Projeto e Análise de Algoritmos I

Aula 11 - Coloração de Grafos

Lucas Nunes Alegre

lnalegre@inf.ufrgs.br

Instituto de Informática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, Brasil

2025/1

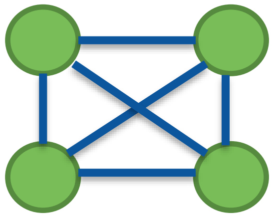
INSTITUTO
DE INFORMÁTICA
UFRGS

Última Aula: Planaridade

- Grafos Planares

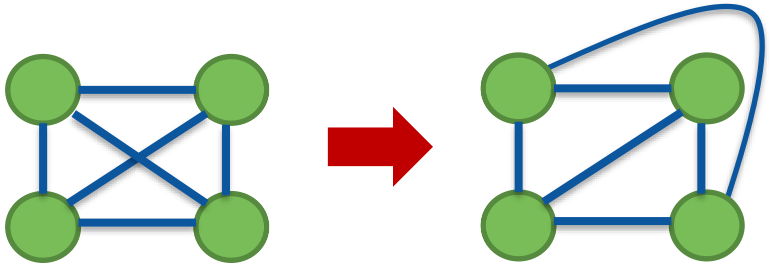
Última Aula: Planaridade

- Grafos Planares



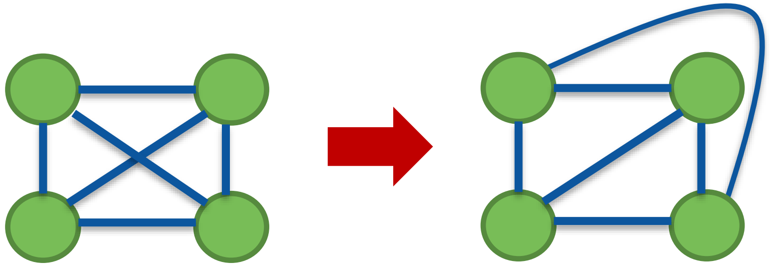
Última Aula: Planaridade

- <u>Grafos Planares</u>



Última Aula: Planaridade

- Grafos Planares

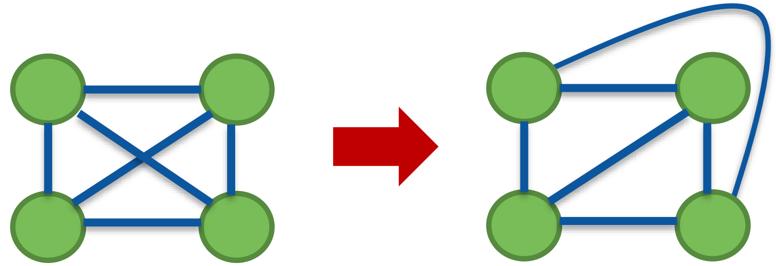


- Fórmula de Euler:

