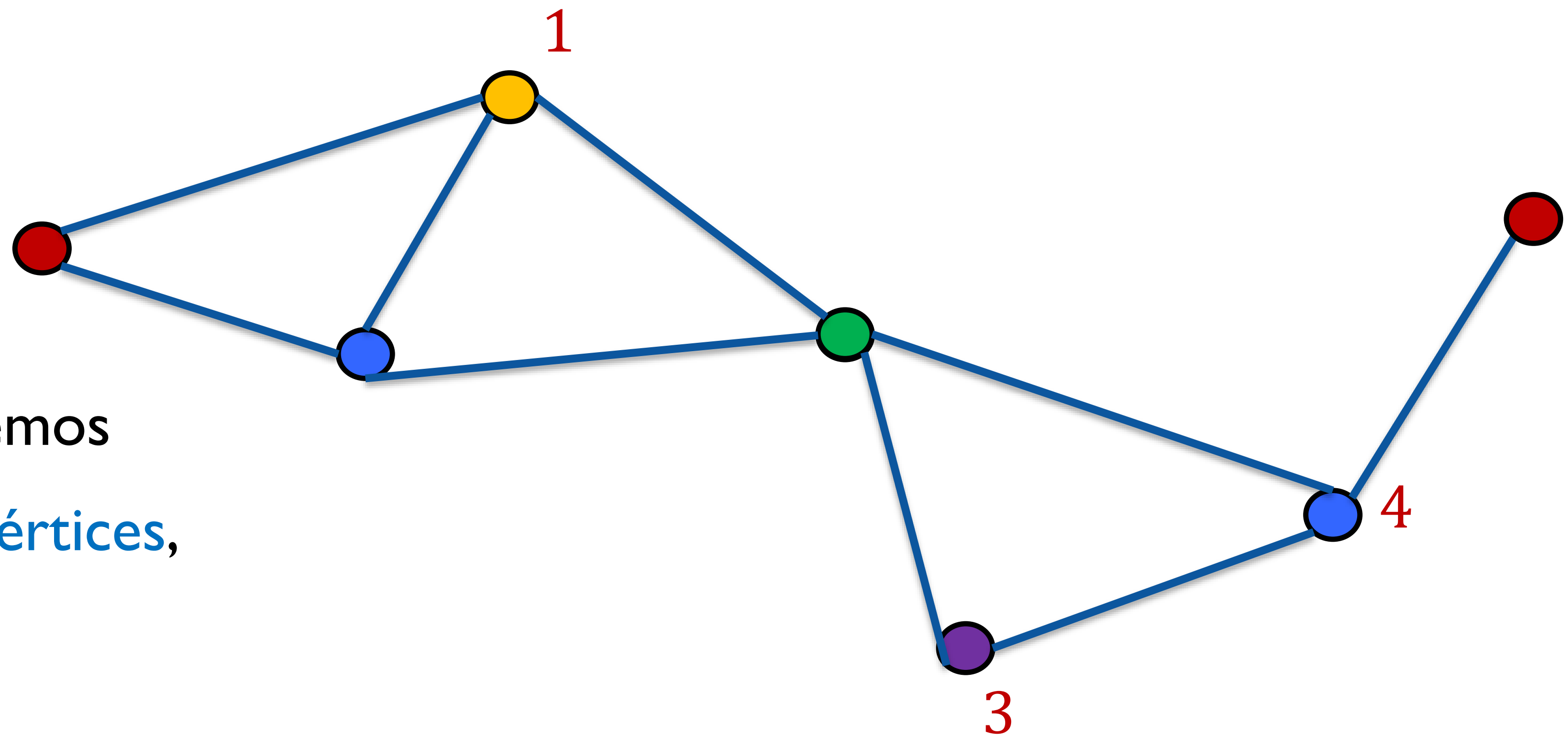
(senão, teríamos K_5 – não planar)

