

Unidade VI:

Árvores AVL



PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

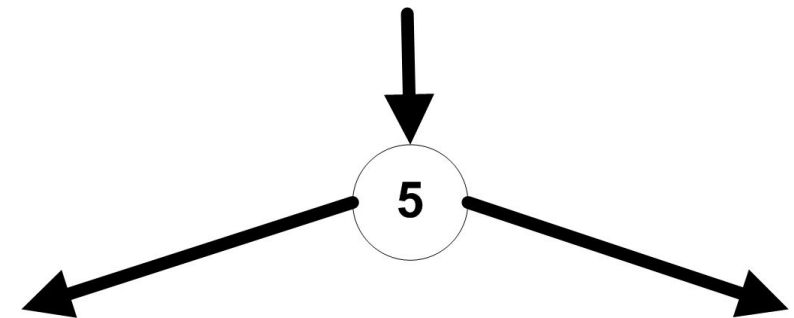
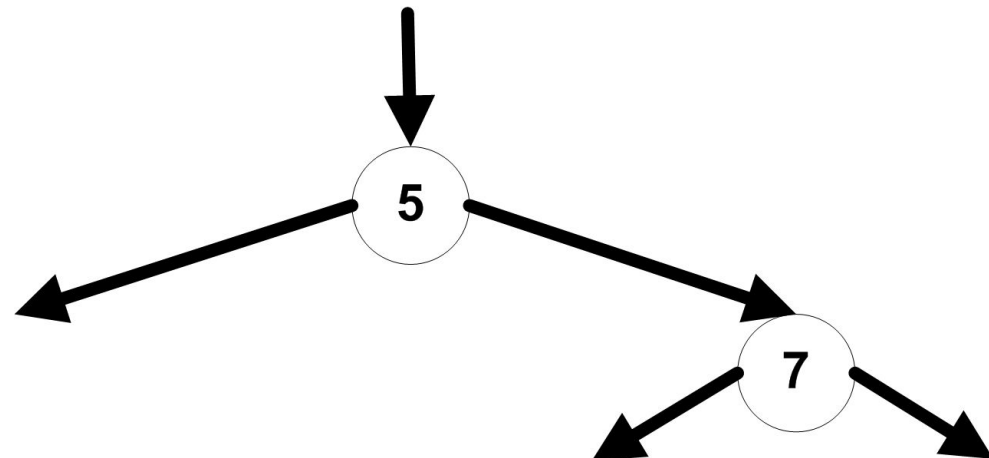
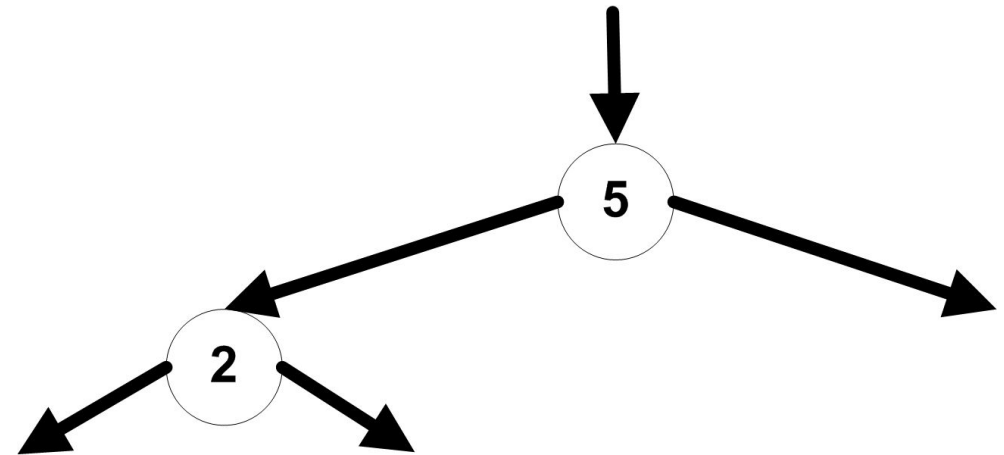
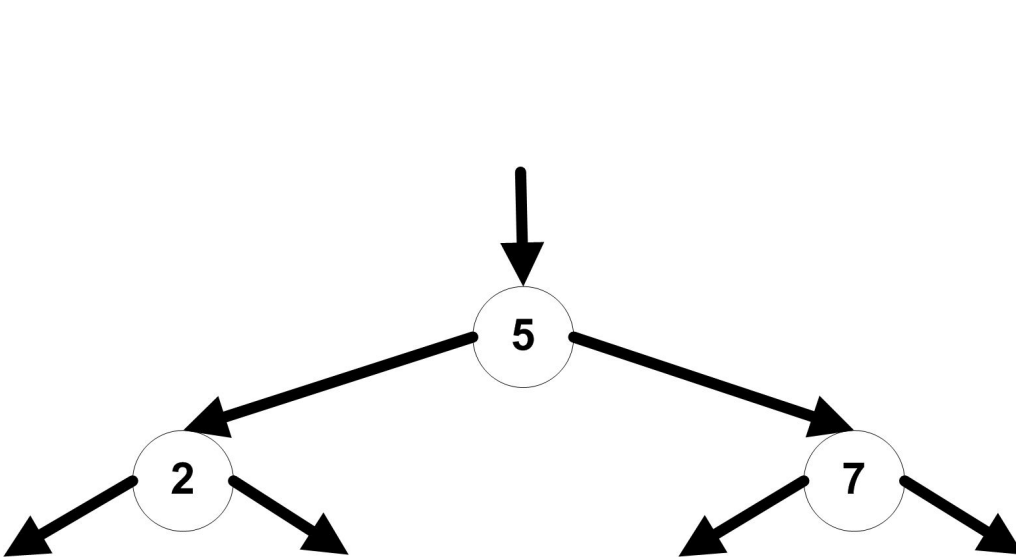
Introdução

- As árvores AVL foram propostas por Adelson-Velskii e Landis
- No pior caso, o número de comparações para se localizar um elemento em uma AVL é aproximadamente $1,44 * \lg(n) = \Theta(\lg(n))$
- Cada nó conhece seu **fator de balanceamento** que consiste na diferença entre o número de níveis de suas subárvores à esquerda e à direita

$$\text{fator}(i) = \text{alturaDir}(i) - \text{alturaEsq}(i)$$

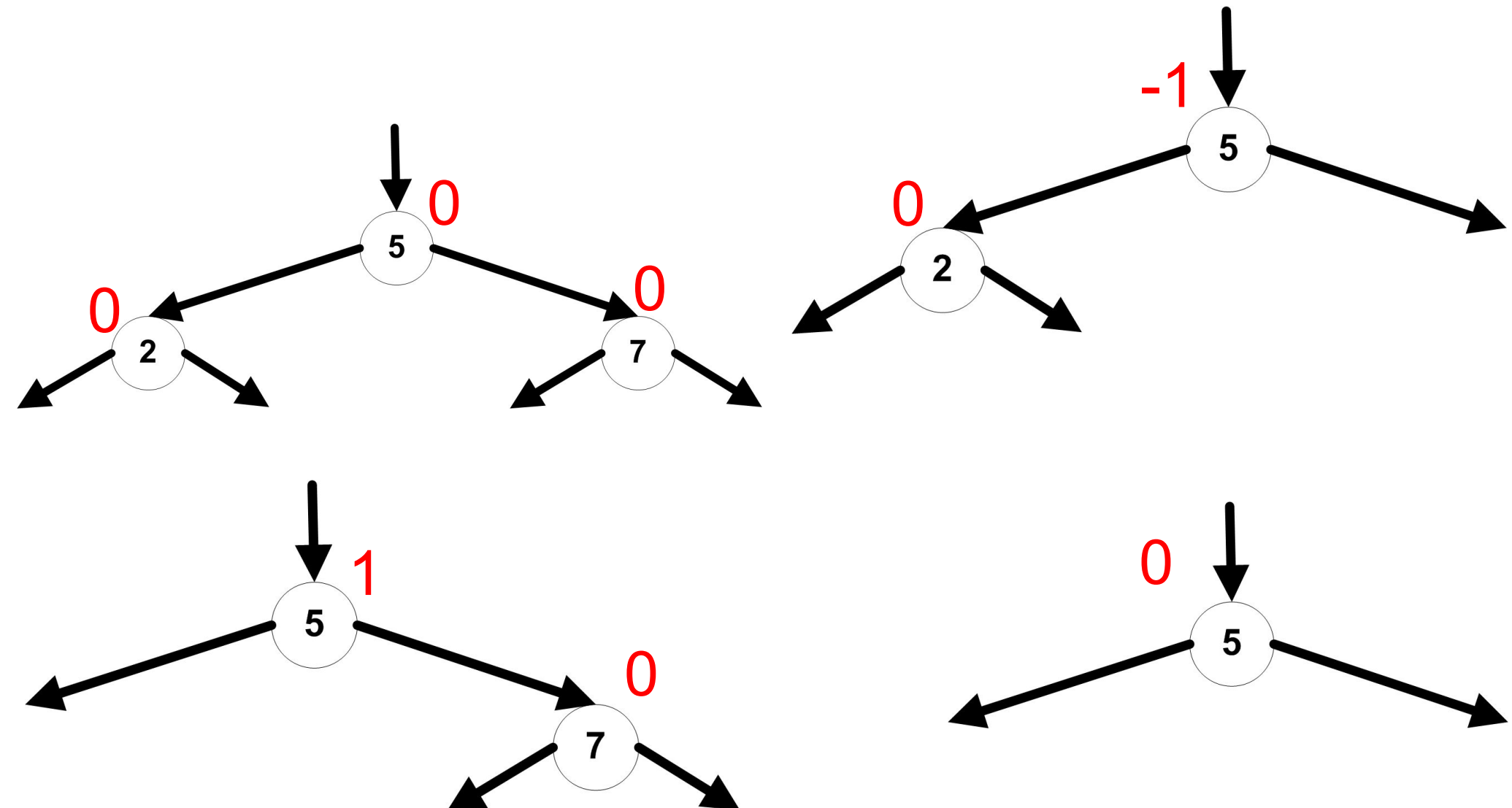
Exercício

- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



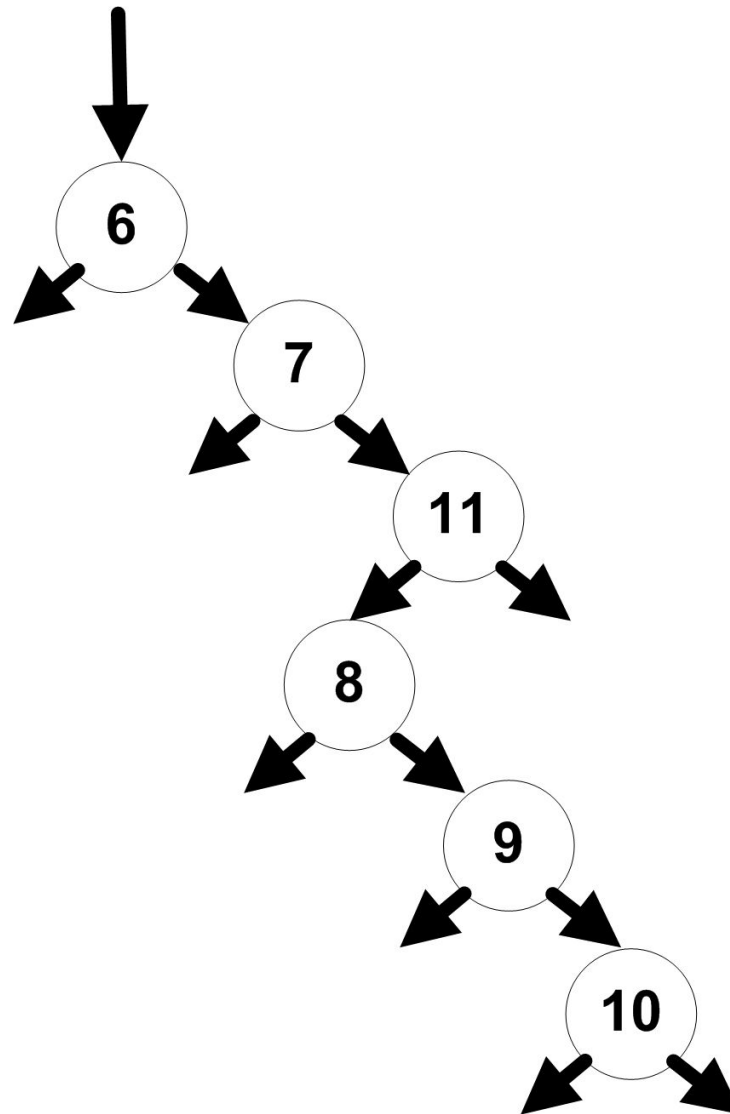
Exercício

- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



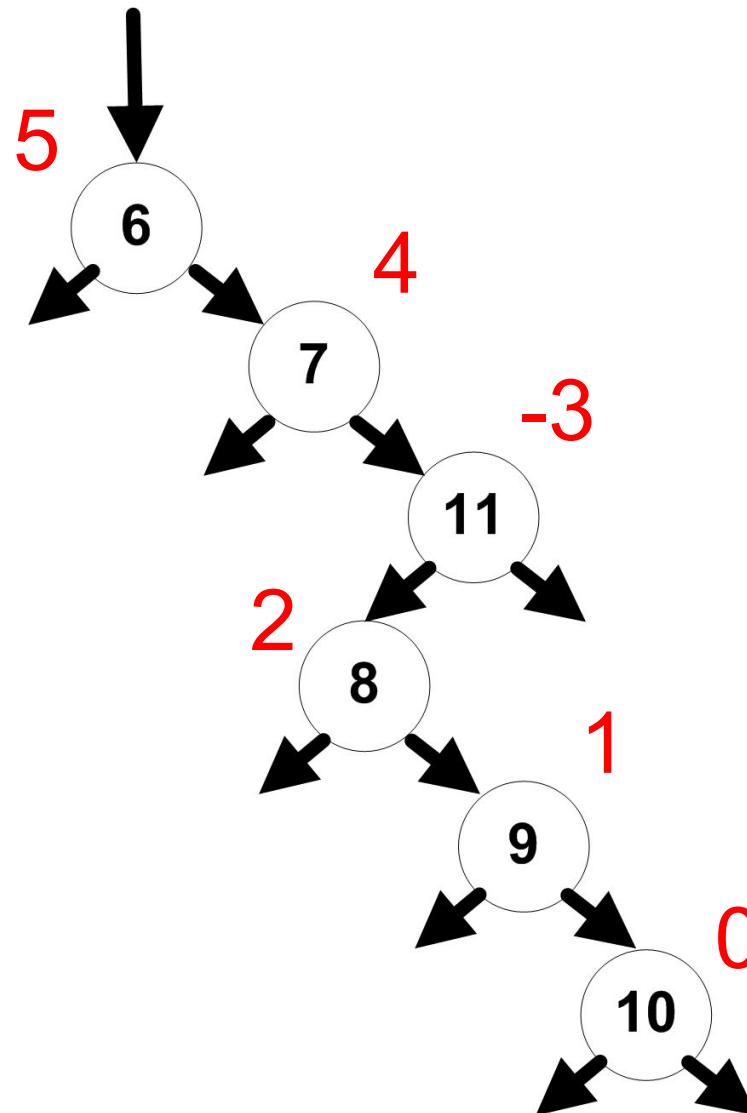
Exercício

- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



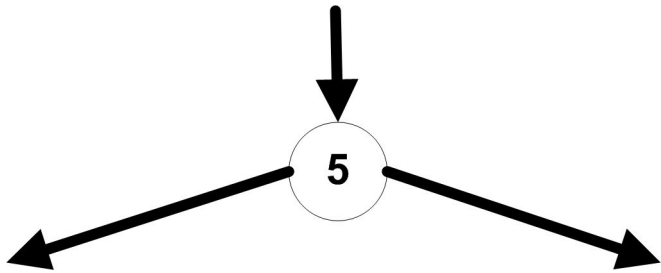
Exercício

- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



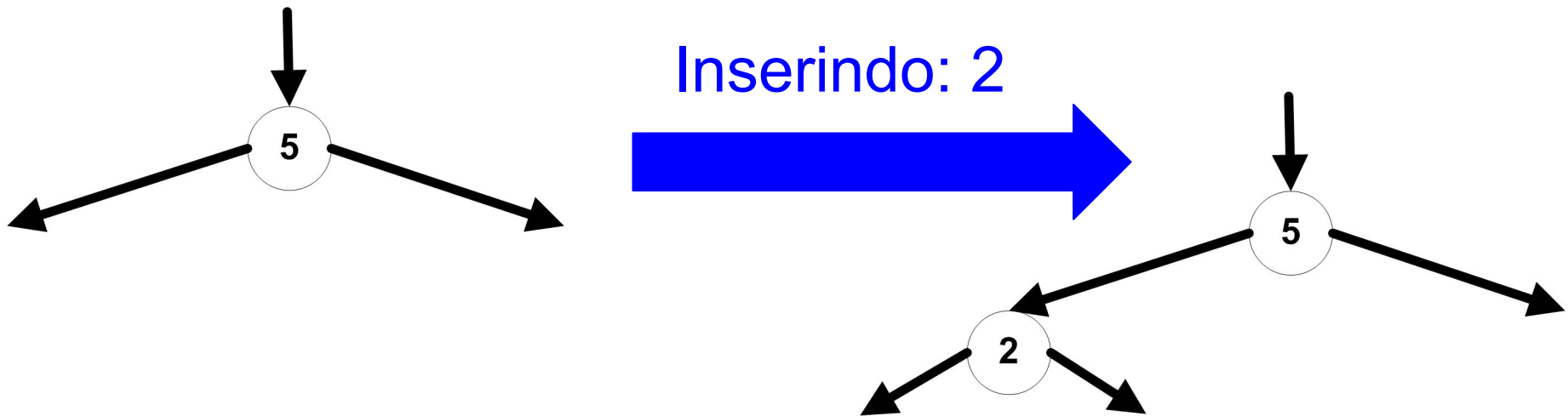
Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um



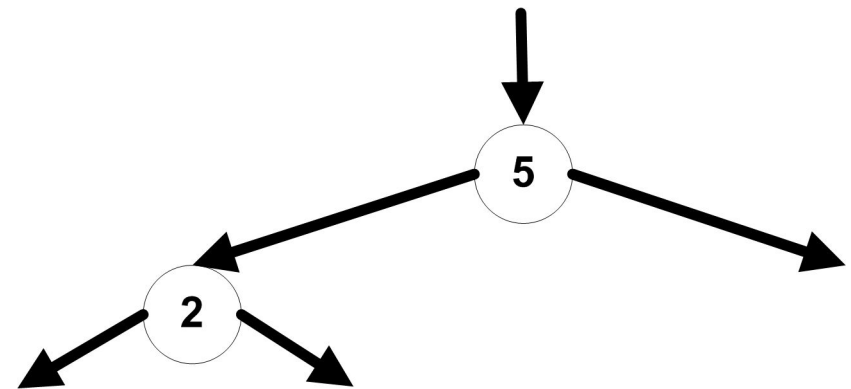
Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um



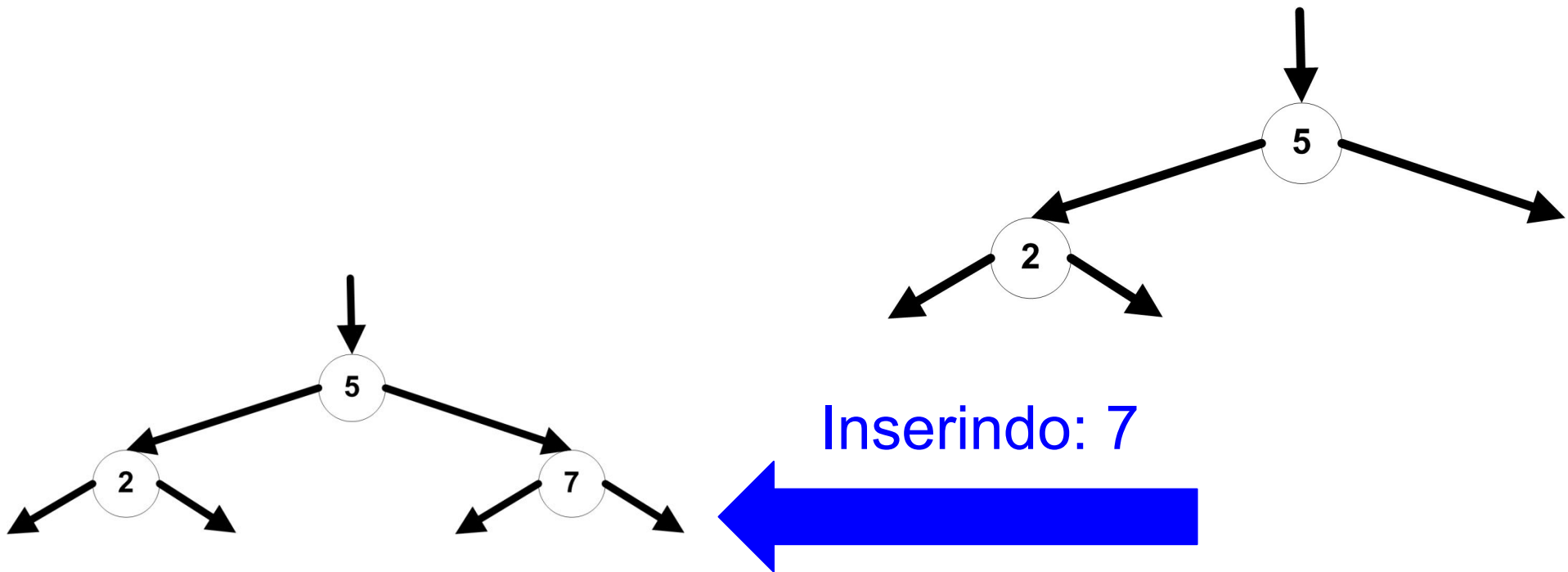
Exercício

- Agora, faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser zero



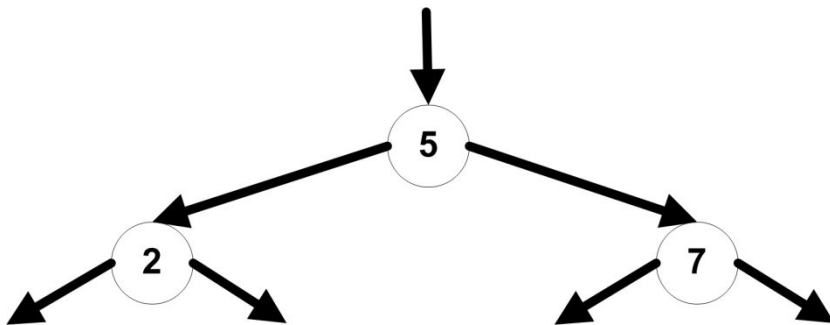
Exercício

- Faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser 0



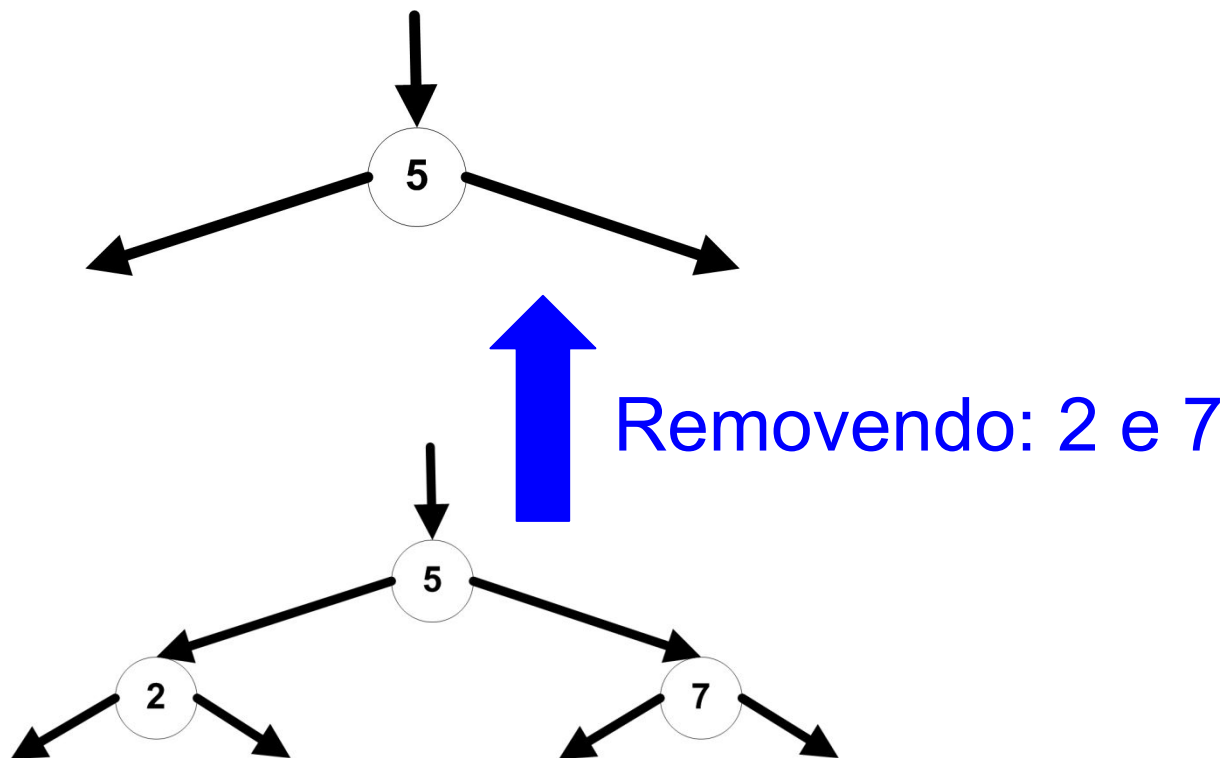
Exercício

- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?



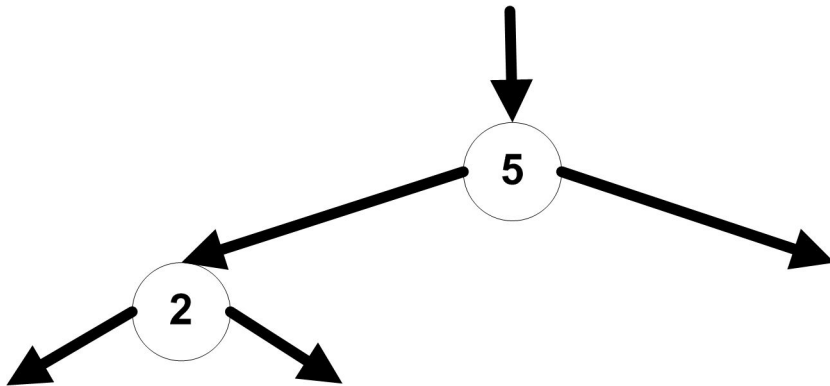
Exercício

- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?



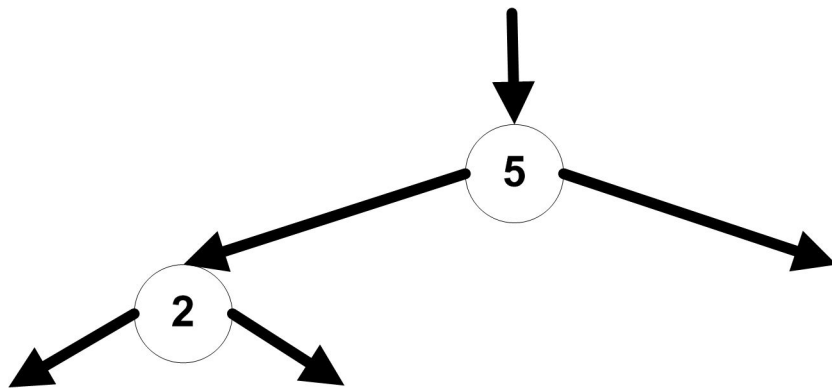
Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

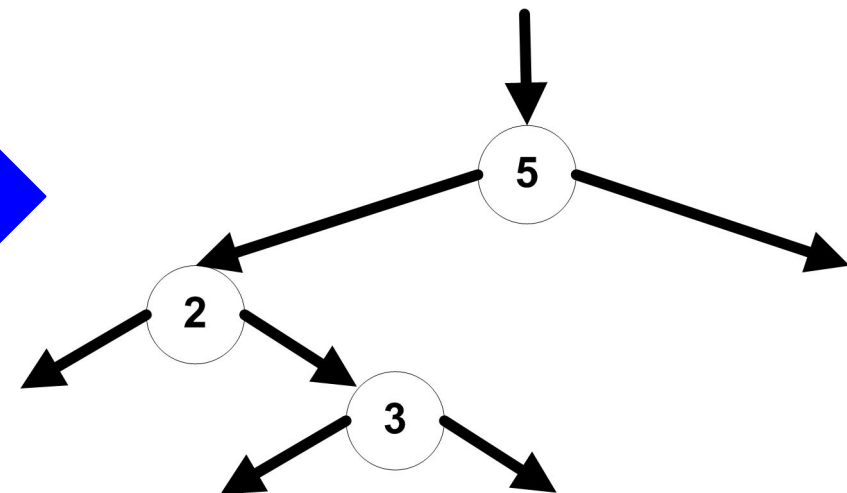


Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

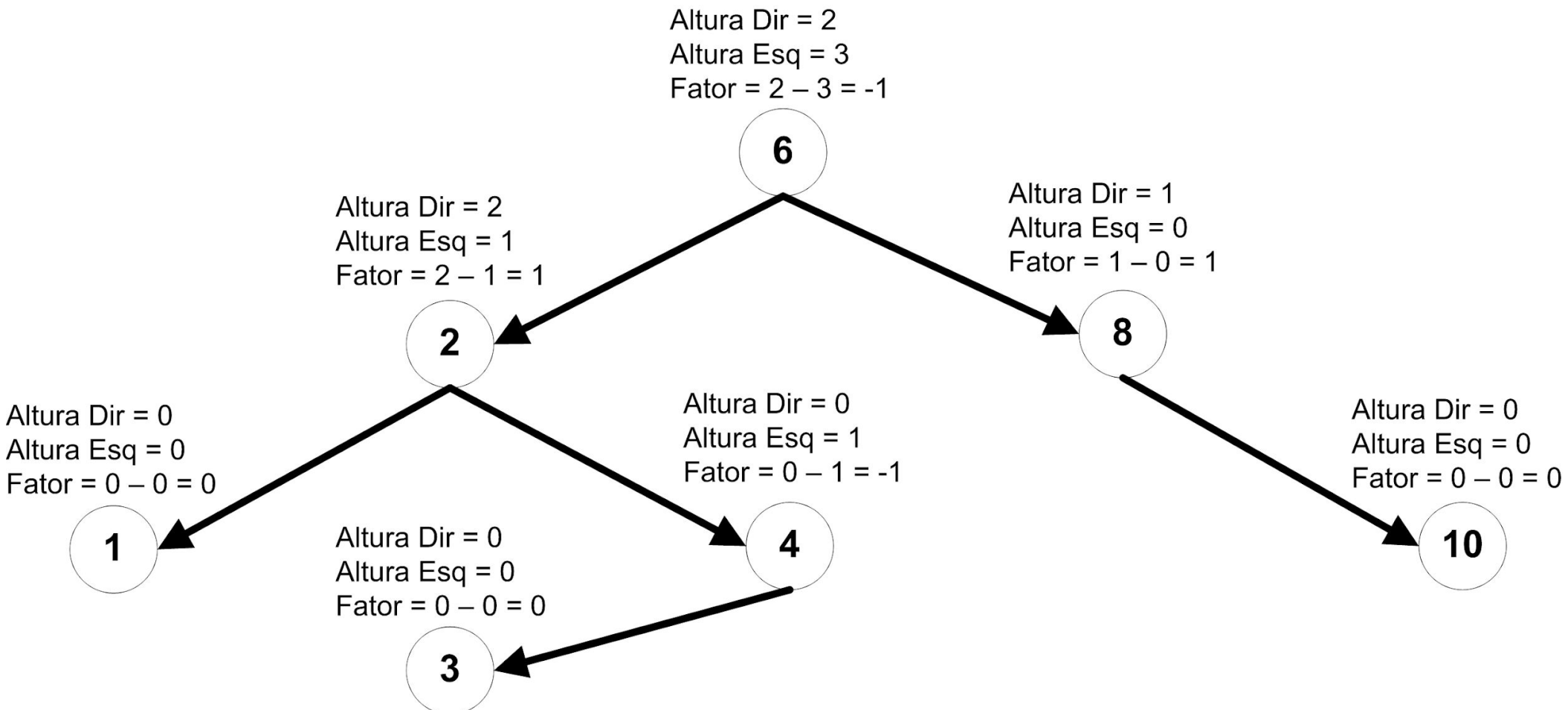


Inserindo: 3



Exemplo de uma Árvore AVL

- O fator de cada nó será -1, 0 ou 1 como no exemplo abaixo:





Ideia Básica

- Cada nó conhece seu fator de balanceamento
- Quando o fator de um nó se torna ± 2 , o algoritmo da AVL rotaciona esse nó, sabendo que existem quatro tipos de rotação (R_E , R_D , R_{DE} e R_{ED})

Ideia Básica

| Fator do nó | Tipo de rotação |
|-------------|-------------------------|
| 2 | Rotação para a esquerda |
| -2 | Rotação para a direita |

Ideia Básica

| Fator do nó | Tipo de rotação |
|-------------|--|
| 2 | Rotação para a esquerda  (R_E e R_{DE}) |
| -2 | Rotação para a direita  (R_D e R_{ED}) |

Ideia Básica

Fator
do nó

O tipo de rotação depende do fator do
filho pertencente a maior subárvore

Ou seja, o pai...

2

Rotação para a esquerda

$(R_E \text{ e } R_{DE})$

-2

Rotação para a direita

$(R_D \text{ e } R_{ED})$

Ideia Básica

| Fator do nó | Fator do filho à direita | Fator do filho à esquerda | Tipo de rotação |
|-------------|--------------------------|---------------------------|--------------------|
| 2 | 1 0 | | Simples à esquerda |
| | -1 | | Dupla dir-esq |
| -2 | | -1 0 | Simples à direita |
| | | 1 | Dupla esq-dir |

Ideia Básica

| Fator do nó | Fator do filho à direita | Fator do filho à esquerda | Tipo de rotação |
|-------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 2 | 1 | - | Simples à esquerda |
| | 0 | | |
| | -1 | | Dupla dir-esq |
| -2 | | -1 0 | Simples à direita |
| | | 1 | Dupla esq-dir |

Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2

Altura Dir = 1
Altura Esq = 0
Fator = $1 - 0 = 1$

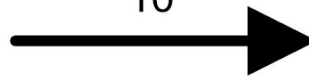
6

Altura Dir = 0
Altura Esq = 0
Fator = $0 - 0 = 0$

8

Árvore
Balanceada

Inserindo
10



Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = $2 - 0 = 2$

6

Altura Dir = 1
Altura Esq = 0
Fator = $1 - 0 = 1$

8

Altura Dir = 0
Altura Esq = 0
Fator = $0 - 0 = 0$

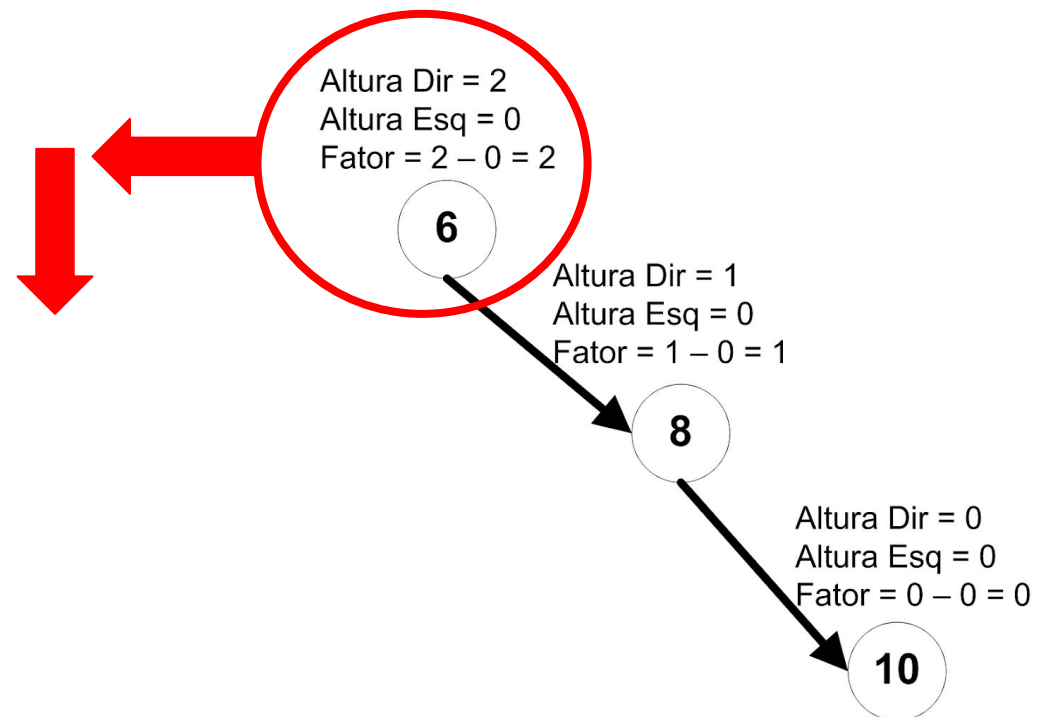
10

Árvore
Desbalanceada

Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

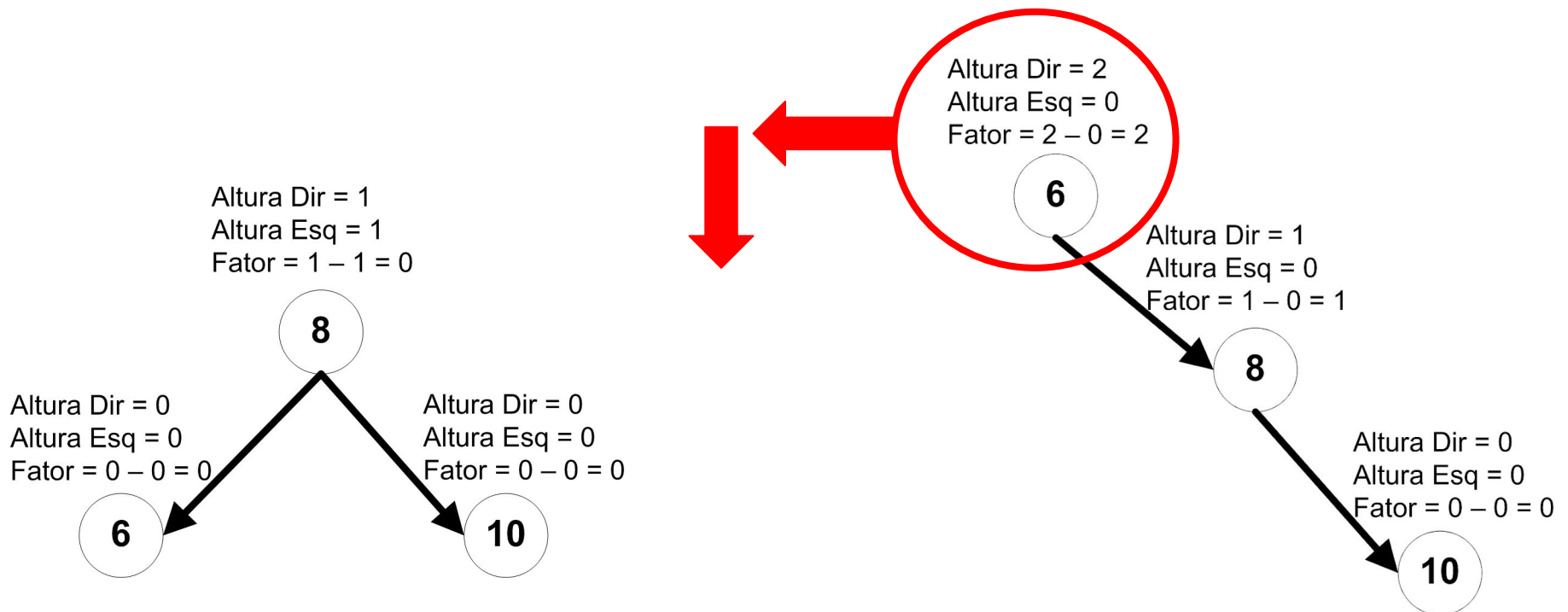
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2

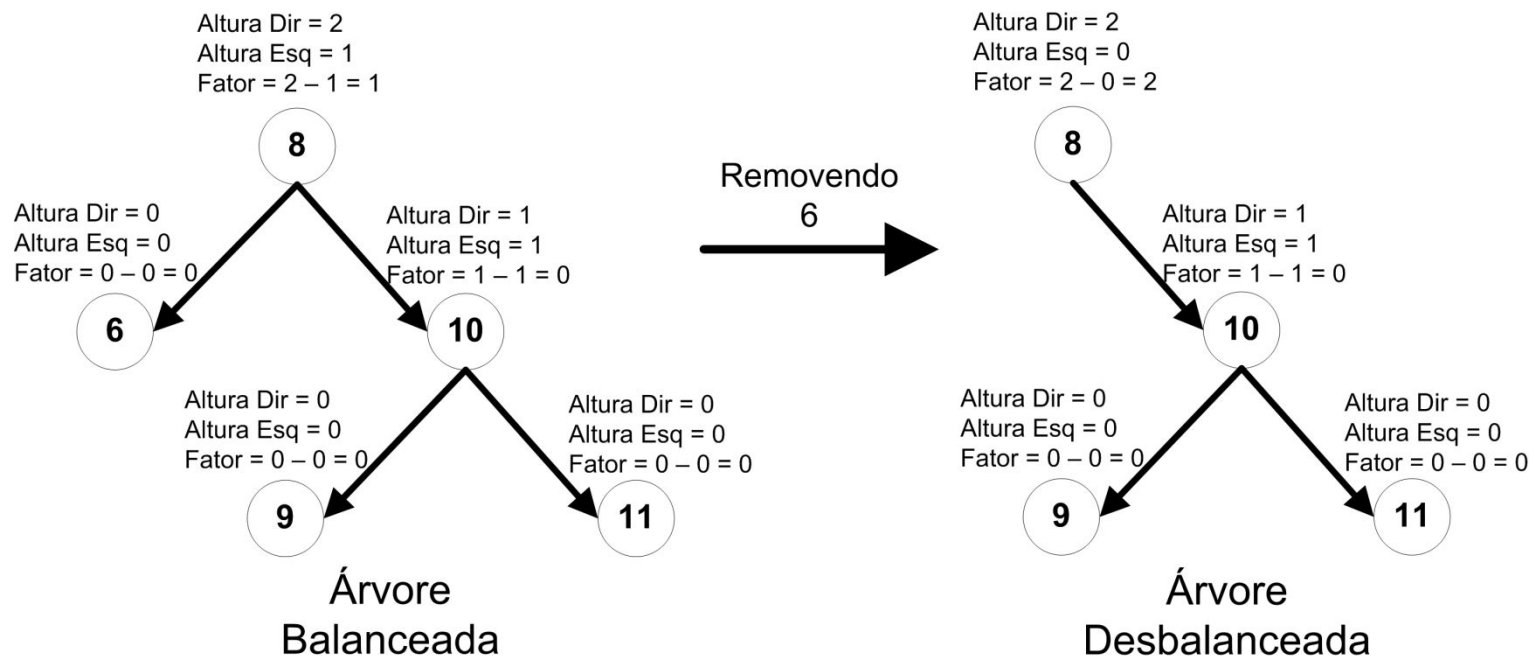


Ideia Básica

| Fator do nó | Fator do filho à direita | Fator do filho à esquerda | Tipo de rotação |
|-------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 2 | 1 | | Simples à esquerda |
| | 0 | | |
| | -1 | | Dupla dir-esq |
| -2 | | -1 0 | Simples à direita |
| | | 1 | Dupla esq-dir |

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

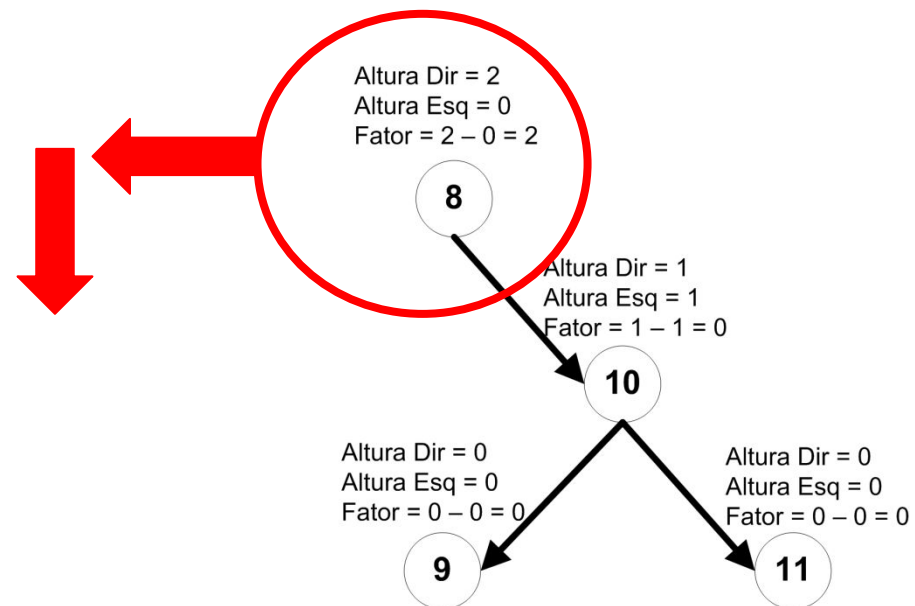
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

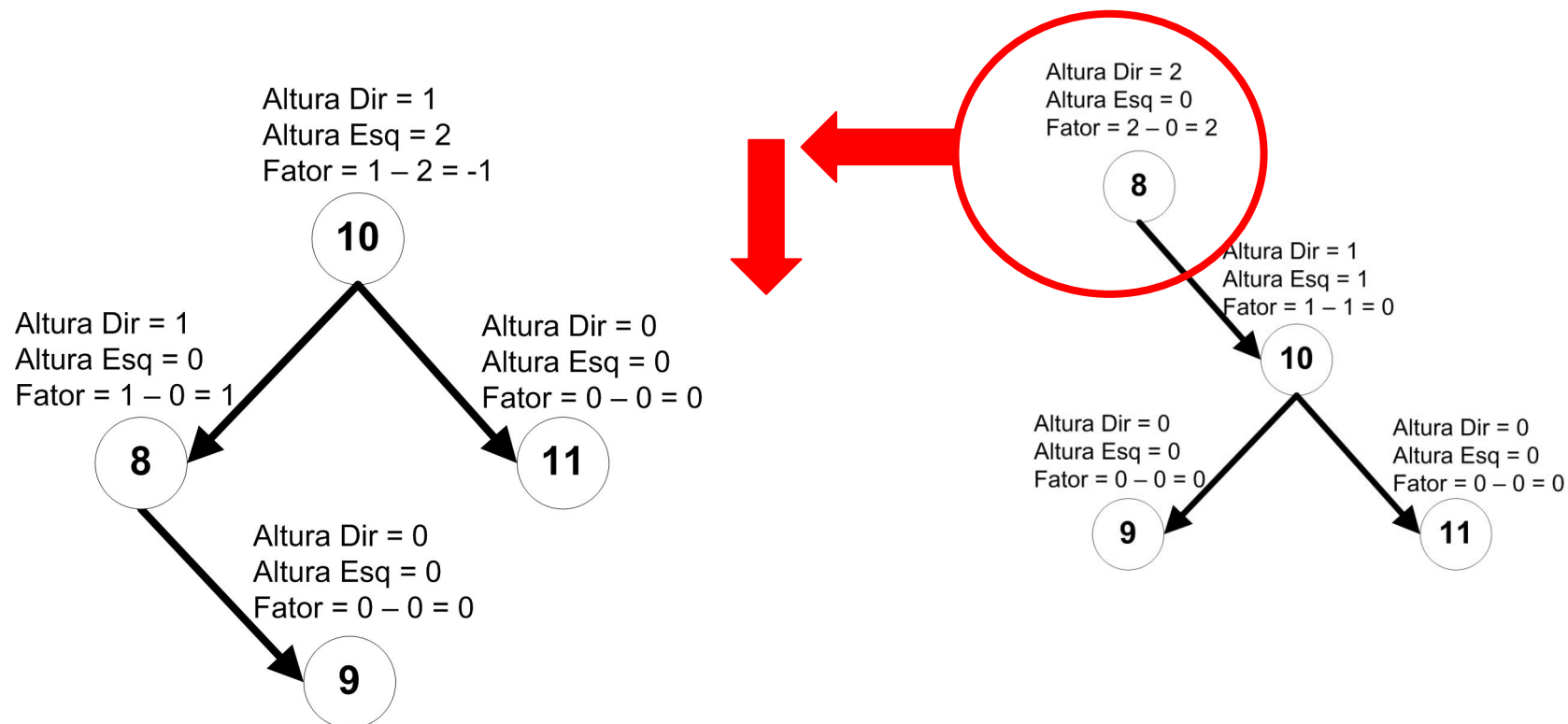
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