$$v + f = e + 2$$

Última Aula: Planaridade

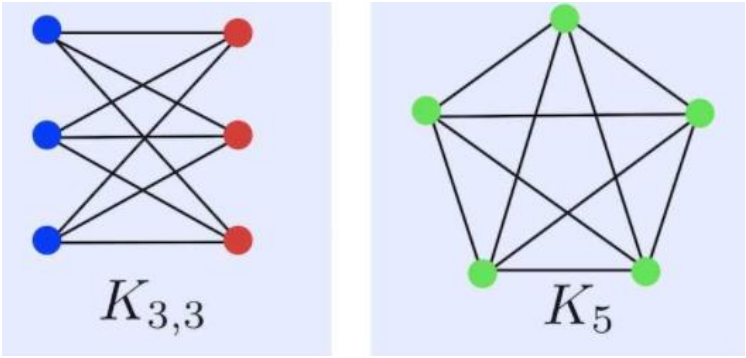
- <u>Grafos Planares</u>



- <u>Fórmula de Euler:</u>

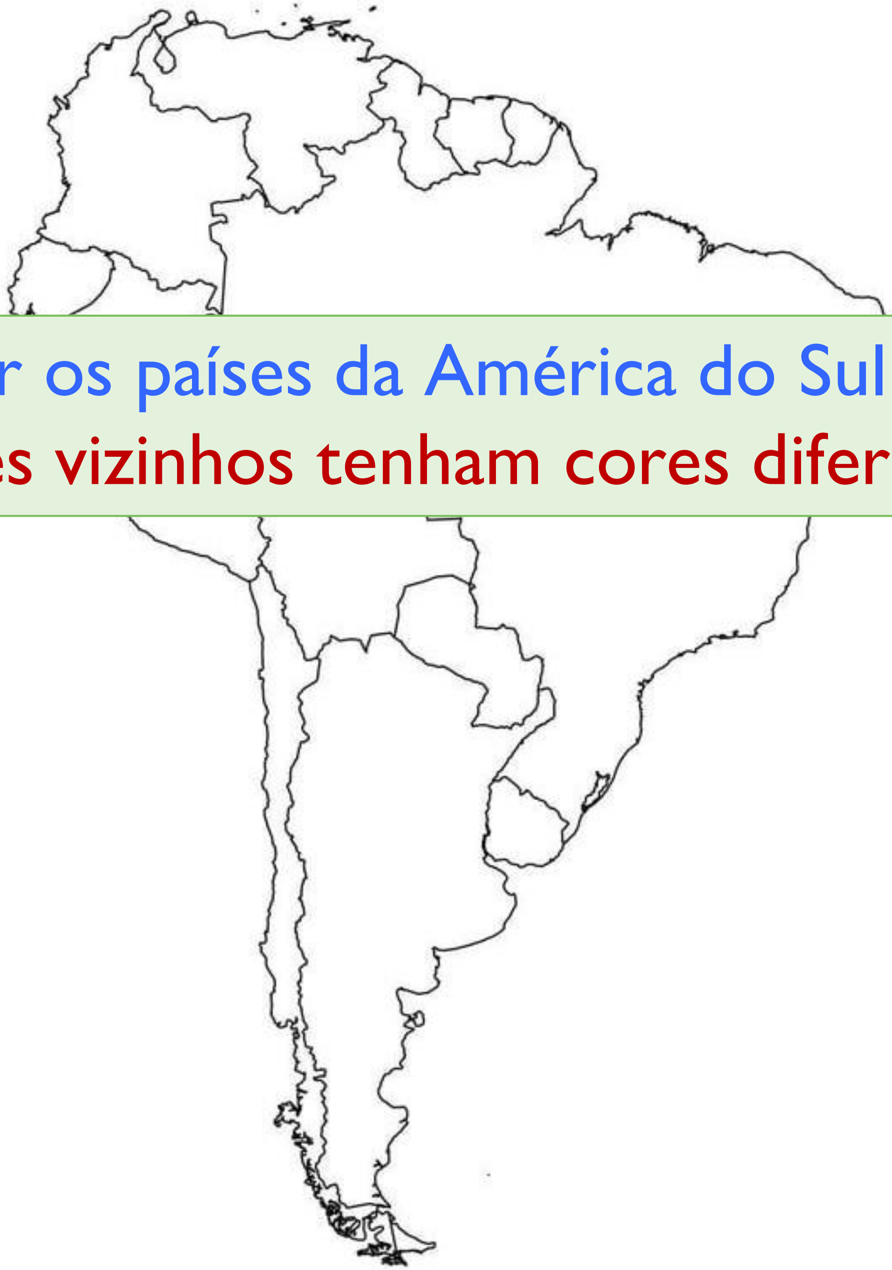
$$v + f = e + 2$$

- Teorema: (Kuratowski) um grafo simples é não-planar sss possui como subgrafo uma extensão do grafo $K_{3,3}$ ou K_5