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Ao contrair v_2 e v_5 temos

um grafo com $n - 2$ vértices,

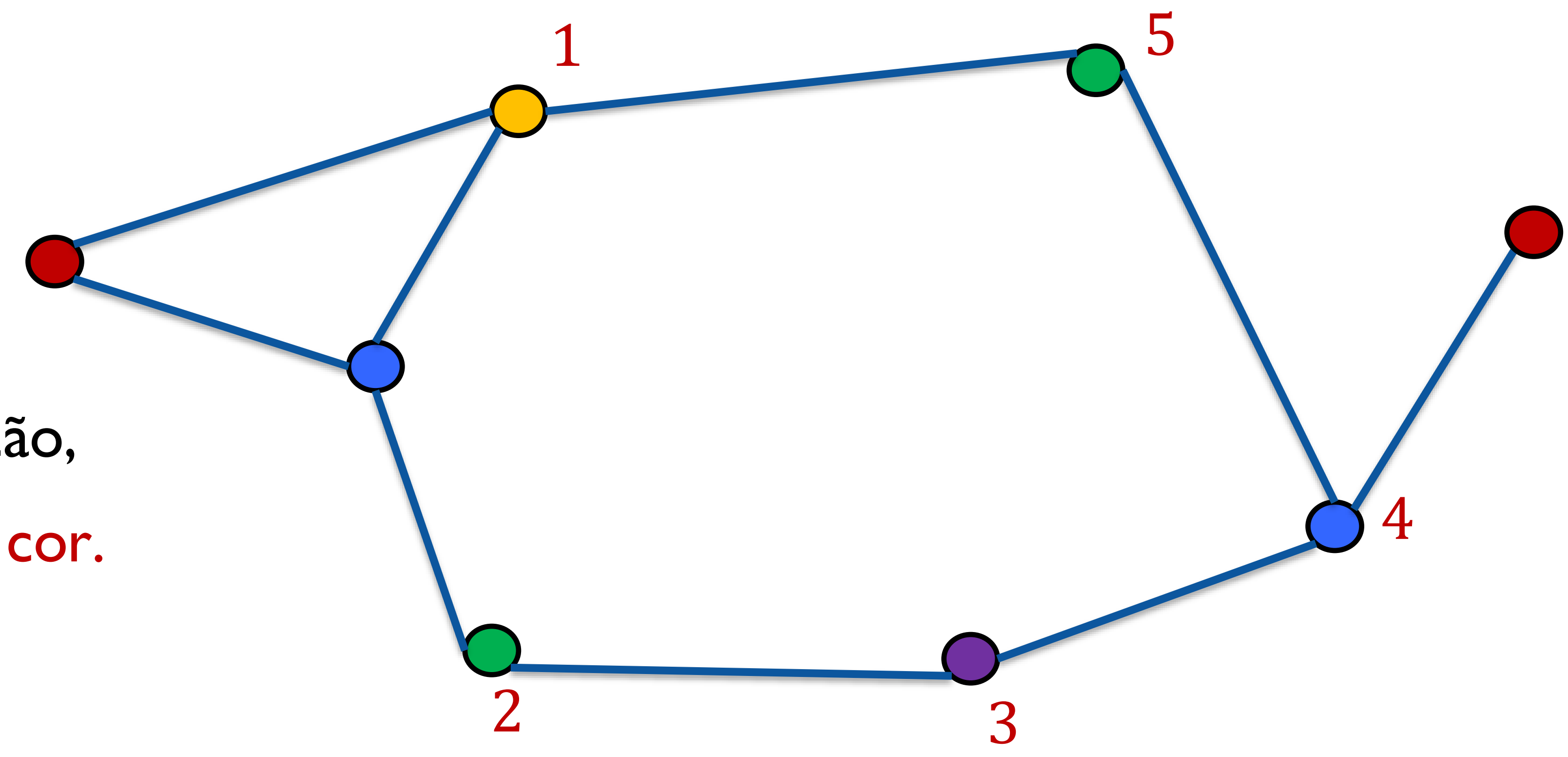
5-colorível pela H.I.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Ao desfazer a contração,

v_2 e v_5 tem a mesma cor.

Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

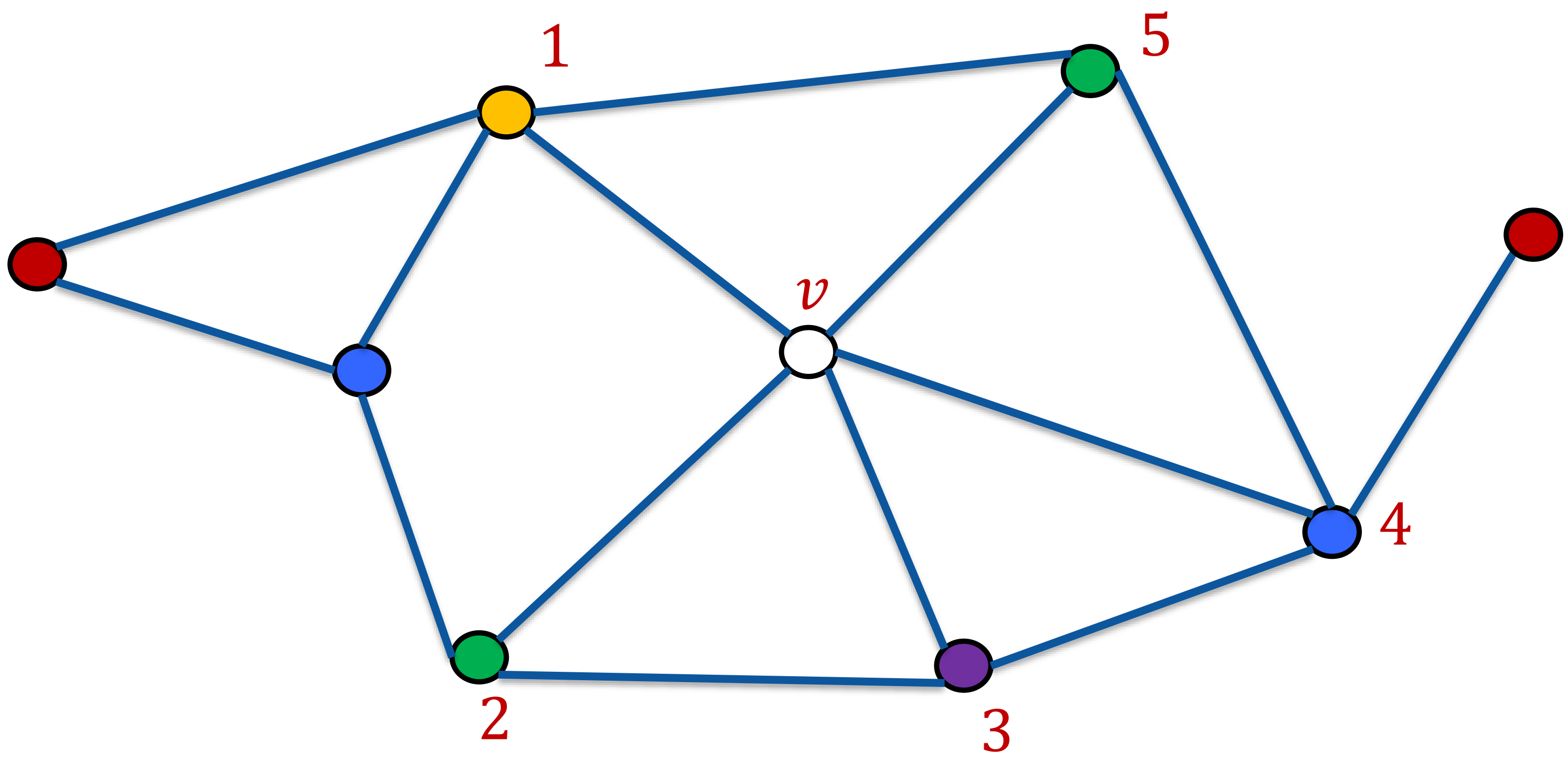
Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.

Ao reintroduzirmos v,

temos agora

uma cor disponível!