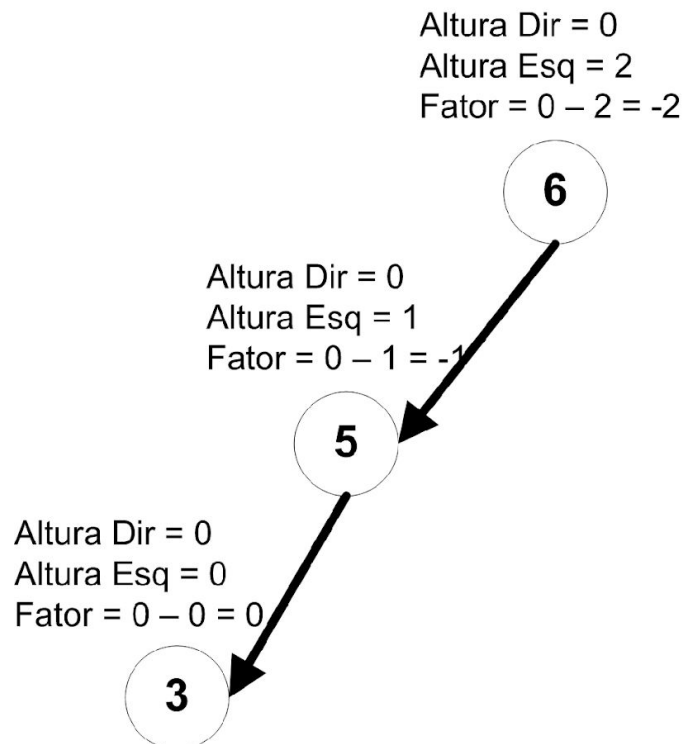
Ideia Básica

| Fator do nó | Fator do filho à direita | Fator do filho à esquerda | Tipo de rotação |
|-------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 2 | 1 | | Simples à esquerda |
| | 0 | | Dupla dir-esq |
| -2 | | -1 | Simples à direita |
| | | 0 | |
| | | 1 | Dupla esq-dir |

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

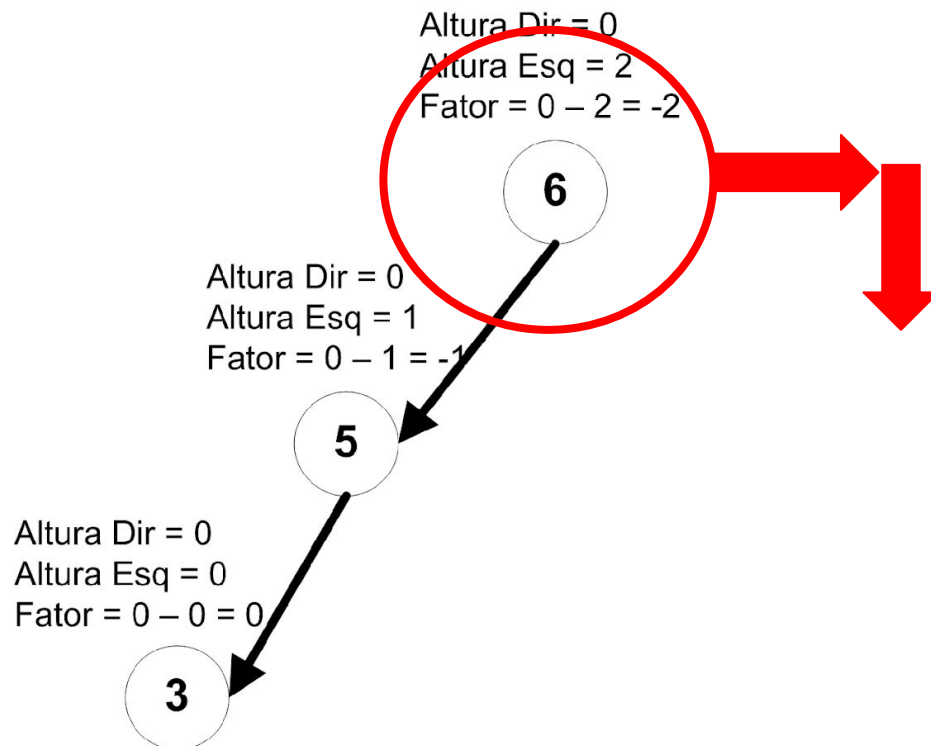
Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

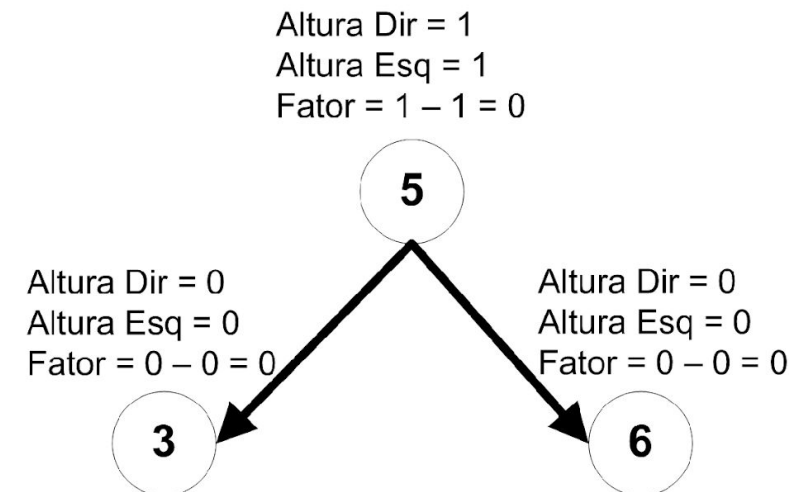
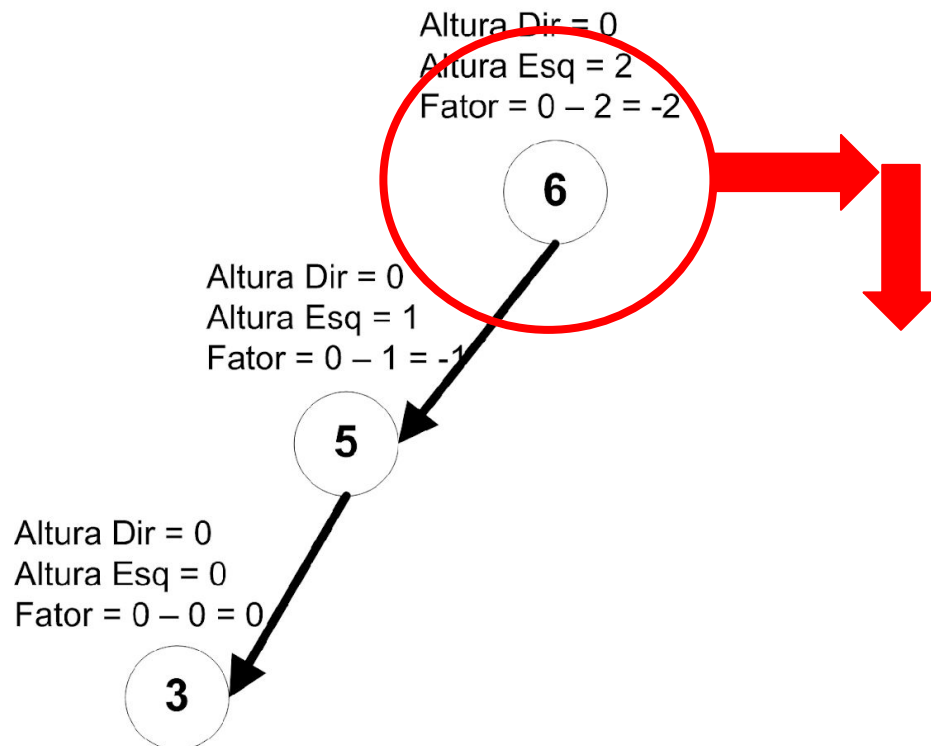
Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



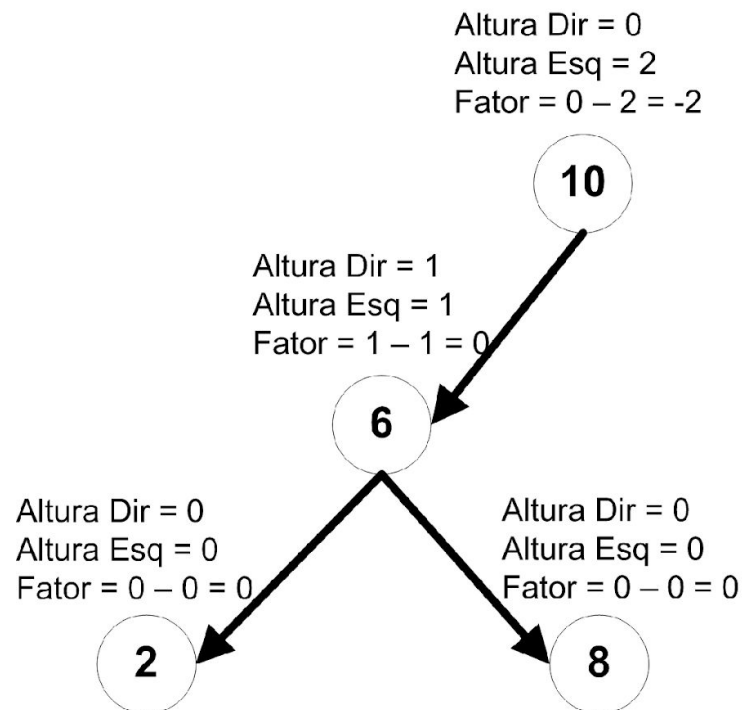
Ideia Básica

| Fator do nó | Fator do filho à direita | Fator do filho à esquerda | Tipo de rotação |
|-------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 2 | 1 | | Simples à esquerda |
| | 0 | | Dupla dir-esq |
| -2 | | -1 | Simples à direita |
| | | 0 | |
| | | 1 | Dupla esq-dir |

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

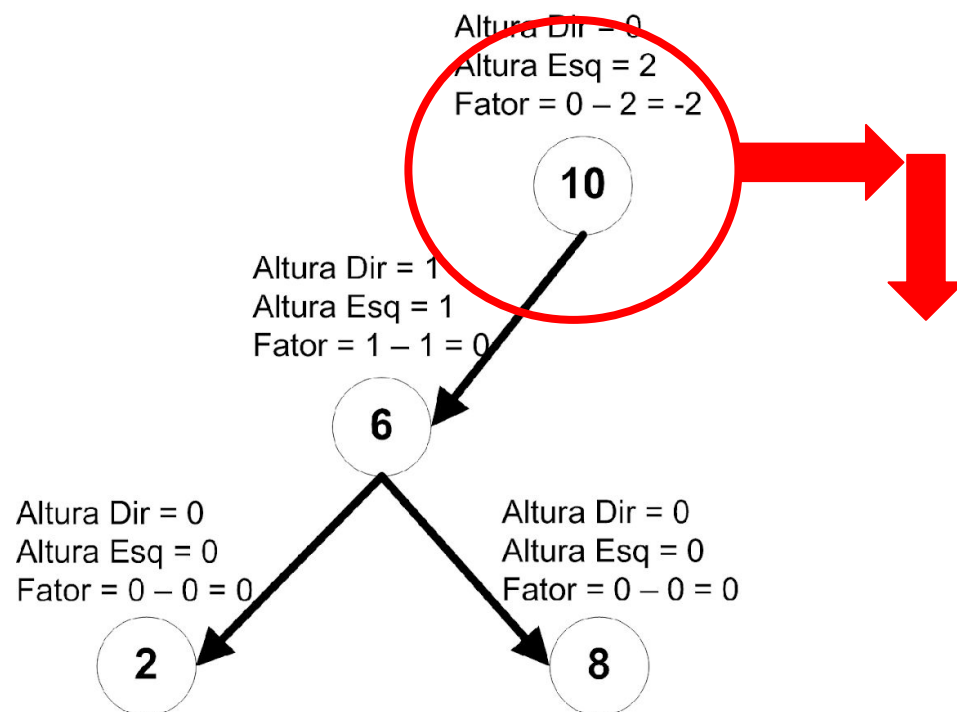
Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

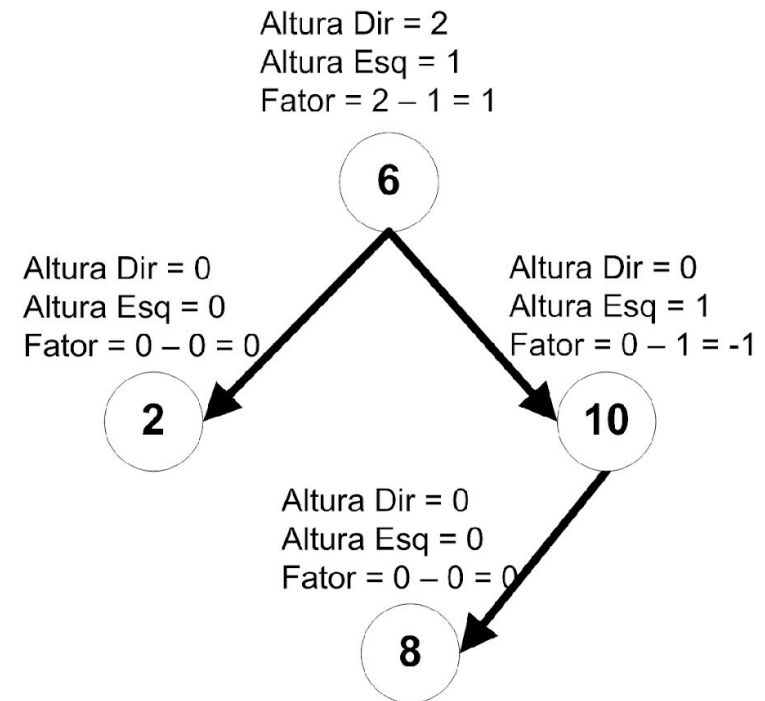
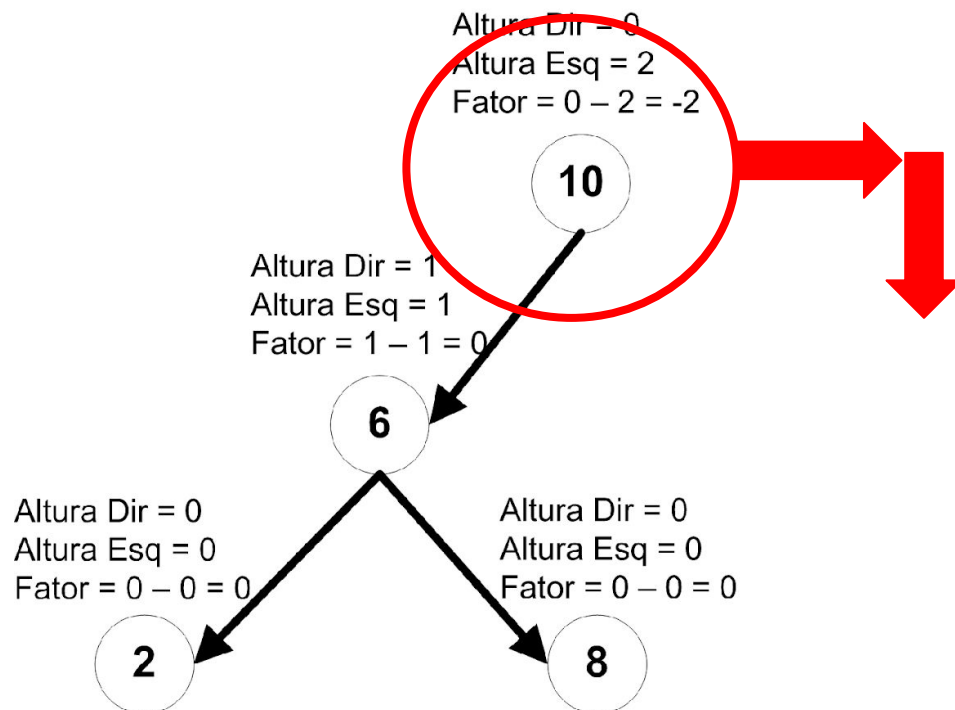
Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



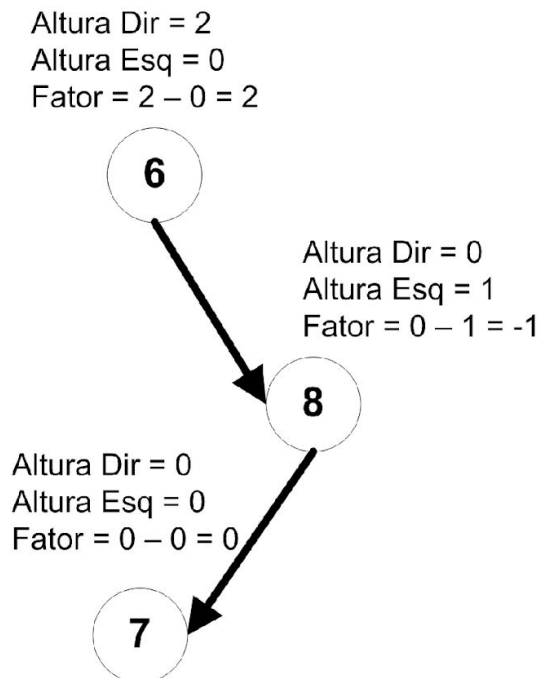
Ideia Básica

| Fator do nó | Fator do filho à direita | Fator do filho à esquerda | Tipo de rotação |
|-------------|--------------------------|---------------------------|--------------------|
| 2 | 1 0 | | Simples à esquerda |
| | -1 | | Dupla dir-esq |
| -2 | | -1 0 | Simples à direita |
| | | 1 | Dupla esq-dir |

Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

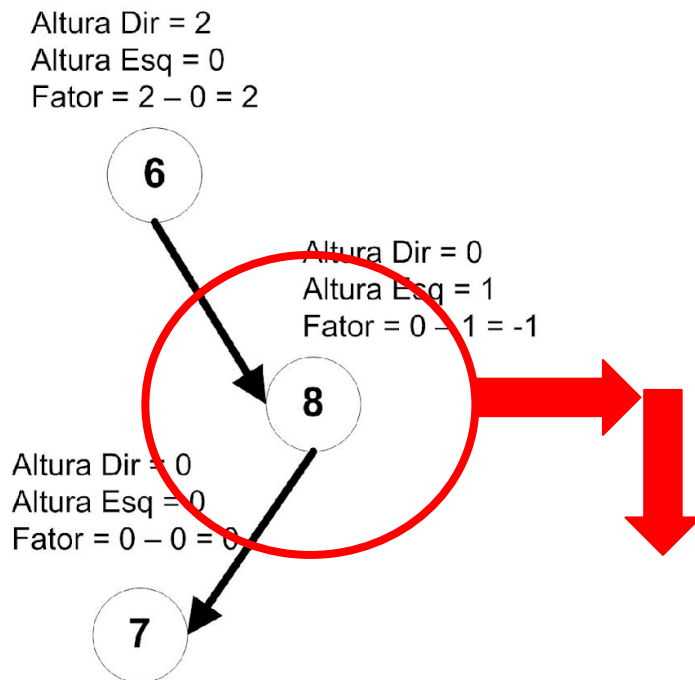
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

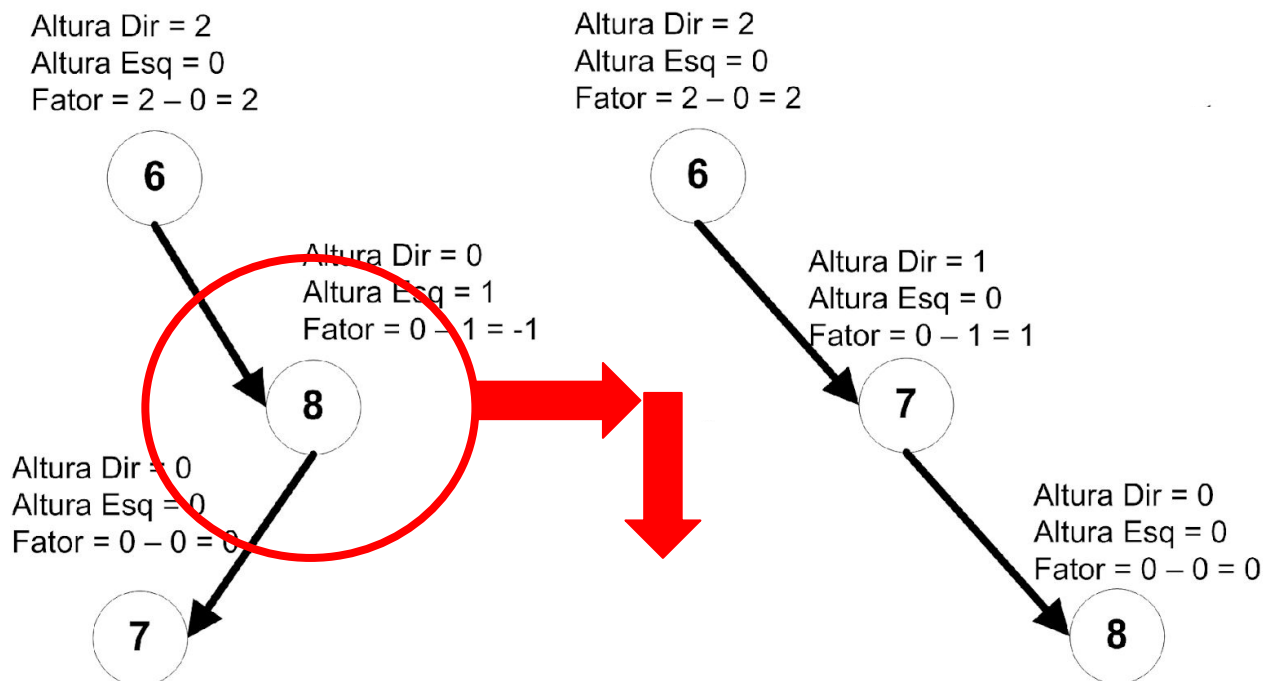
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

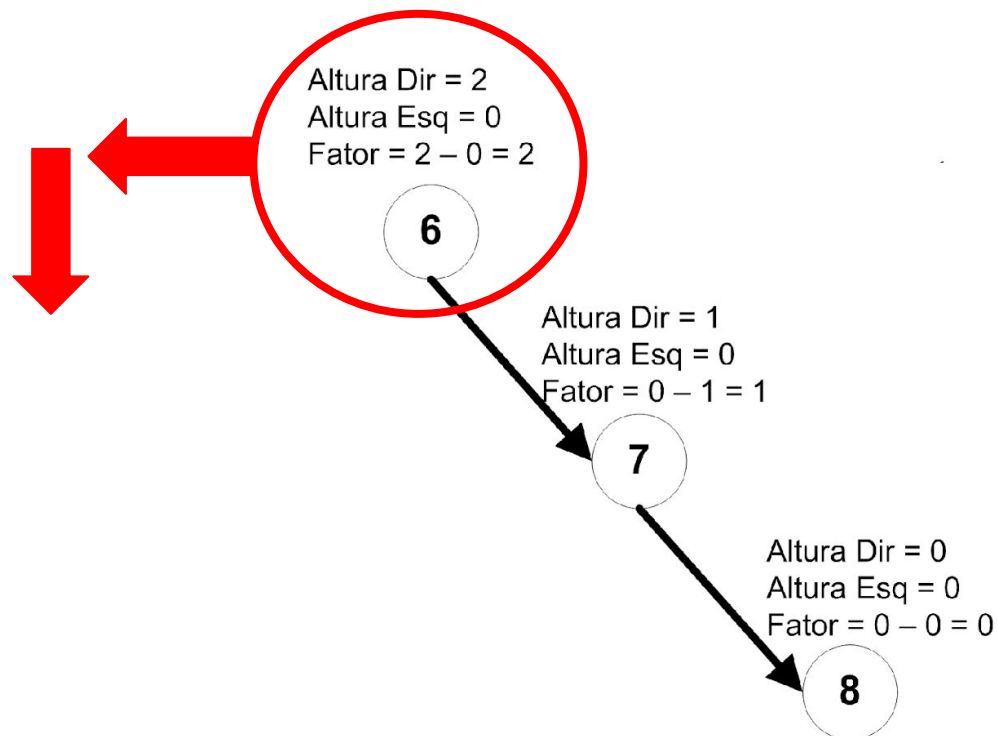
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

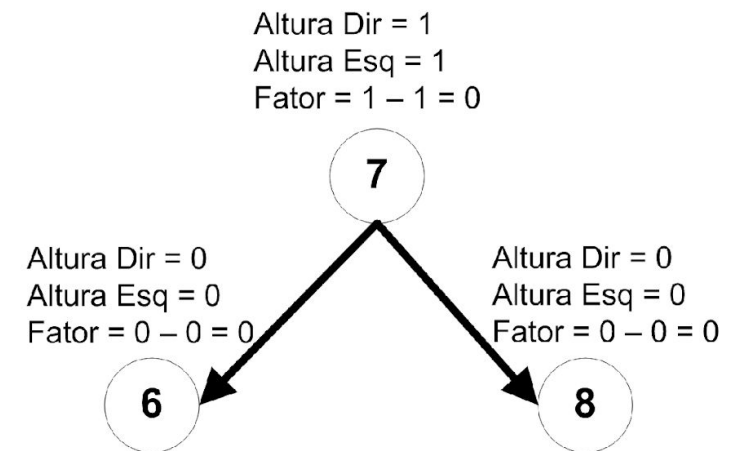
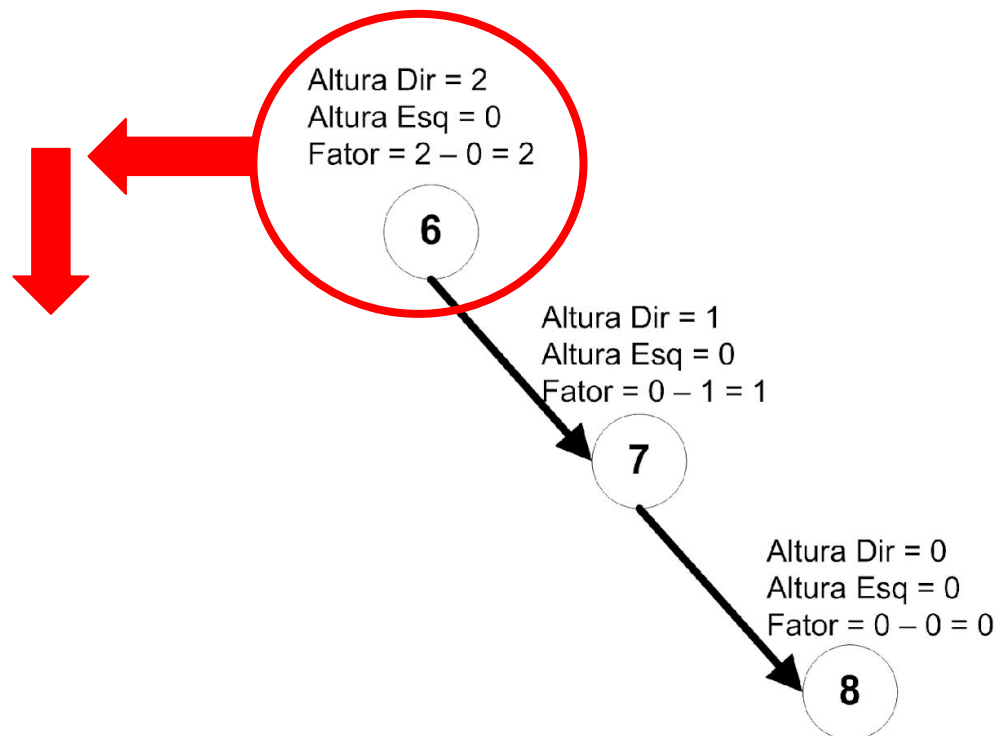
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



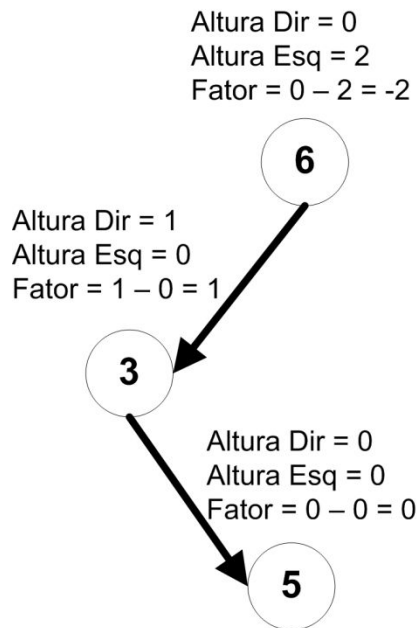
Ideia Básica

| Fator do nó | Fator do filho à direita | Fator do filho à esquerda | Tipo de rotação |
|-------------|--------------------------|---------------------------|----------------------|
| 2 | 1 0 | | Simples à esquerda |
| | -1 | | Dupla dir-esq |
| -2 | | -1 0 | Simples à direita |
| | | 1 | Dupla esq-dir |

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

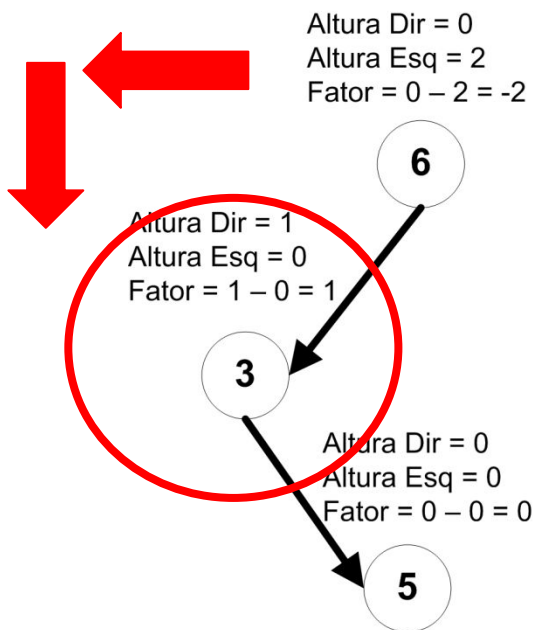
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

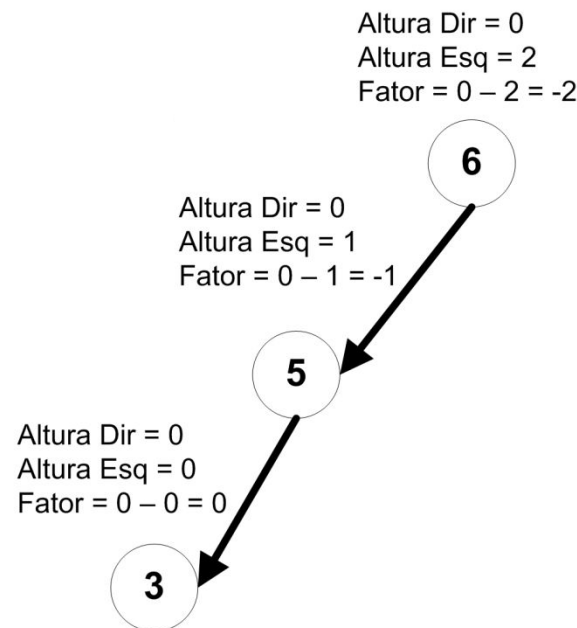
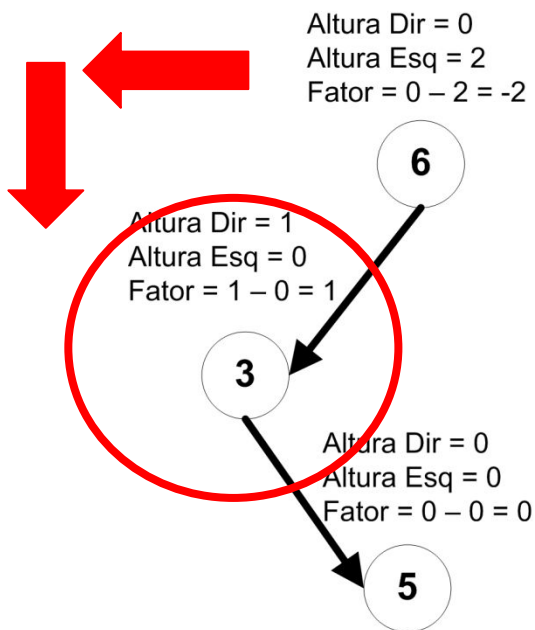
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

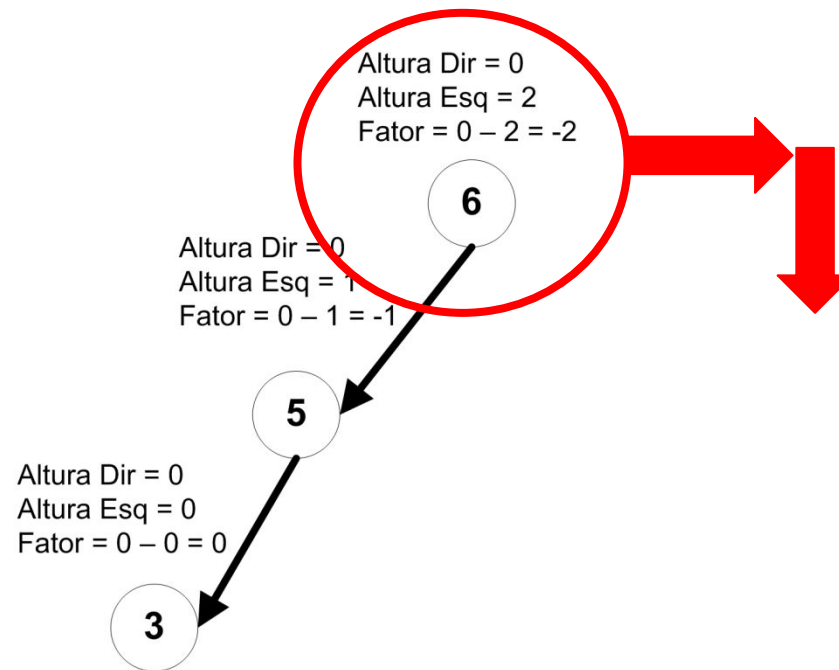
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2

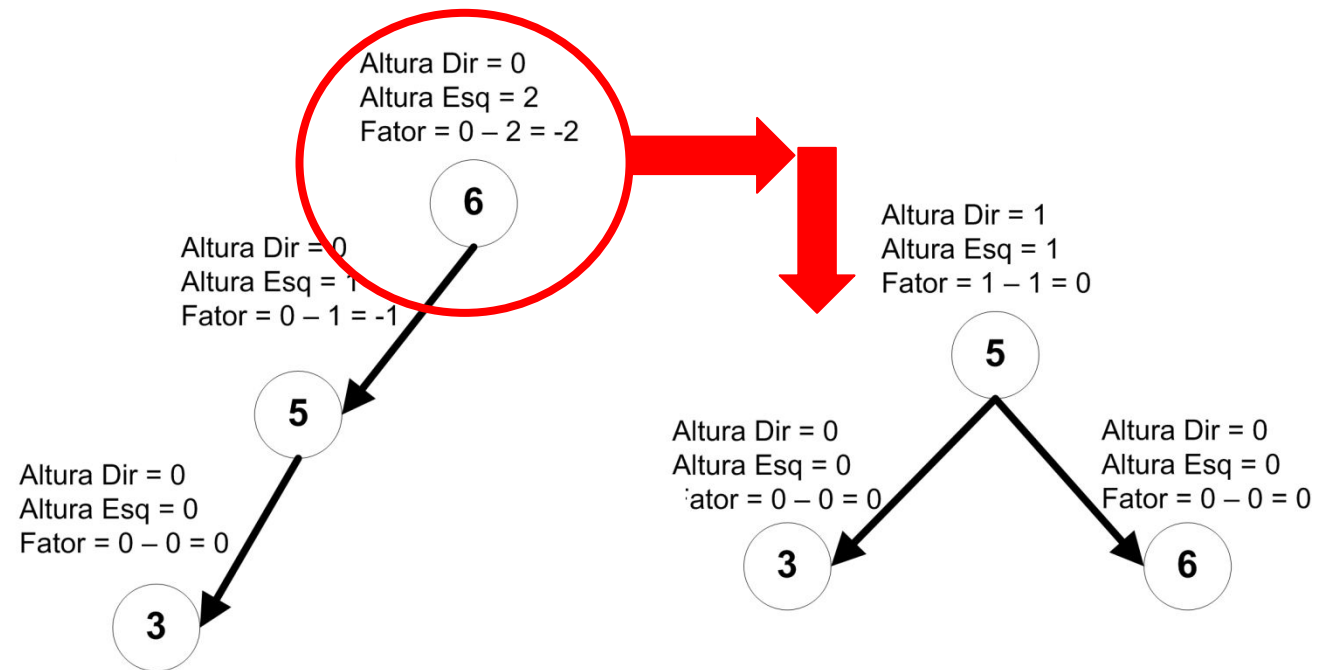


Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator

1

Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2

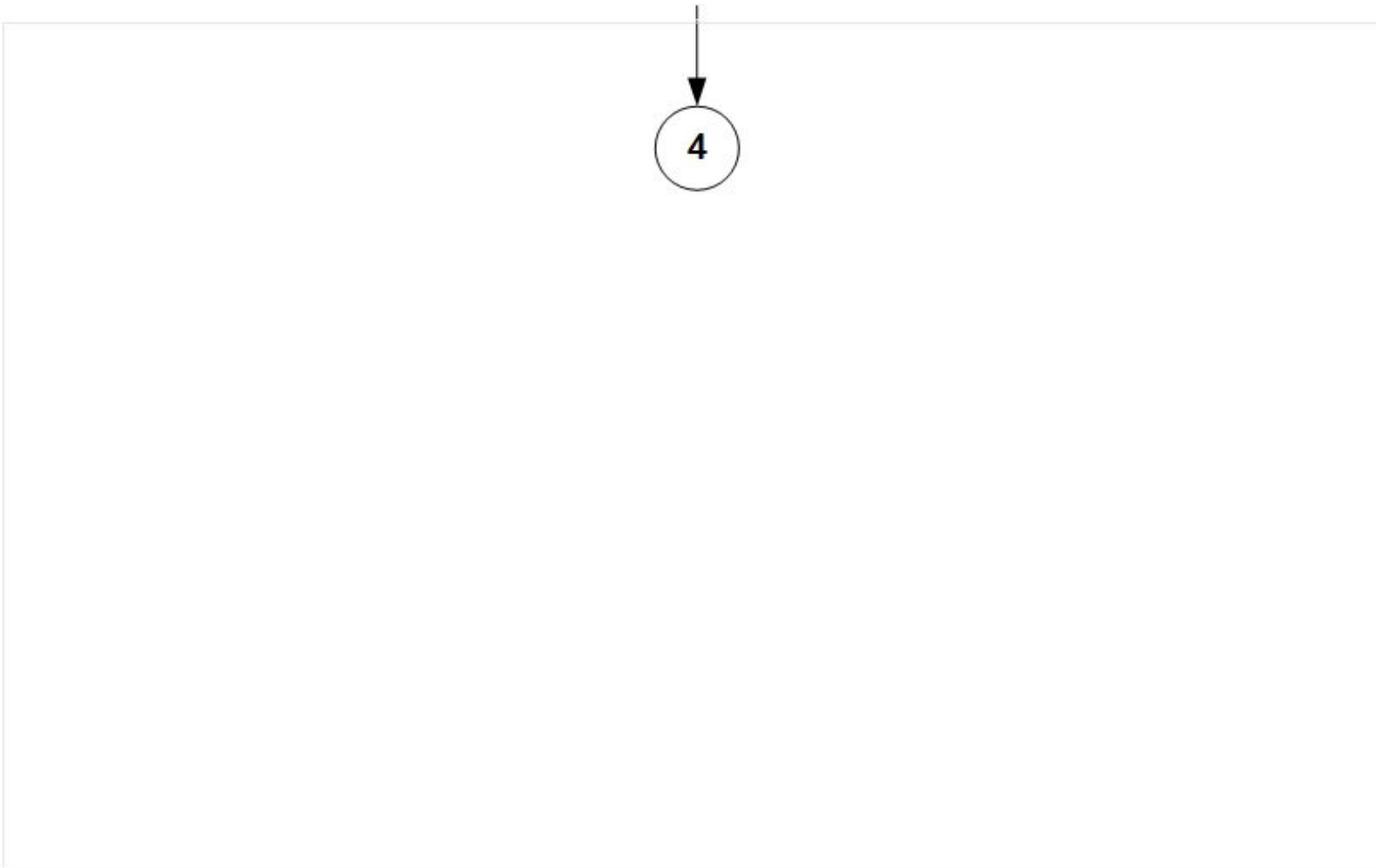


Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente

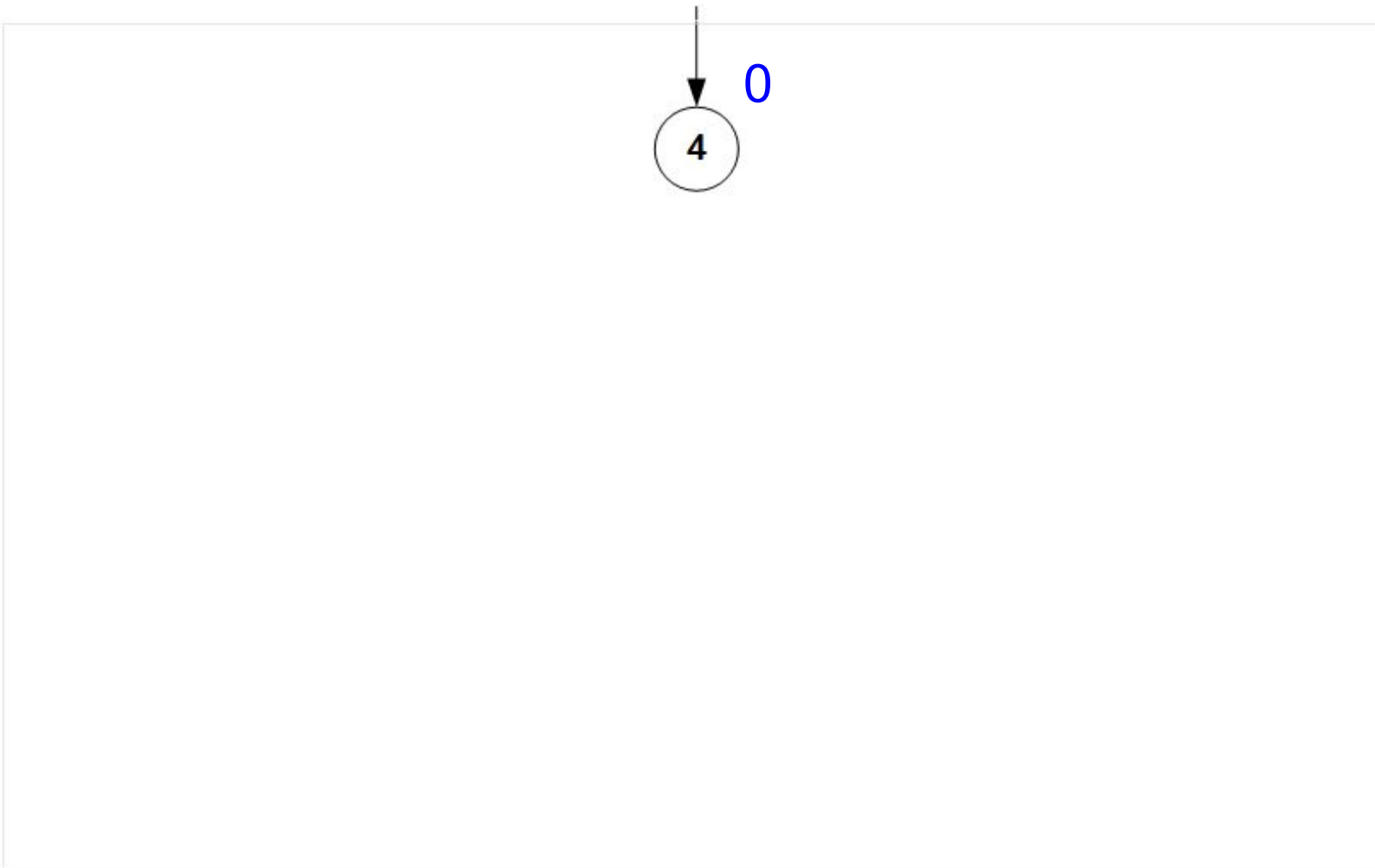
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



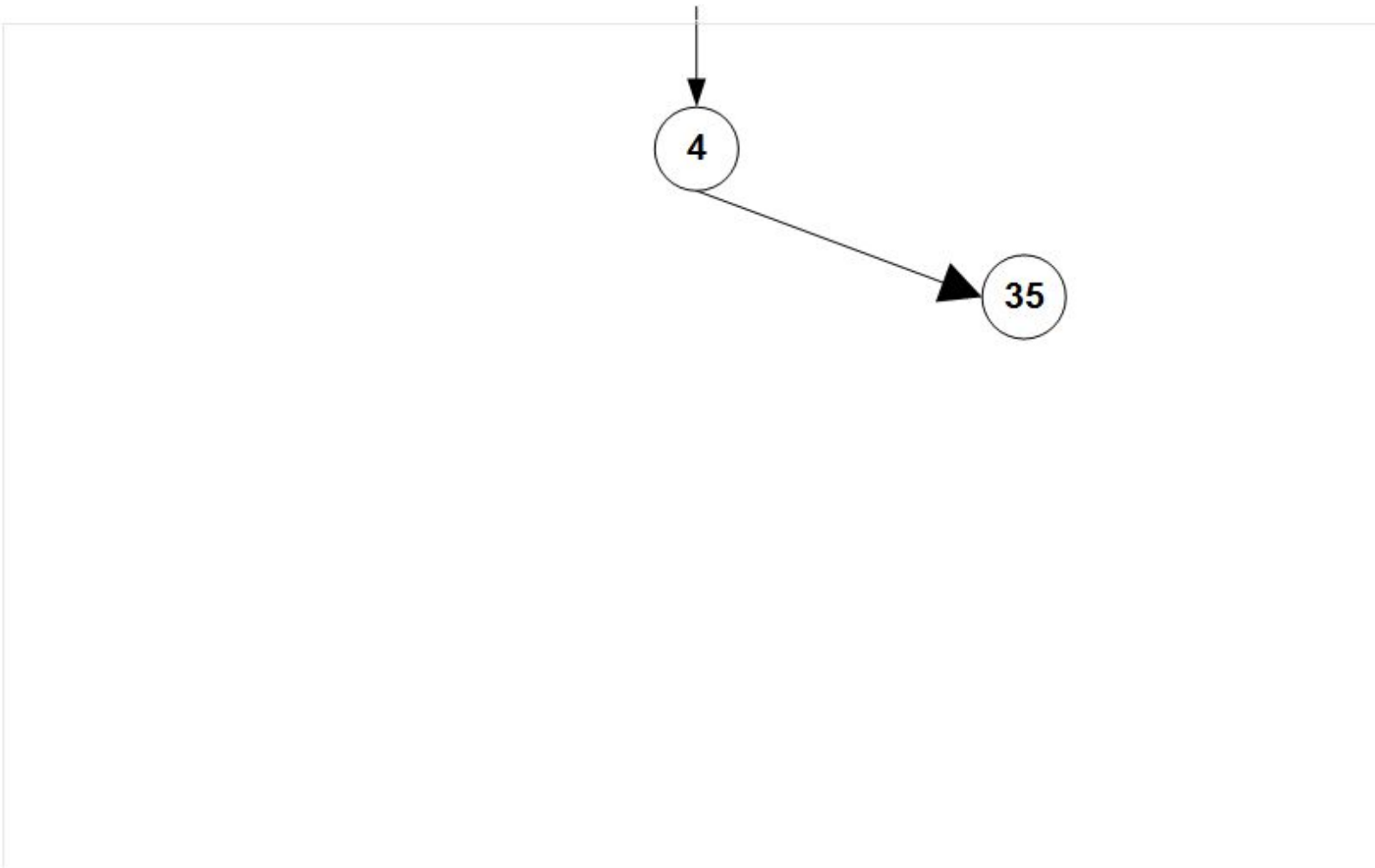
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