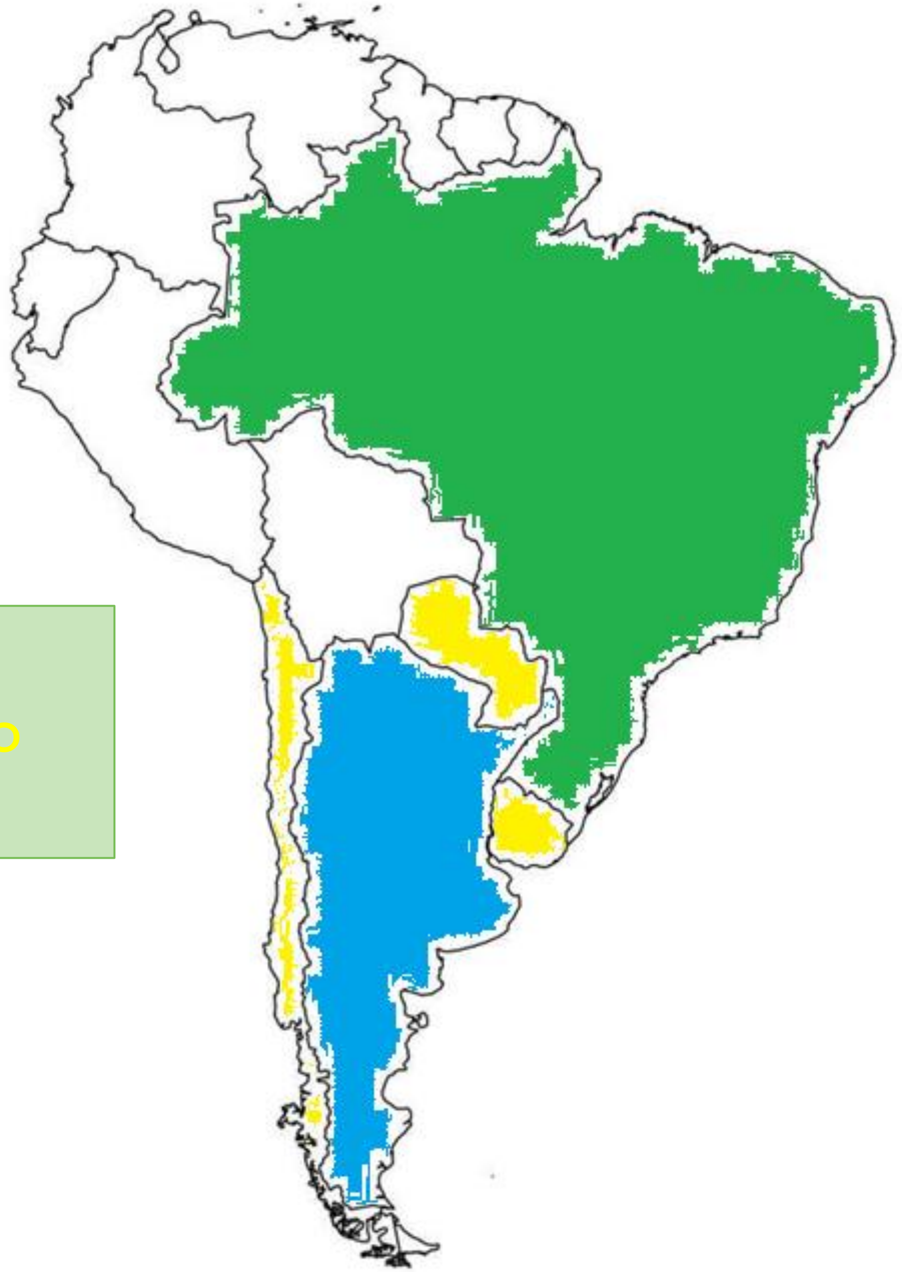
Roteiro

1. Motivação

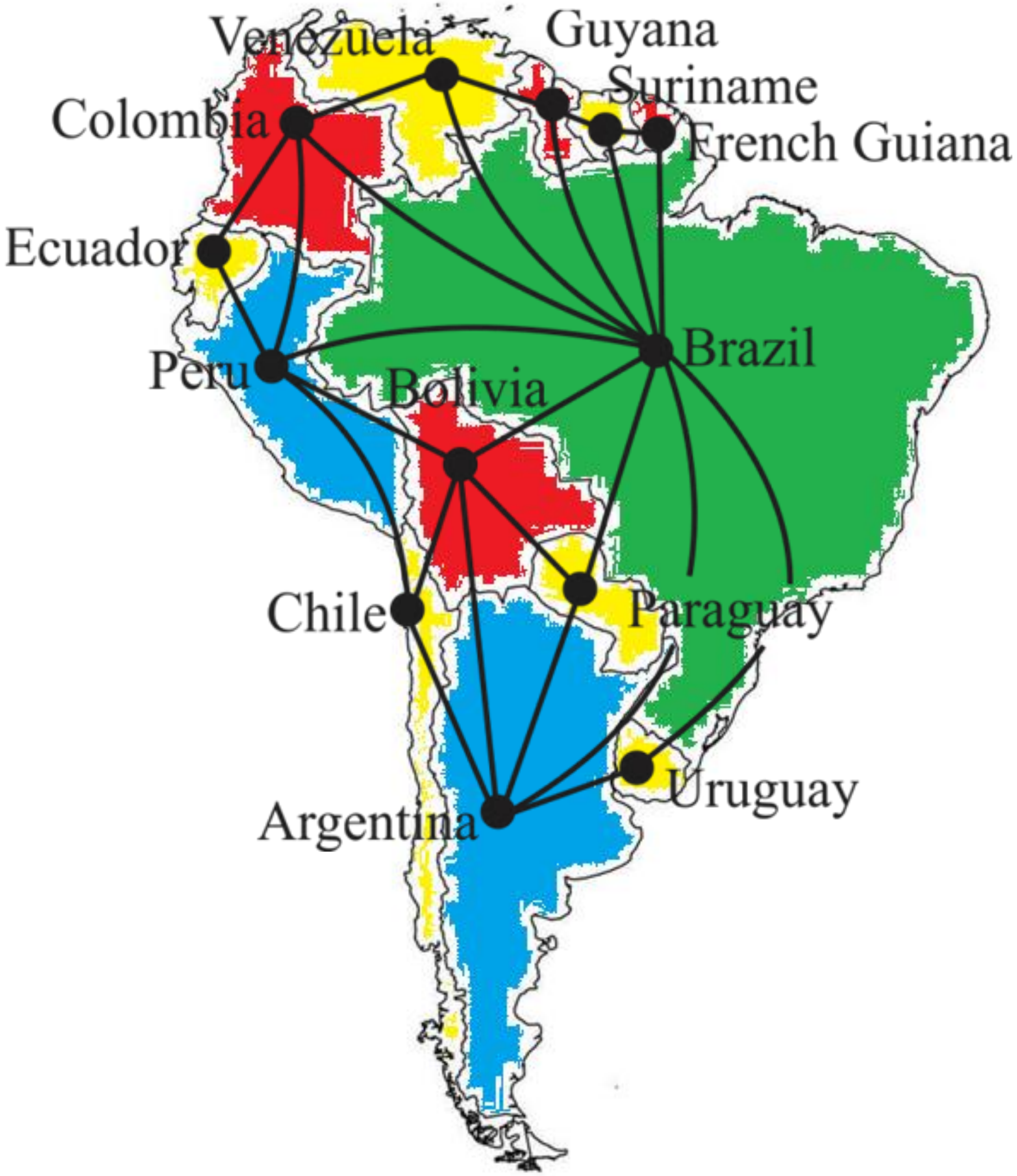


Vamos colorir os países da América do Sul de modo que países vizinhos tenham cores diferentes.

Precisamos de uma terceira cor para o Uruguai.



Não podemos colorir a Bolívia de verde, amarelo ou azul.


Venezuela
Guyana
Suriname
Colombia
French Guiana
Ecuador
Brazil
Peru
Bolivia
Chile
Paraguay
Uruguay
Argentina

- Foram necessárias 4 cores para colorir a América do Sul.
- Veremos nessa aula que qualquer grafo planar (e.g., mapas) pode ser colorido com no máximo 4 cores.

Outras aplicações

Outras aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, Arquitetura de Computadores I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual a menor quantidade de dias de provas necessária?