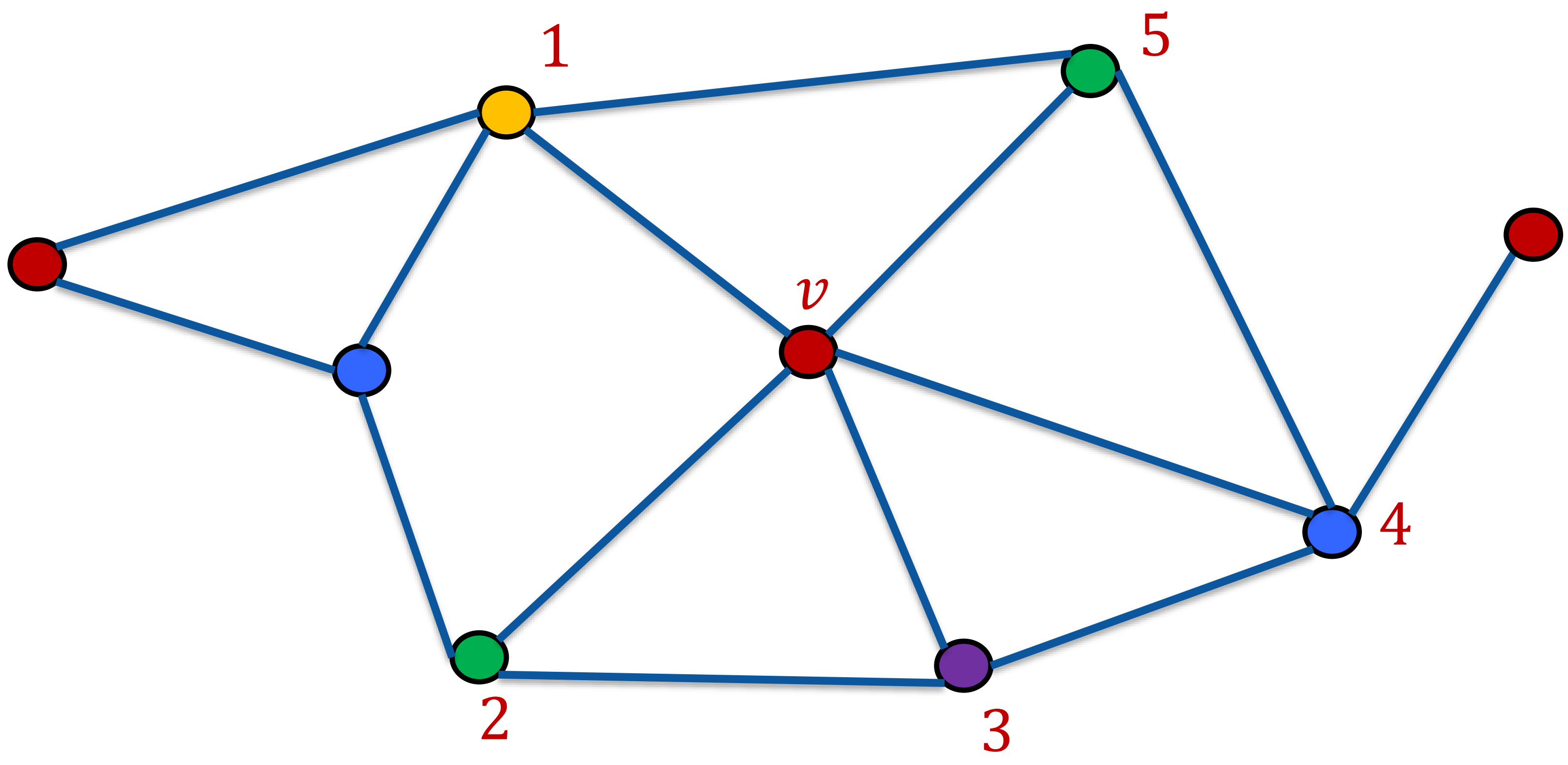


Teorema das 5 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Prova por indução.

Caso 2: v tem exatamente 5 vizinhos. Cada um com uma cor diferente.



Fim da prova!

Teorema das 4 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)

Teorema das 4 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)

- 1852: F. Guthrie conjecturou o problema para seu professor, De Morgan.

- 1879: Alfred B. Kempe anunciou que tinha uma demonstração da conjectura.
  Ele ganhou muito prestígio e foi nomeado membro da Royal Society.