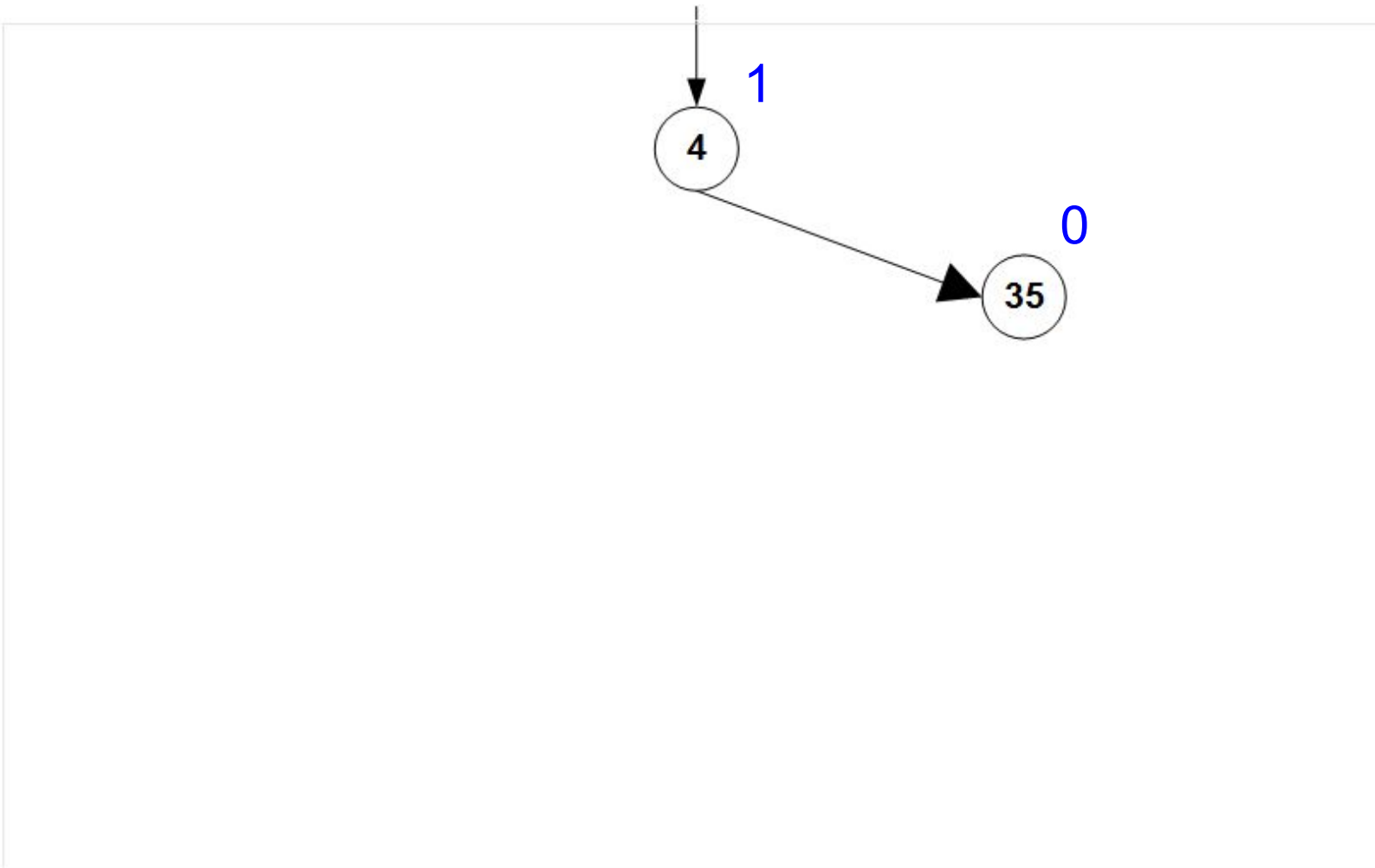
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



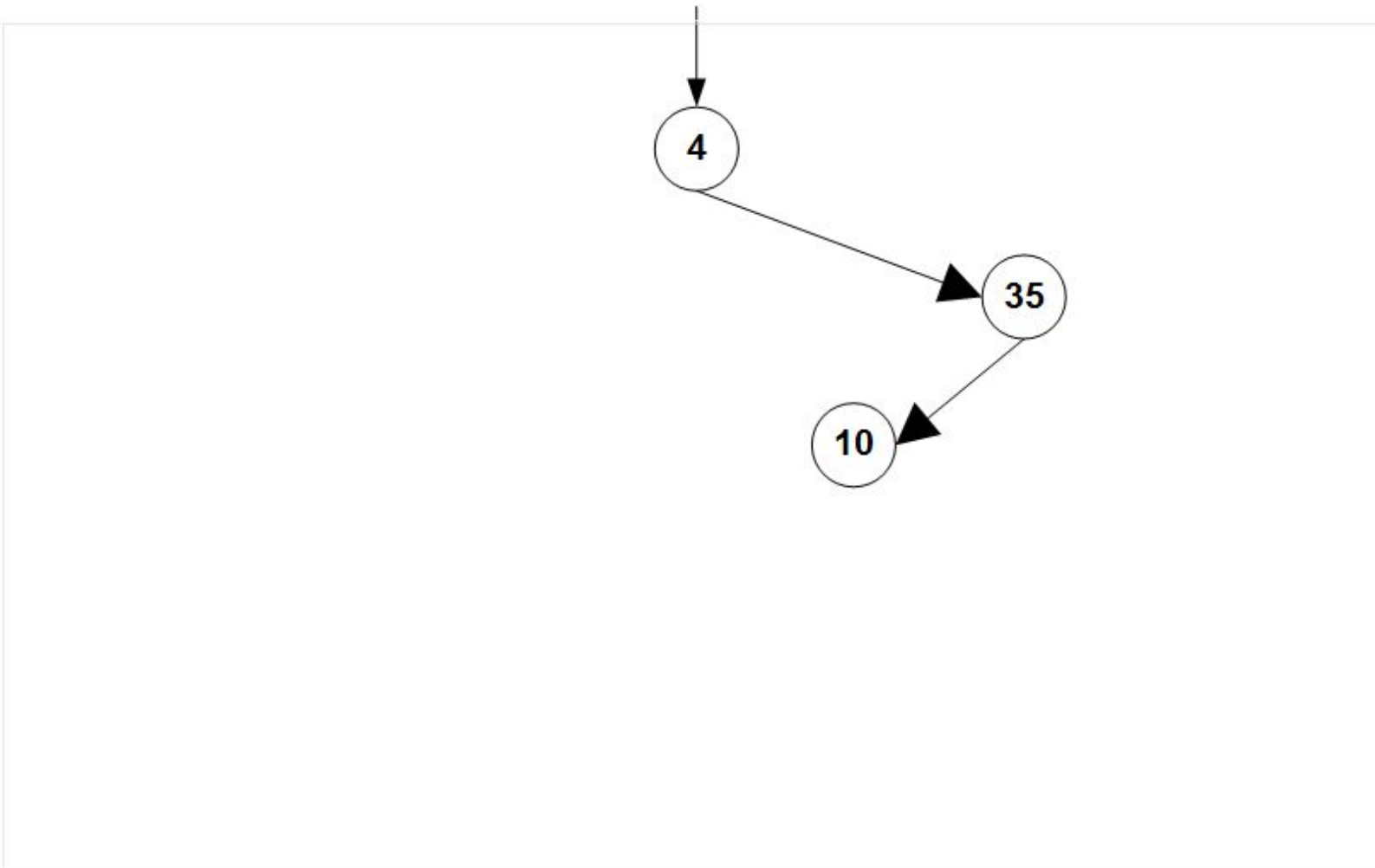
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



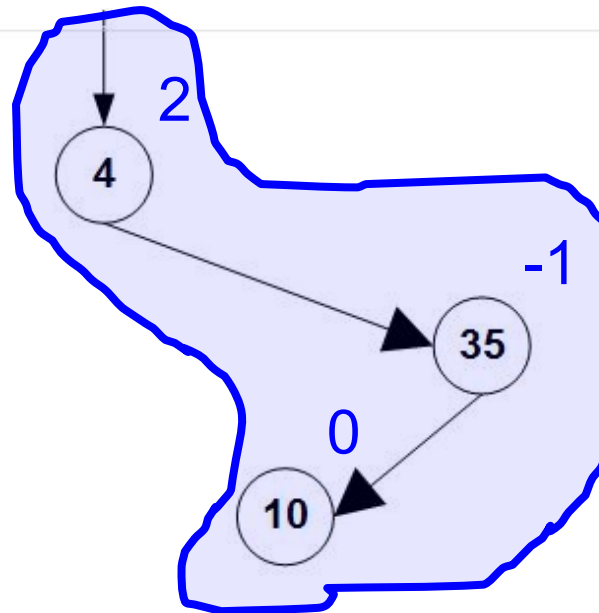
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



Exemplo

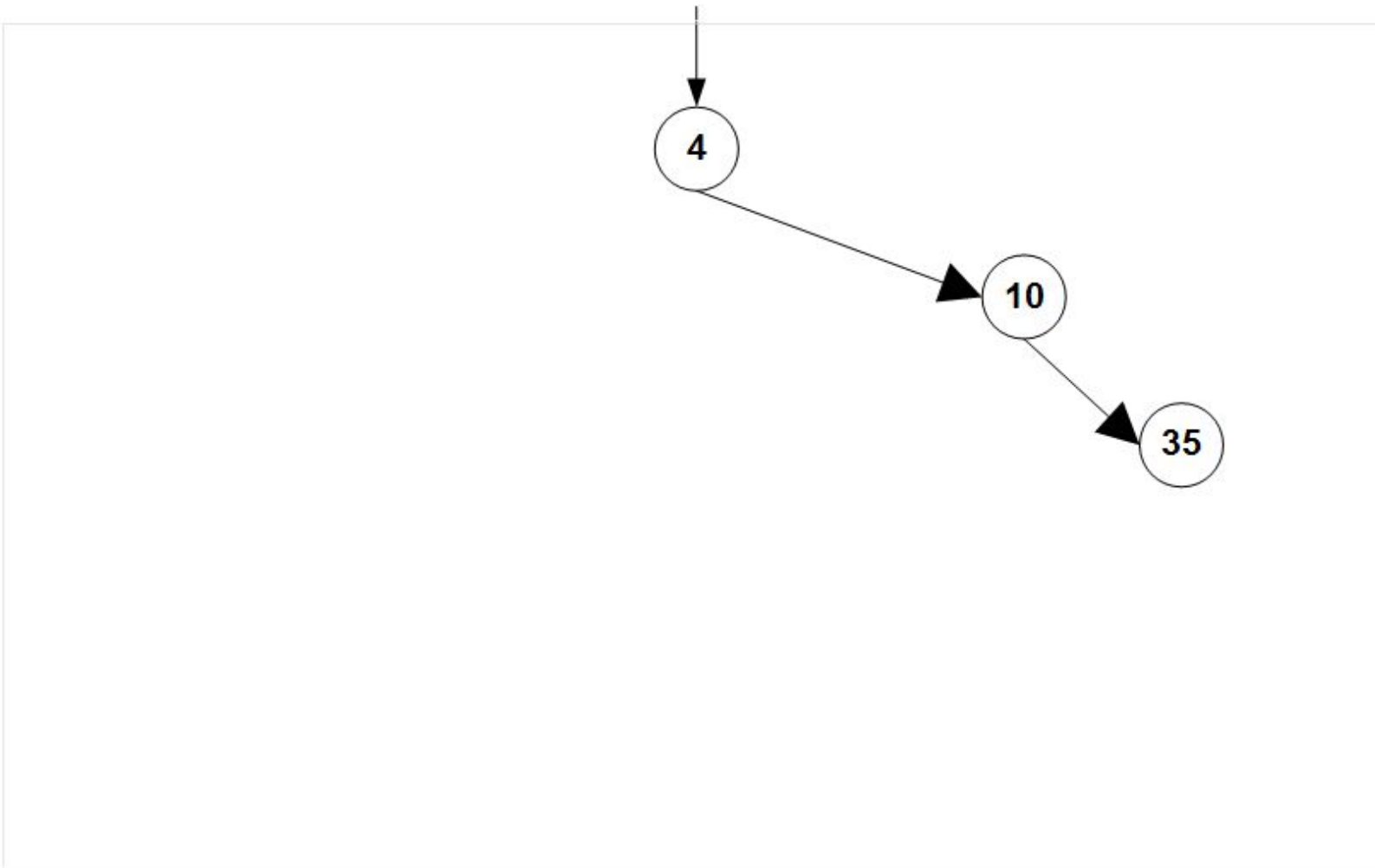
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)



Como o fator(4) = 2 e seu filho à direita -1, faremos uma rotação DirEsq

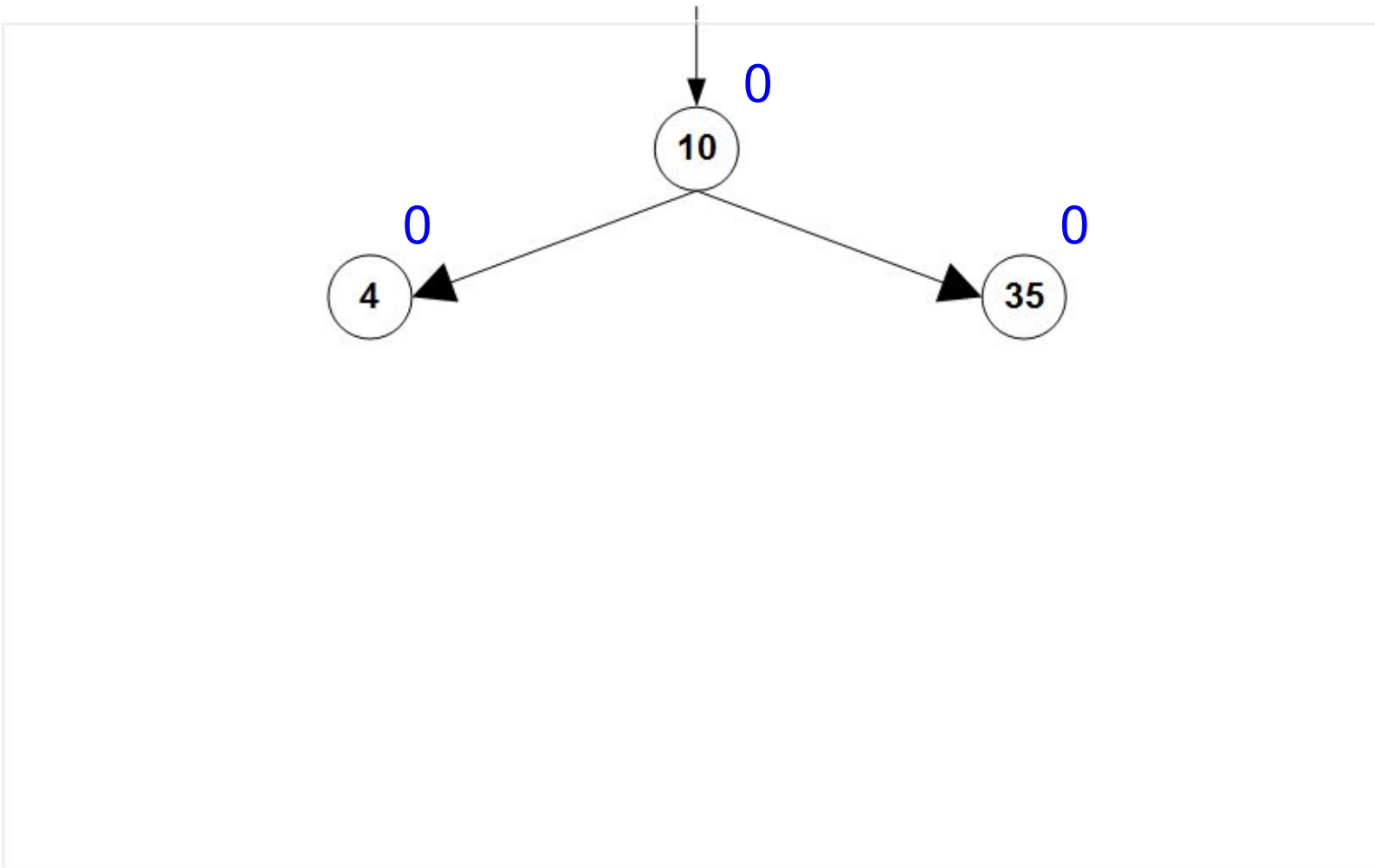
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)



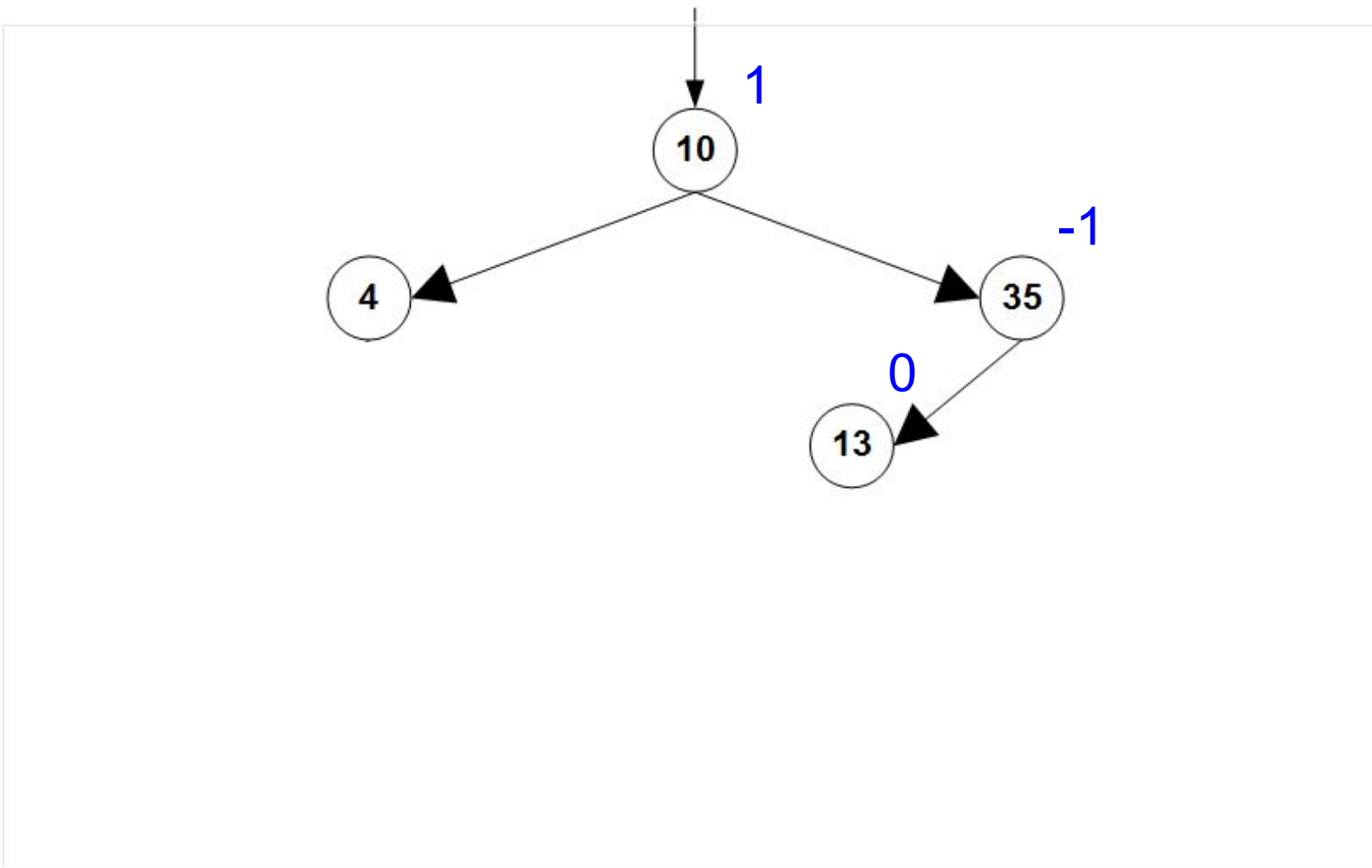
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)



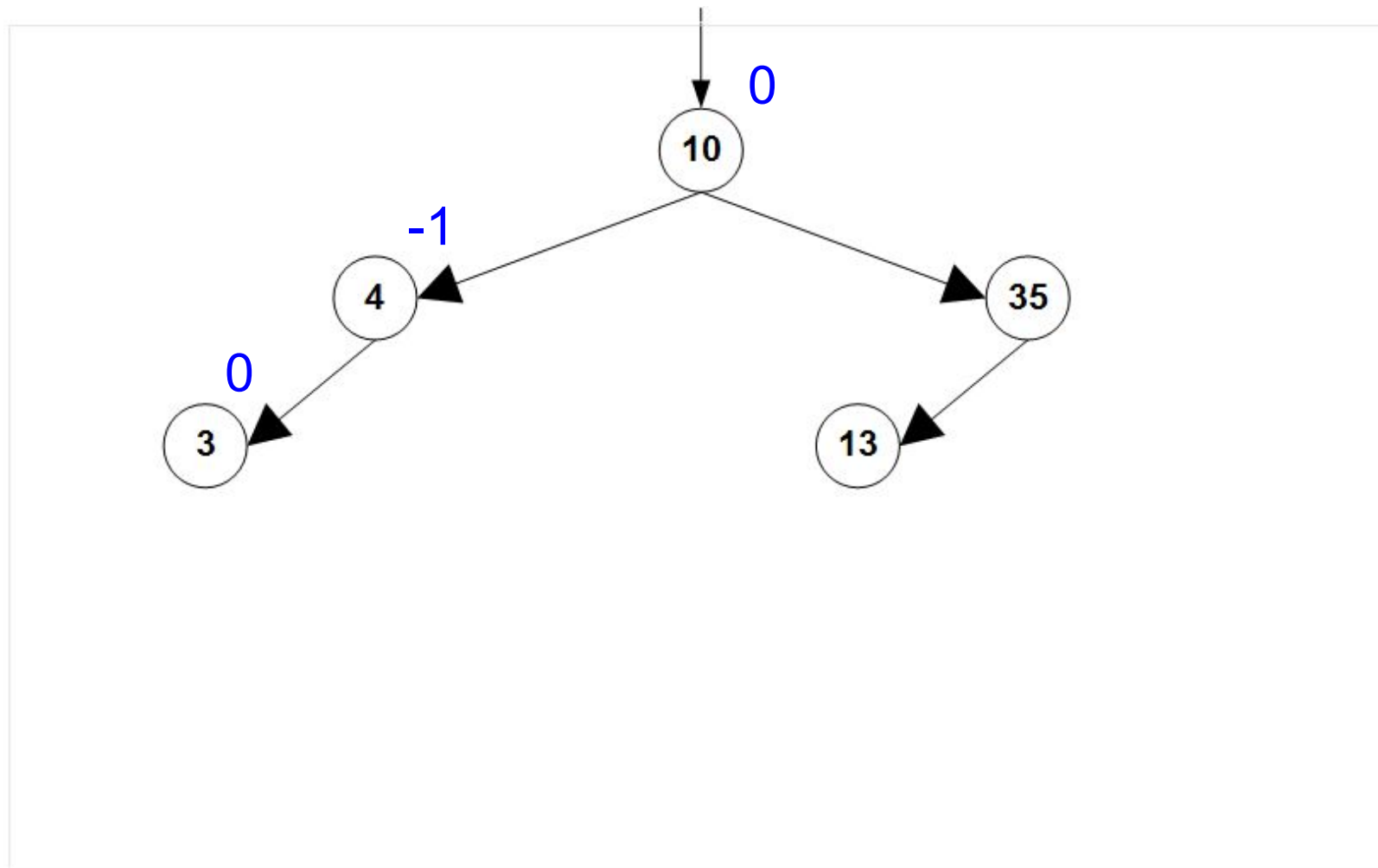
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



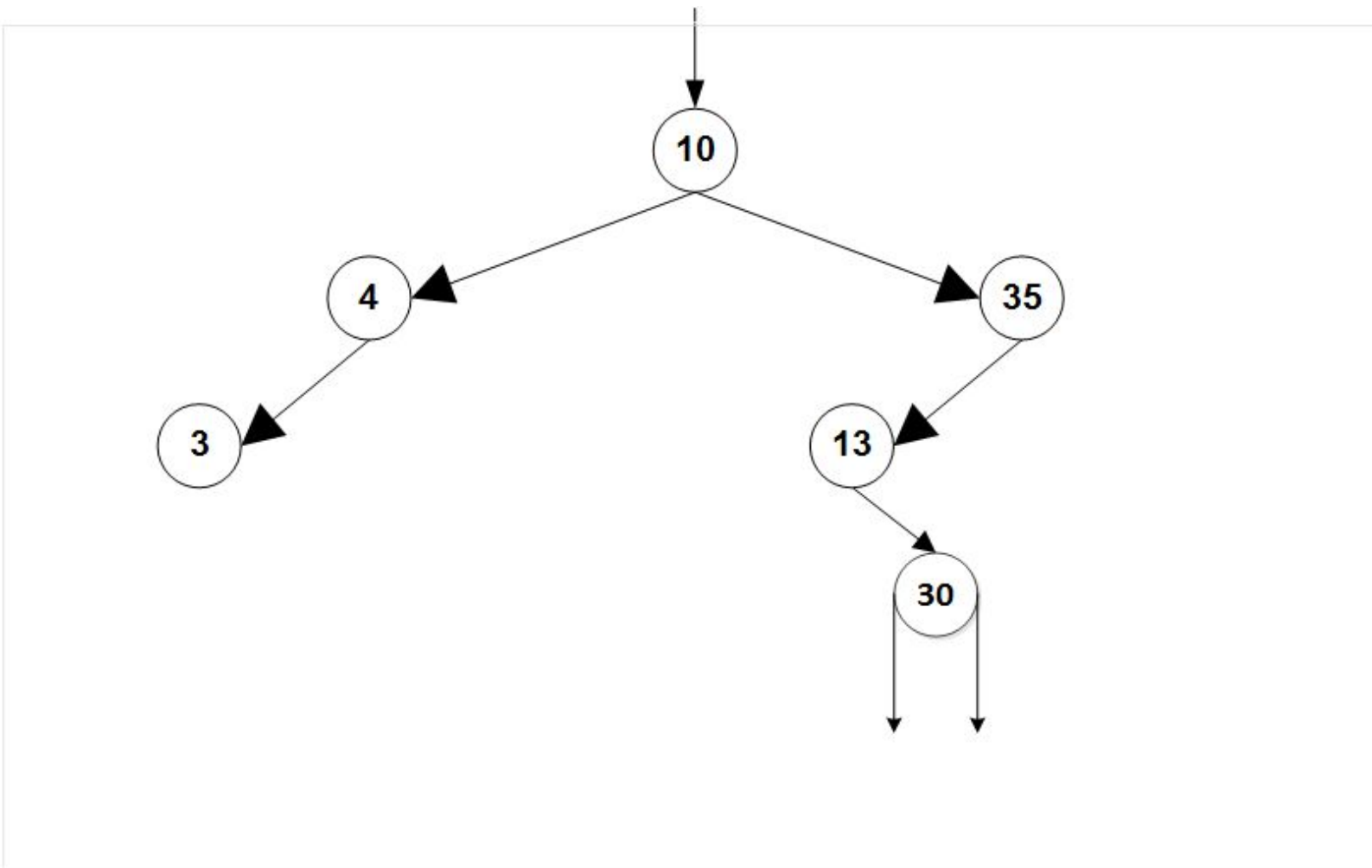
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



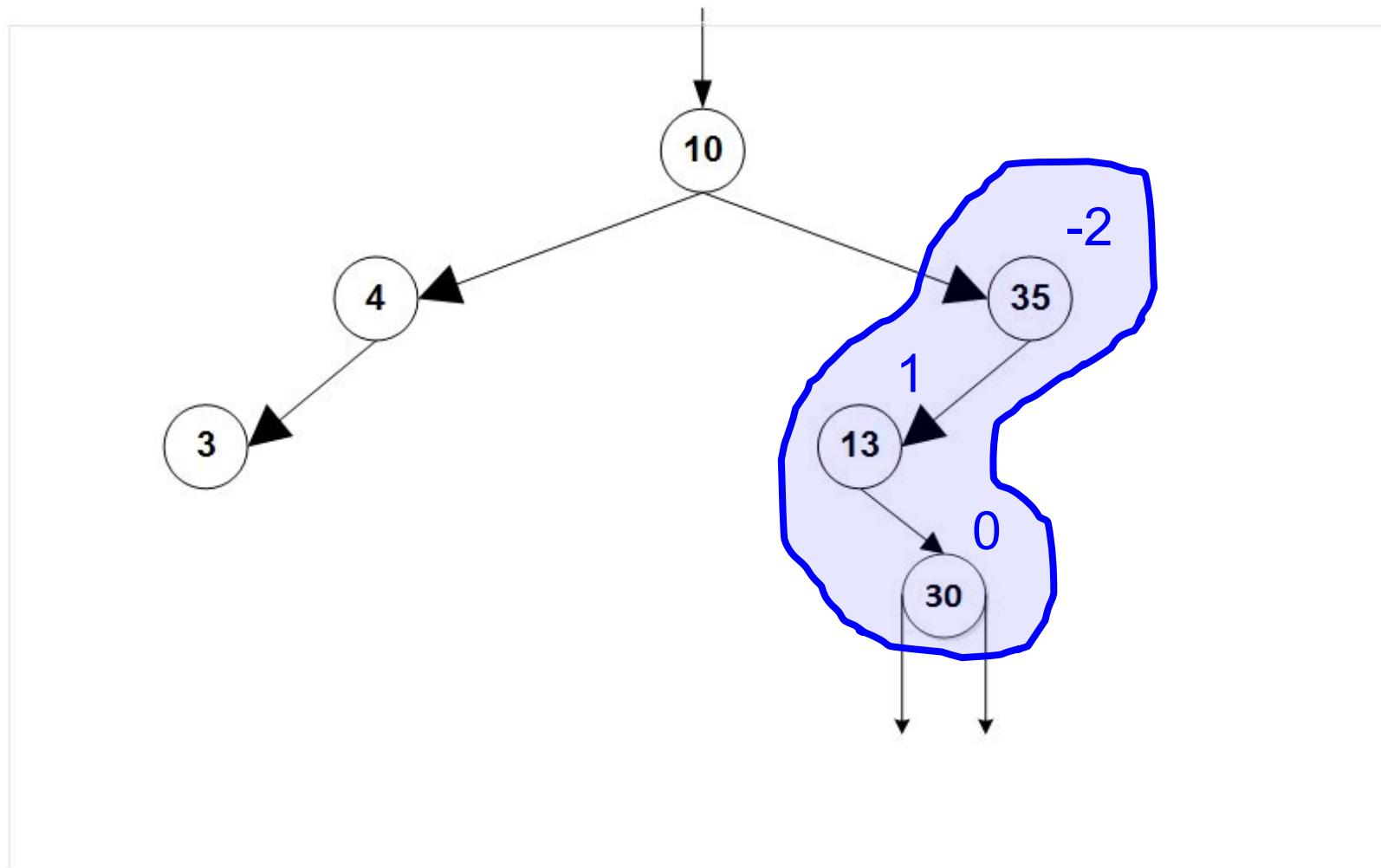
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



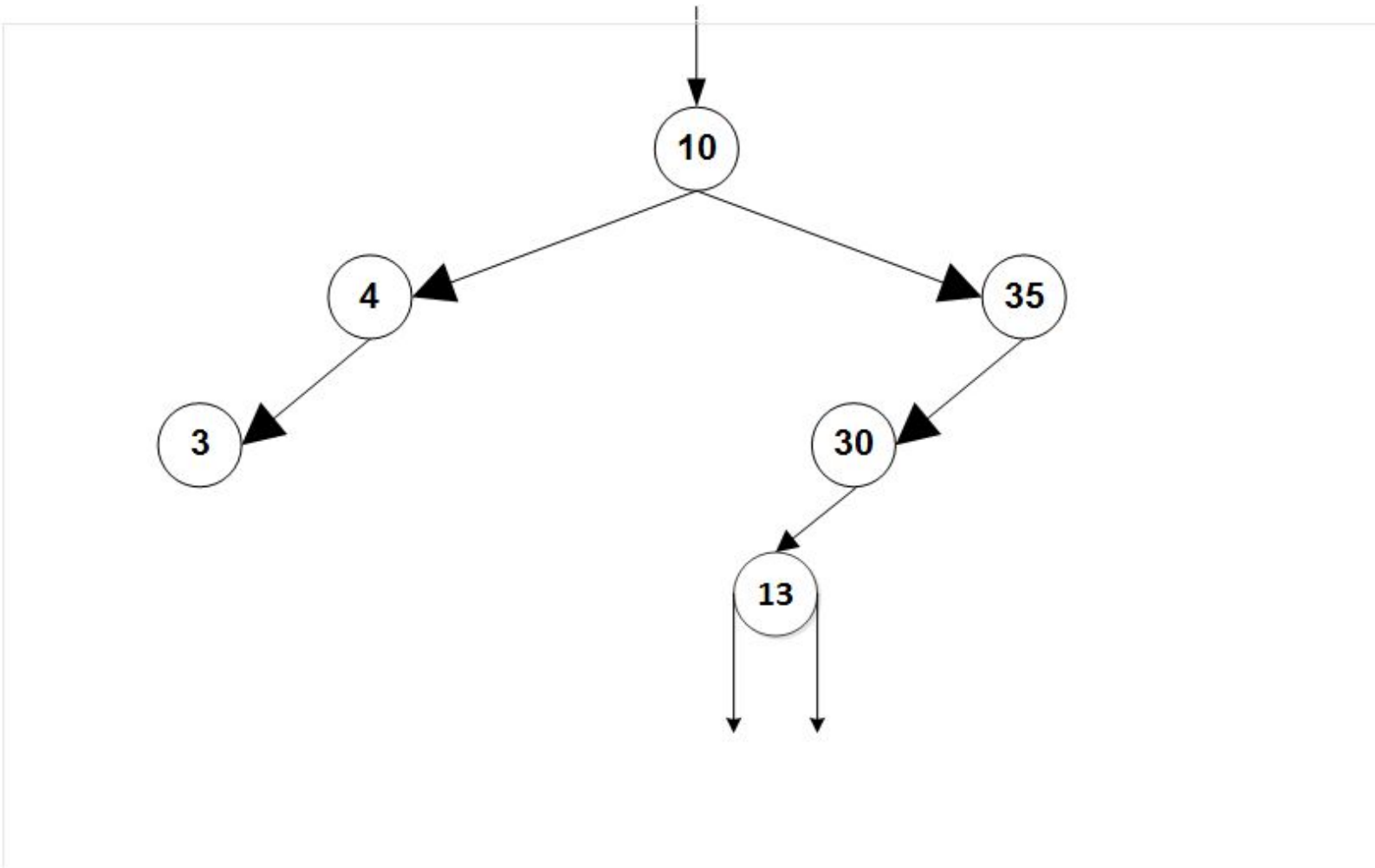
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Esq (13) Dir (35)



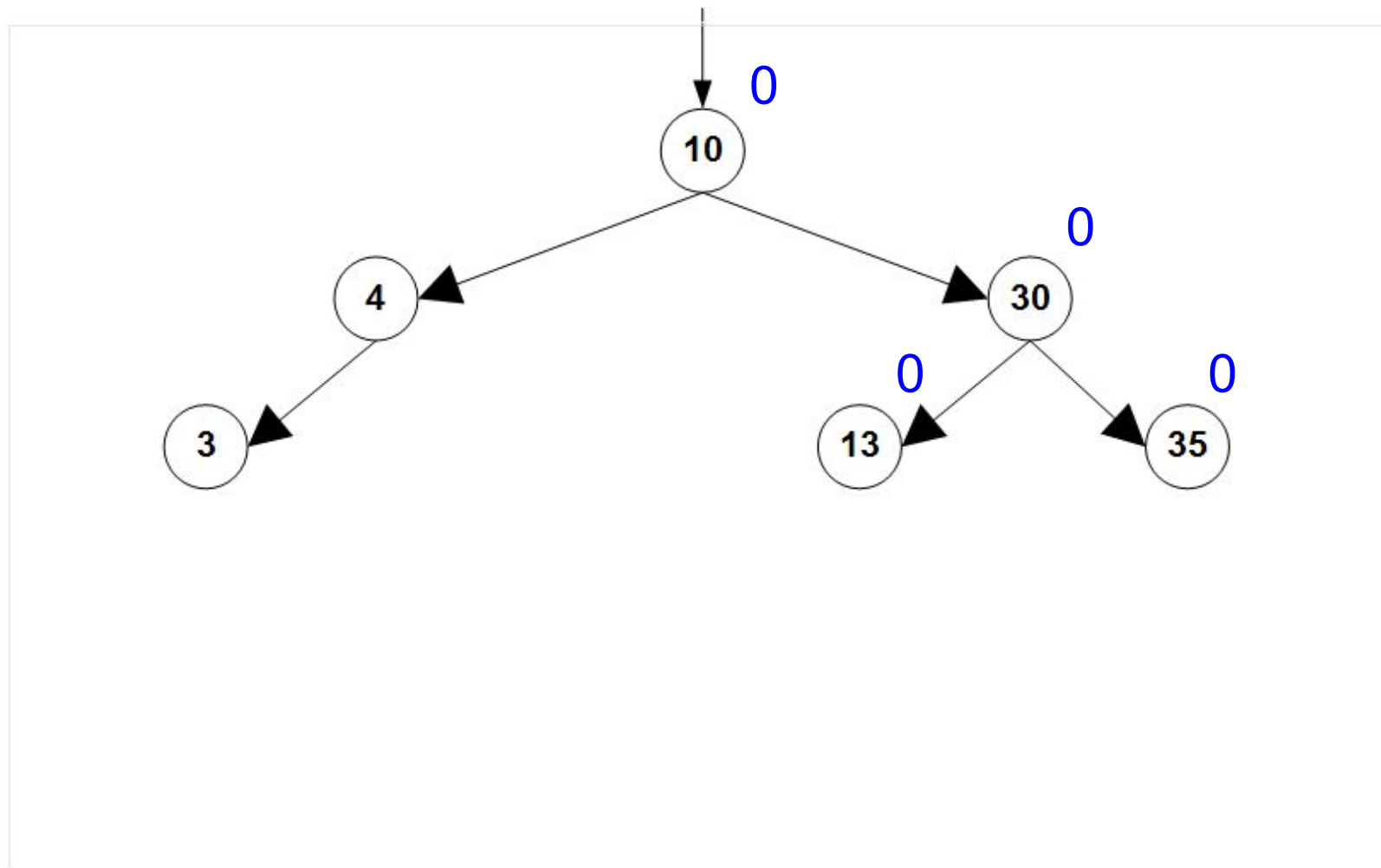
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Esq (13) Dir (35)



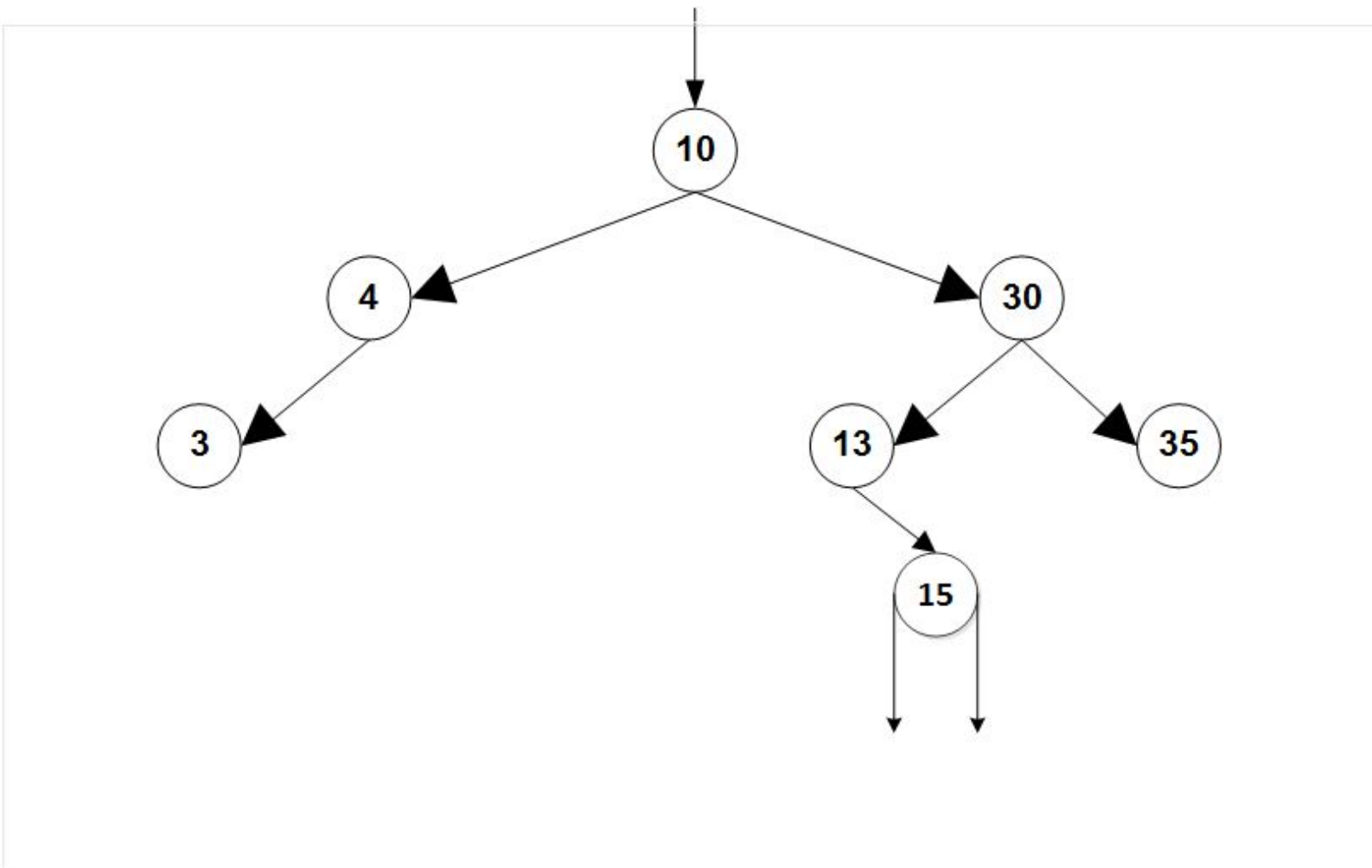
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Esq (13) Dir (35)



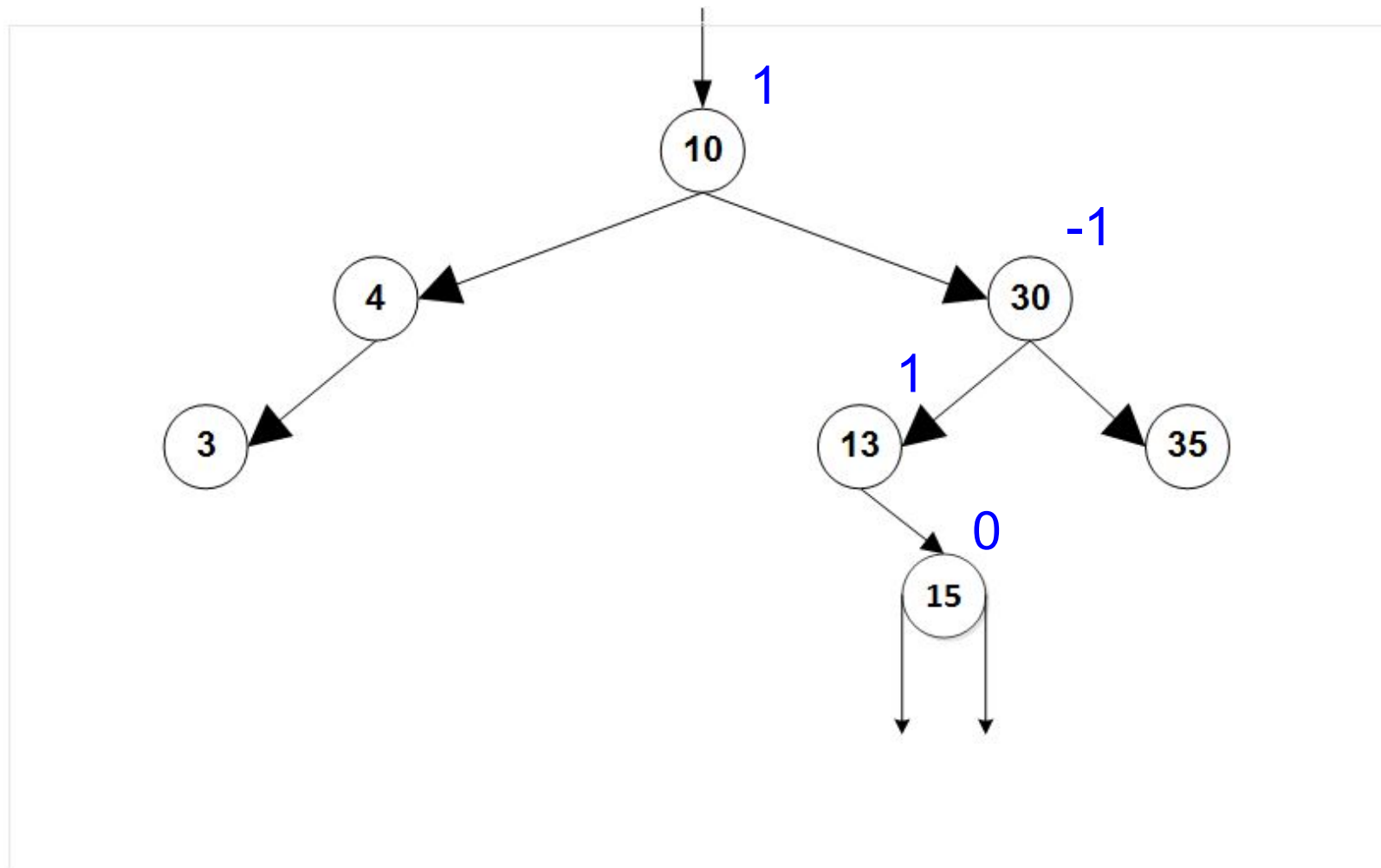
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



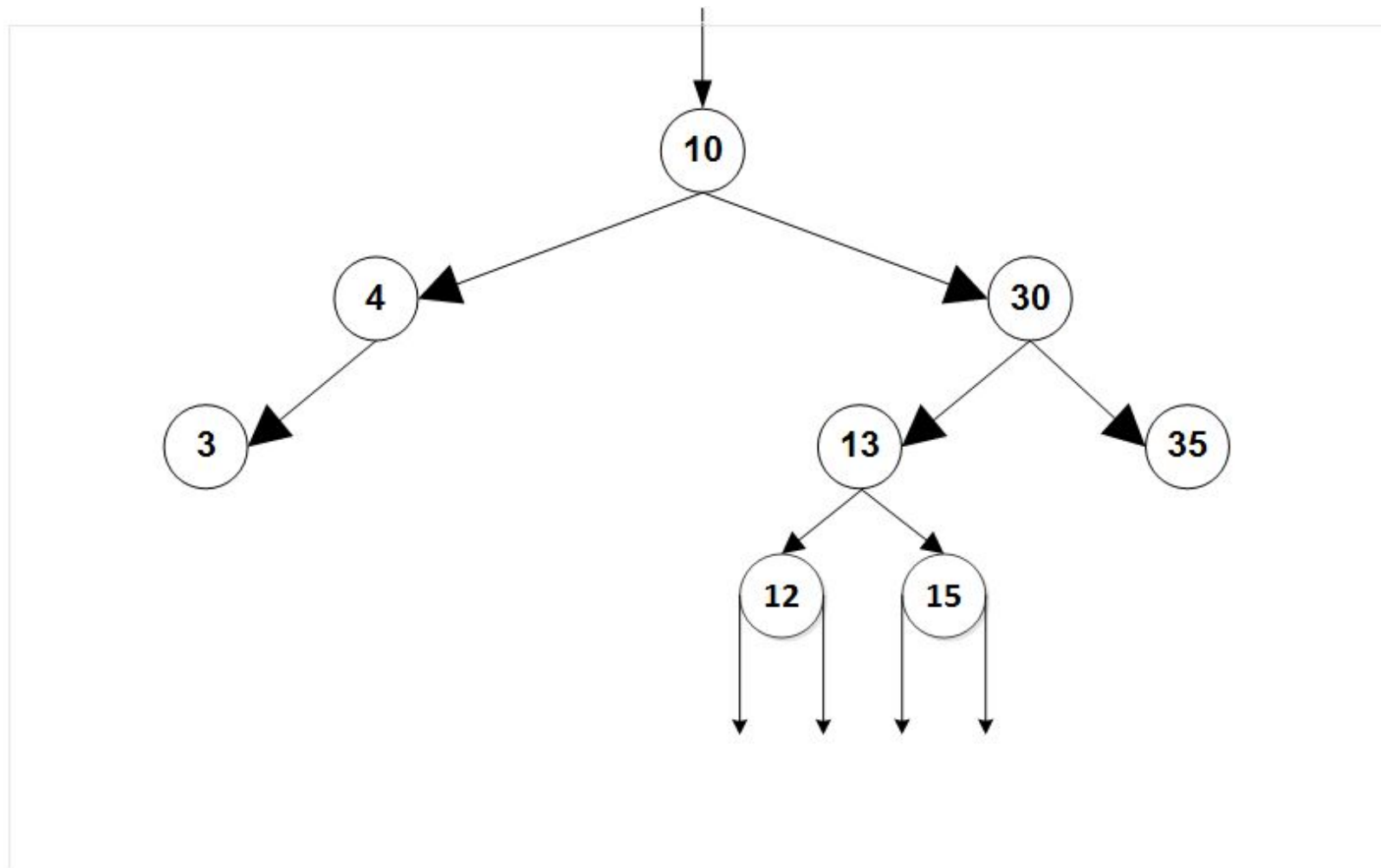
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