Outras aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, Arquitetura de Computadores I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual a menor quantidade de dias de provas necessária?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Outras aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, Arquitetura de Computadores I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual a menor quantidade de dias de provas necessária?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		

Grafos E.D

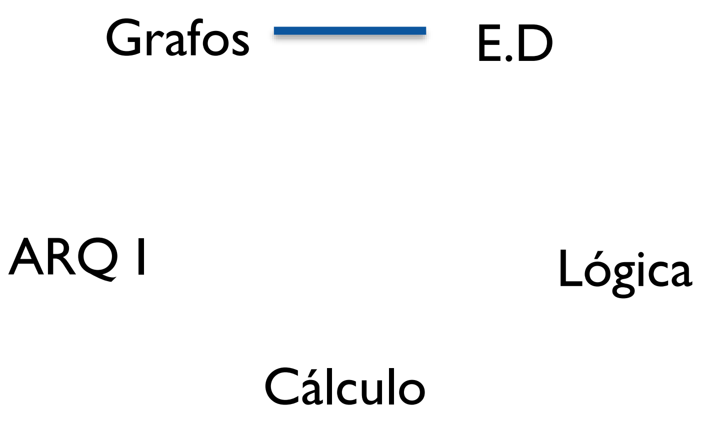
ARQ I Lógica

Cálculo

Outras aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, Arquitetura de Computadores I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual a menor quantidade de dias de provas necessária?

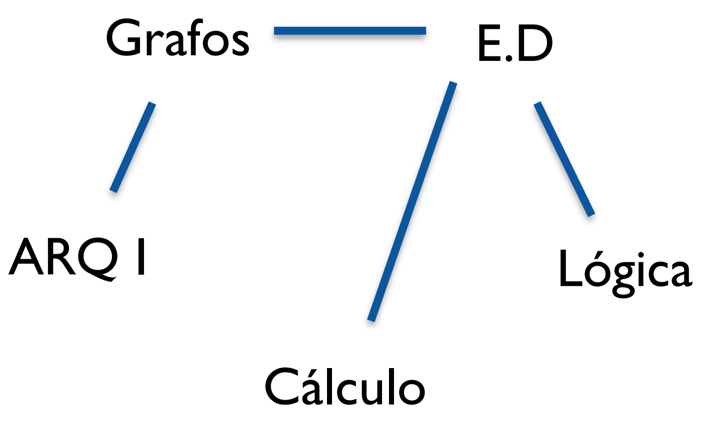
	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		



Outras aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, Arquitetura de Computadores I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual a menor quantidade de dias de provas necessária?

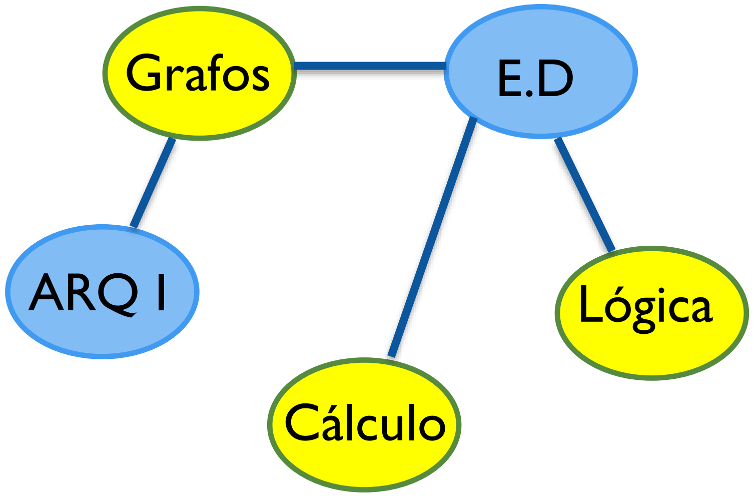
	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		



Outras aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, Arquitetura de Computadores I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual a menor quantidade de dias de provas necessária?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		



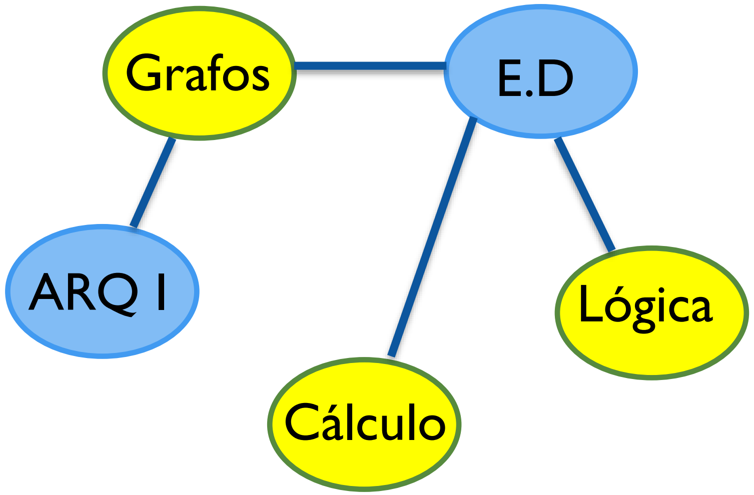
Dia 1: Grafos, Cálculo e Lógica

Dia 2: ARQ I e E.D.

Outras aplicações

- Scheduling Problem:
  - Os professores de Teoria dos Grafos, Estruturas de Dados, Arquitetura de Computadores I, Lógica e Cálculo II querem agendar provas de modo que nenhum aluno tenha que realizar mais de uma prova no mesmo dia.
  - Qual a menor quantidade de dias de provas necessária?

	Bob	Alice	João	Maria
Grafos	x		x	
E.D.	x	x		x
Cálculo II				x
ARQ I			x	
Lógica		x		



Dia 1: Grafos, Cálculo e Lógica

Dia 2: ARQ I e E.D.

- Similarmente: registers schedulling, bandwidth allocation, Sudoku ...