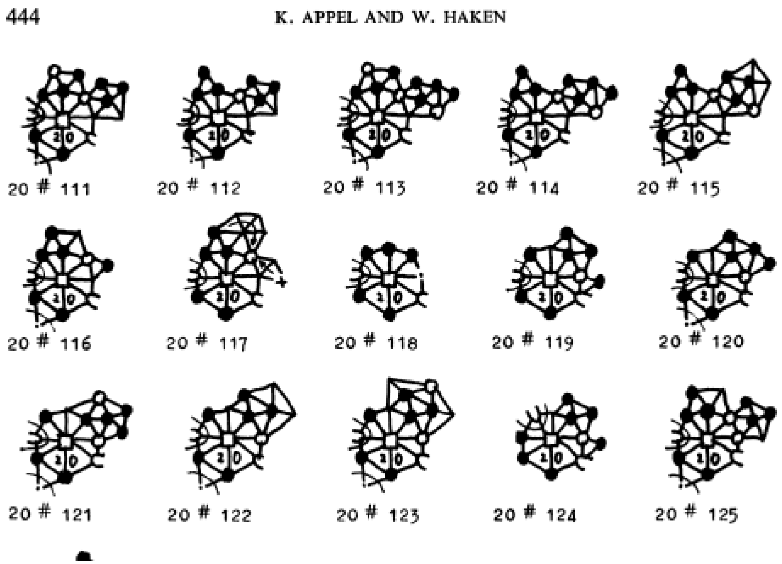
- 1890: Percy Heawood mostra que estava incorreta a prova de Kempe, e provou o Teorema das Cinco Cores.

Teorema das 4 Cores

Teorema. Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.

- Somente em **1977**, Appel and Haken provaram o teorema com ajuda de computadores (primeira vez que um teorema importante é provado dessa forma!).

- A prova se baseia em criar reduções e testar 1482 configurações possíveis, usando ~1200 horas de computação!



- À mão, levariam 100 mil anos, dedicando-se 60h/semana.

- Simplificações foram feitas, mas até hoje não existe prova para o Teorema sem auxílio de computadores.

Algoritmos de Coloração

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?

Algoritmos de Coloração

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Hard!

Disciplina de Teoria da Computação II
Classes de complexidade computacional

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Completo! (entre os 21 problemas NP-Completos de Karp)

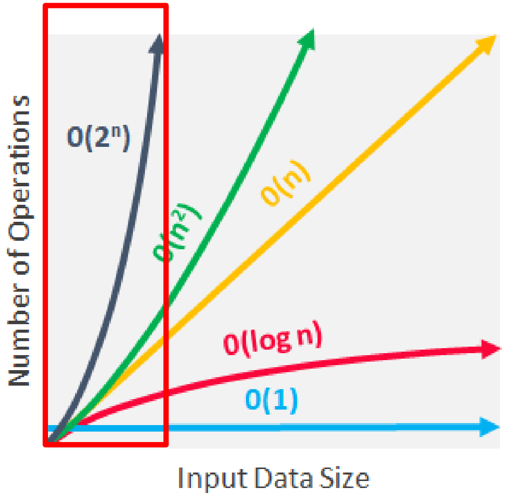
Algoritmos de Coloração

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Hard!

Disciplina de Teoria da Computação II
Classes de complexidade computacional

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Completo! (entre os 21 problemas NP-Completos de Karp)

- Intuitivamente: o número de operações de um algoritmo ótimo para o problema cresce **exponencialmente** em relação ao tamanho do grafo.



Algoritmo Guloso (não ótimo)

Entrada: Grafo simples $G = (V, E)$, cores $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$

Saída: Coloração $f : V \rightarrow C$

1. Ordene os vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ em ordem arbitrária
2. Para cada vértice v_i , em ordem:
3. Para cada cor c_i, em ordem:
4. Se algum vizinho de v_i possui cor c_i, vá para a próxima cor
5. Senão, atribua cor c_i para o vértice v_i : $f(v_i) = c_i$

Lista de Exercícios

?

Referências

- Paulo Oswaldo Boaventura Netto. Grafos: teoria, modelos, algoritmos. 2006.isbn: 8521203918.1
- Edson Prestes. Introdução a Teoria dos Grafos. 2020.url:http://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/GraphTheory/Livro/LivroGrafos.pdf.
- Richard J. Trudeau. Introduction to graph theory. 2015.isbn: 1684112311.url:http://www.worldcat.org/isbn/1684112311.
- Douglas B. West. Introduction to Graph Theory. 2nd ed. Prentice Hall, Sept. 2000.isbn: 0130144002
- Weisstein, Eric W. "Four-Color Theorem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html