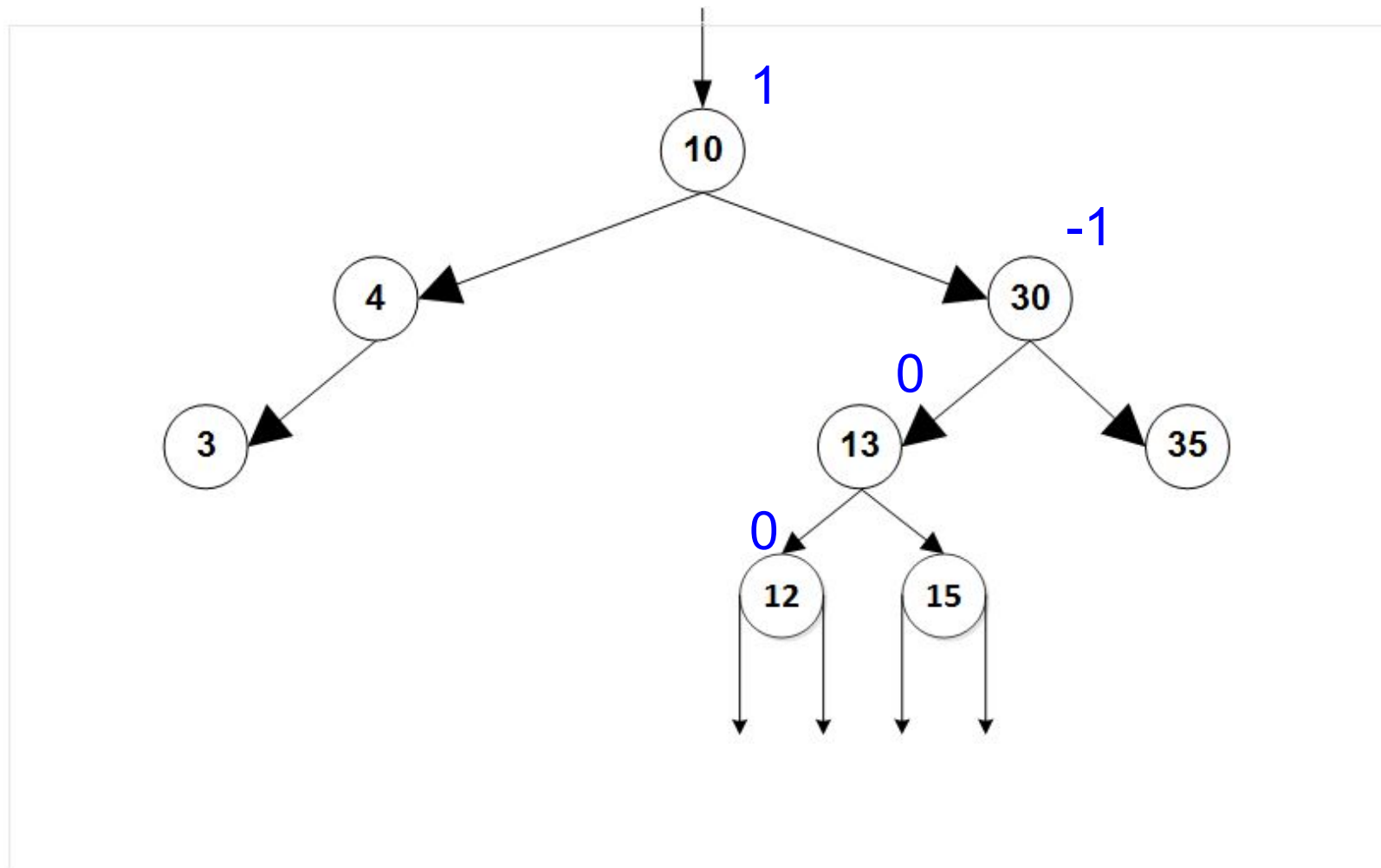
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



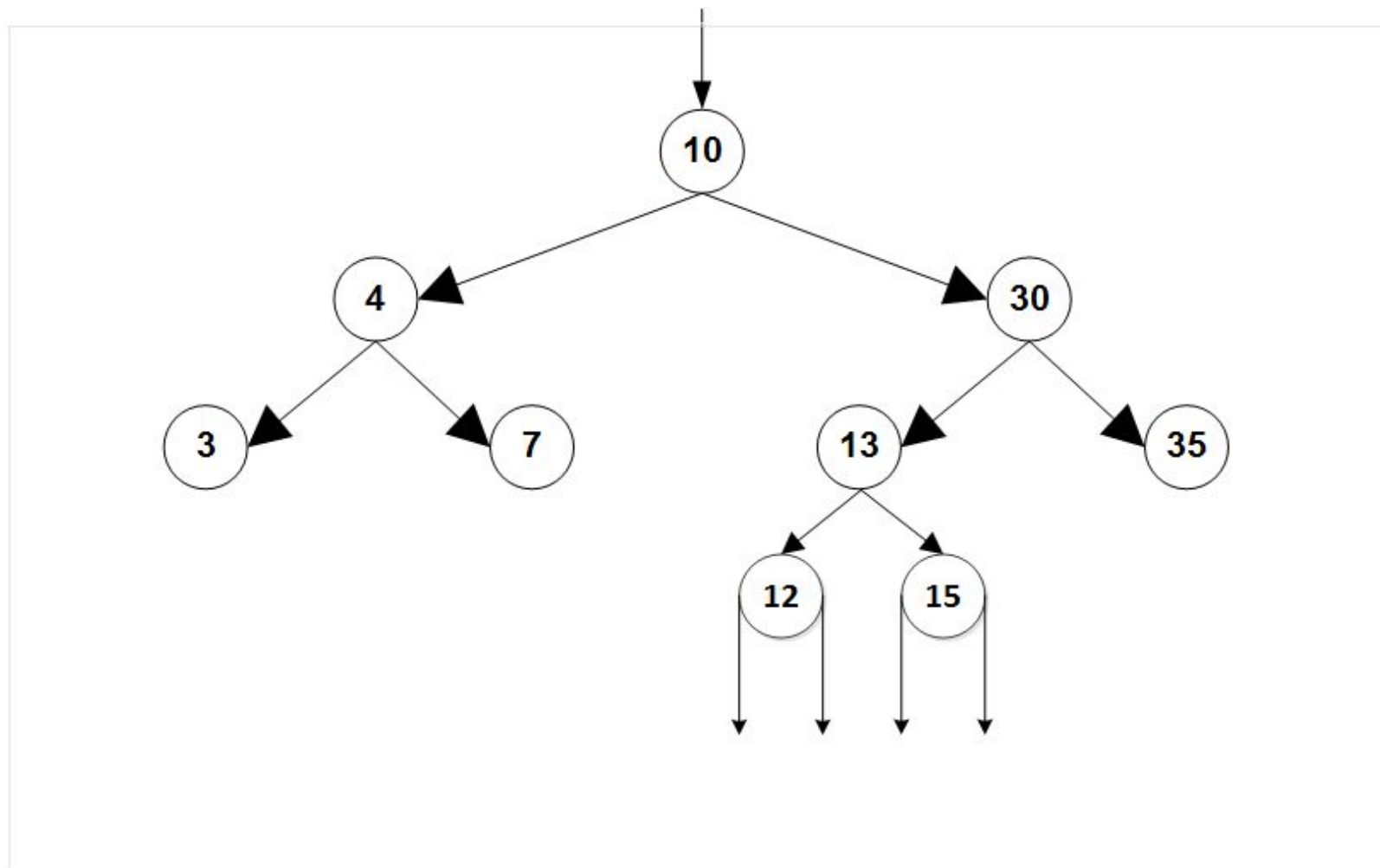
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, 7, 40 e 20 respectivamente



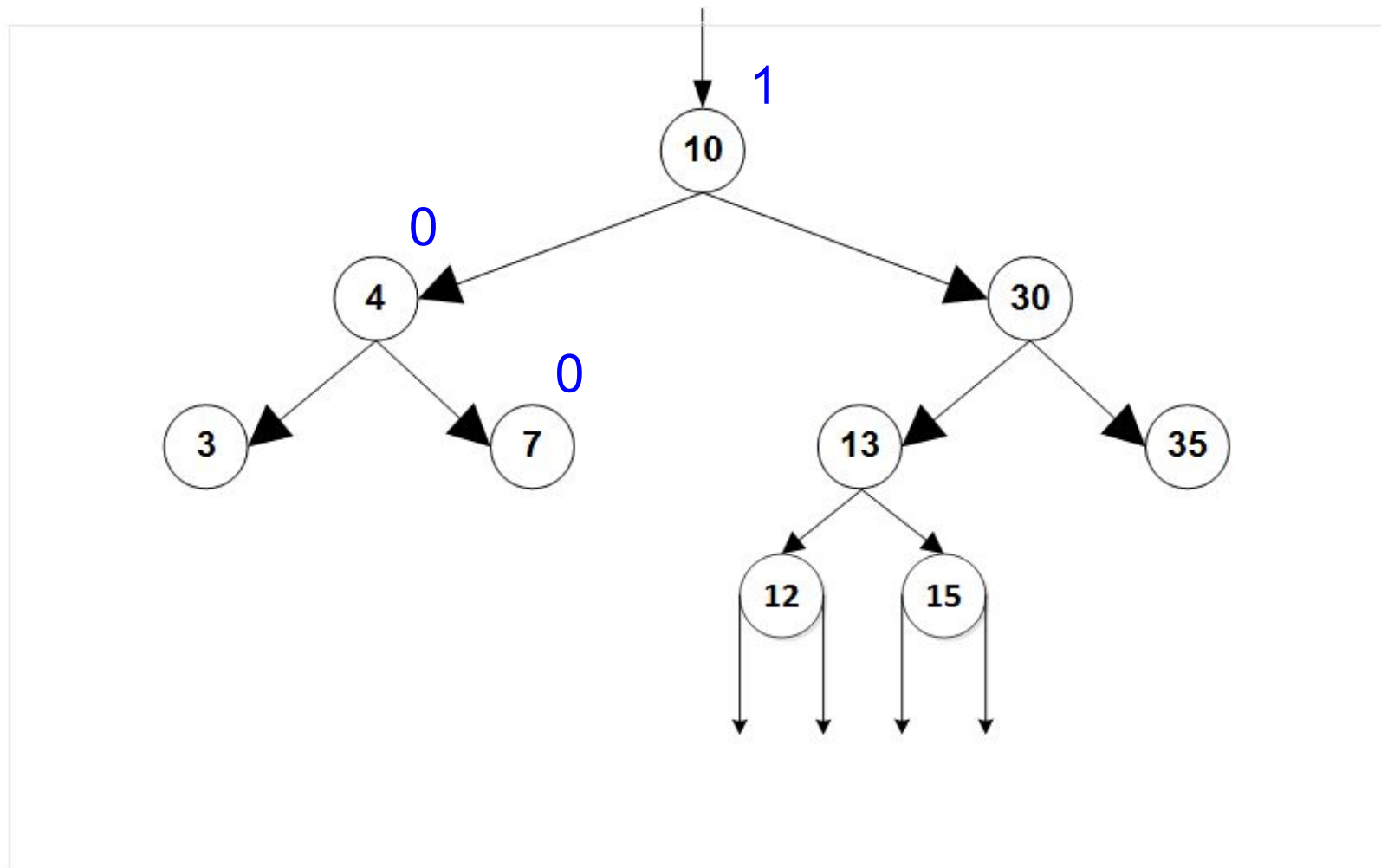
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, 40 e 20 respectivamente



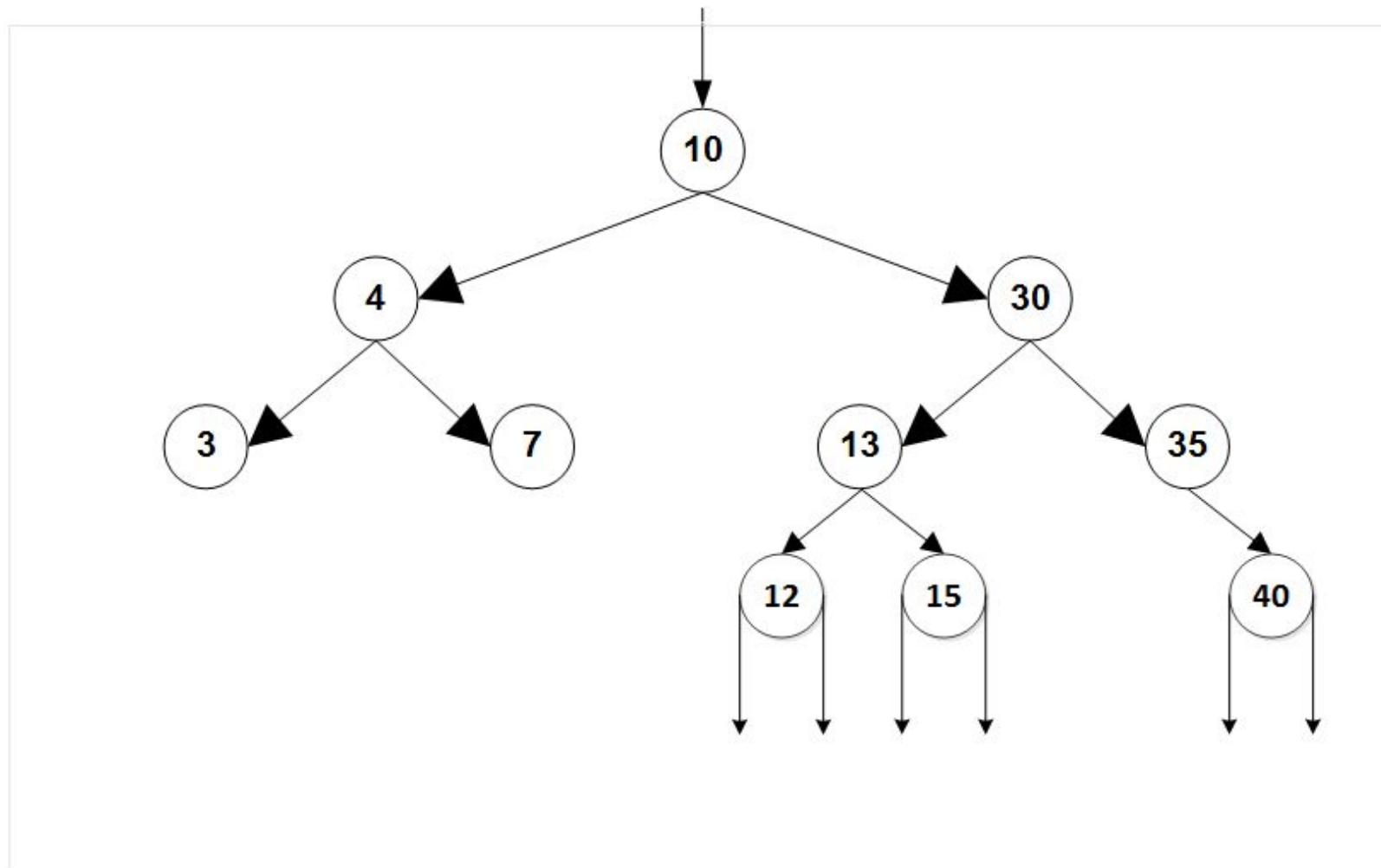
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



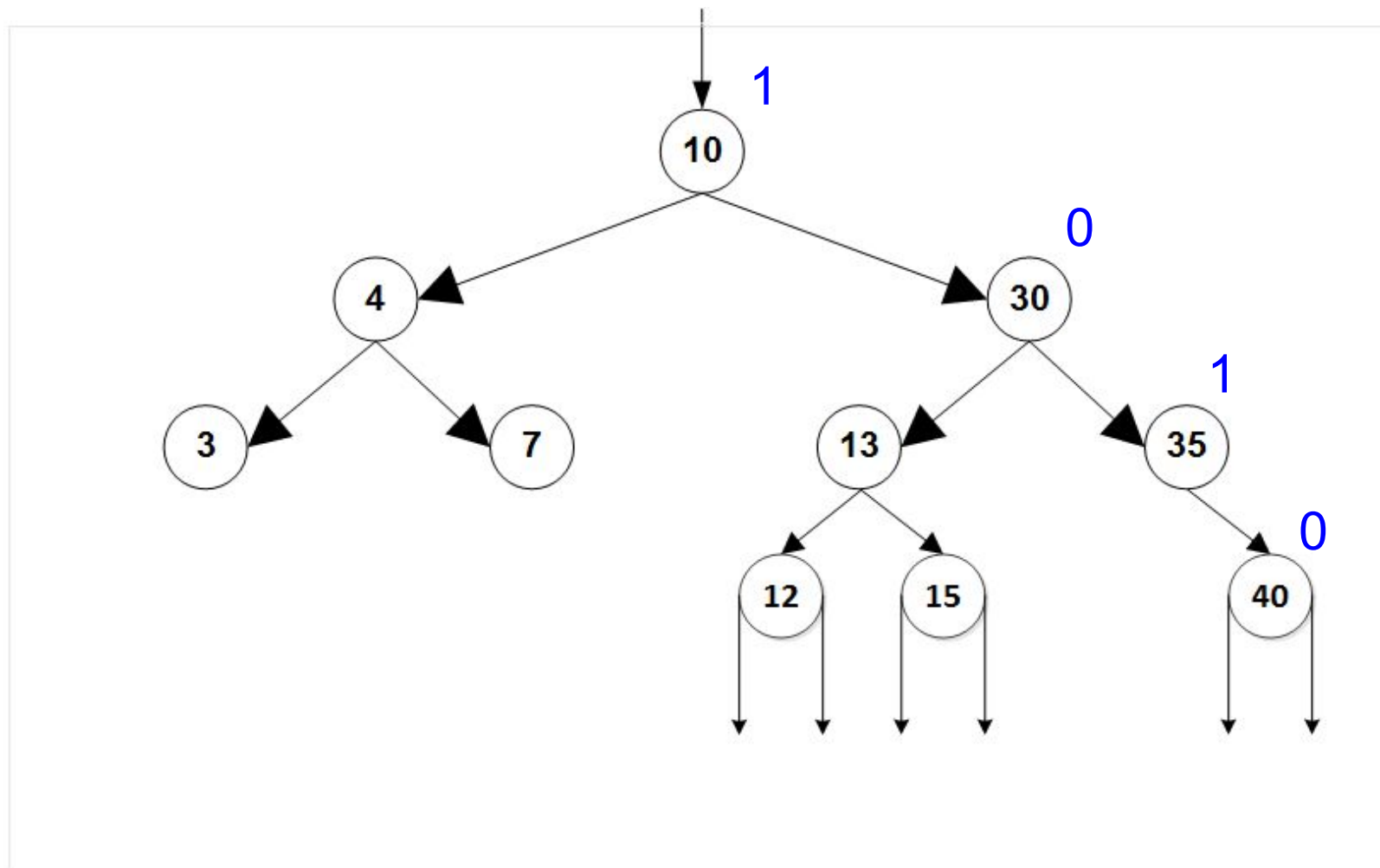
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



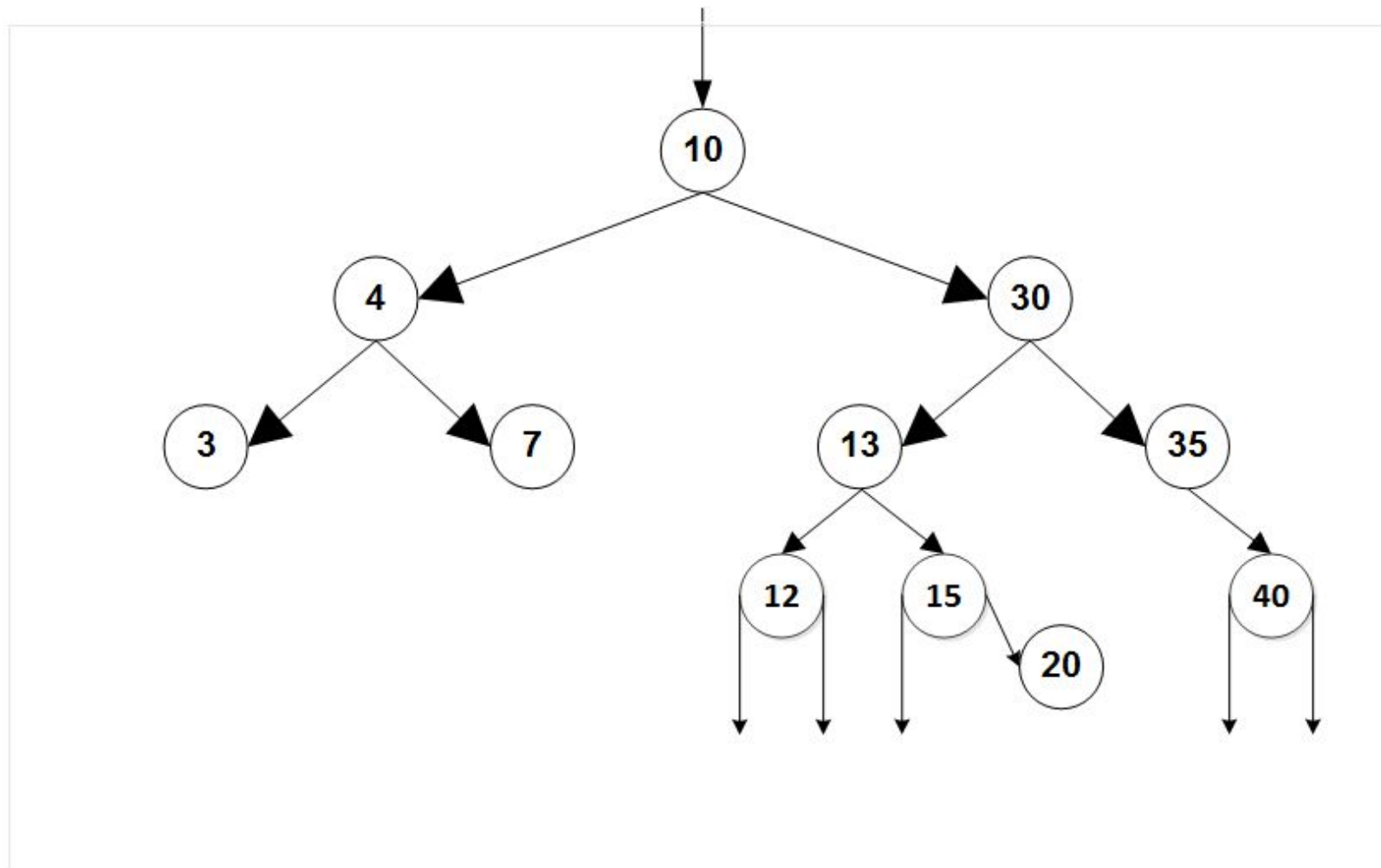
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



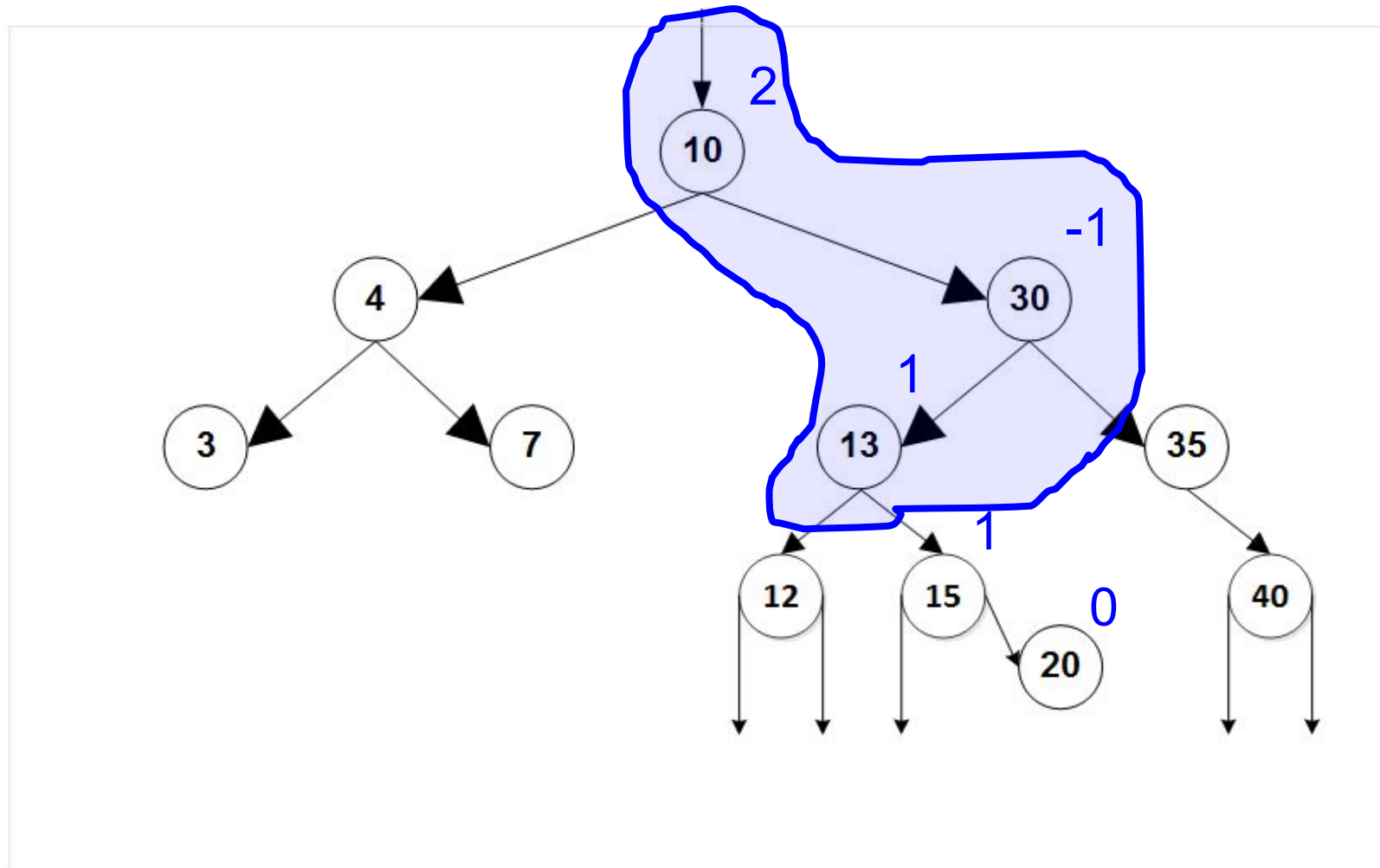
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



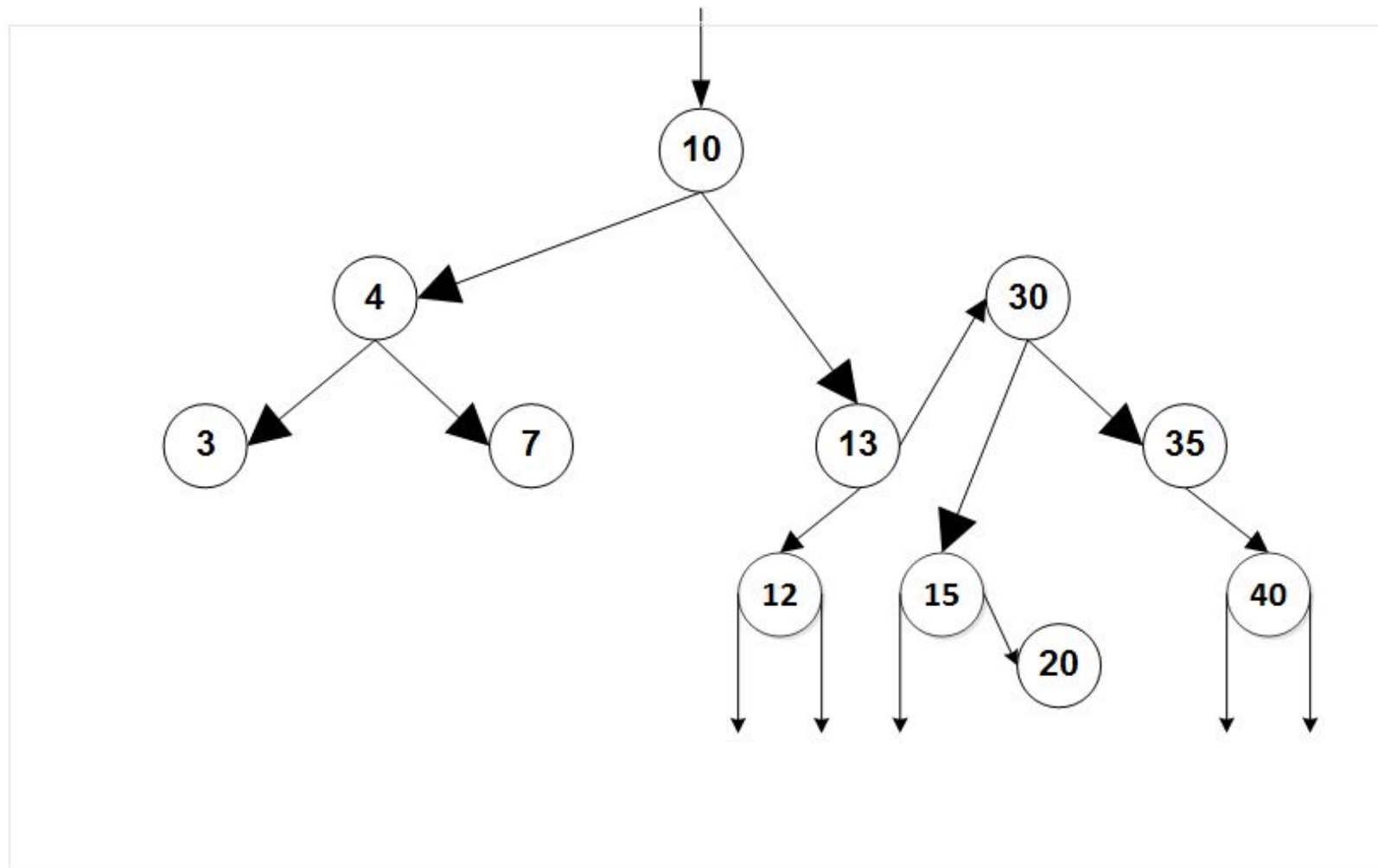
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente rotação Dir (30) Esq (10)



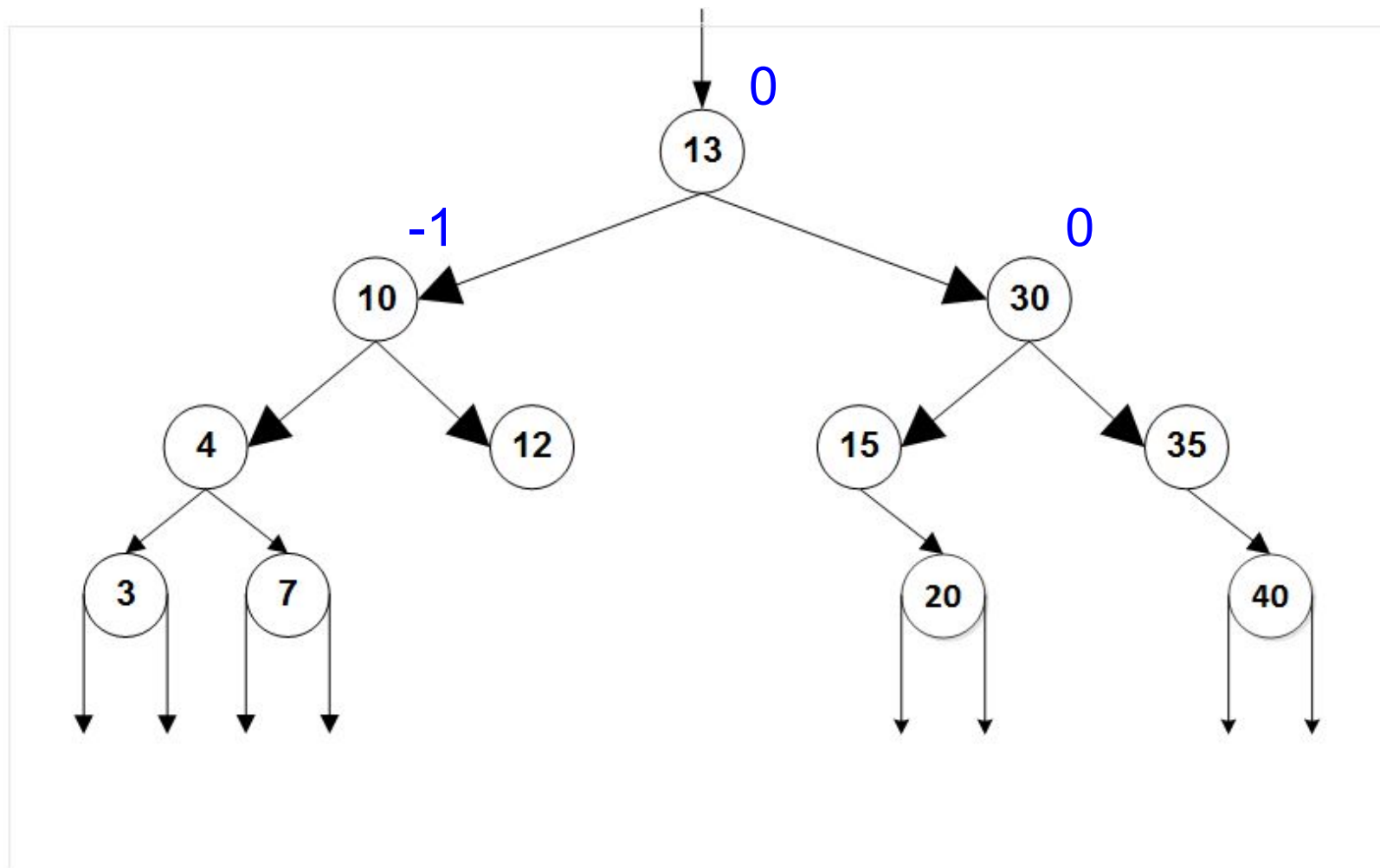
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente rotação Dir (30) Esq (10)

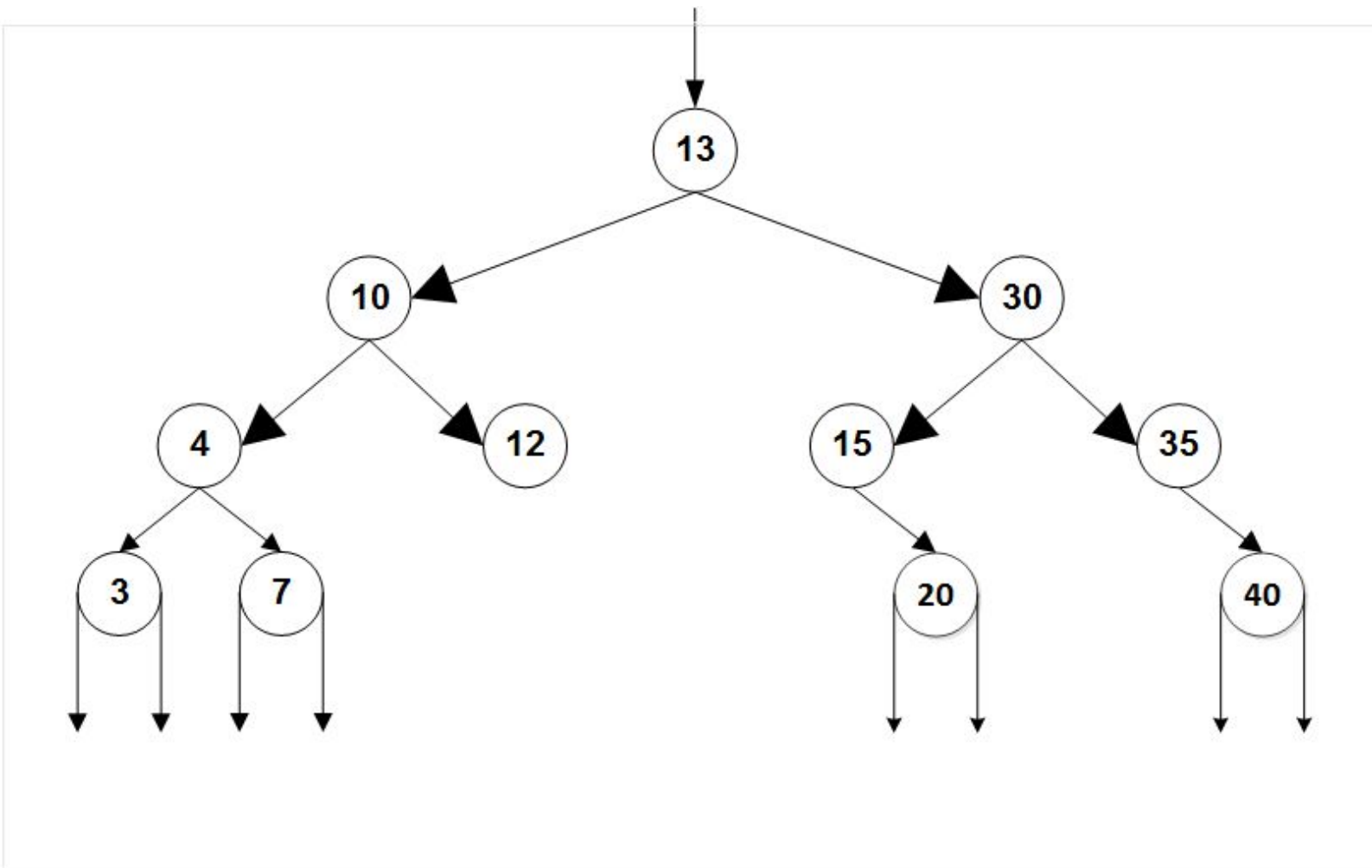


Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



- Insira o 6 na AVL abaixo



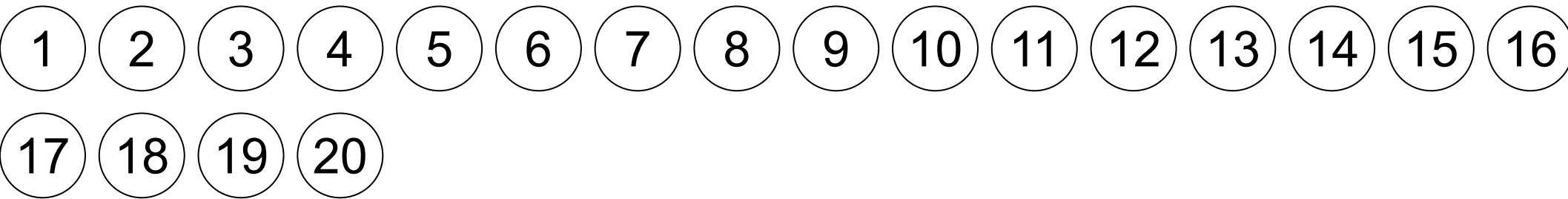
Exercício

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 20 a 1, respectivamente
- Para cada um dos dois exercícios anteriores, verifique sua resposta usando nosso código para a árvore AVL

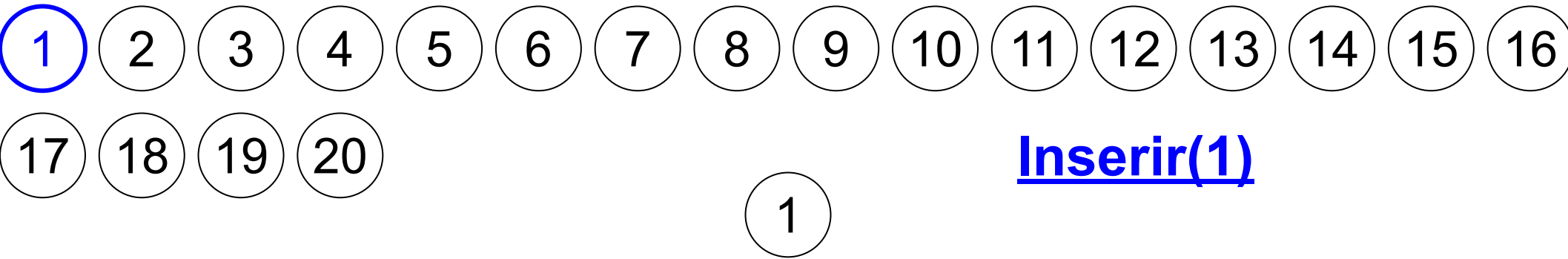
Algoritmo em C-like

Ver código em: [fonte/08/avl/](#)

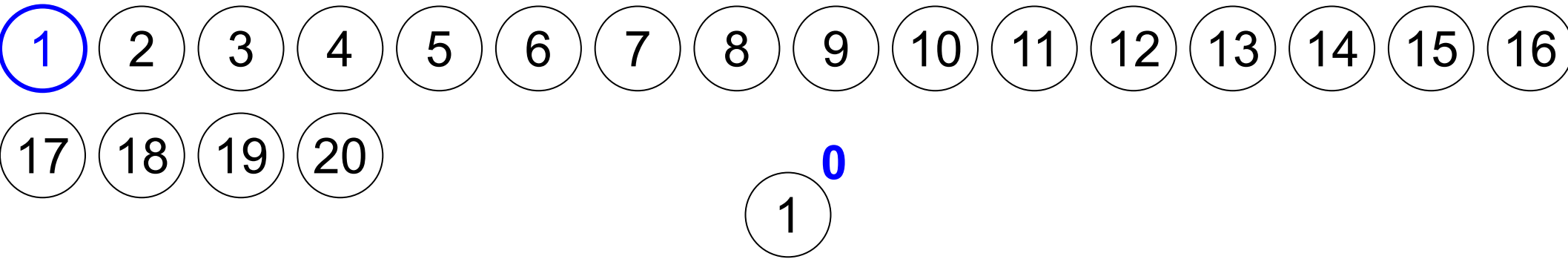
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



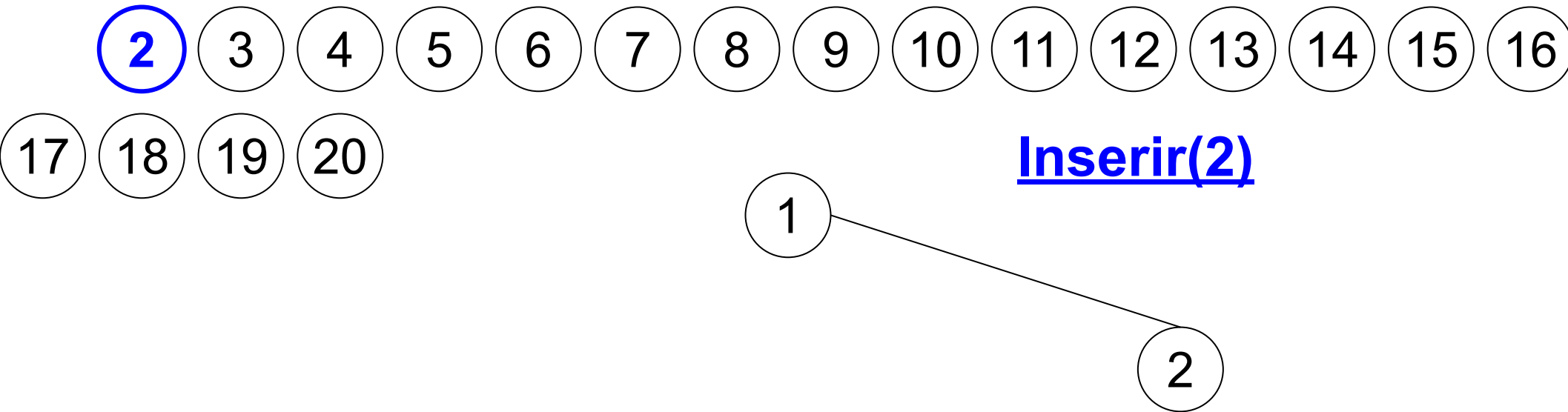
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



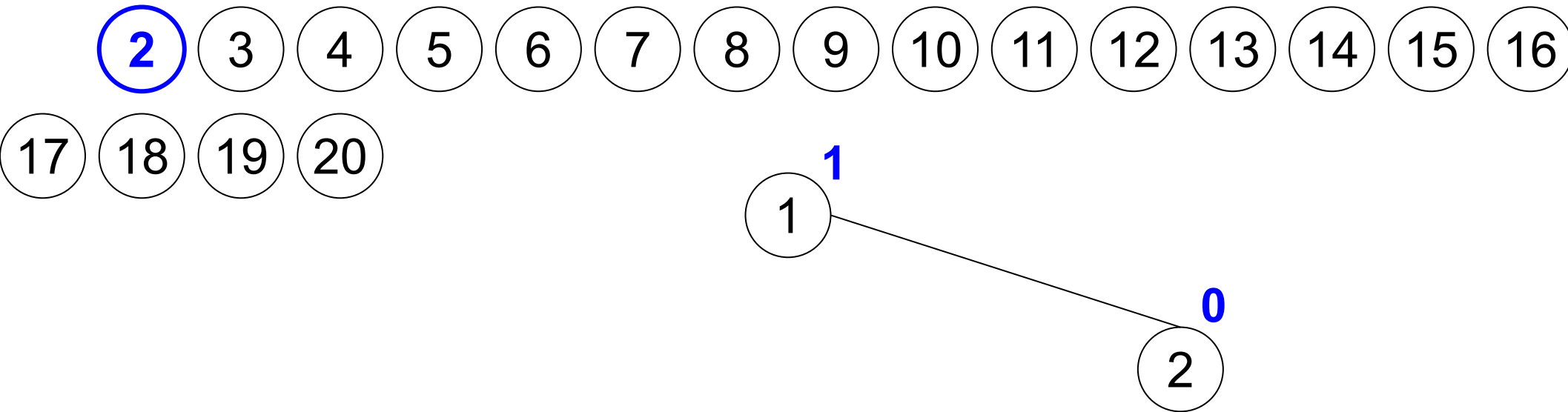
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



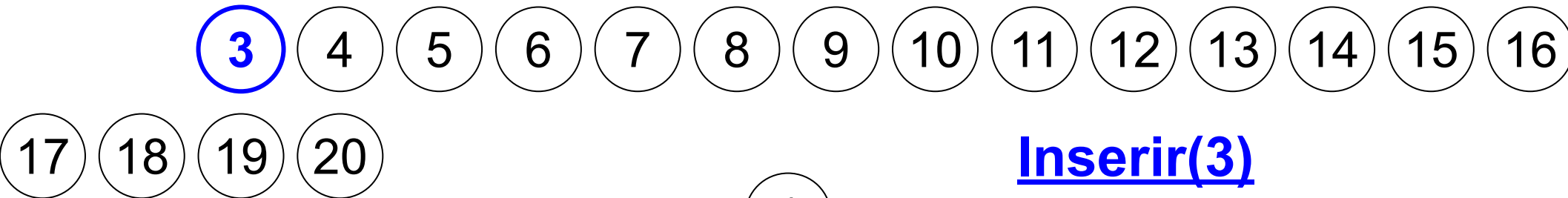
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



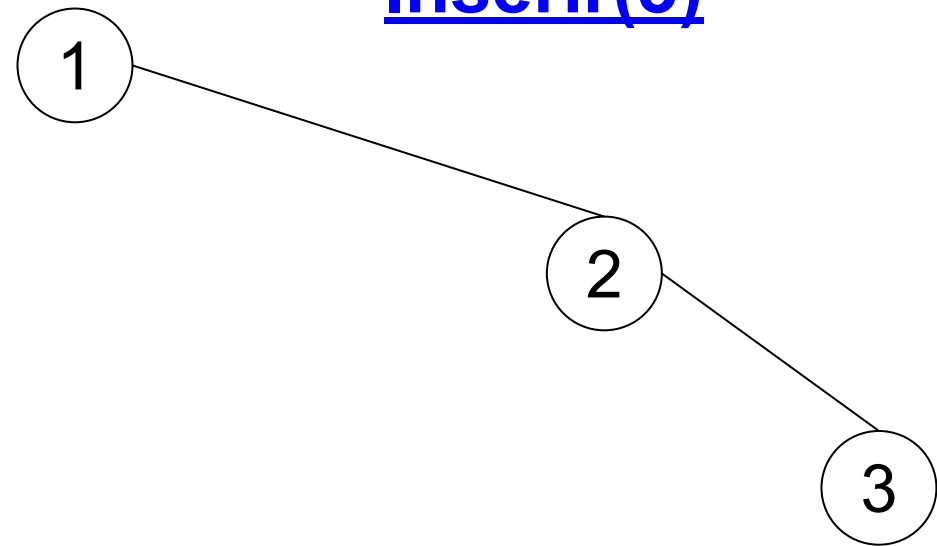
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