Coloração de Grafos

- Definição: uma **coloração** (de vértices) de um grafo simples $G = (V, E)$, é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $x, y \in V$,

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

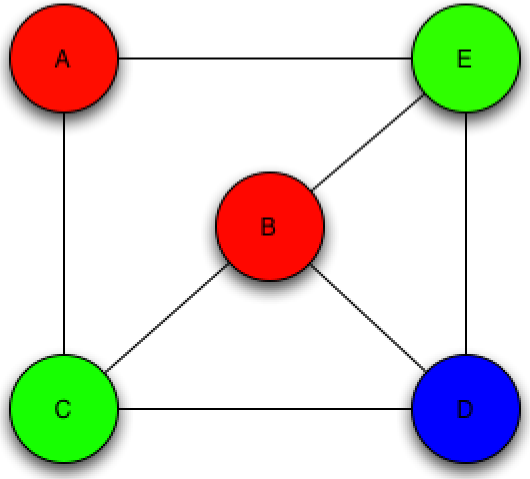
Coloração de Grafos

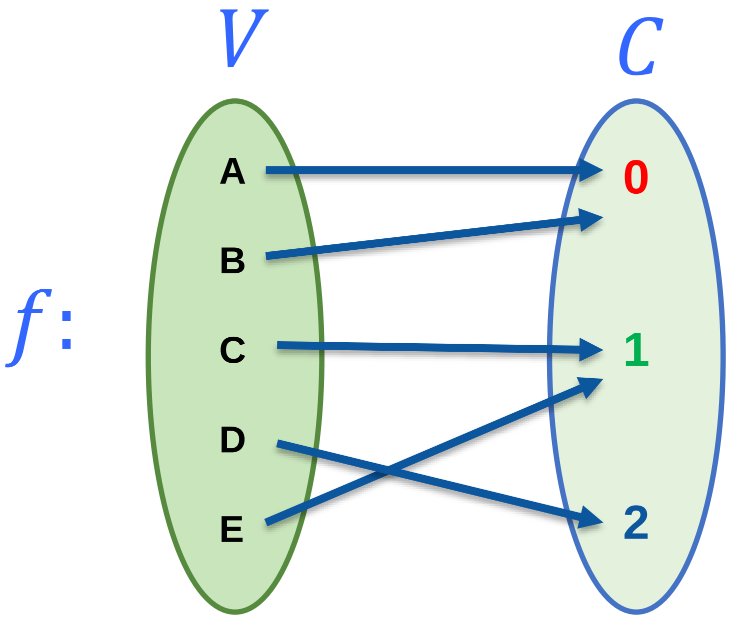
- Definição: uma **coloração** (de vértices) de um grafo simples $G = (V, E)$, é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $x, y \in V$,

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Exemplo:





- $|img(f)|$ é o **número de cores** de f.

Coloração de Grafos

- Definição: uma **coloração** (de vértices) de um grafo simples $G = (V, E)$, é uma função $f : V \rightarrow C$ tal que, para todo $x, y \in V$,

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Definição: um grafo G é **k-colorível** se, e somente se, existe uma coloração de G com no máximo k cores.

Coloração de Grafos

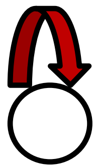
- Definição: uma **coloração** (de vértices) de um grafo simples $G = (V, E)$, é uma função $f : V \to C$ tal que, para todo $x, y \in V$,

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

onde $C \subseteq \mathbb{N}$ é o conjunto de cores.

- Definição: um grafo G é **k-colorível** se, e somente se, existe uma coloração de G com no máximo k cores.

- Importante:
  - Pseudografos não são coloríveis, pois possuem laços.



Número Cromático

- Definição: o **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

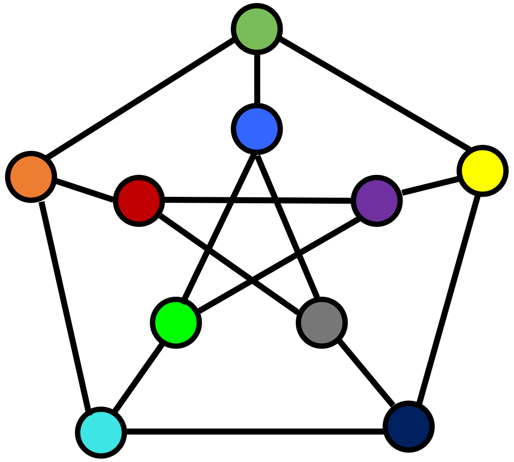
$$G \text{ é } k\text{-cromático} \Leftrightarrow \chi(G) = \mathbf{k}$$

Número Cromático

- Definição: o **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é k-cromático} \Leftrightarrow \chi(G) = \mathbf{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

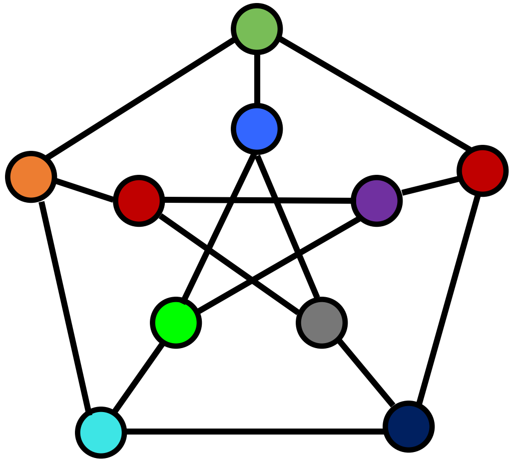
- 10-colorível

Número Cromático

- Definição: o **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é k-cromático} \Leftrightarrow \chi(G) = \mathbf{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