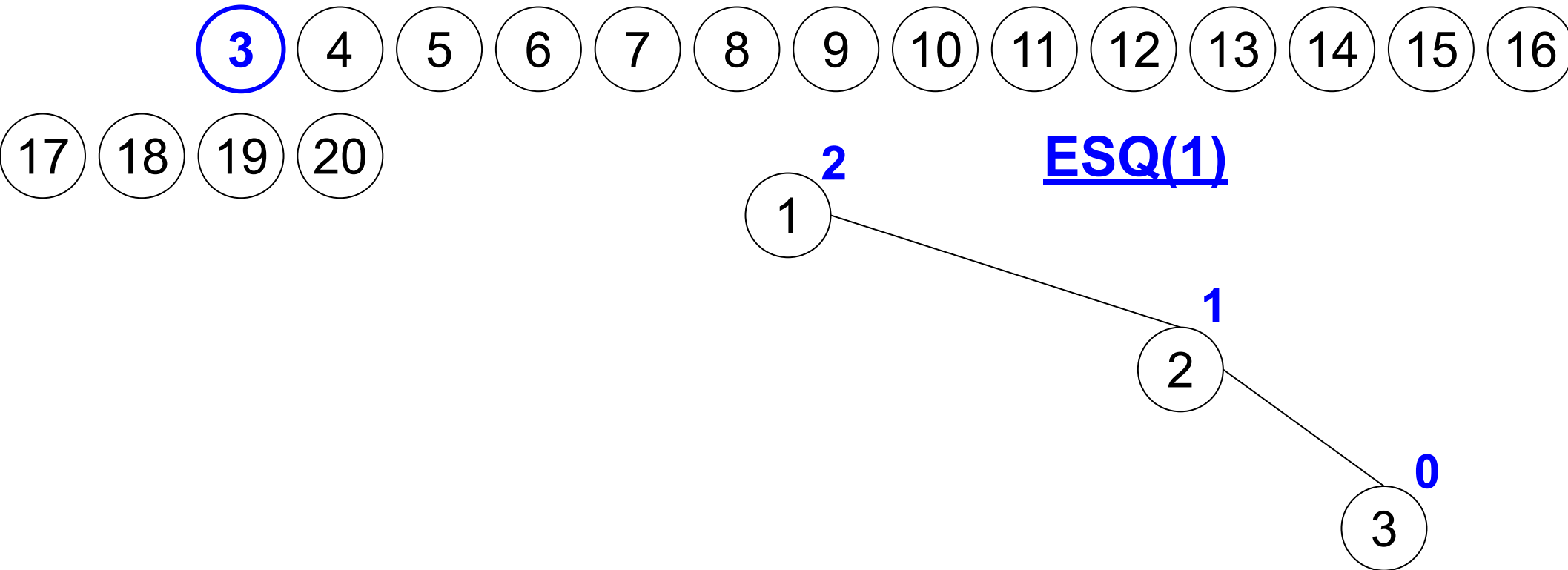
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



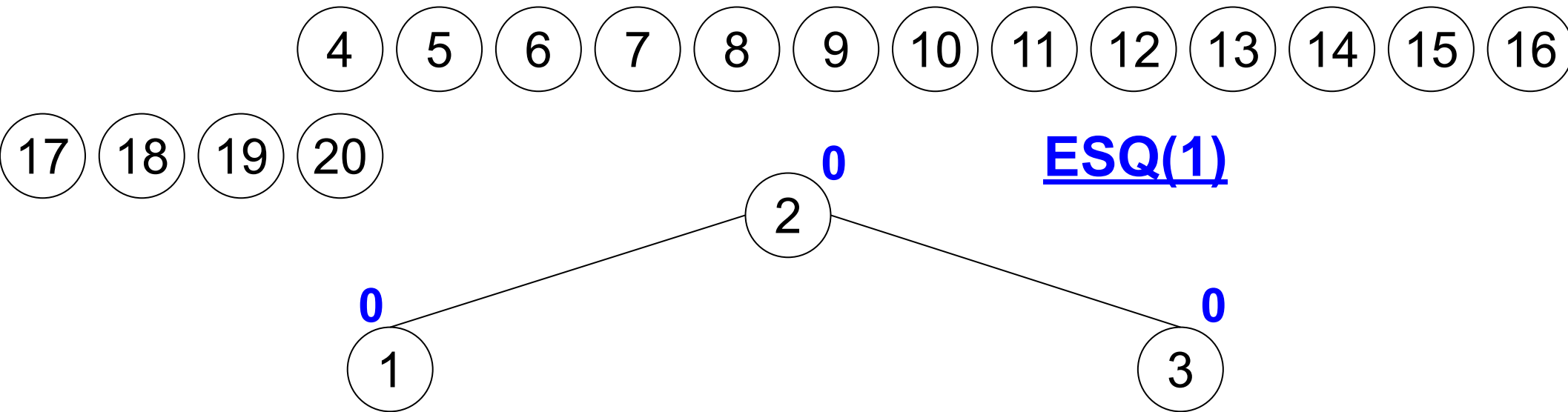
Inserir(3)



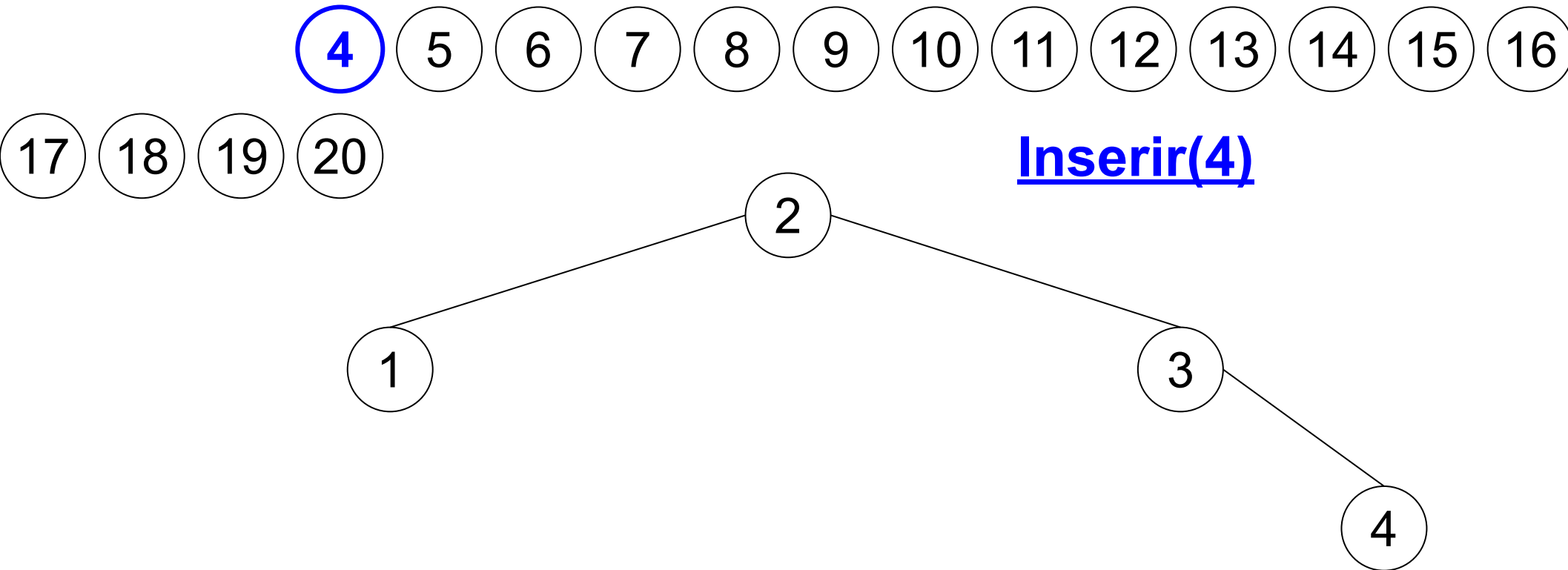
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



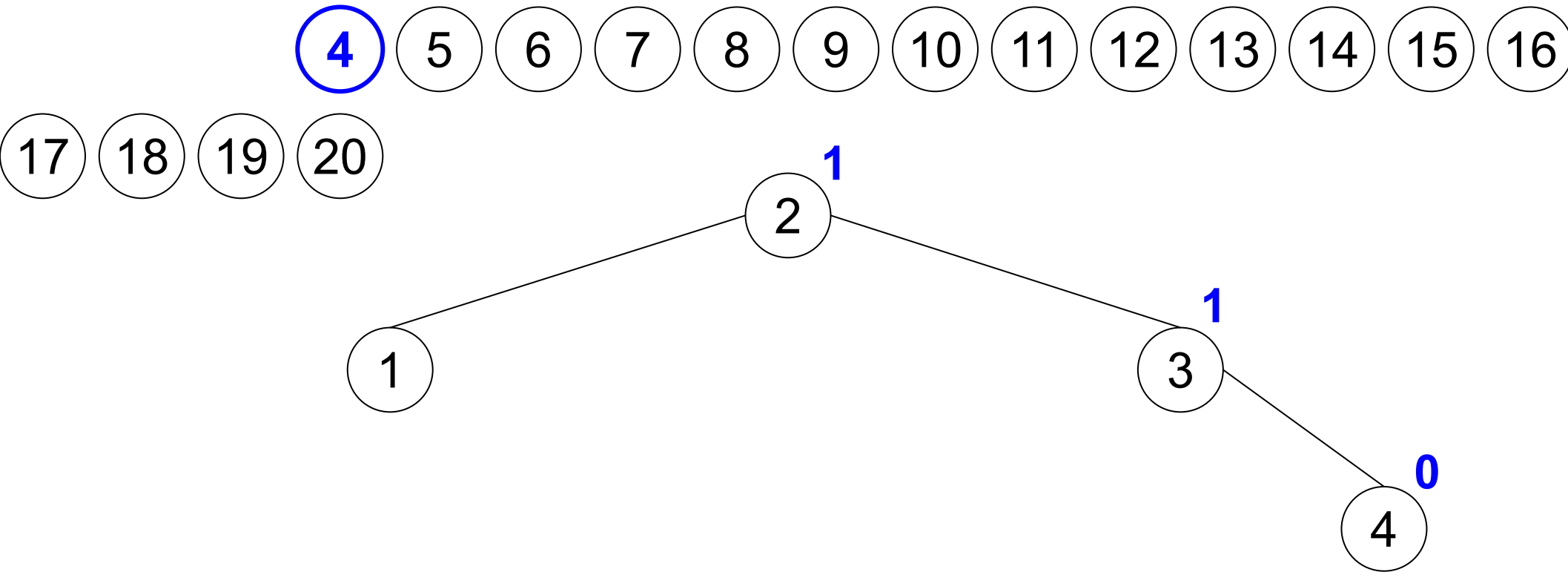
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



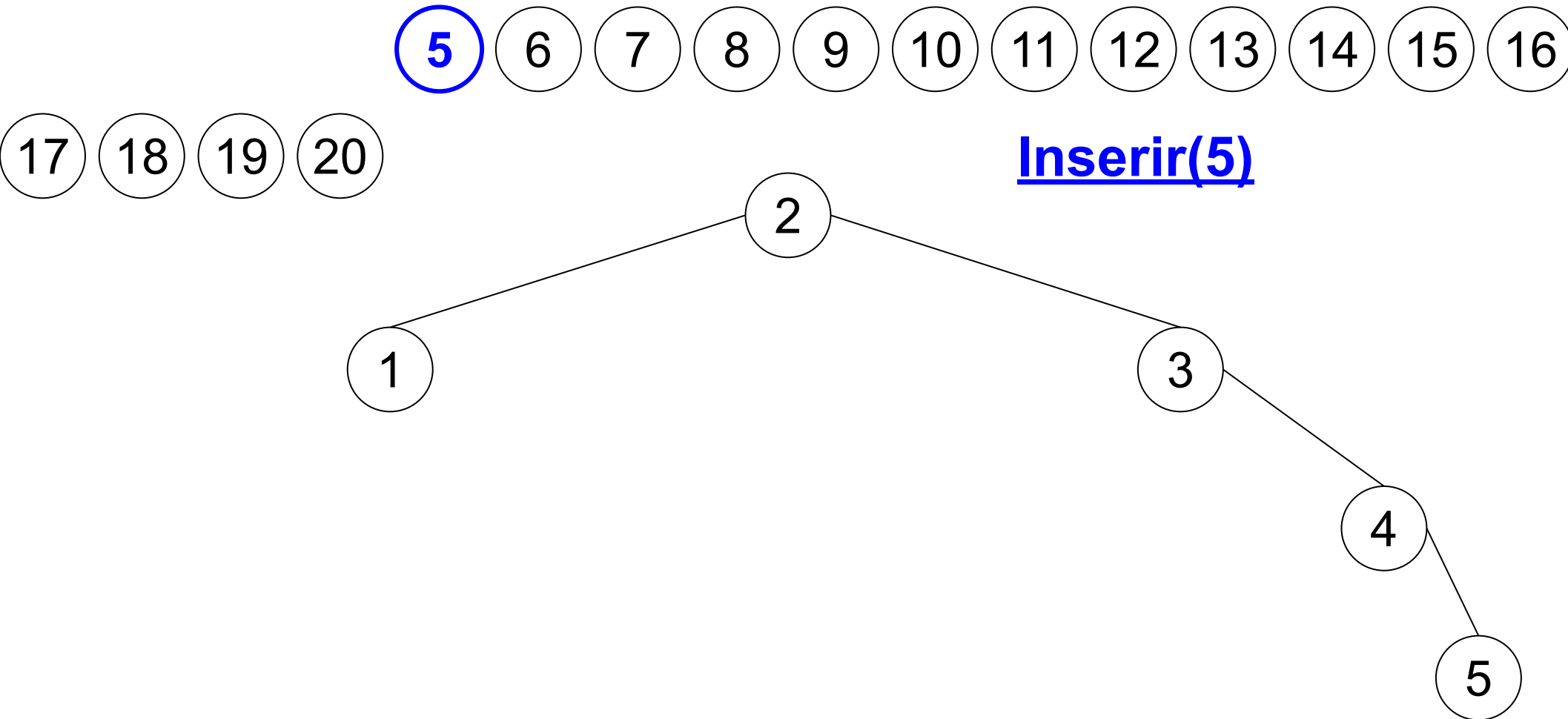
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



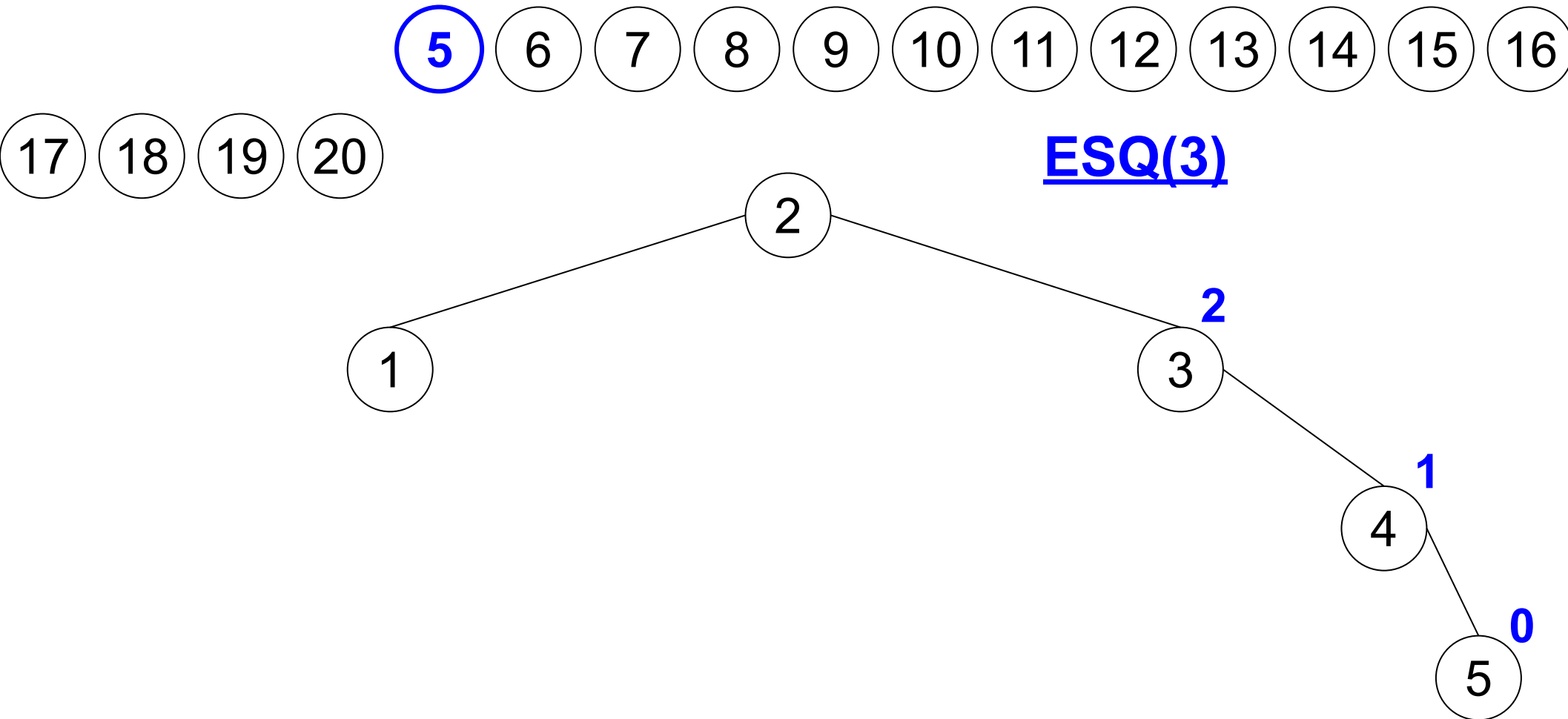
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



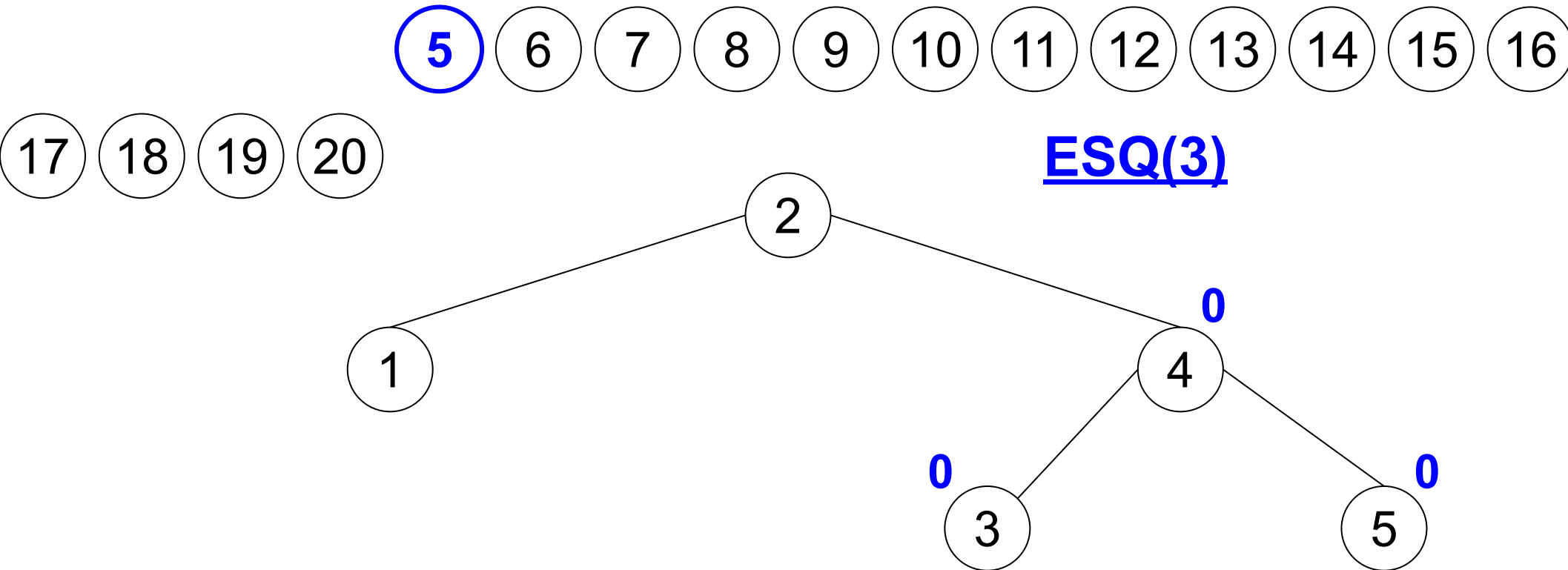
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



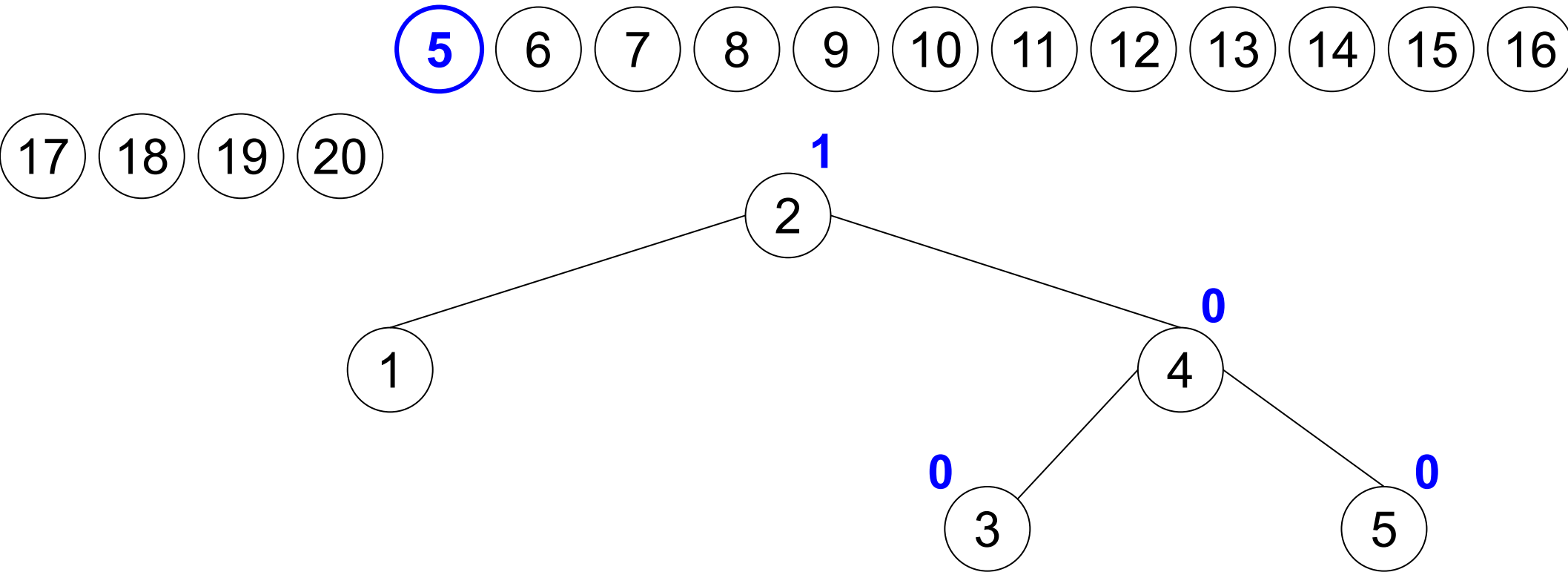
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

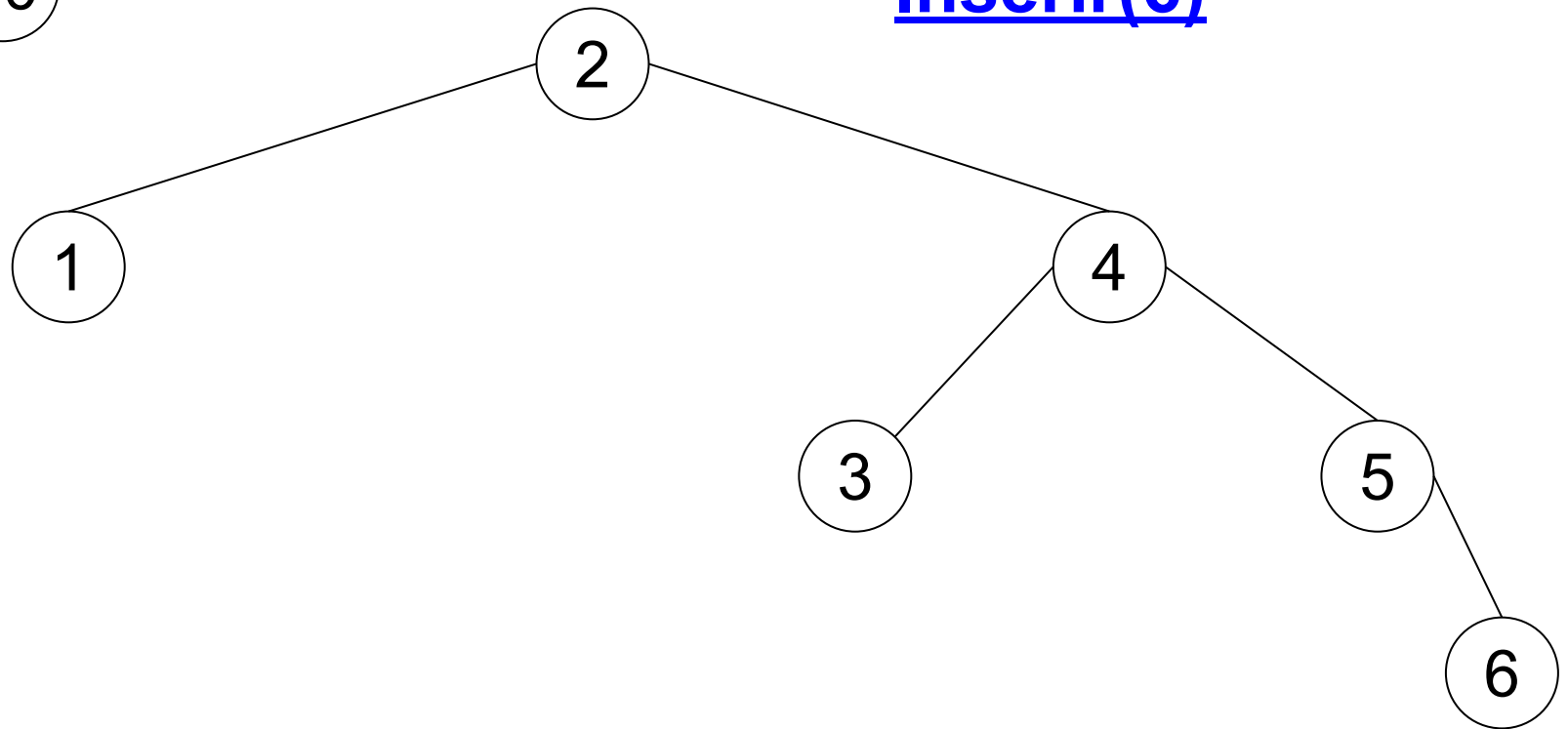


Inserir os Números 1 à 20 na AVL

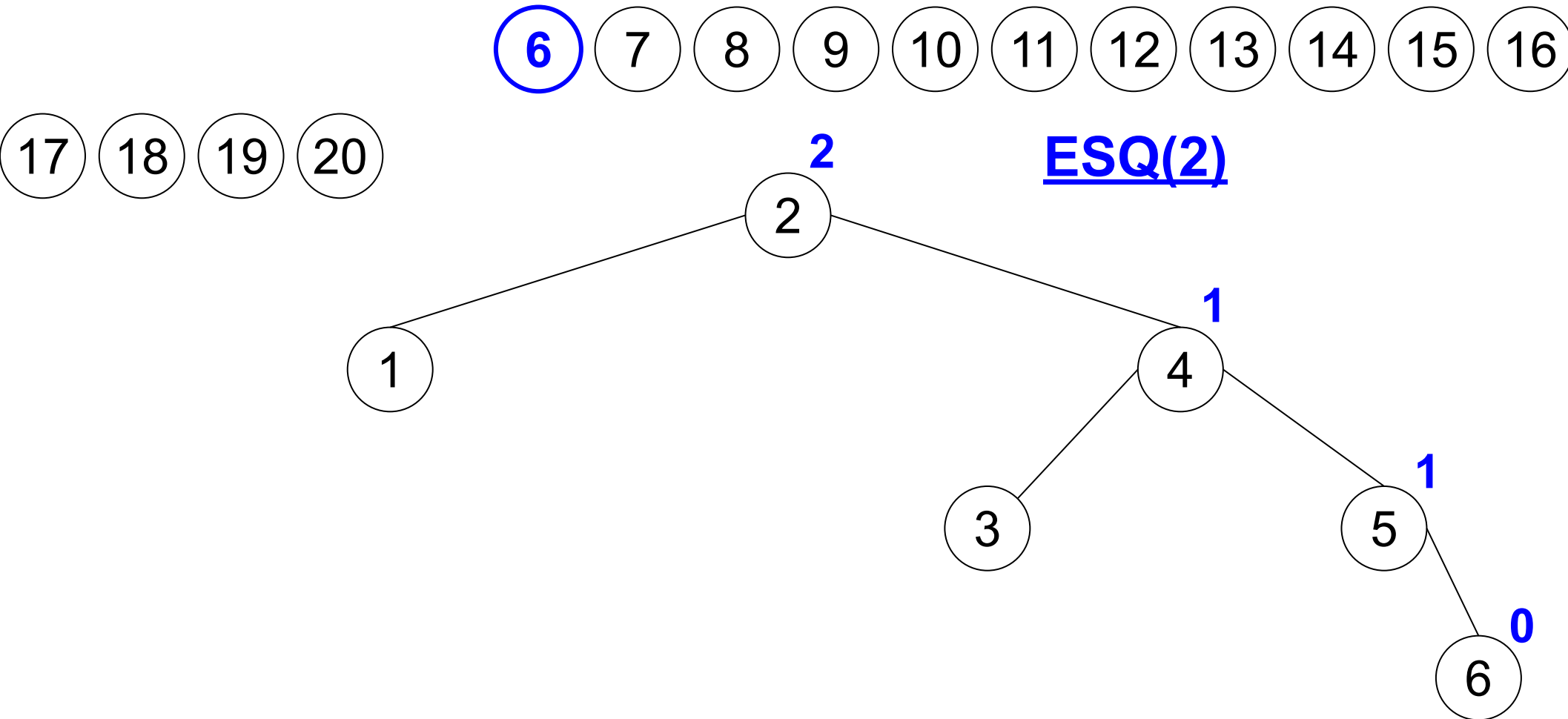
6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

17 18 19 20

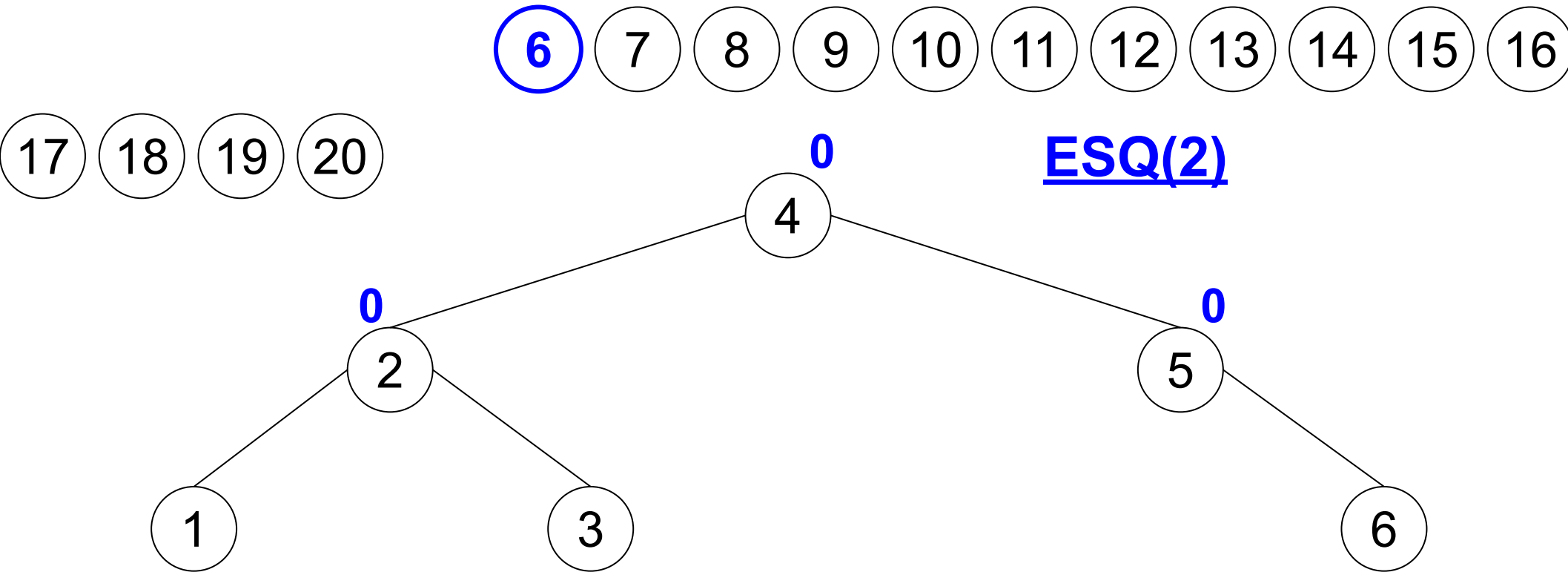
Inserir(6)



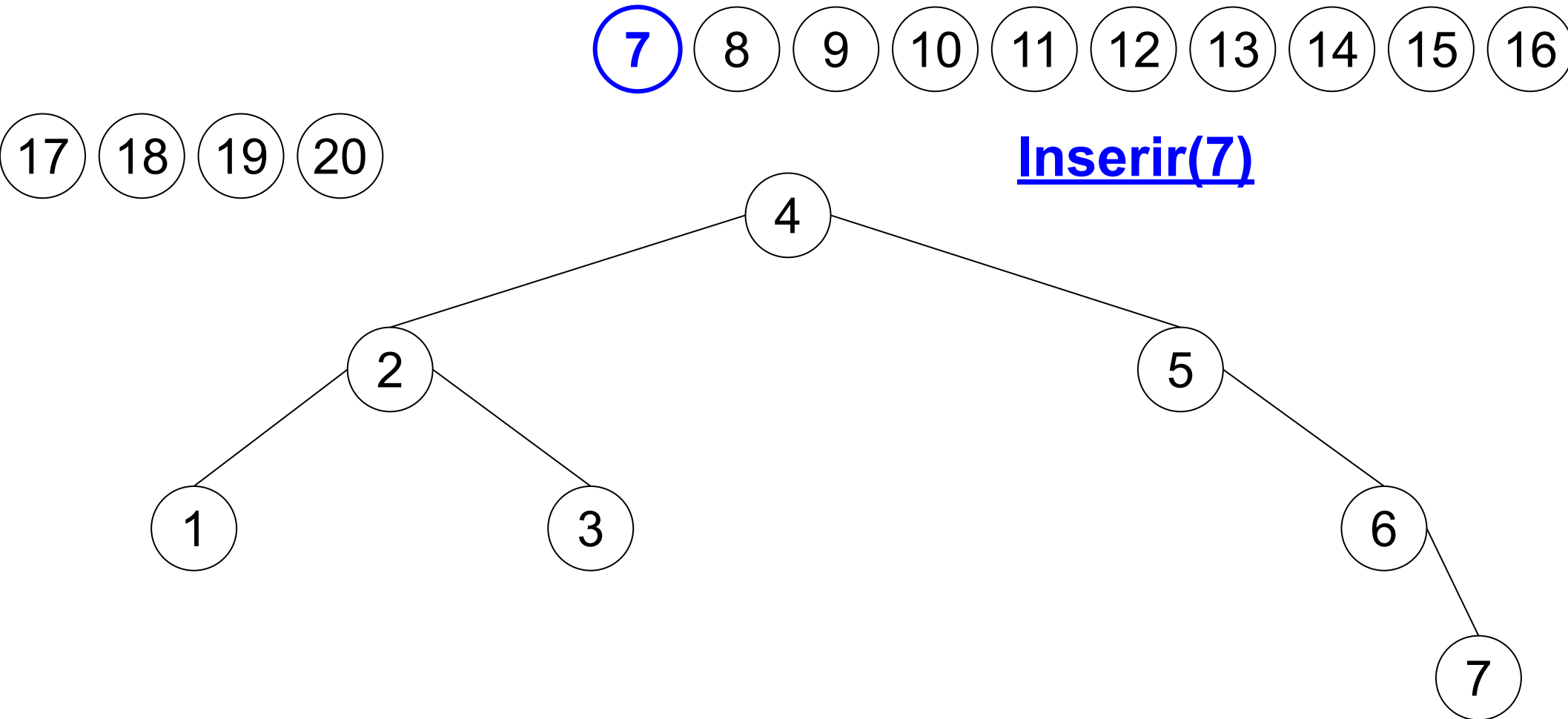
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



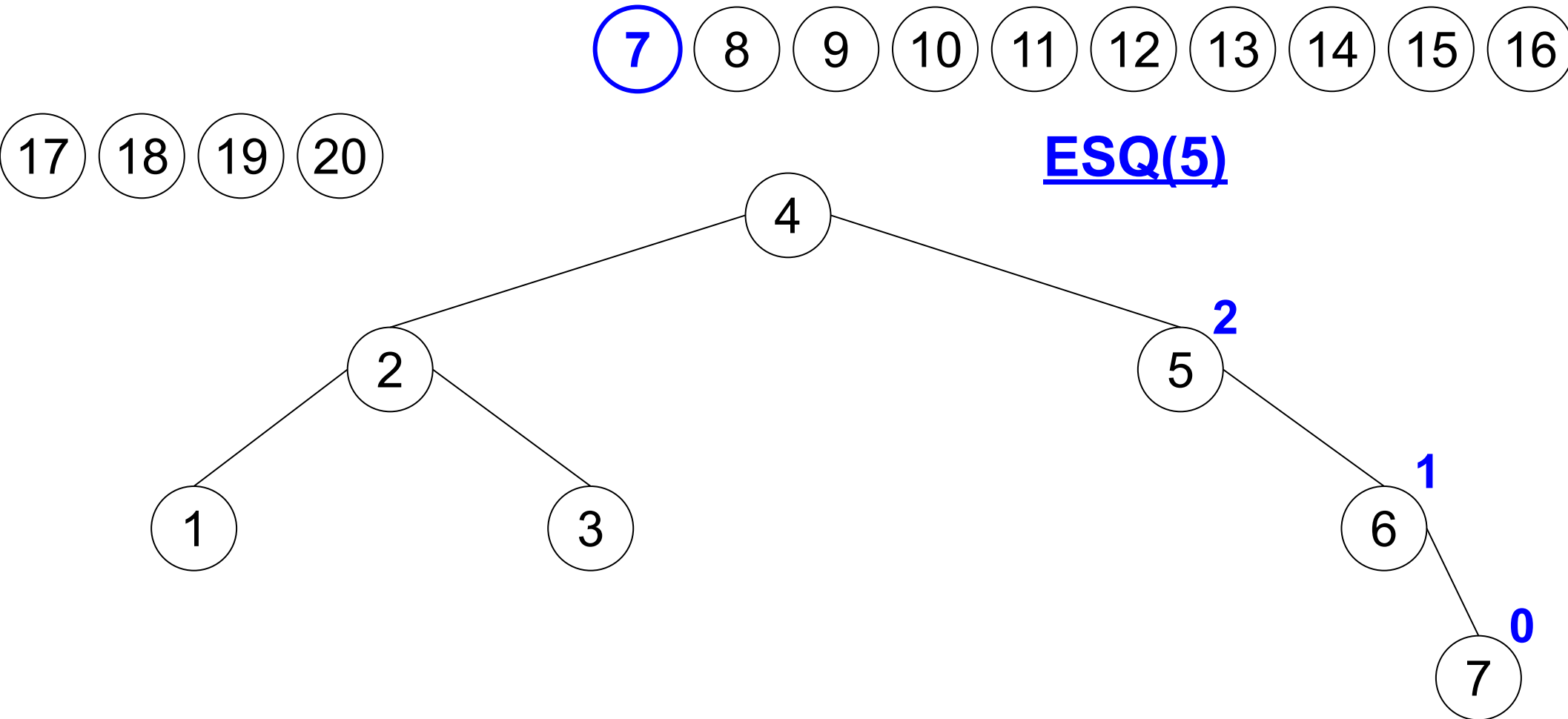
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



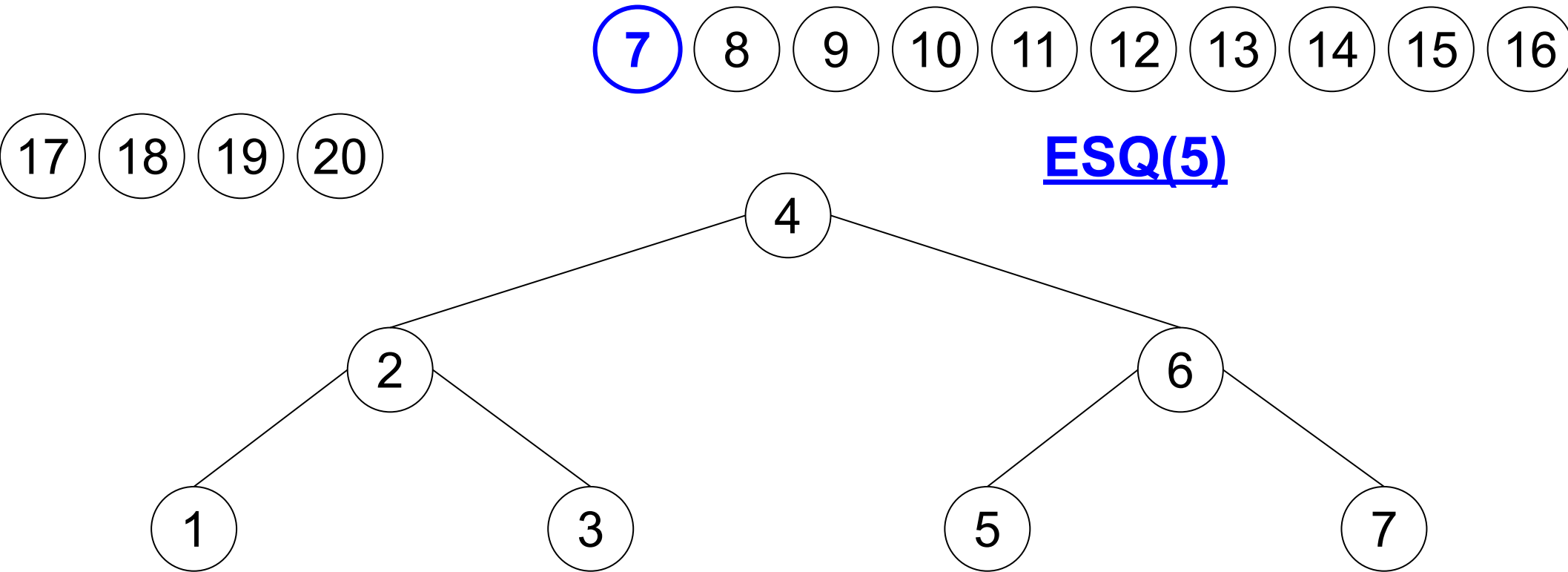
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



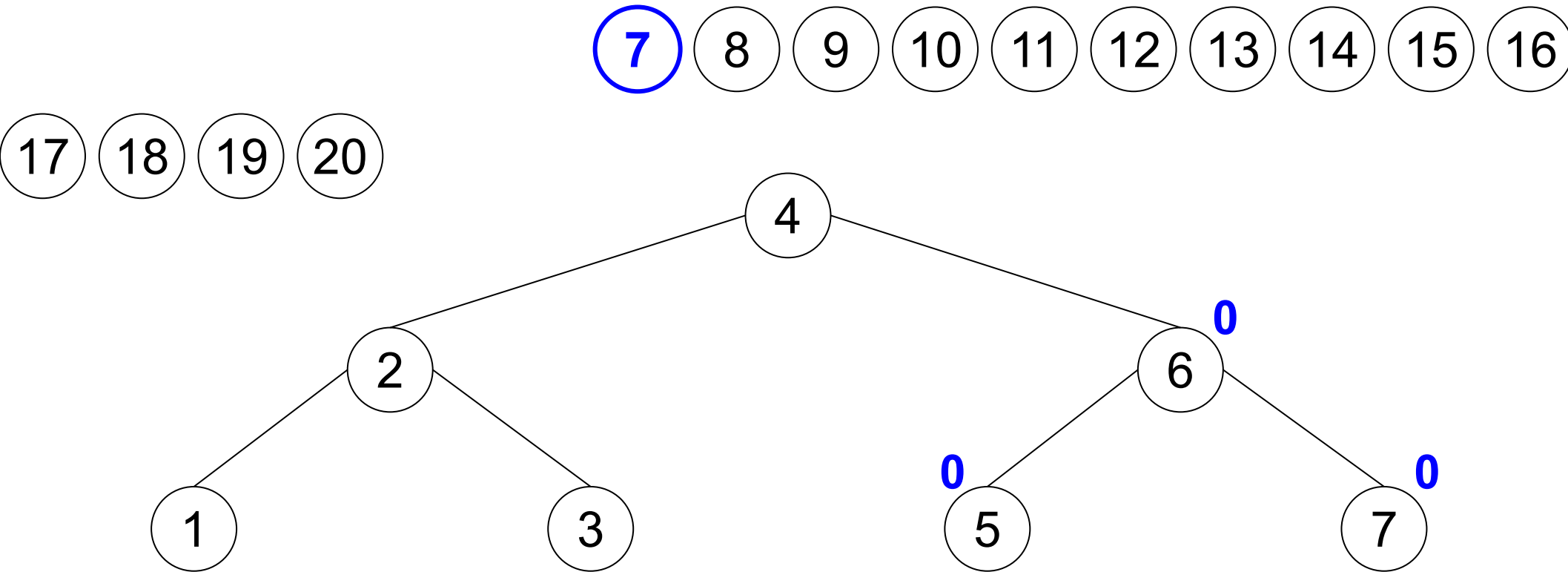
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



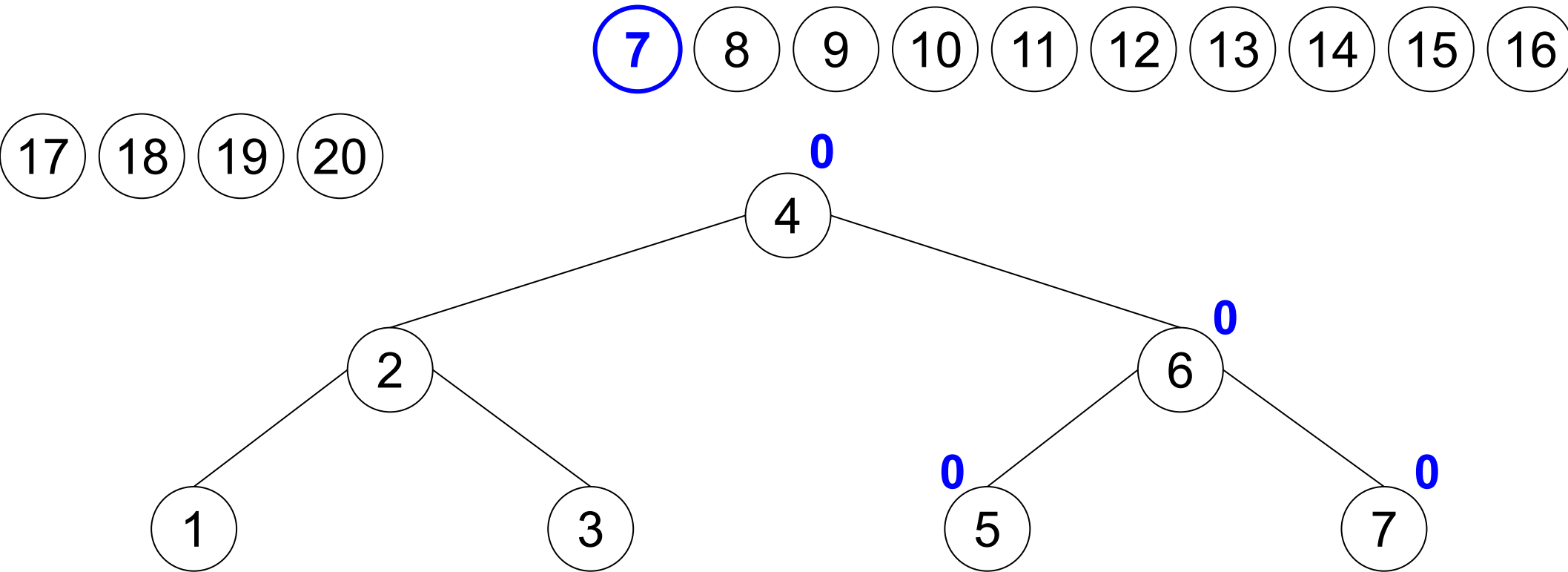
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