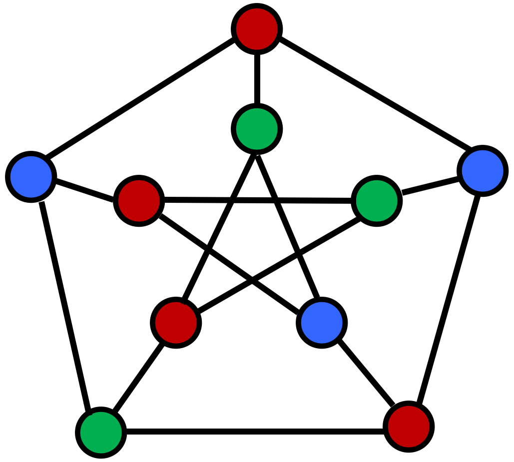
- 10-colorível
- 9-colorível

Número Cromático

- Definição: o **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é } k\text{-cromático} \Leftrightarrow \chi(G) = \mathbf{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

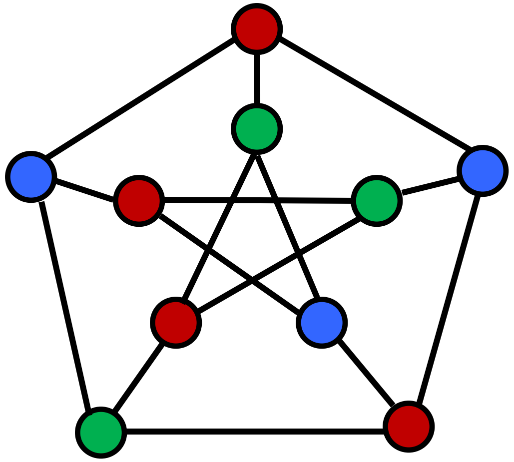
- 10-colorível
- 9-colorível
- …
- <u>3-colorível</u>
- não é 2-colorível

Número Cromático

- Definição: o **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é k-cromático} \Leftrightarrow \chi(G) = \mathbf{k}$$

- Exemplo:



G
(Grafo de Petersen)

- 10-colorível
- 9-colorível
- …
- 3-colorível
- não é 2-colorível

3-cromático

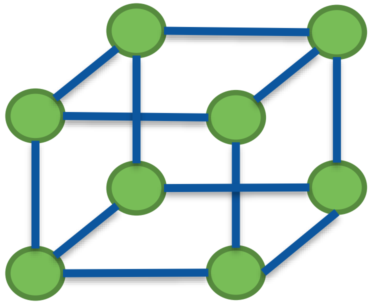
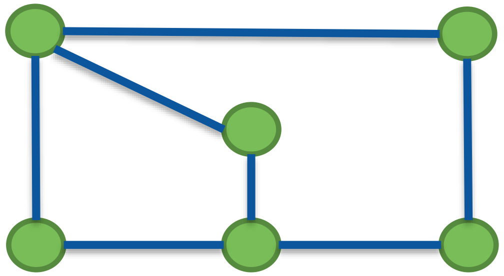
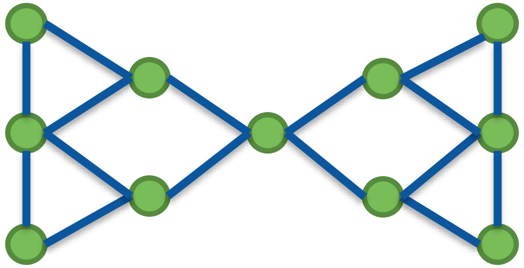
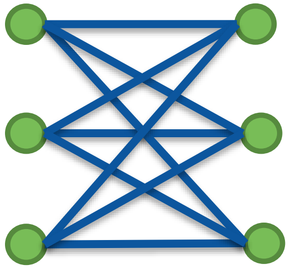
$\chi(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$

Número Cromático

- Definição: o **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores k tal que G é k-colorível.

$$G \text{ é k-cromático} \Leftrightarrow \chi(G) = \mathbf{k}$$

- Exercício: defina o número cromáticos dos grafos abaixo:

Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

- se $|V| = 0$, então $\chi(G) = 0$

Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

- se $|V| = 0$, então $\chi(G) = 0$
- se $|E| = 0$ e $|V| > 0$, então $\chi(G) = 1$

Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

- se $|V| = 0$, então $\chi(G) = 0$
- se $|E| = 0$ e $|V| > 0$, então $\chi(G) = 1$
- $\chi(G) \leq |V|$

Limites para o Número Cromático

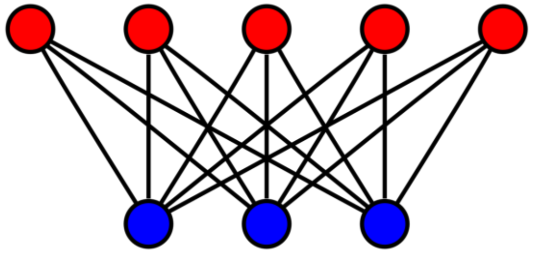
Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