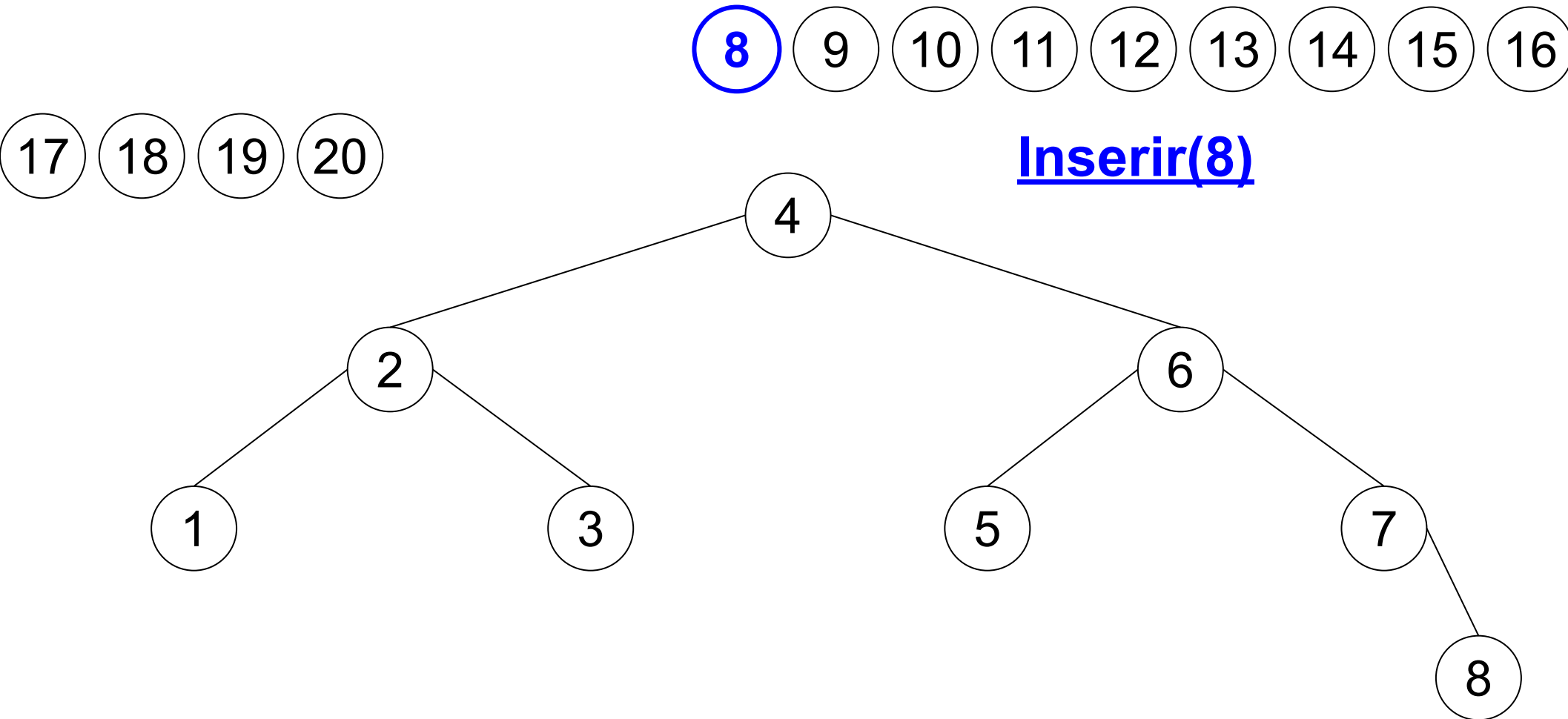
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



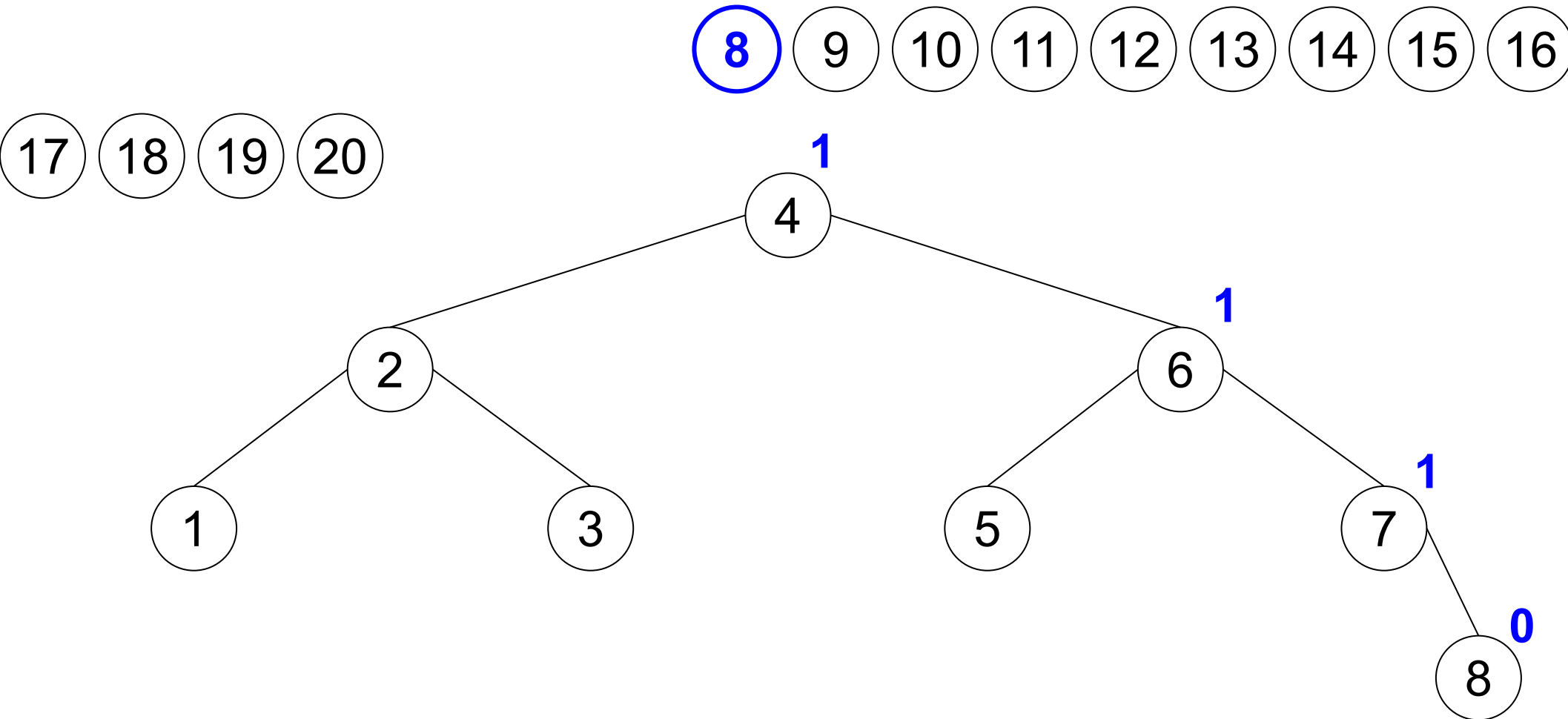
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



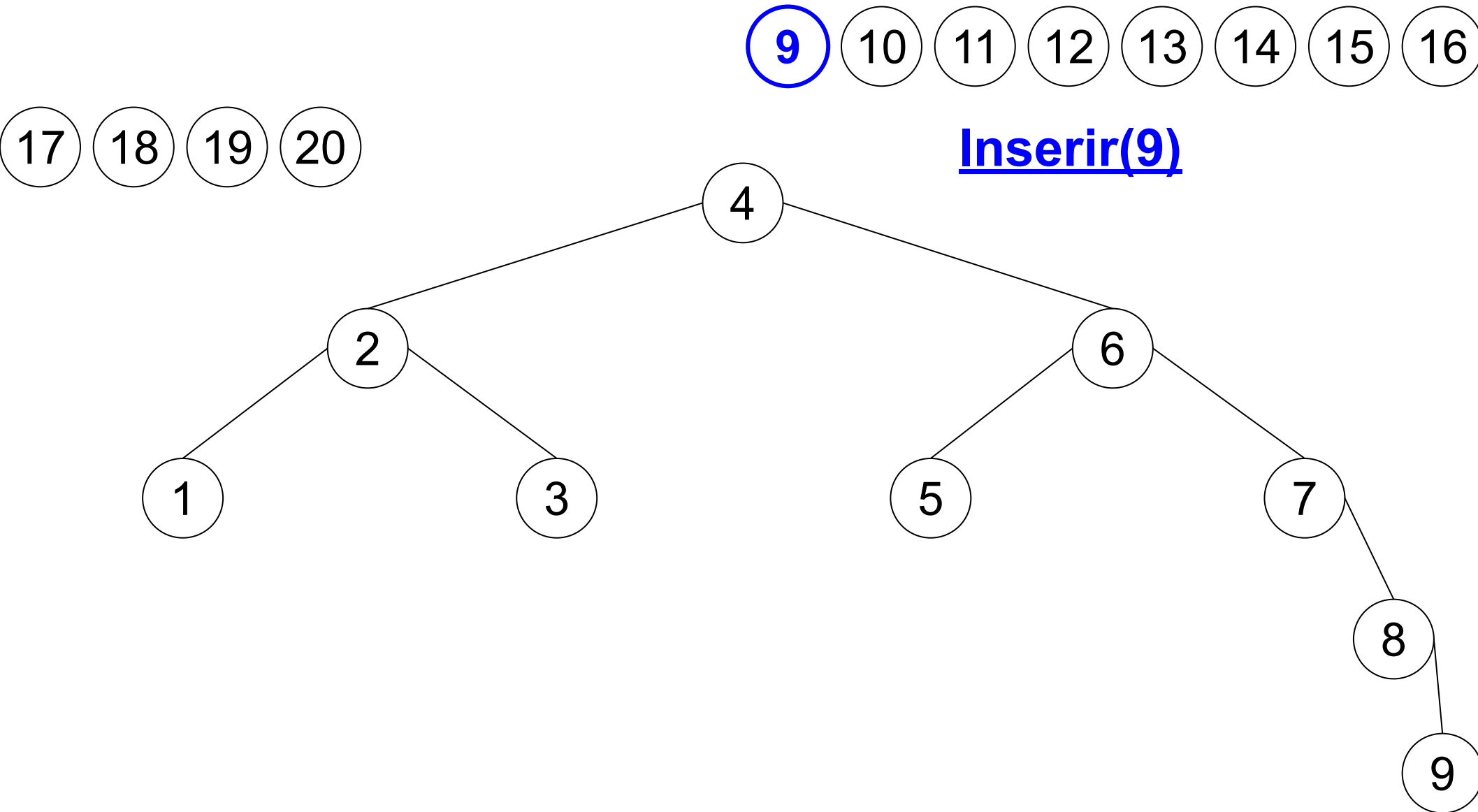
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



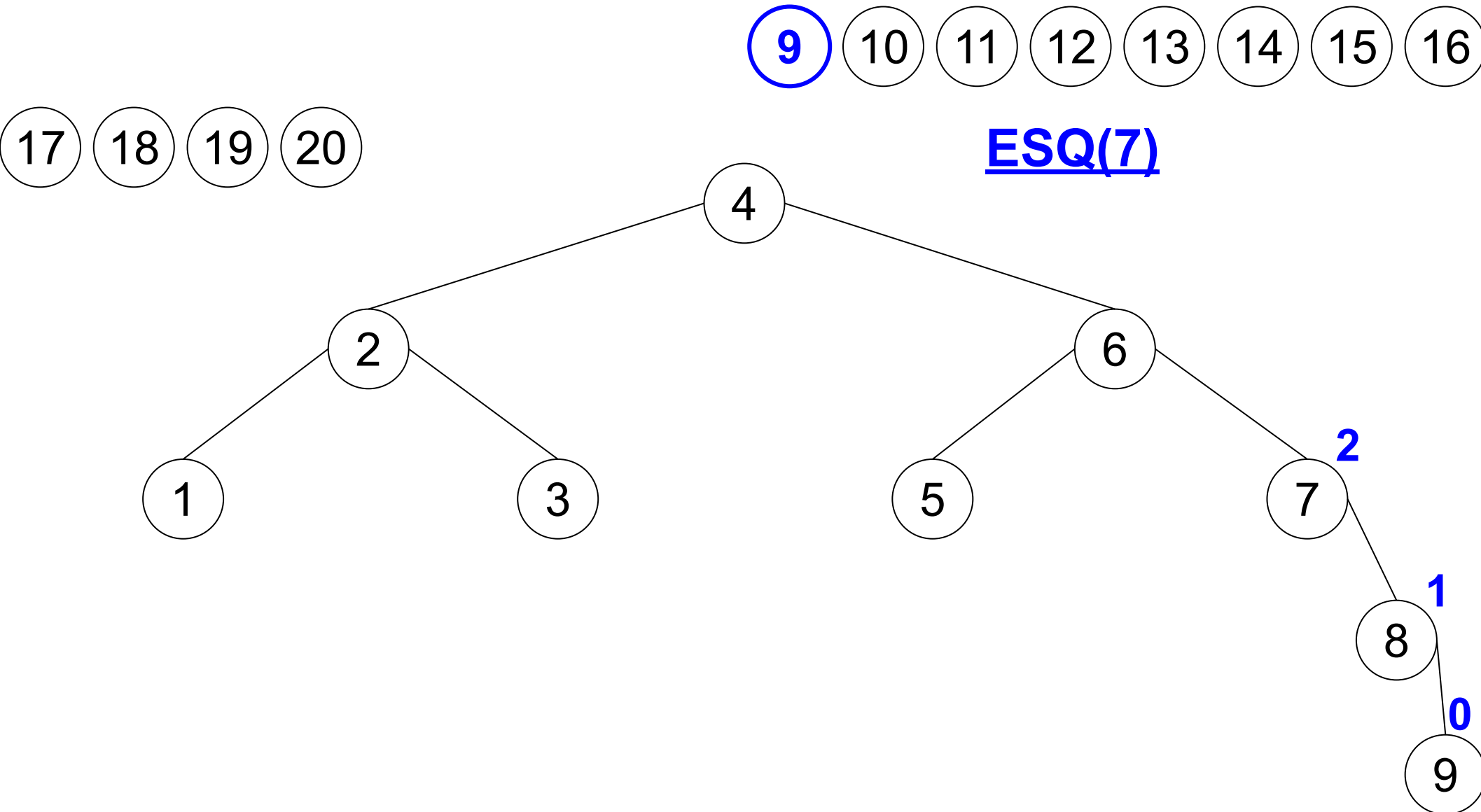
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



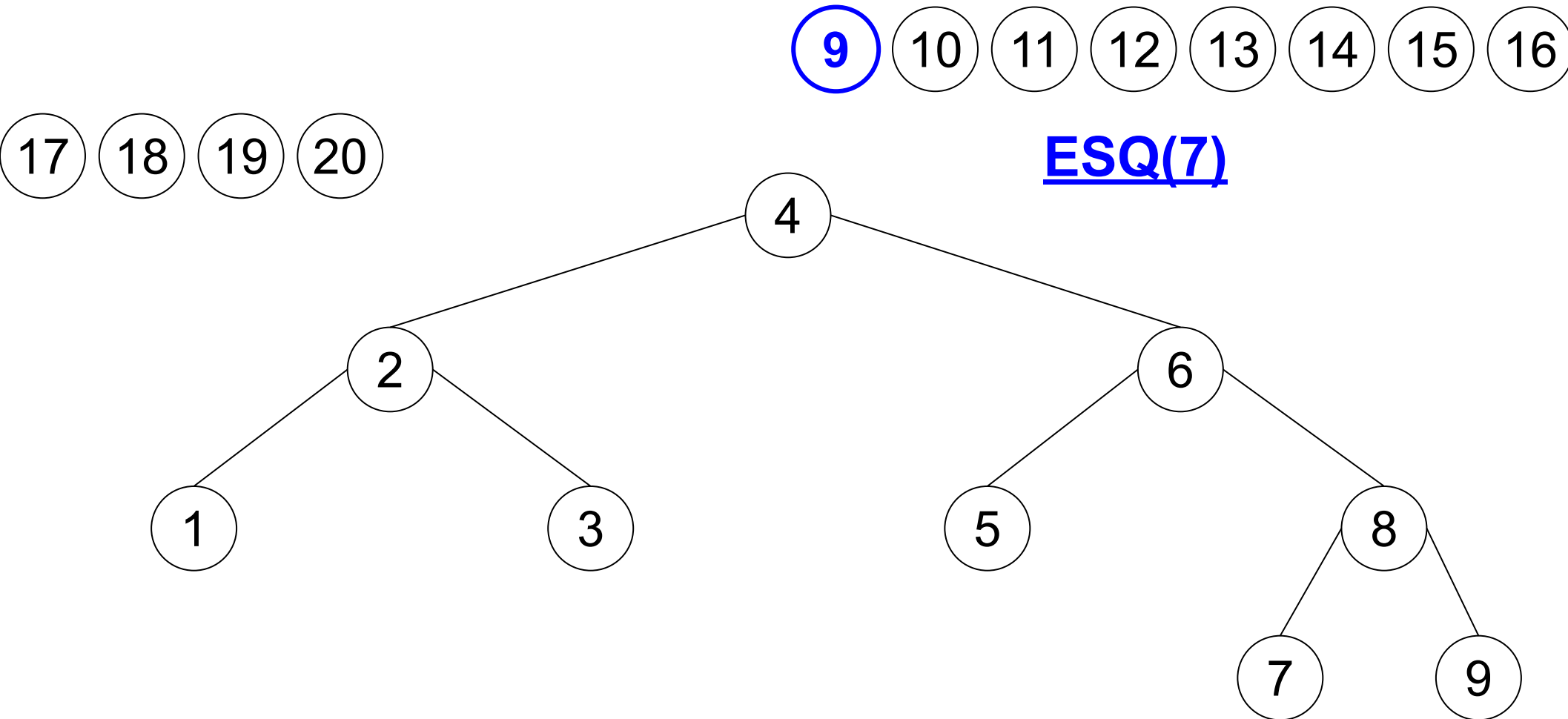
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



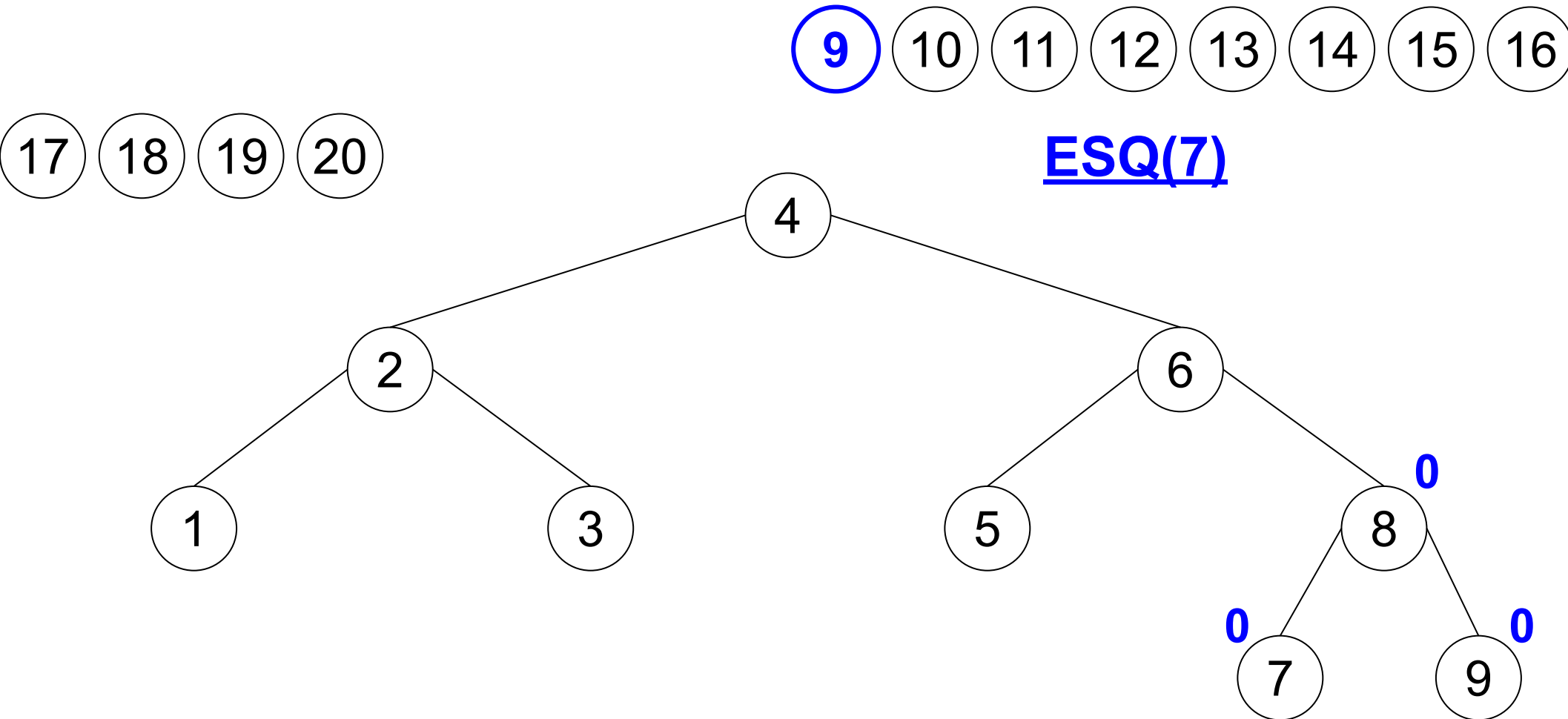
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



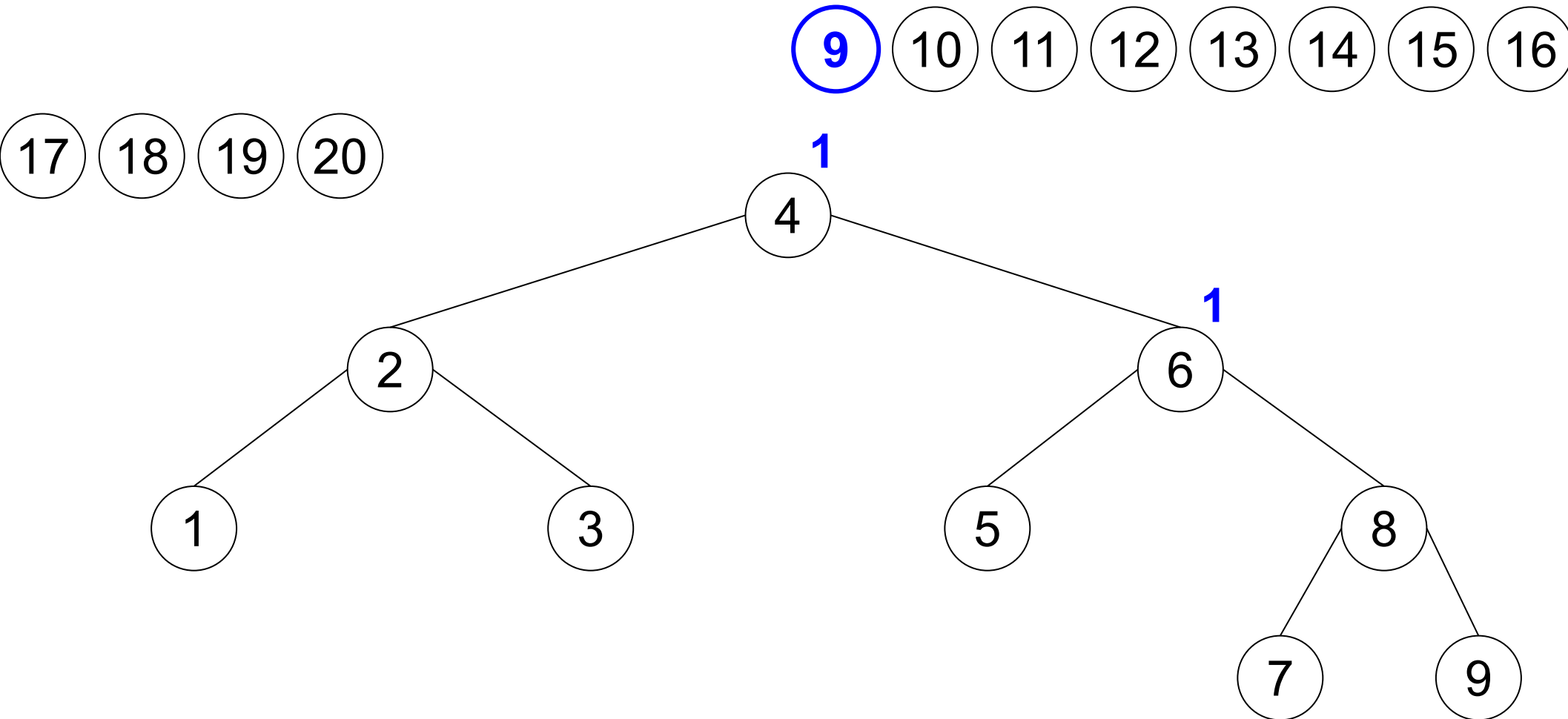
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



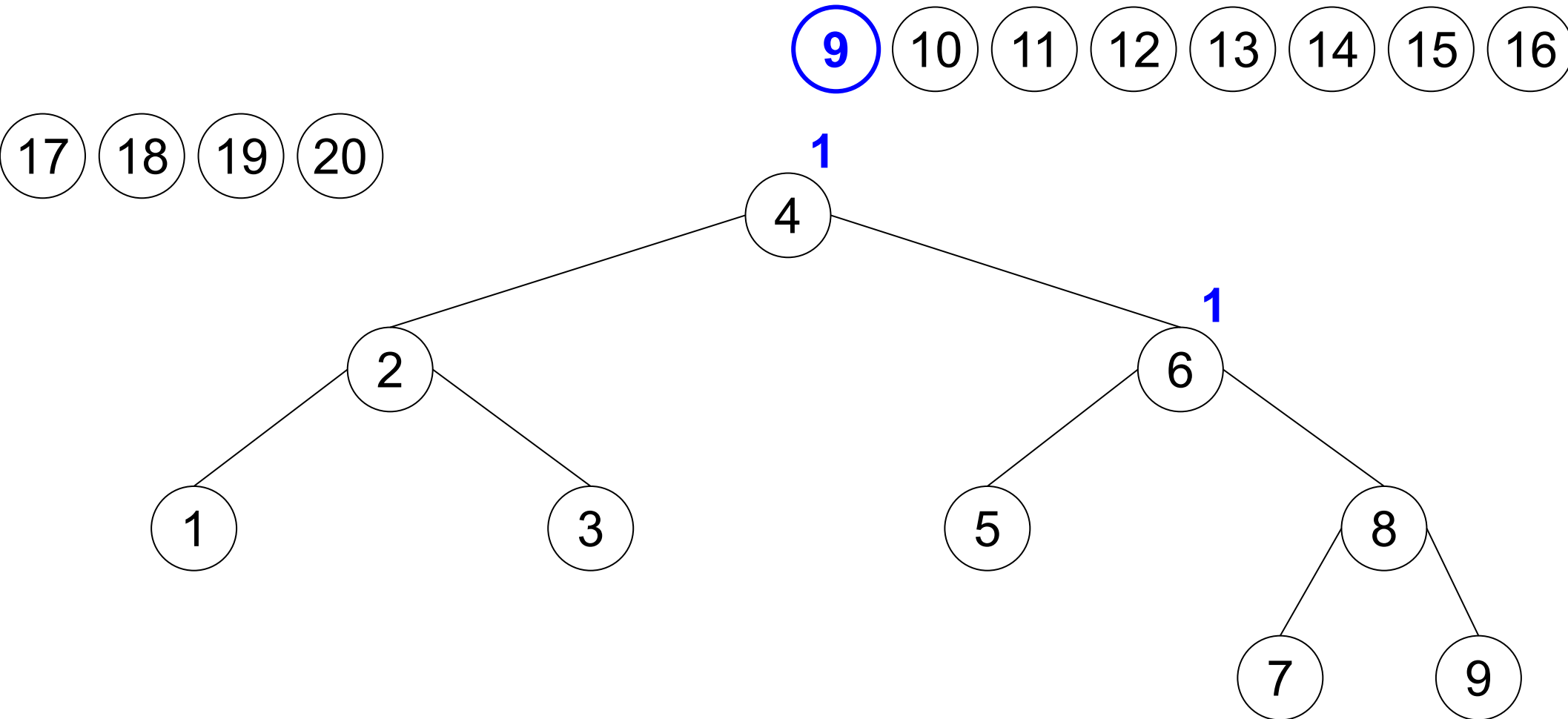
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



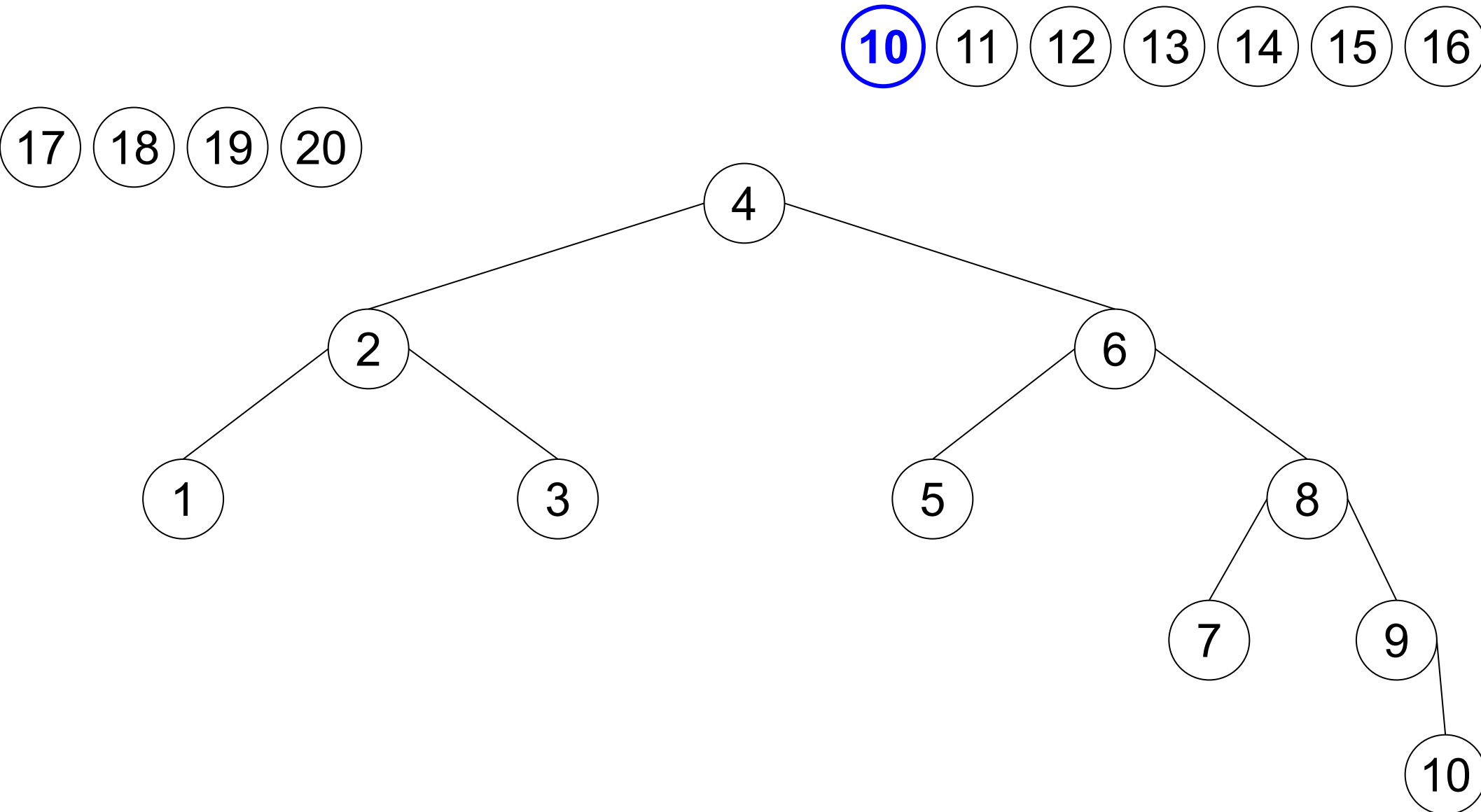
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



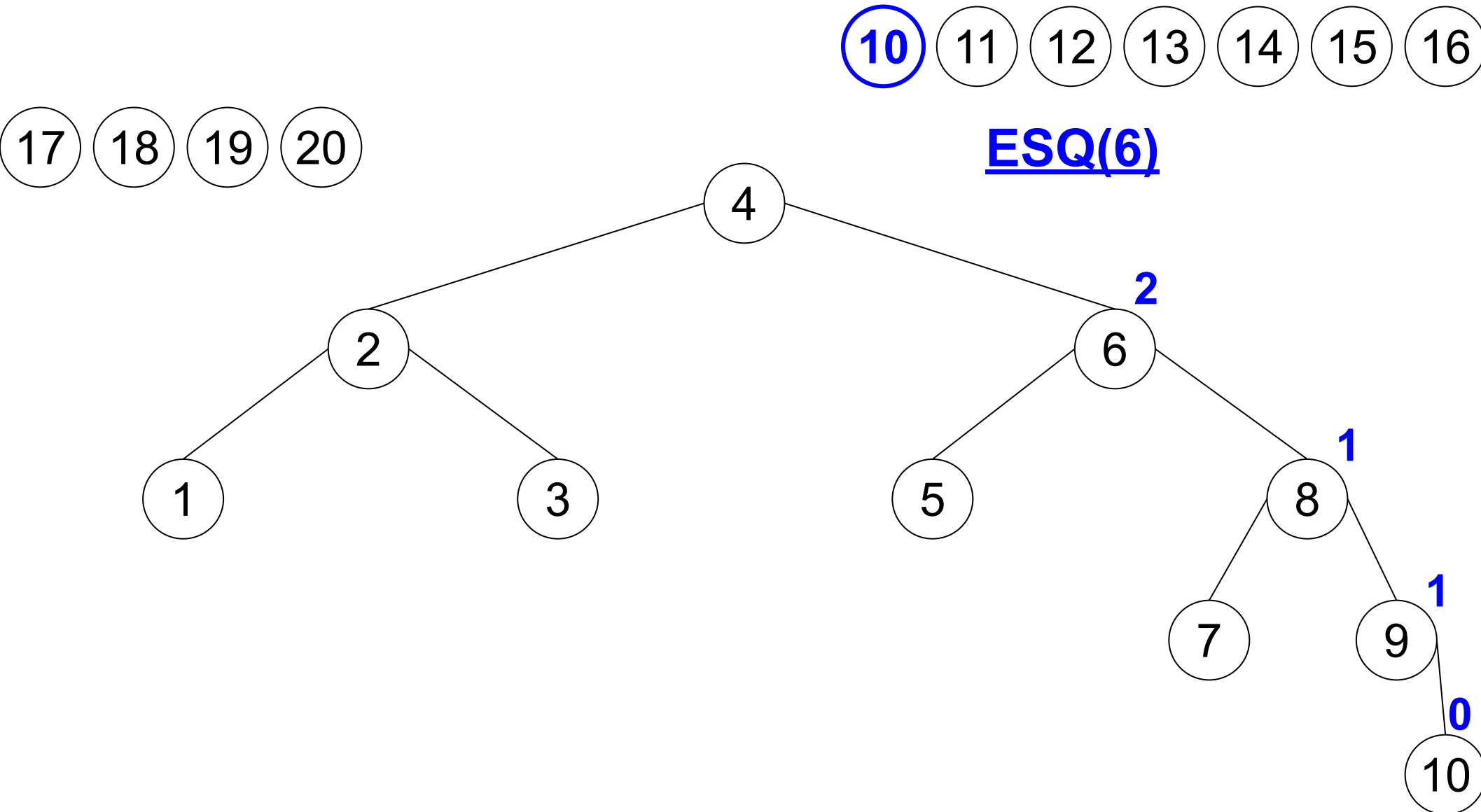
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



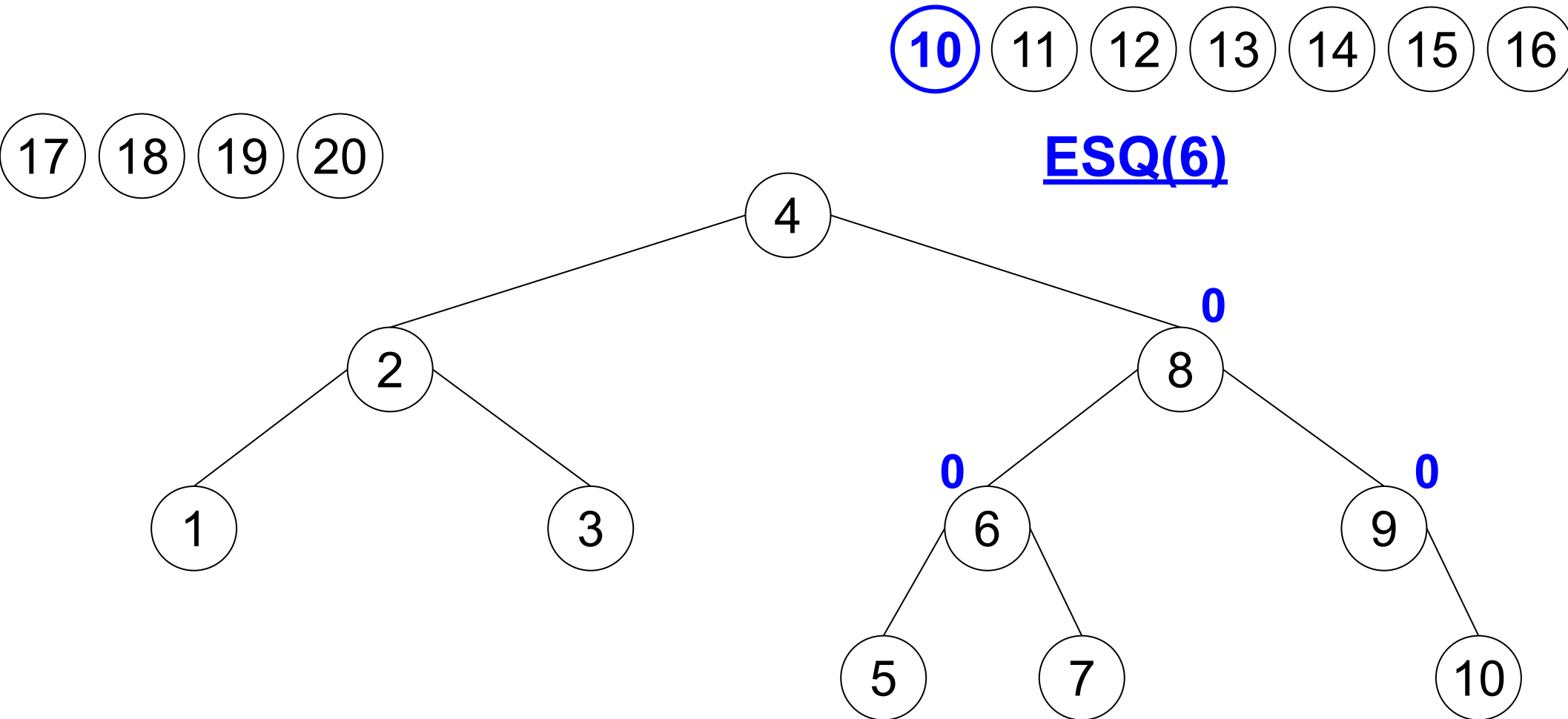
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



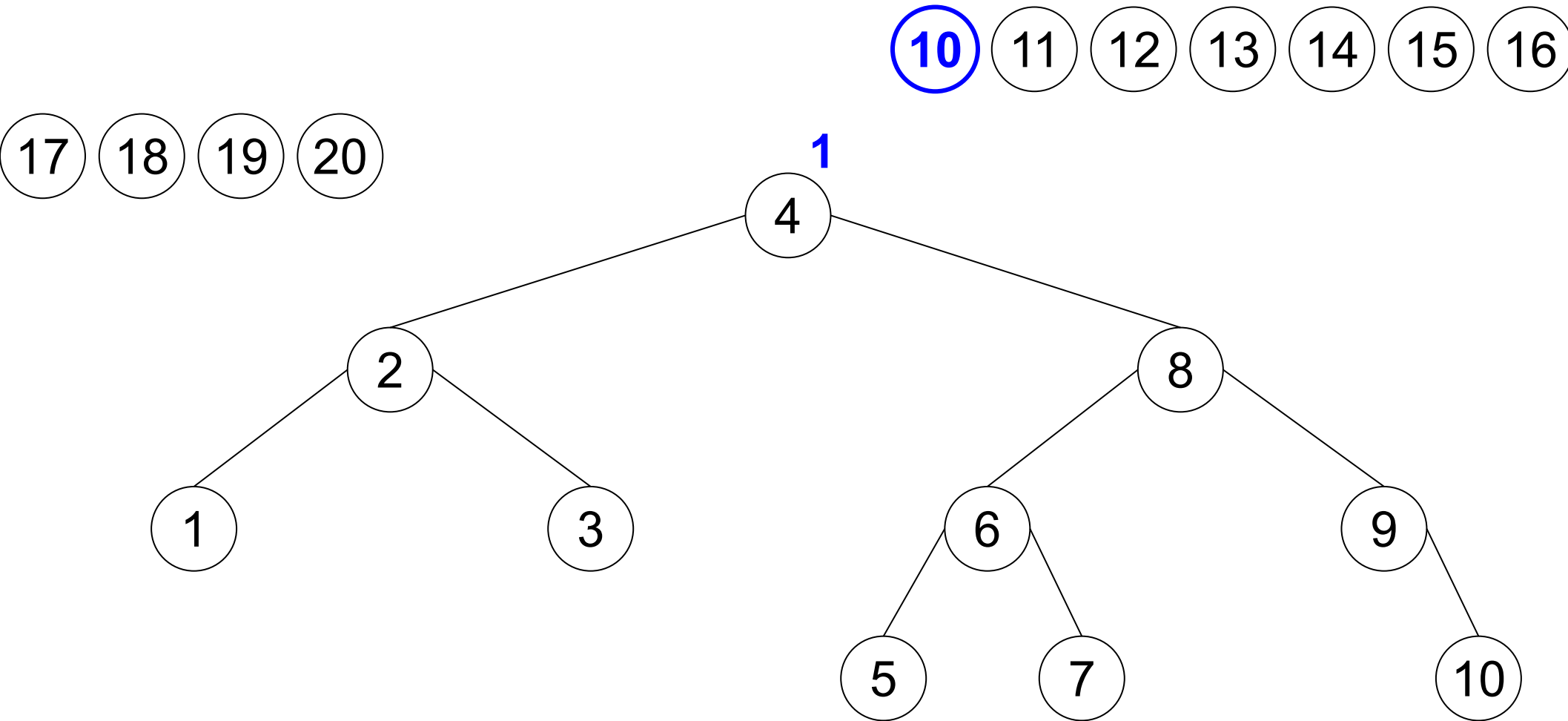
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



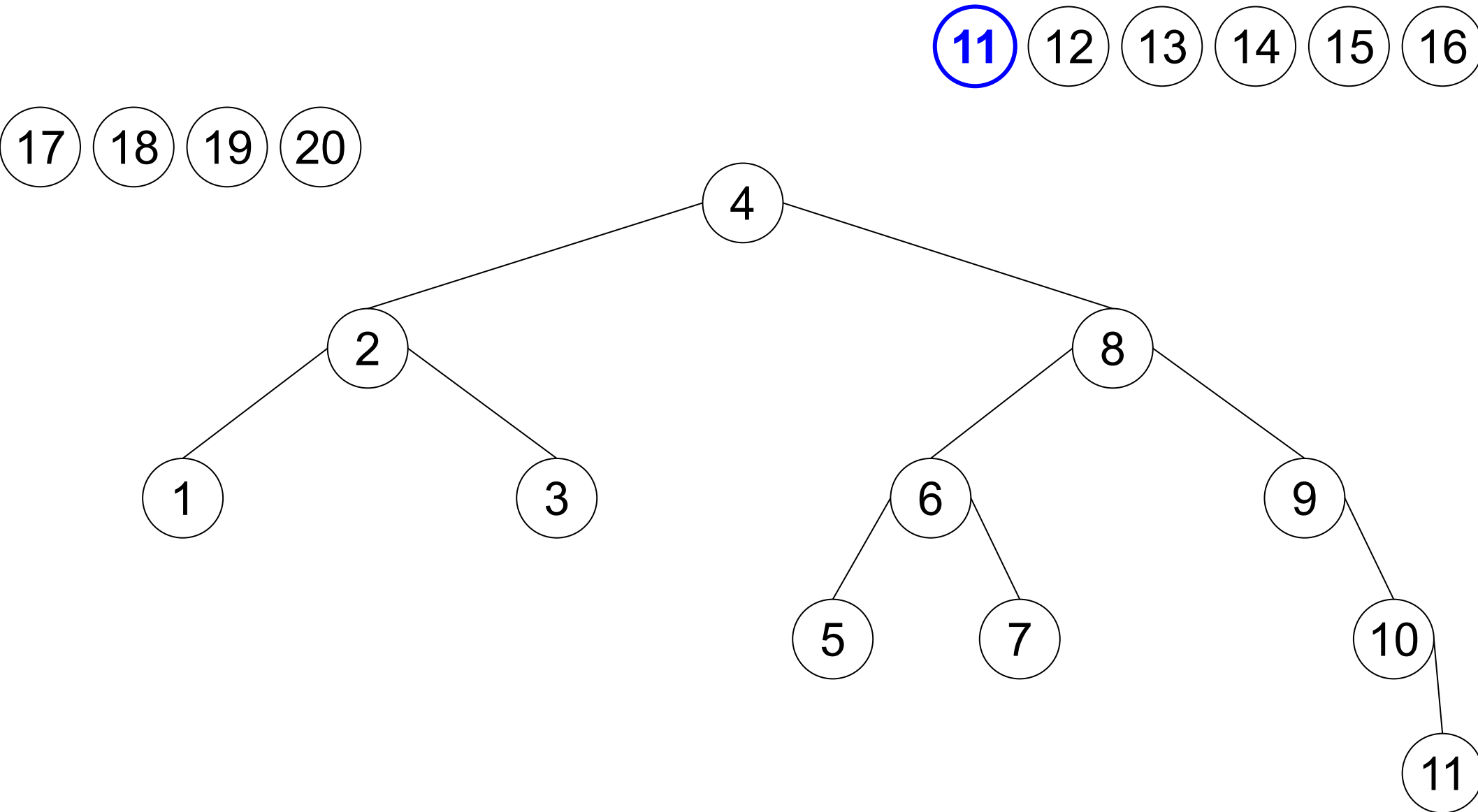
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



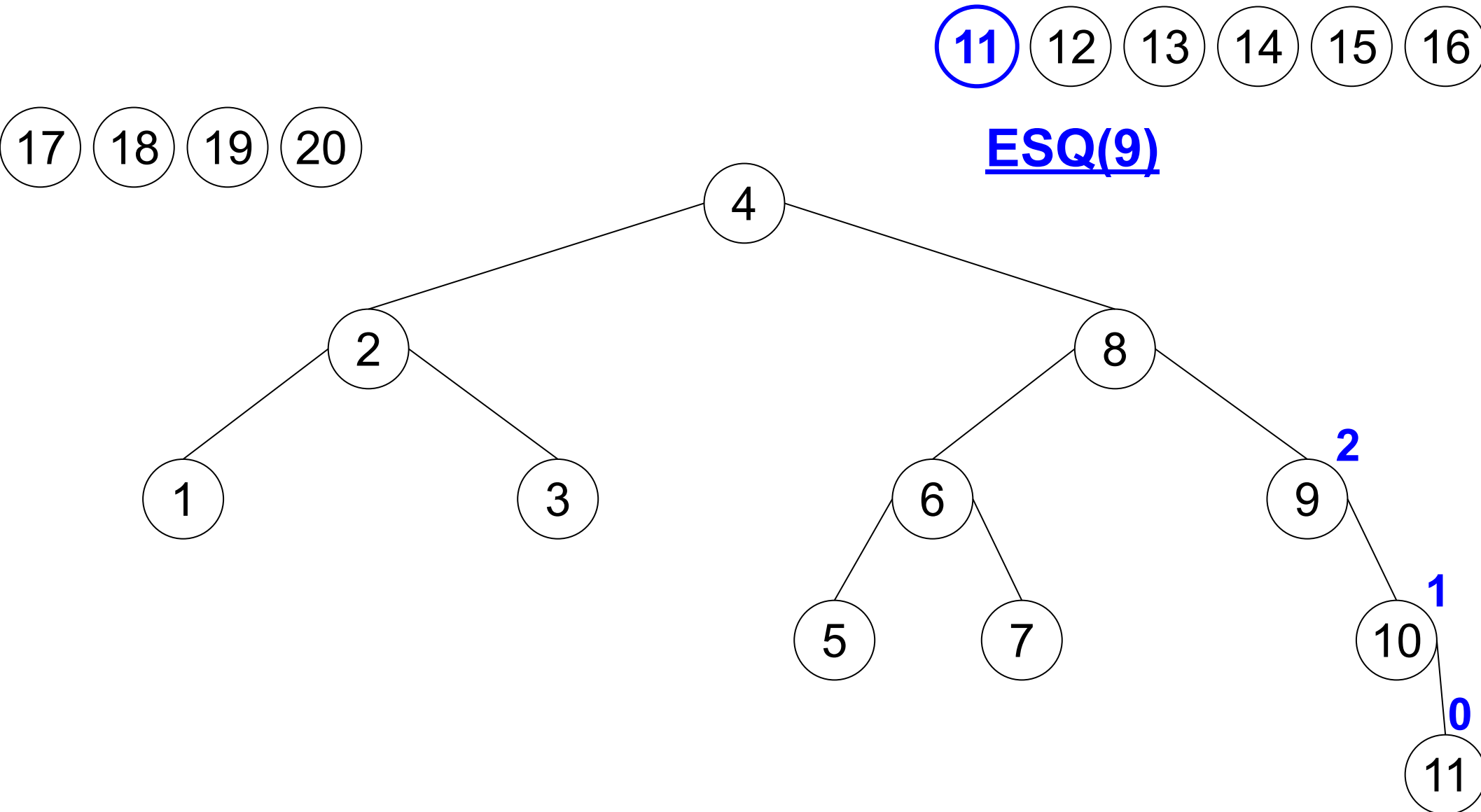
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



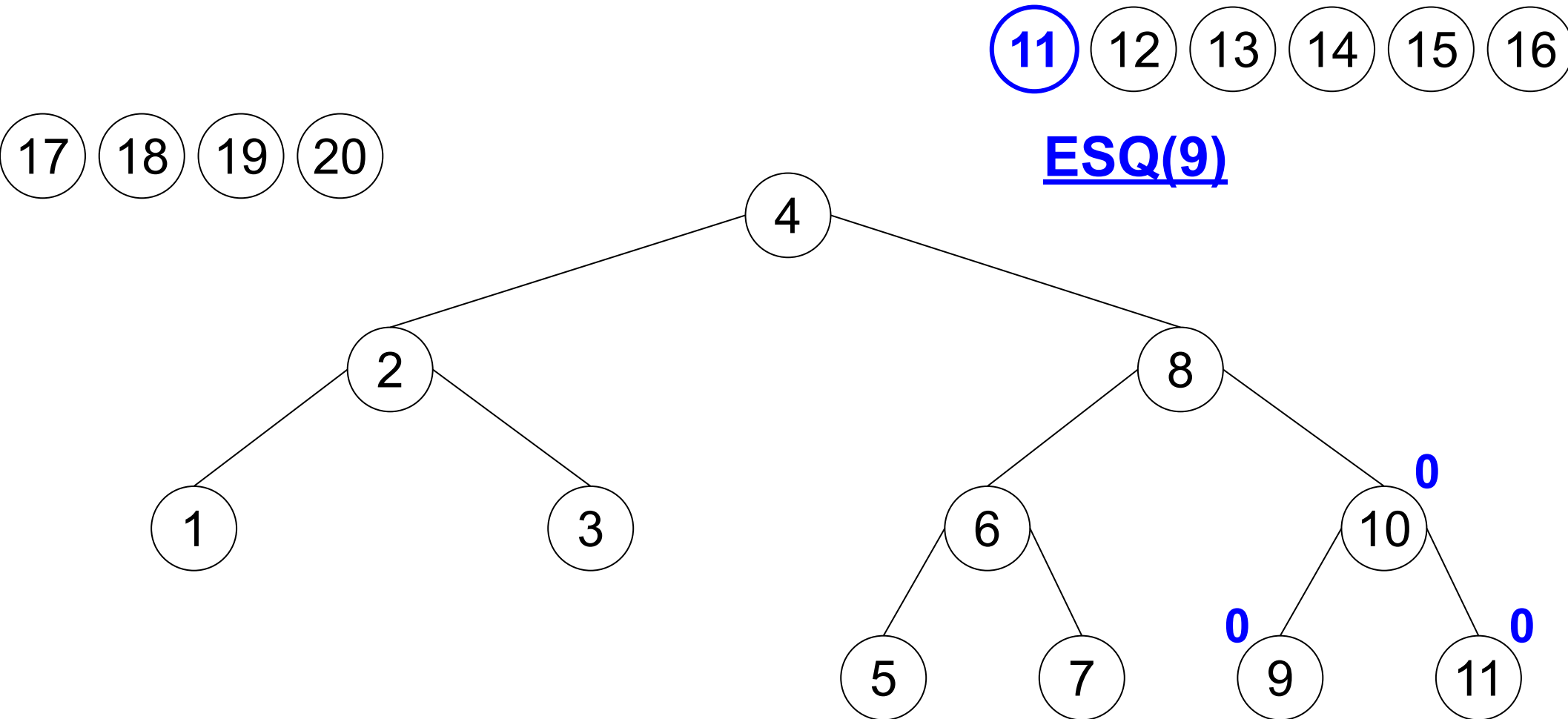
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



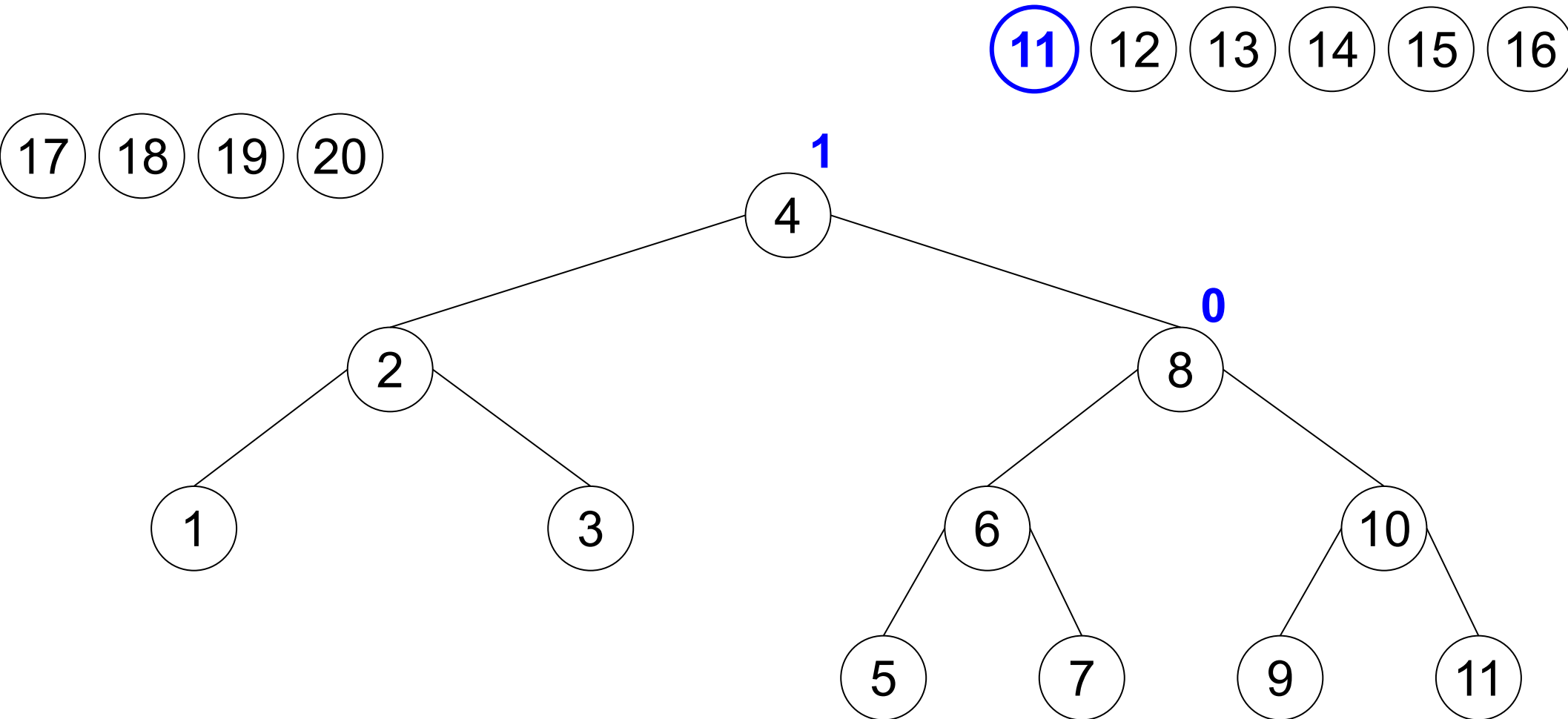
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



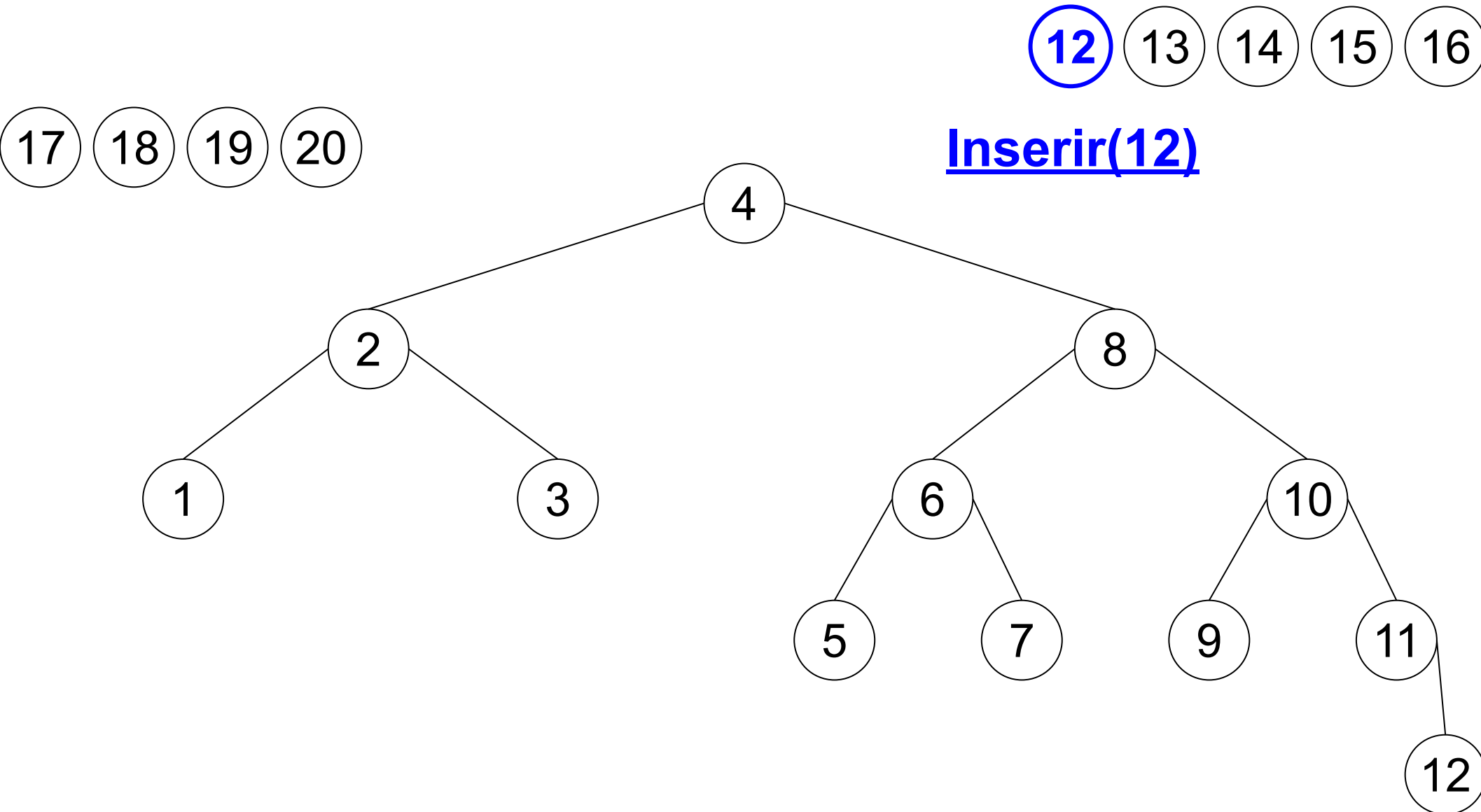
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



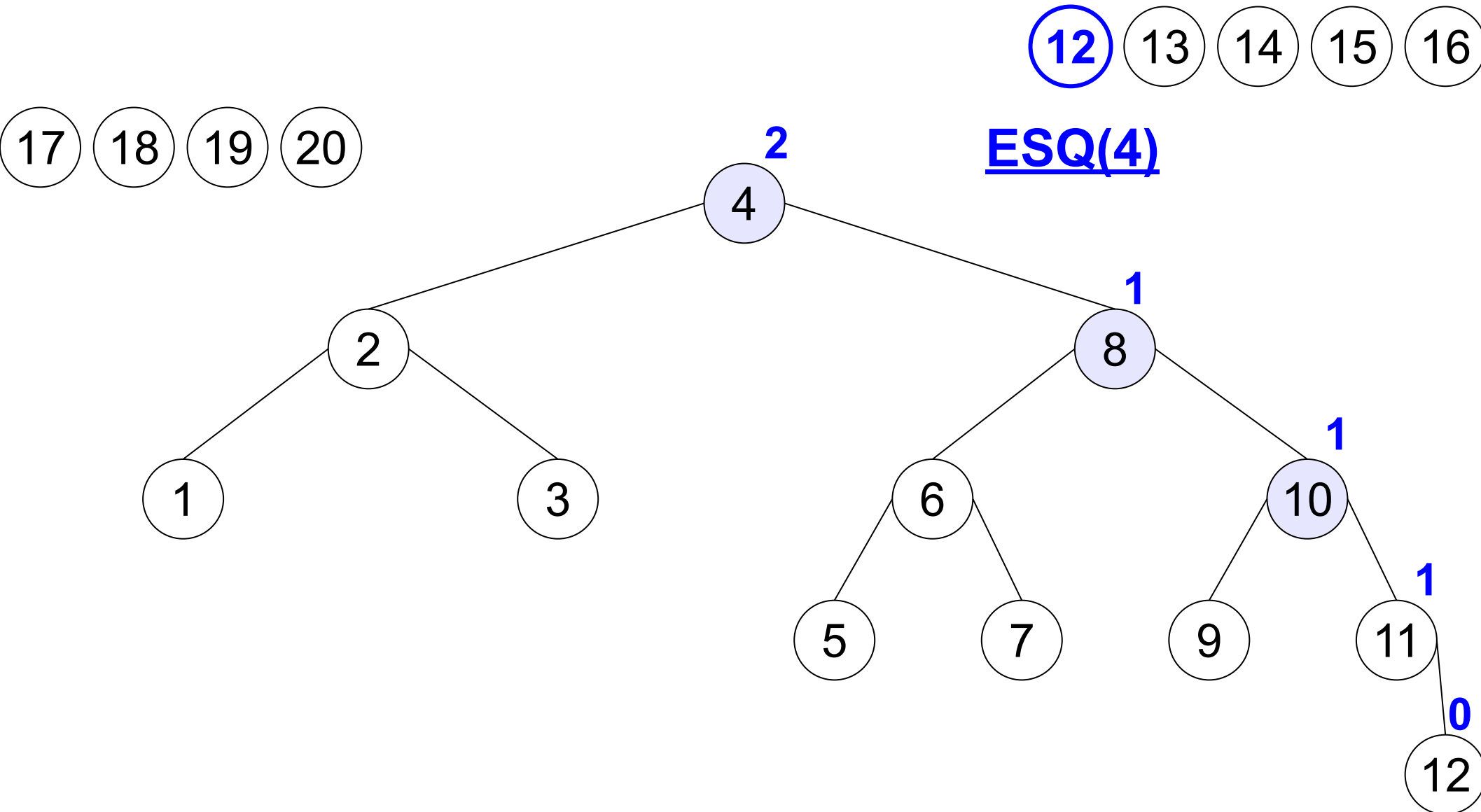
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



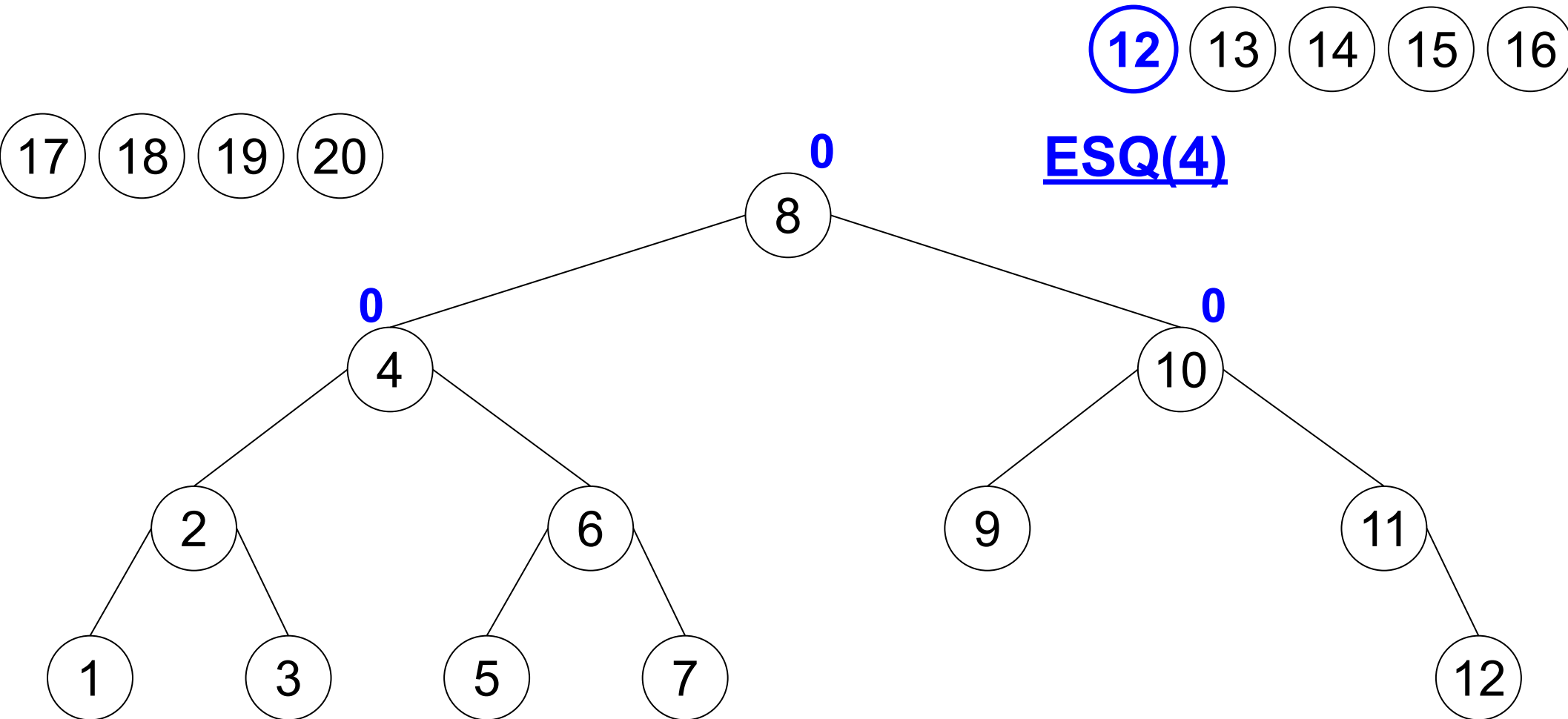
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



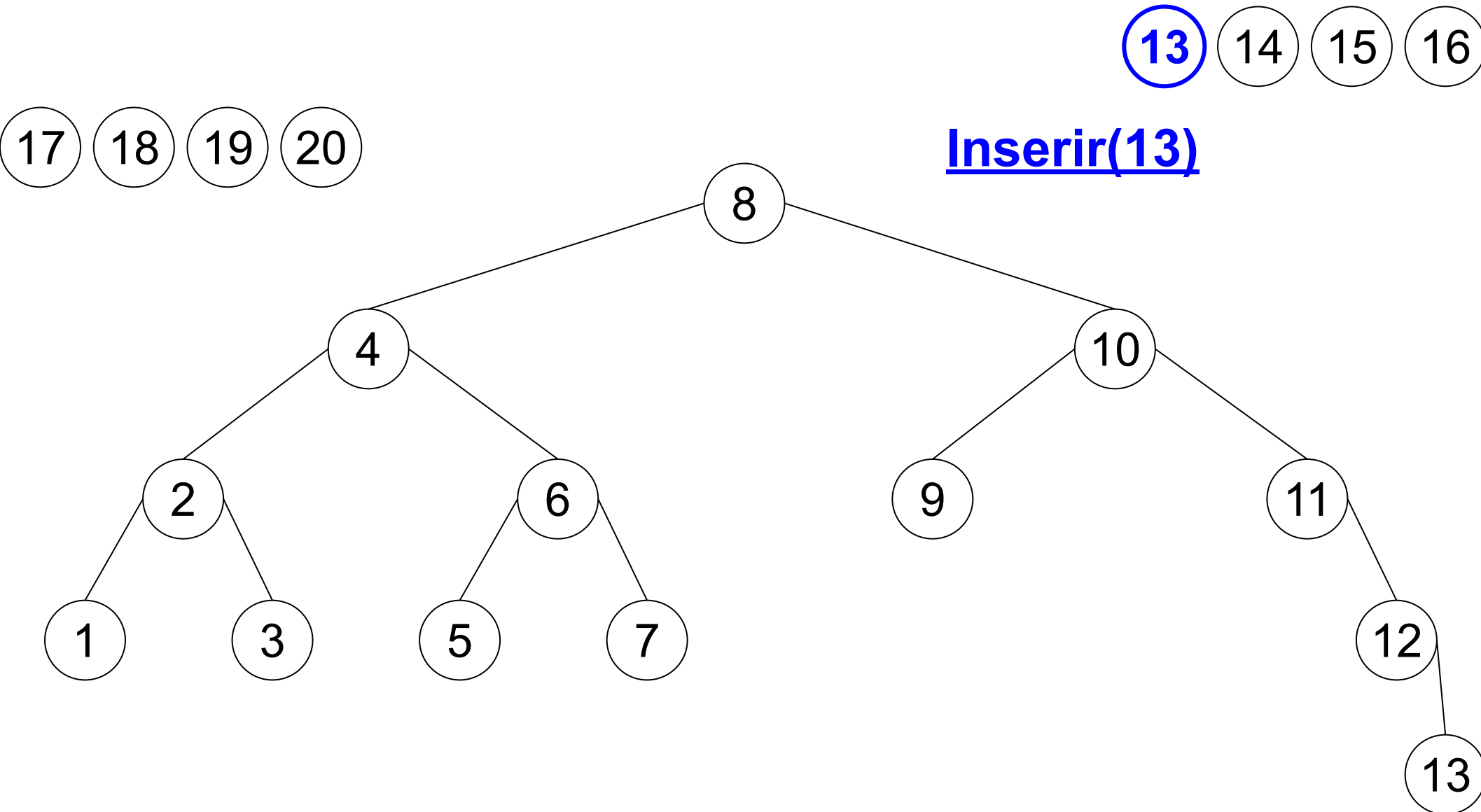
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



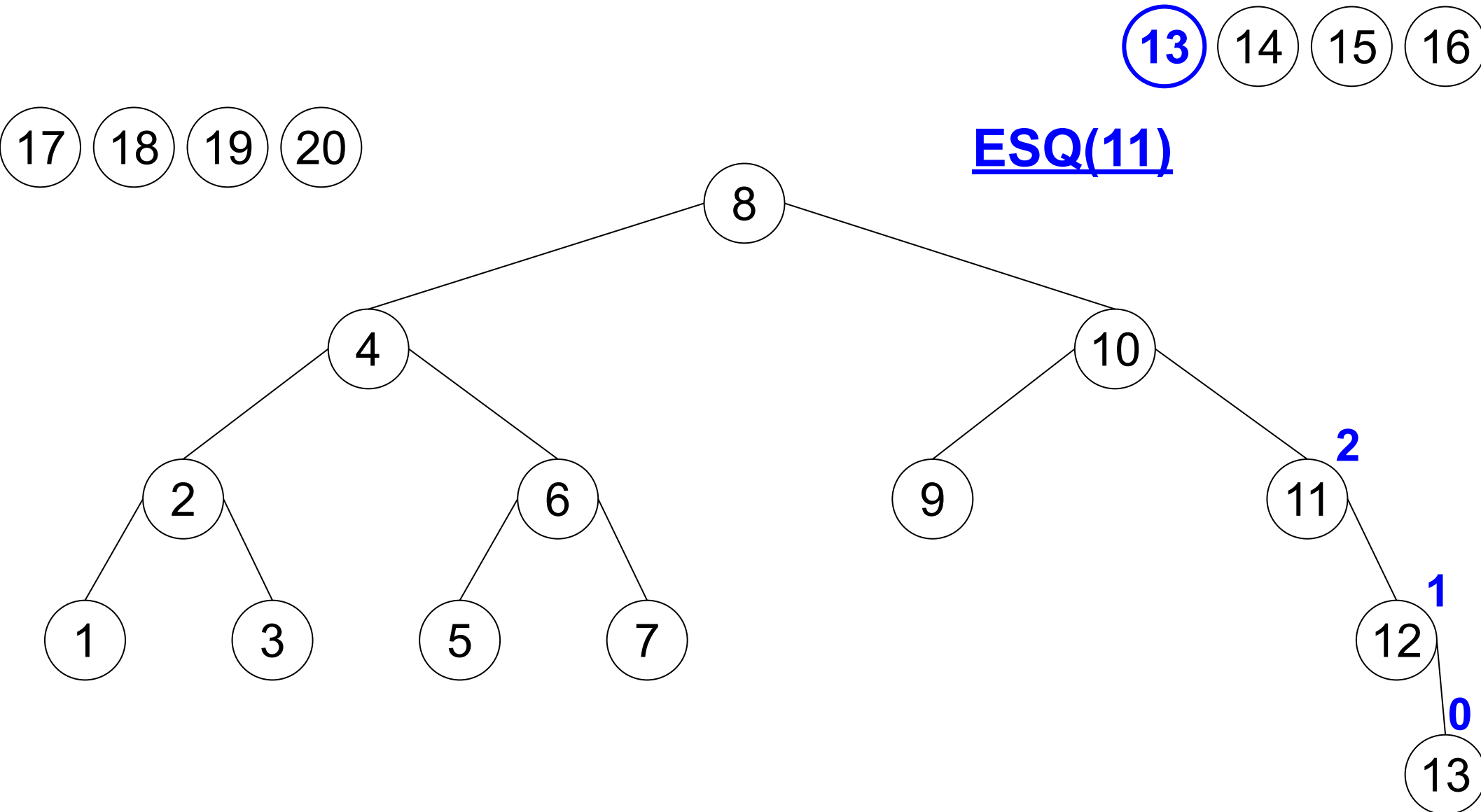
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



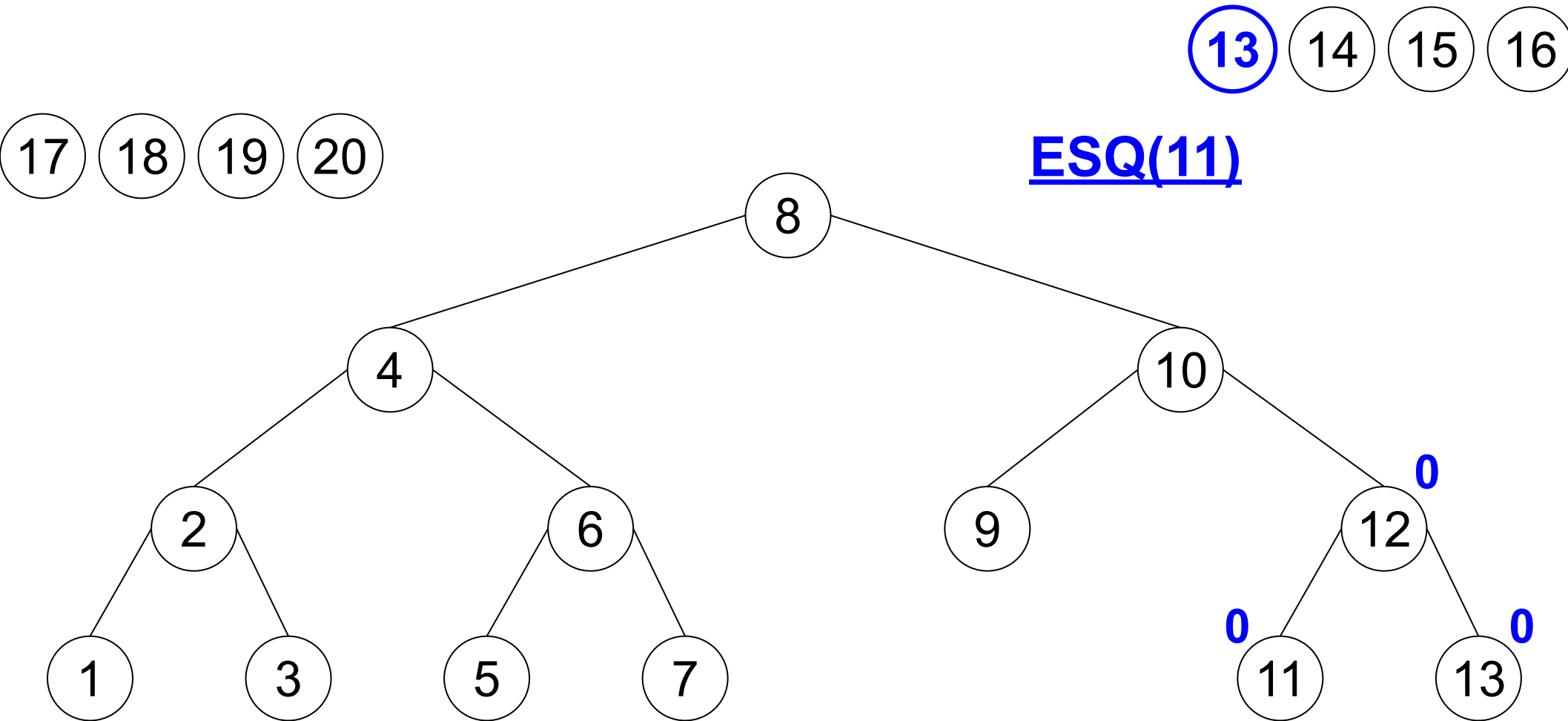
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



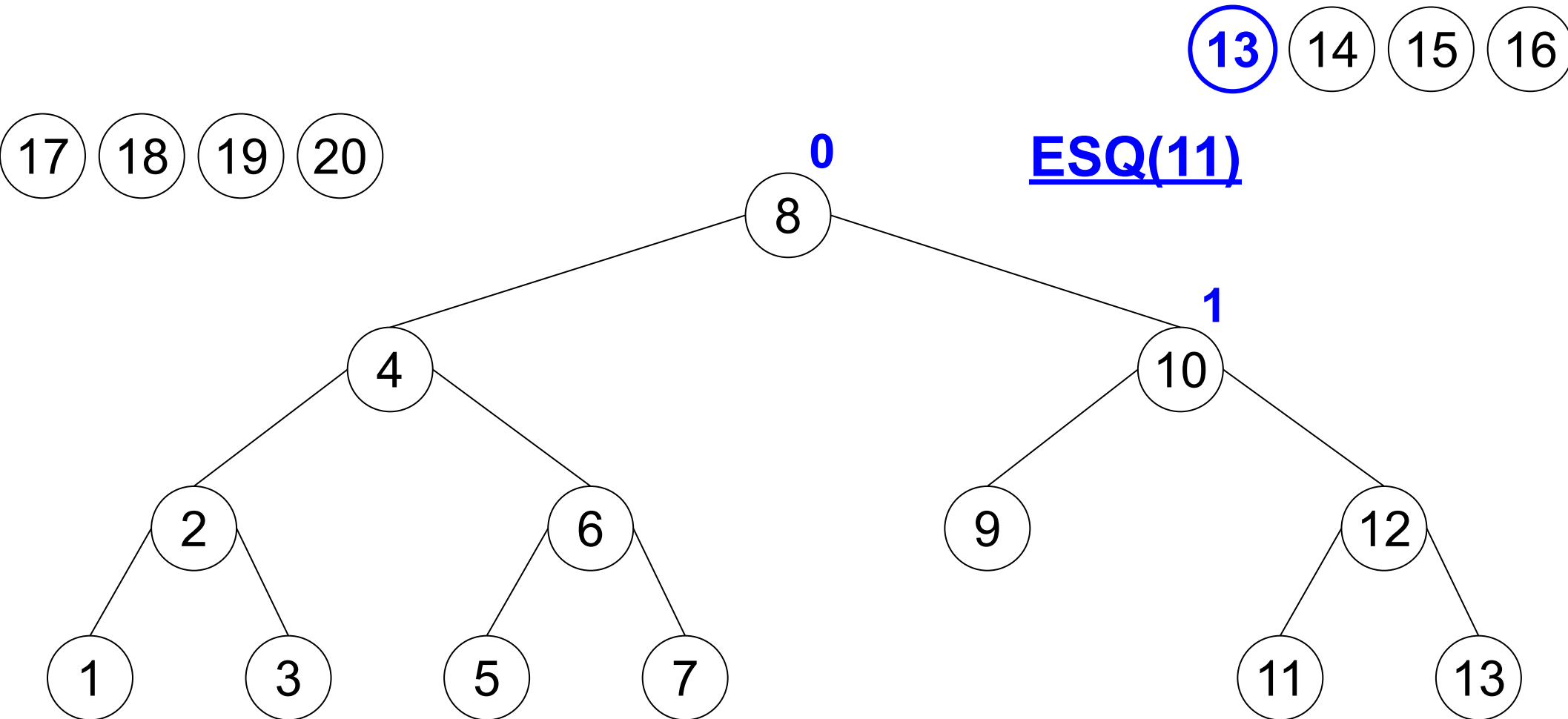
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



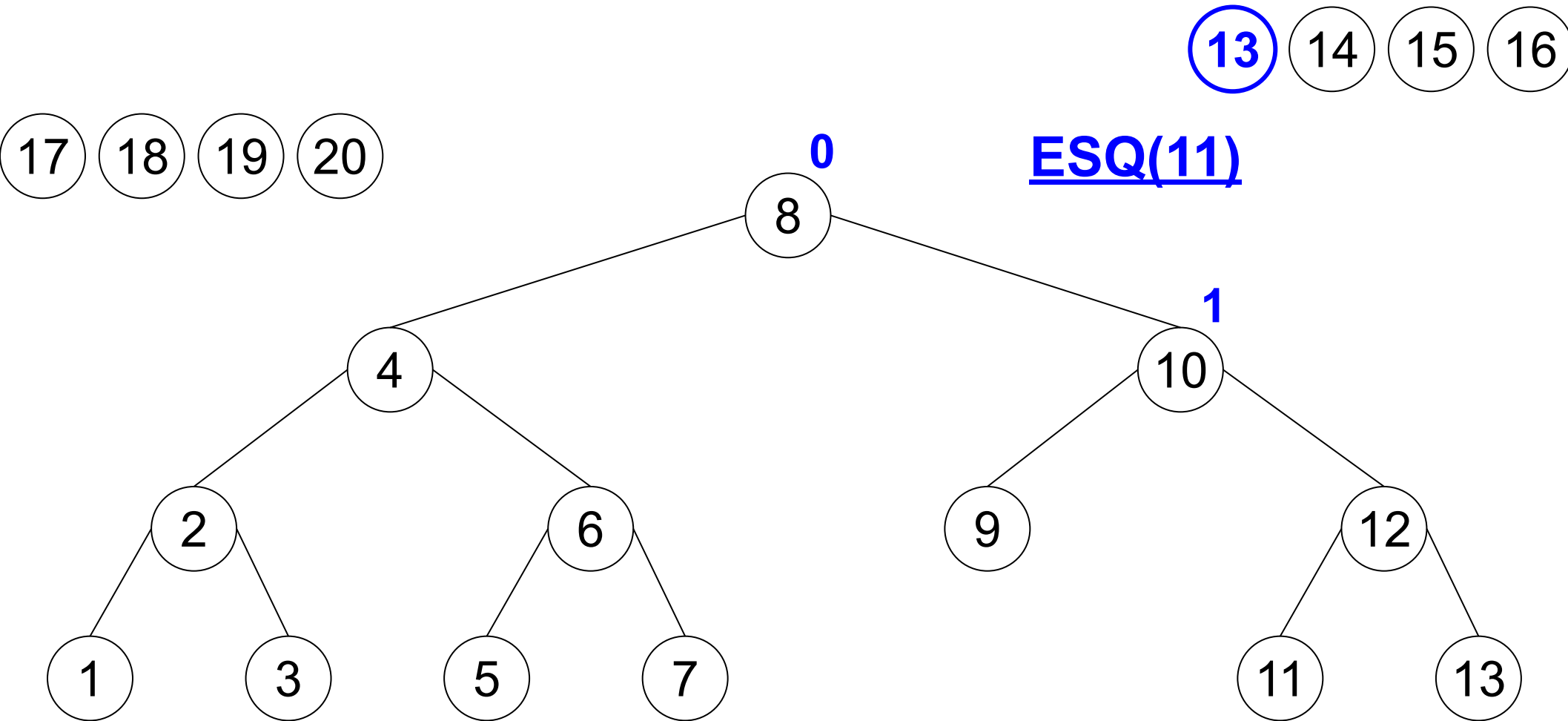
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

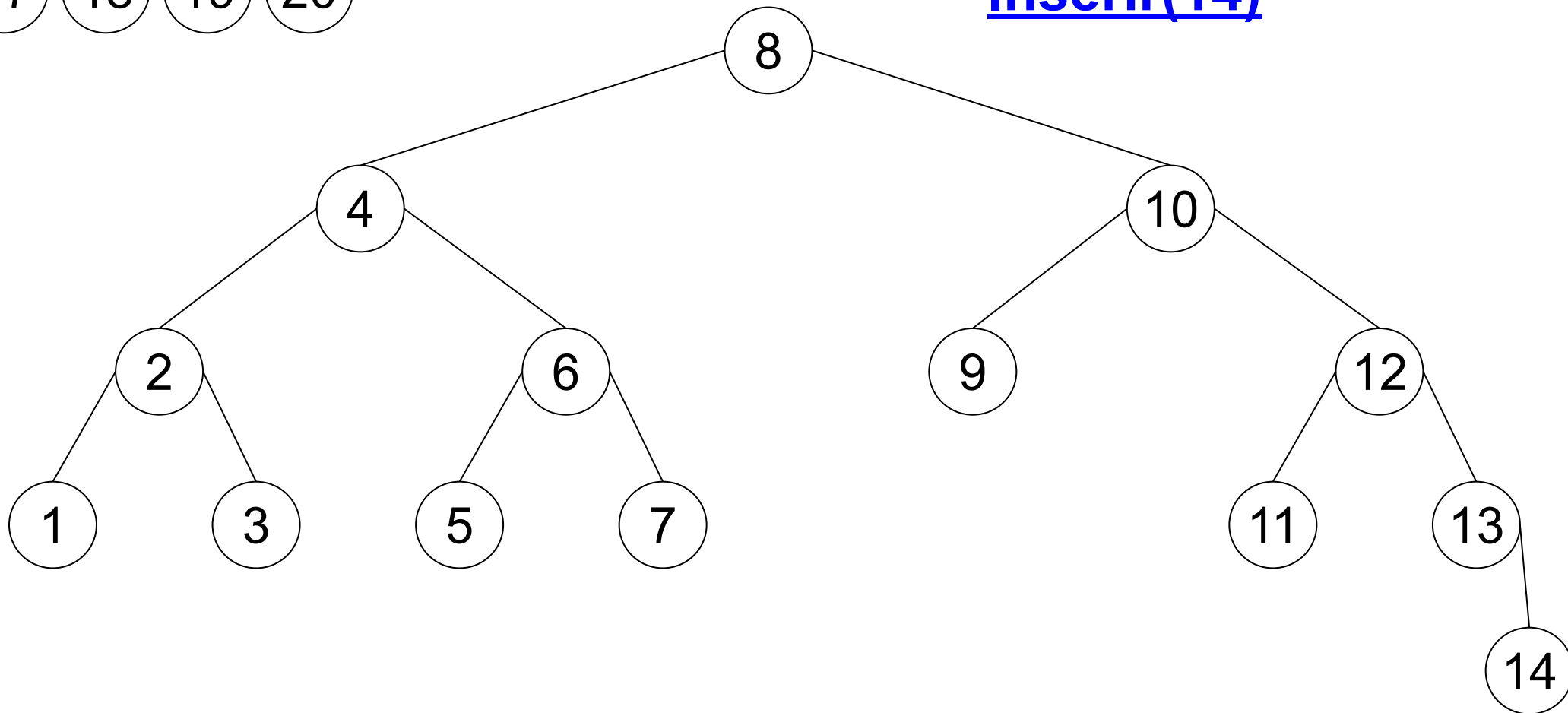


Inserir os Números 1 à 20 na AVL

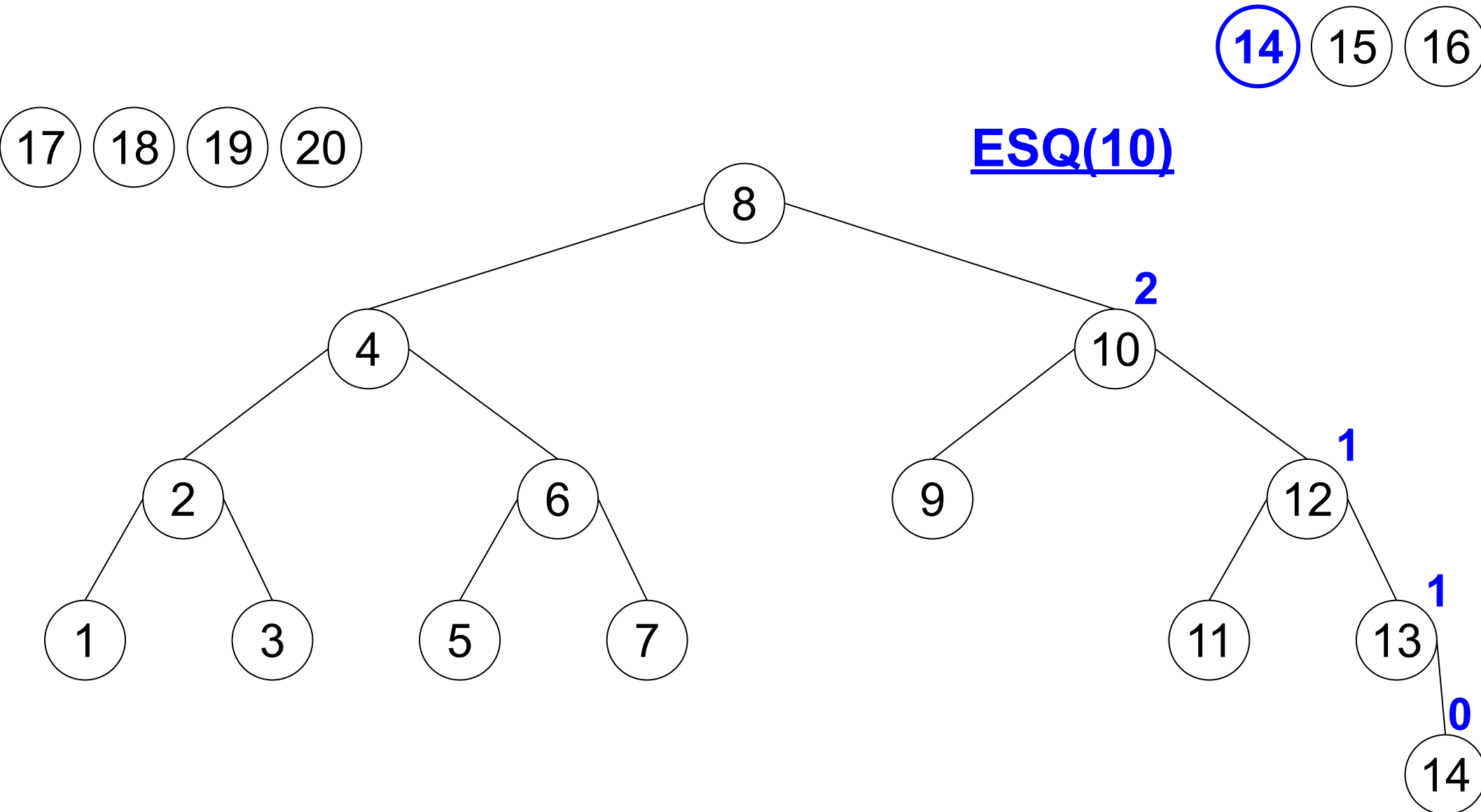
14 15 16

17 18 19 20

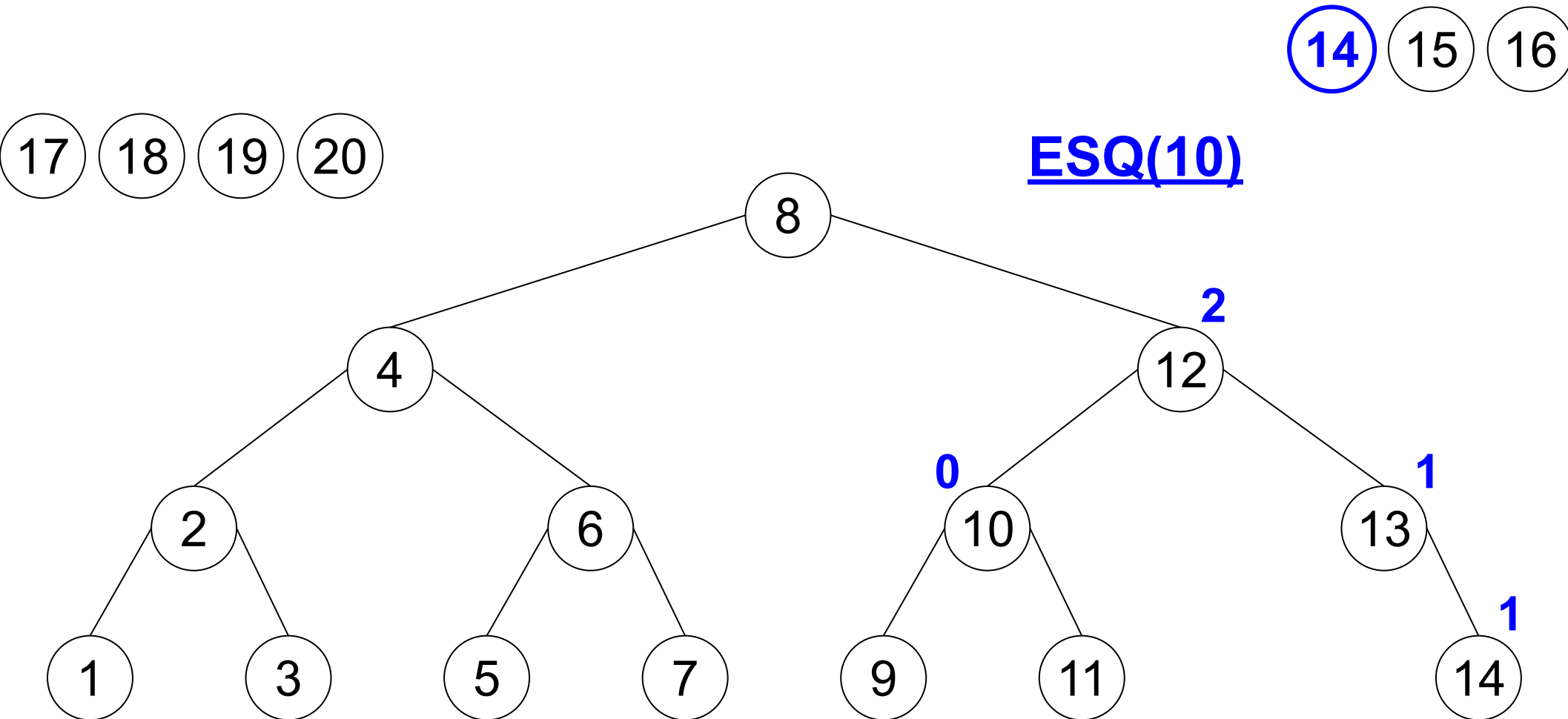
Inserir(14)