- se G bipartido, então

Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

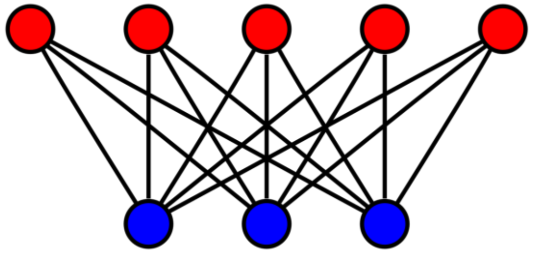
- se G bipartido, então $\chi(G) = 2$



Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

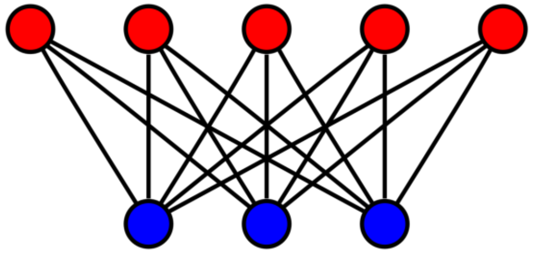
- se G k-partido, então $\chi(G) = k$



Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

- se G k-partido, então $\chi(G) = k$

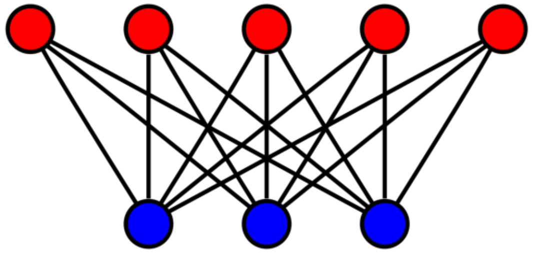


- $\omega(G) \leq \chi(G)$, onde $\omega(G)$ é o número de nodos do maior clique de G

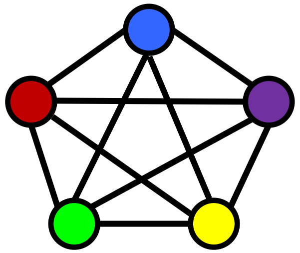
Limites para o Número Cromático

Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo simples G, então:

- se G k-partido, então $\chi(G) = k$



- $\omega(G) \leq \chi(G)$, onde $\omega(G)$ é o número de nodos do maior clique de G
  - num clique cada nodo deve obrigatoriamente ter uma cor diferente



$\chi(K_5) = 5$

Limites para o Número Cromático

Teorema: Em um grafo simples $G = (V, E)$ temos $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G)$ é o maior grau do grafo.

Intuição: o número cromático é sempre menor ou igual ao maior grau do grafo mais um.

Limites para o Número Cromático

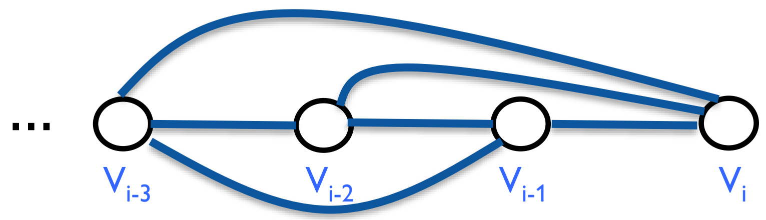
Demonstração:

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma enumeração qualquer dos vértices de V.
- Seja $C = c_1, \ldots, c_k$ uma coleção de $k = \Delta(G) + 1$ cores.

Limites para o Número Cromático

Demonstração:

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma enumeração qualquer dos vértices de V.
- Seja $C = c_1, \ldots, c_k$ uma coleção de $k = \Delta(G) + 1$ cores.

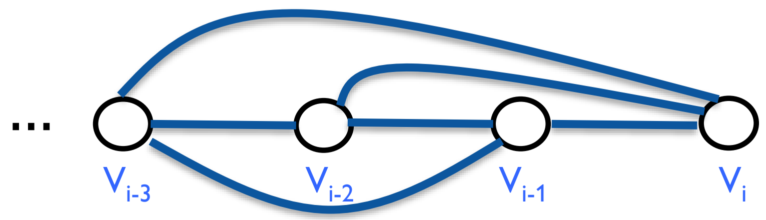


$\Delta(G) = 3$
$K = \Delta(G) + 1 = 4$

Limites para o Número Cromático

Demonstração:

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma enumeração qualquer dos vértices de V.
- Seja $C = c_1, \ldots, c_k$ uma coleção de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Para cada v_i atribua a primeira cor da enumeração C que não ocorre em nenhum dos $v_1, \ldots, v_{i-1}$ anteriores adjacentes a v_i



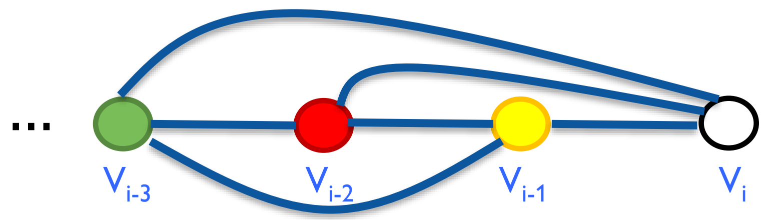
$\Delta(G) = 3$

$K = \Delta(G) + 1 = 4$

Limites para o Número Cromático

Demonstração:

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma enumeração qualquer dos vértices de V.
- Seja $C = c_1, \ldots, c_k$ uma coleção de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Para cada v_i atribua a primeira cor da enumeração C que não ocorre em nenhum dos $v_1, \ldots, v_{i-1}$ anteriores adjacentes a v_i



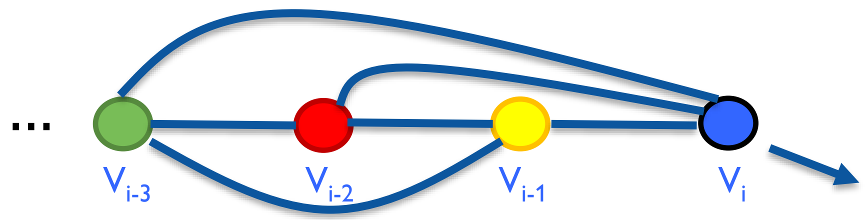
$\Delta(G) = 3$

$K = \Delta(G) + 1 = 4$

Limites para o Número Cromático

Demonstração:

- Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma enumeração qualquer dos vértices de V.
- Seja $C = c_1, \ldots, c_k$ uma coleção de $k = \Delta(G) + 1$ cores.
- Para cada v_i atribua a primeira cor da enumeração C que não ocorre em nenhum dos $v_1, \ldots, v_{i-1}$ anteriores adjacentes a v_i
- No pior caso, há $\Delta(G)$ vizinhos adjacentes de v_i com cores diferentes precedendo v_i , e portanto precisamos de uma cor adicional



Cor $\Delta(G) + 1$

$\Delta(G) = 3$

$K = \Delta(G) + 1 = 4$

Limites para o Número Cromático

Teorema: Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)

Limites para o Número Cromático

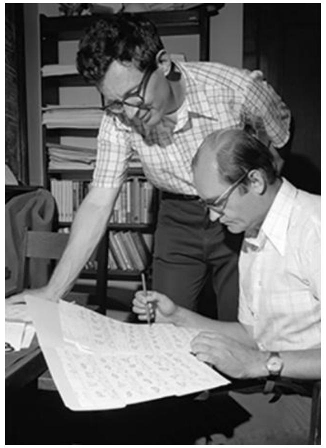
Teorema: Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)

- F. Guthrie conjecturou o problema em 1852 para seu professor, de Morgan.

- Durante anos ninguém conseguiu provar formalmente a validade do teorema.

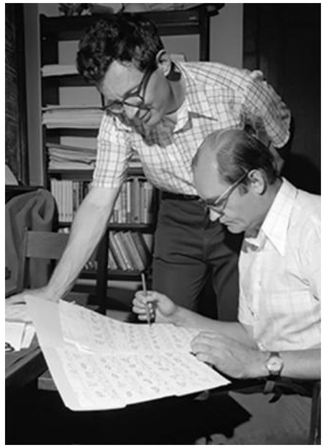
Limites para o Número Cromático



Teorema: Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)
- F. Guthrie conjecturou o problema em 1852 para seu professor, de Morgan.
- Durante anos ninguém conseguiu provar formalmente a validade do teorema.
- Somente em 1977, Appel and Haken provaram o teorema com ajuda de computadores (primeira vez que um teorema importante é provado dessa forma).

Limites para o Número Cromático



Teorema: Se $G = (V, E)$ é simples e planar, então $\chi(G) \leq 4$.

- Conhecido como Four Color Theorem (Teorema das Quatro Cores)
- F. Guthrie conjecturou o problema em 1852 para seu professor, de Morgan.
- Durante anos ninguém conseguiu provar formalmente a validade do teorema.
- Somente em 1977, Appel and Haken provaram o teorema com ajuda de computadores (primeira vez que um teorema importante é provado dessa forma).
- Como parte da prova consistia numa busca exaustiva de muitos casos discretos através de computadores, alguns matemáticos não aceitaram.

Limites para o Número Cromático

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?

Limites para o Número Cromático

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Hard!

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Completo! (entre os 21 problemas NP-Completos de Karp)

Limites para o Número Cromático

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Hard!

INF05515 - Complexidade de Algoritmos
Classes de problemas, complexidade, etc.

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?
  - Problema NP-Completo! (entre os 21 problemas NP-Completos de Karp)

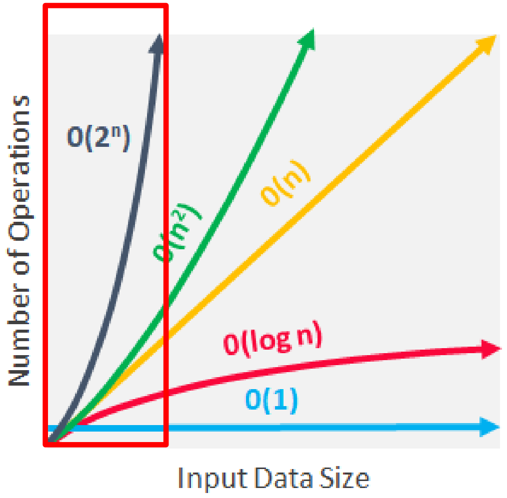
Limites para o Número Cromático

- Como computar $\chi(G)$ dado um grafo G?
    - Problema NP-Hard!

Disciplina de Teoria da Computação
Classes de problemas, complexidade, etc.

- Como verificar se $\chi(G) = k$ dado um grafo G?
    - Problema NP-Completo! (entre os 21 problemas NP-Completos de Karp)

- Intuitivamente: o número de operações de um algoritmo ótimo para o problema cresce **exponencialmente** em relação ao tamanho do grafo.



Algoritmo Guloso (não ótimo)

Entrada: grafo simples $G = (V, E)$, cores $C = c_1, c_2, \ldots, c_k$

Saída: coloração $f : V \rightarrow C$

Ordene os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em ordem arbitrária

Para cada vértice v_i , em ordem:

  Para cada cor c_j, em ordem:

    Se algum vizinho de v_i possui cor c_j, vá para a próxima cor

    Senão, atribua cor c_j para o vértice v_i : $f(v_i) = c_j$

Lista de Exercícios

Referências

- Paulo Oswaldo Boaventura Netto. Grafos: teoria, modelos, algoritmos. 2006.isbn: 8521203918.1
- Edson Prestes. Introdução a Teoria dos Grafos. 2020.url:http://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/GraphTheory/Livro/LivroGrafos.pdf.
- Richard J. Trudeau. Introduction to graph theory. 2015.isbn: 1684112311.url:http://www.worldcat.org/isbn/1684112311.
- Douglas B. West. Introduction to Graph Theory. 2nd ed. Prentice Hall, Sept. 2000.isbn: 0130144002
- Weisstein, Eric W. "Four-Color Theorem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html