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

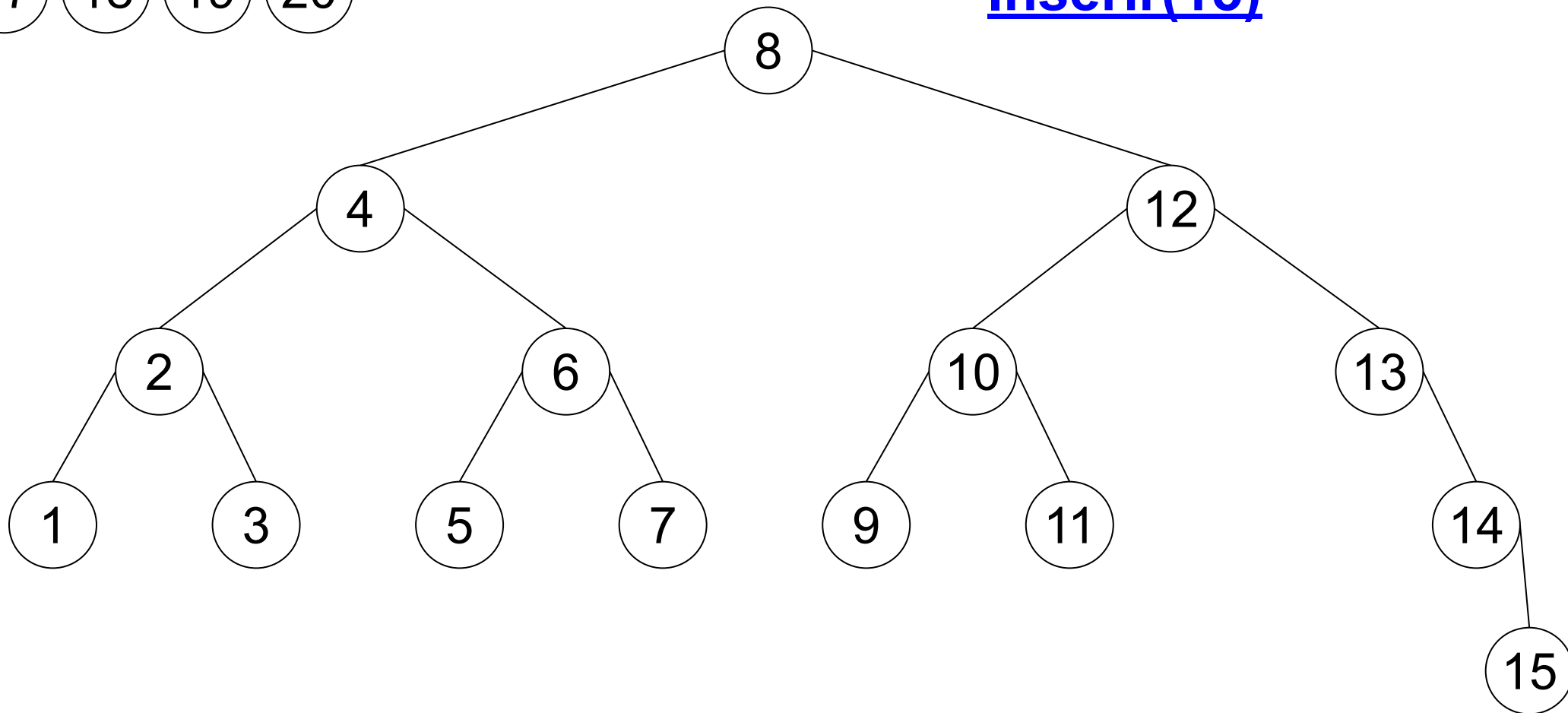


Inserir os Números 1 à 20 na AVL

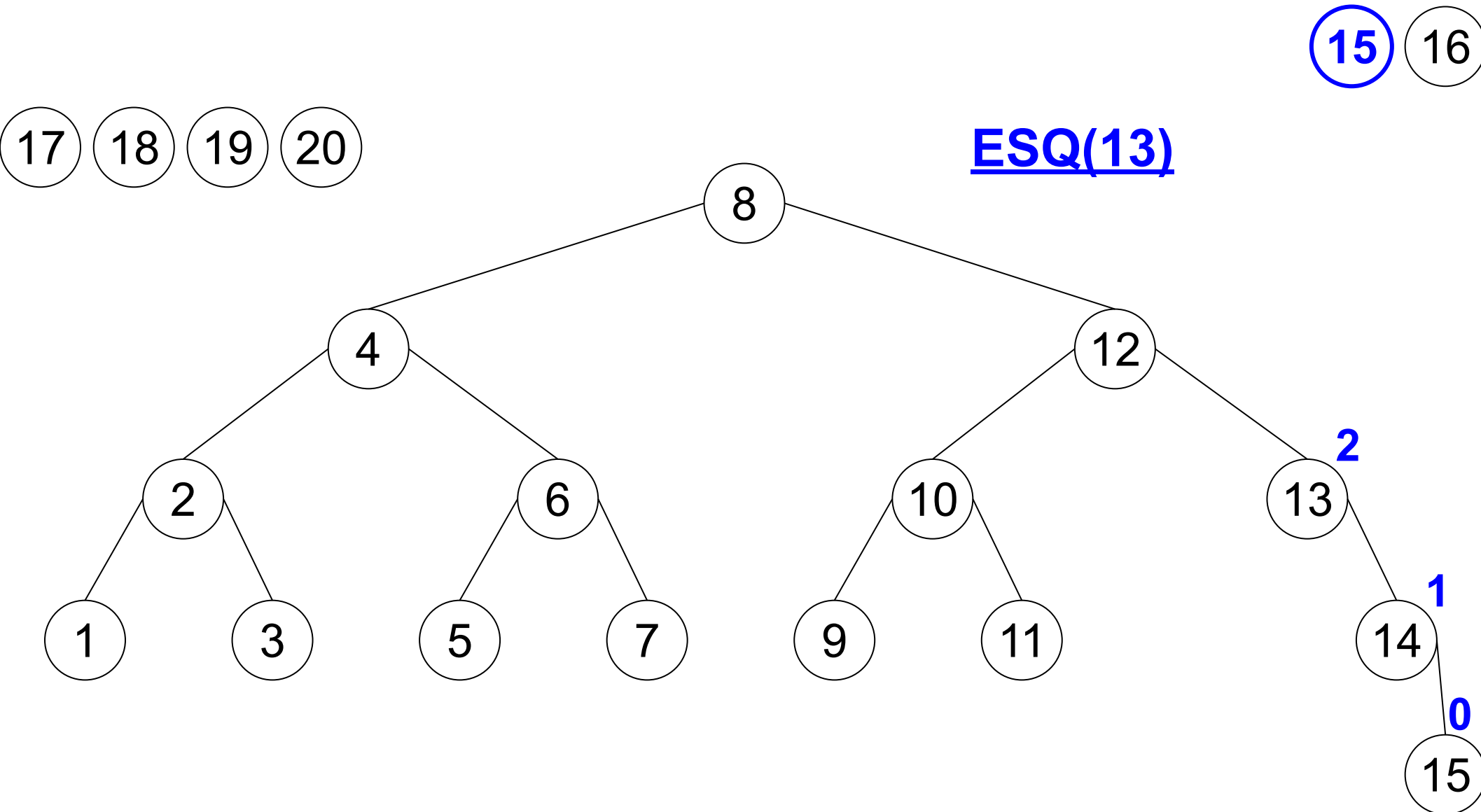
15 16

17 18 19 20

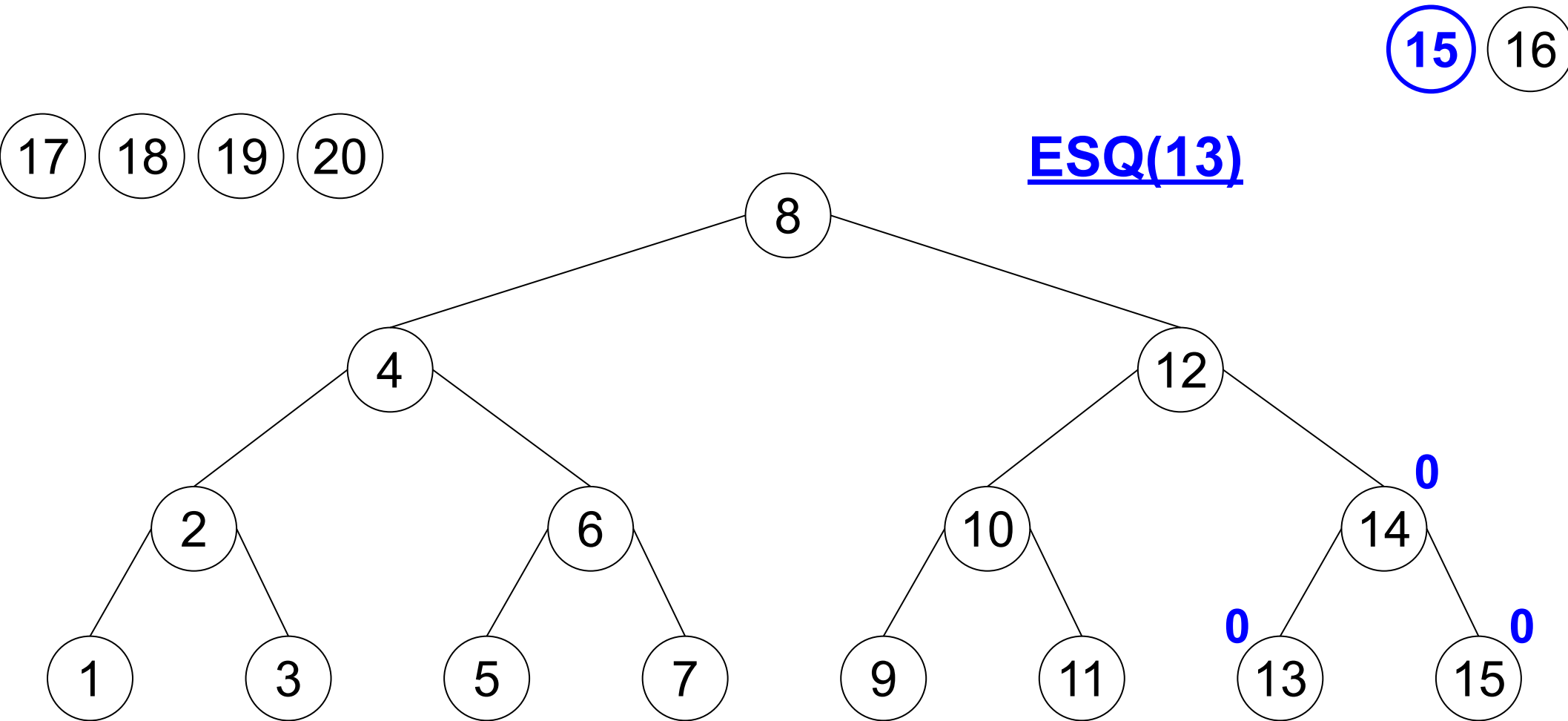
Inserir(15)



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



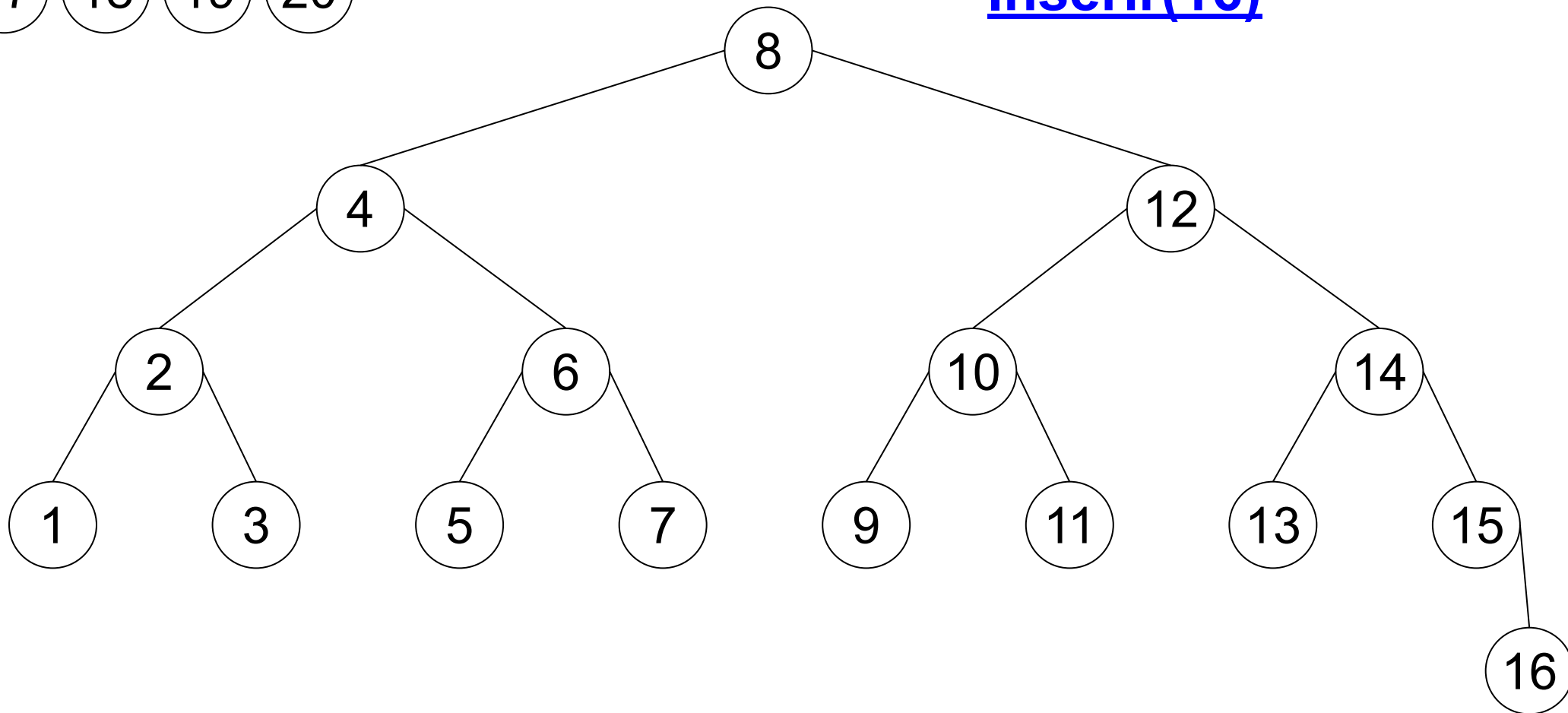
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



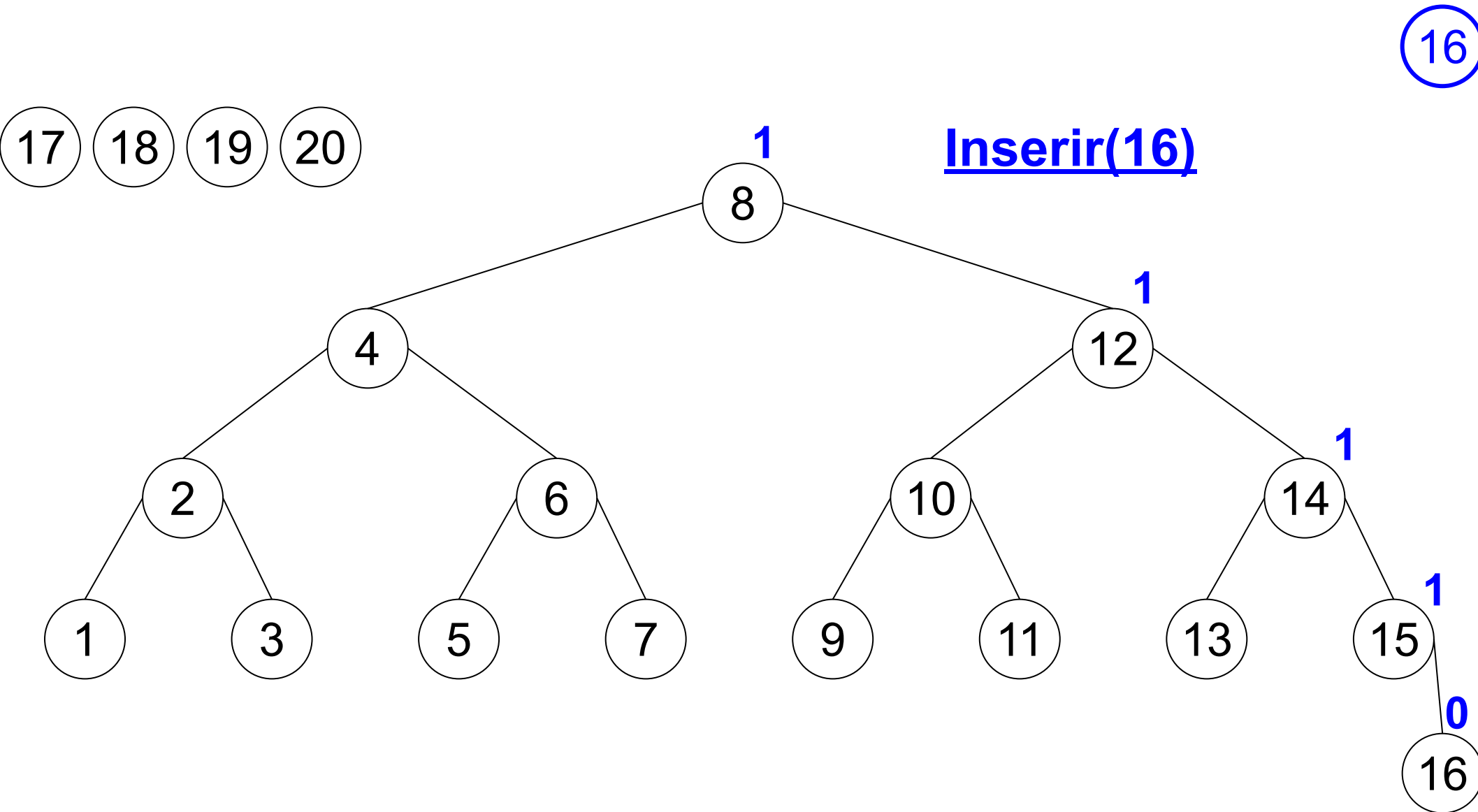
Inserir os Números 1 à 20 na AVL

16

17 18 19 20

Inserir(16)

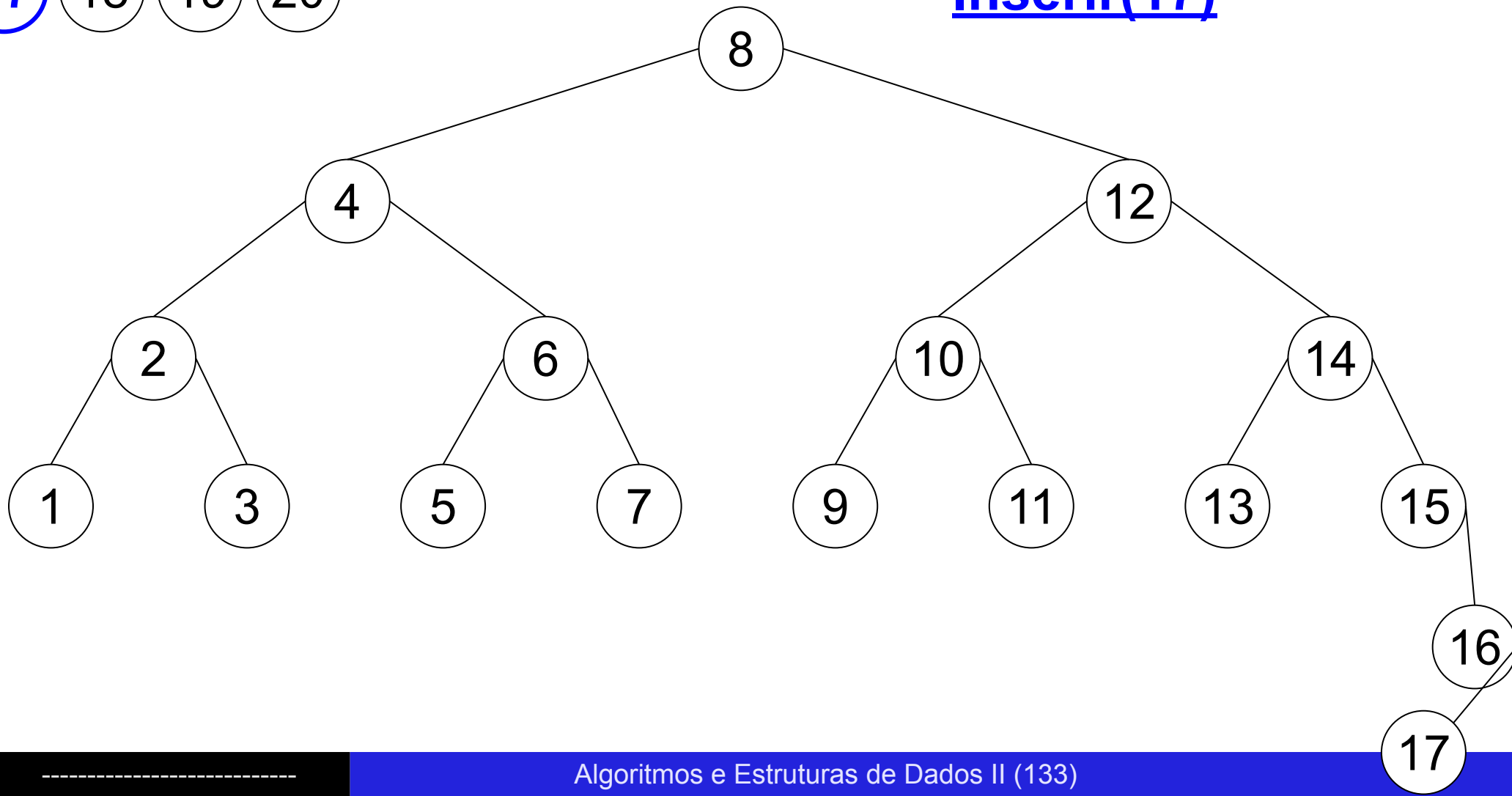
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

17 18 19 20

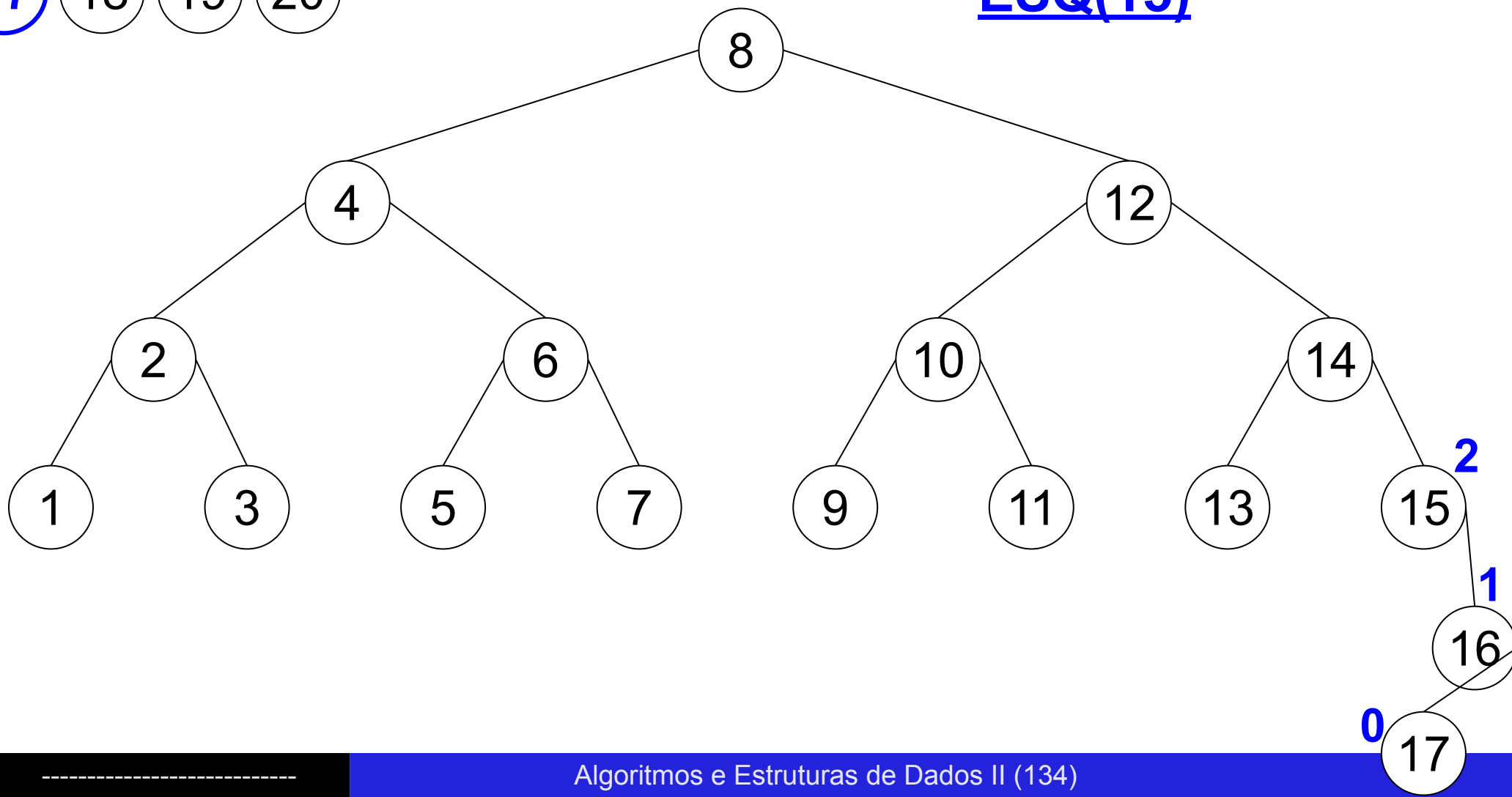
Inserir(17)



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

17 18 19 20

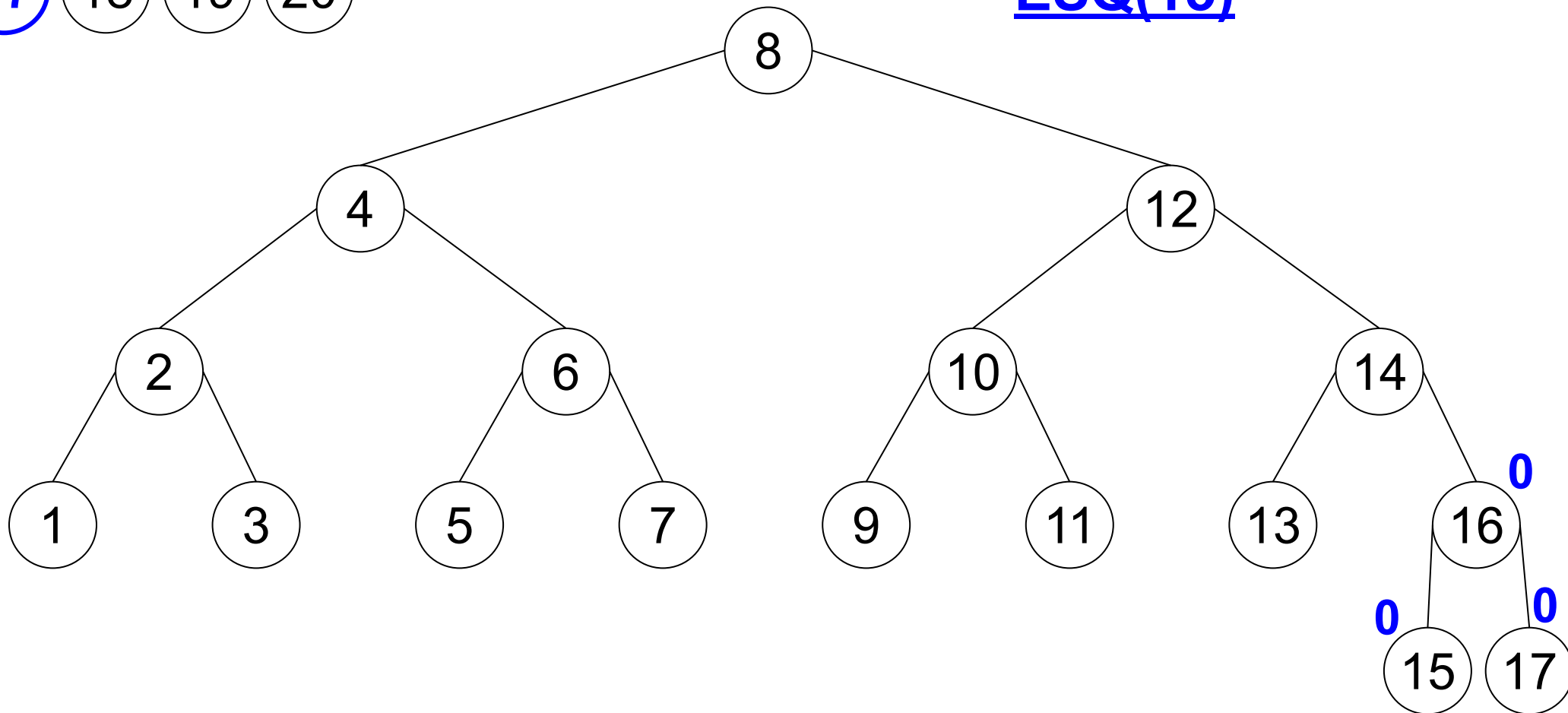
ESQ(15)



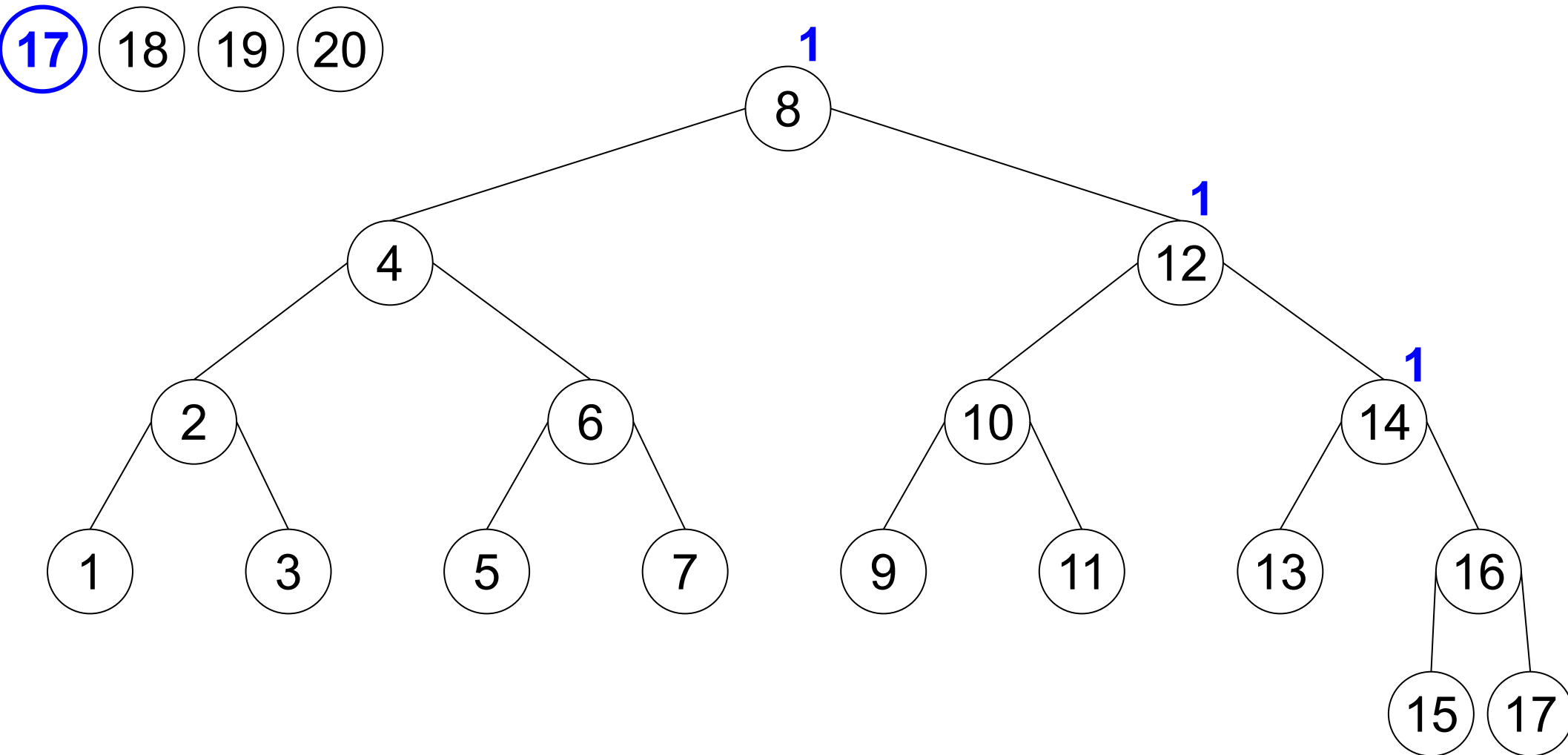
Inserir os Números 1 à 20 na AVL

17 18 19 20

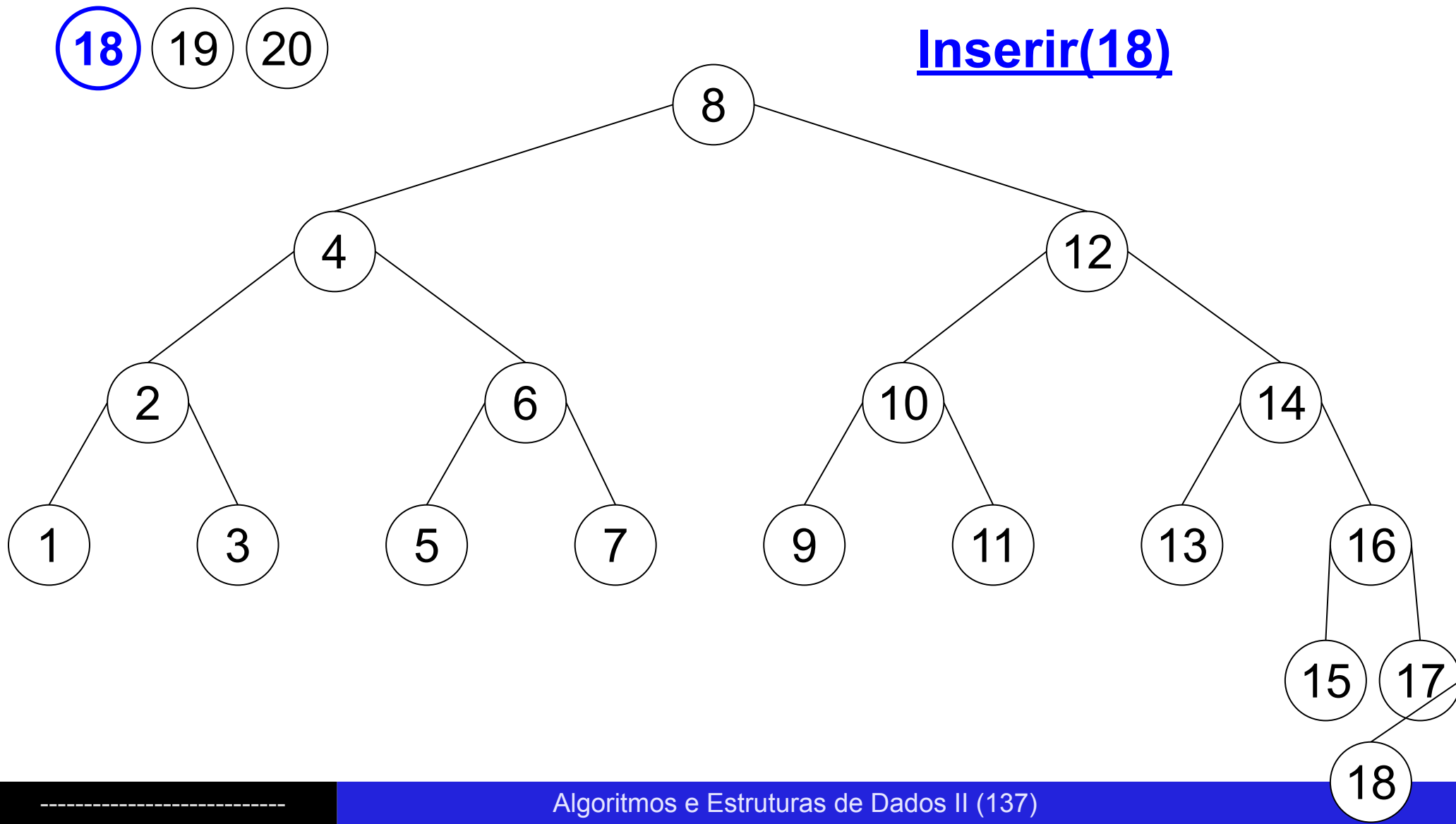
ESQ(15)



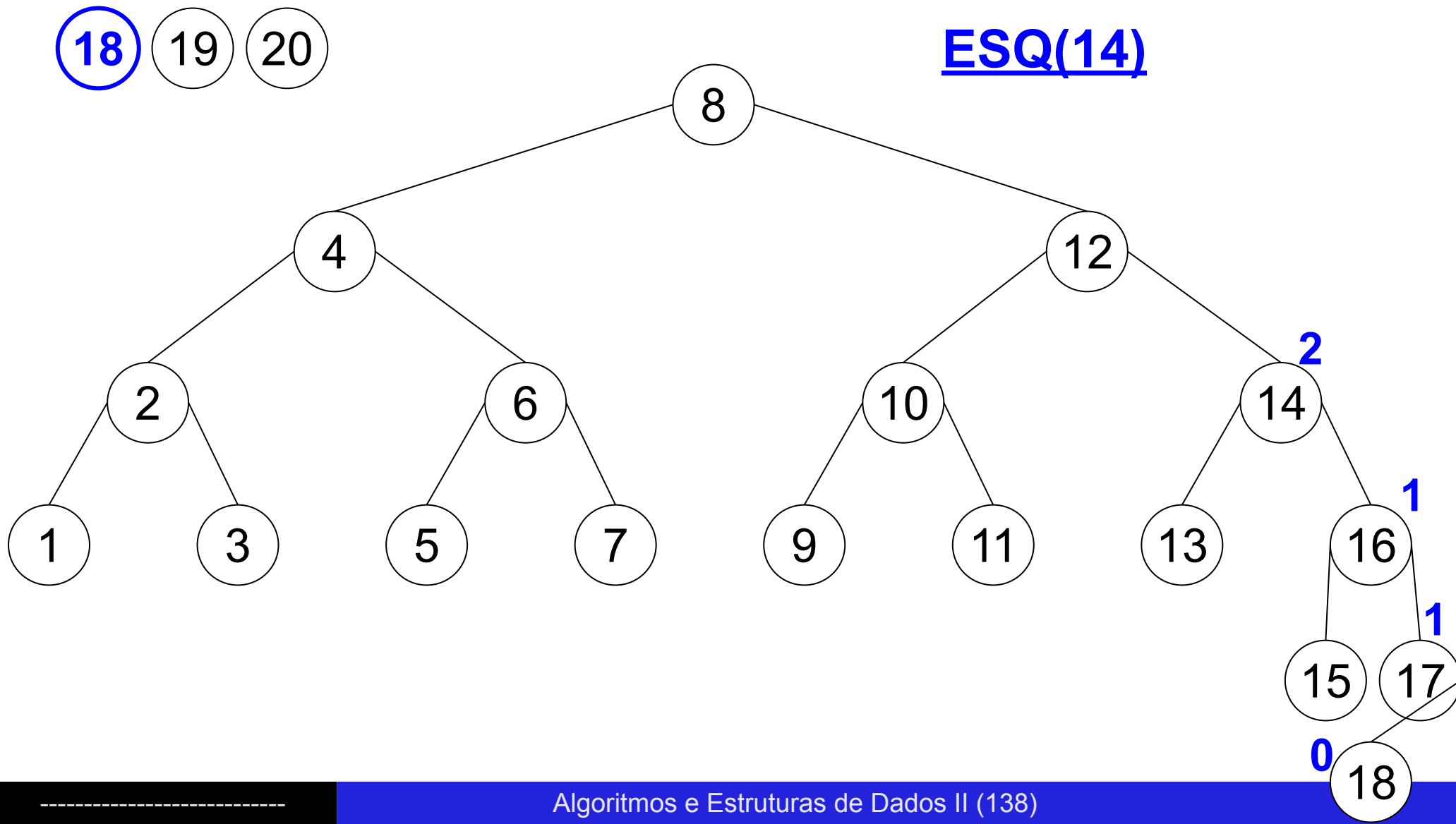
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



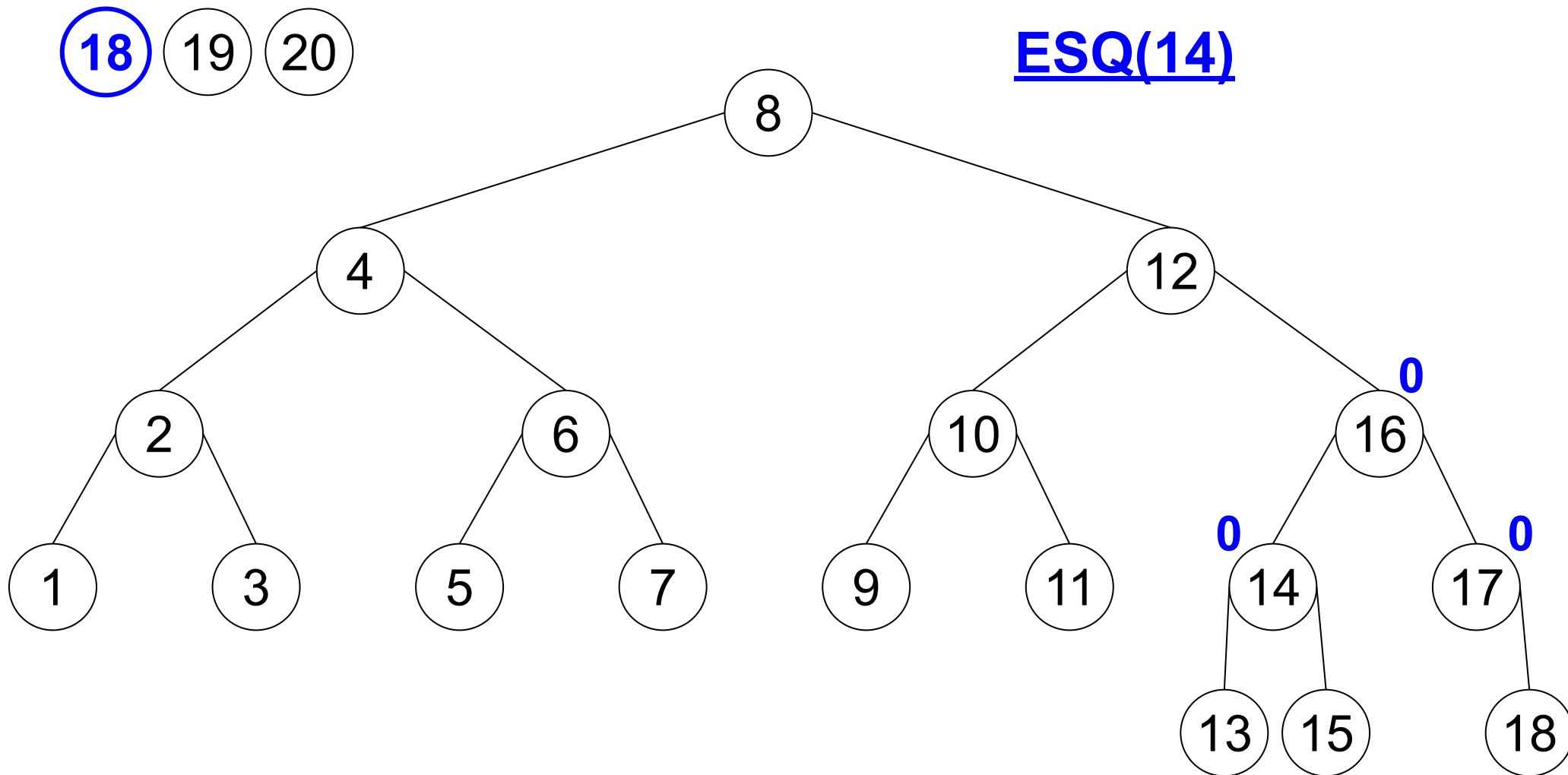
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



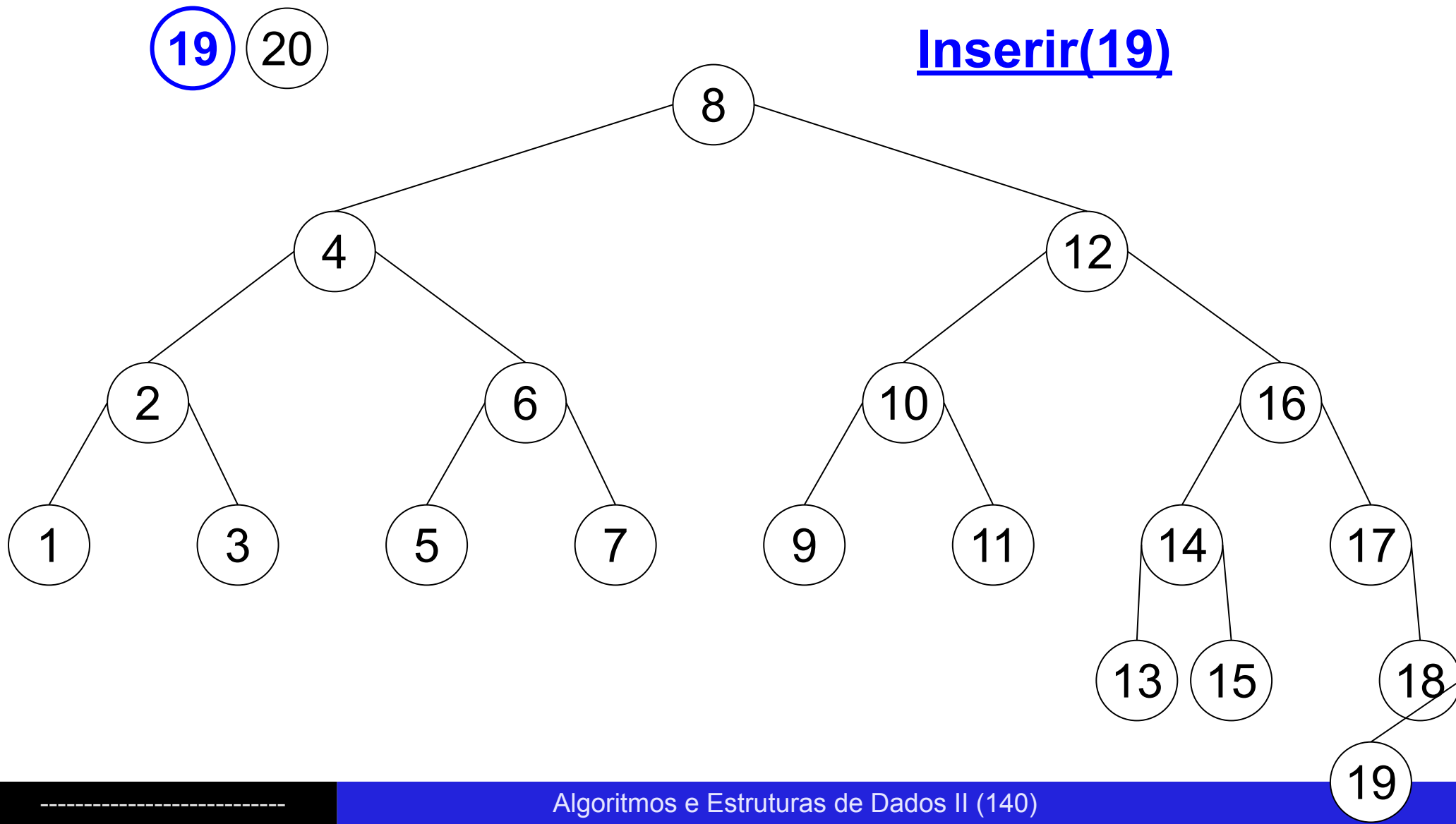
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



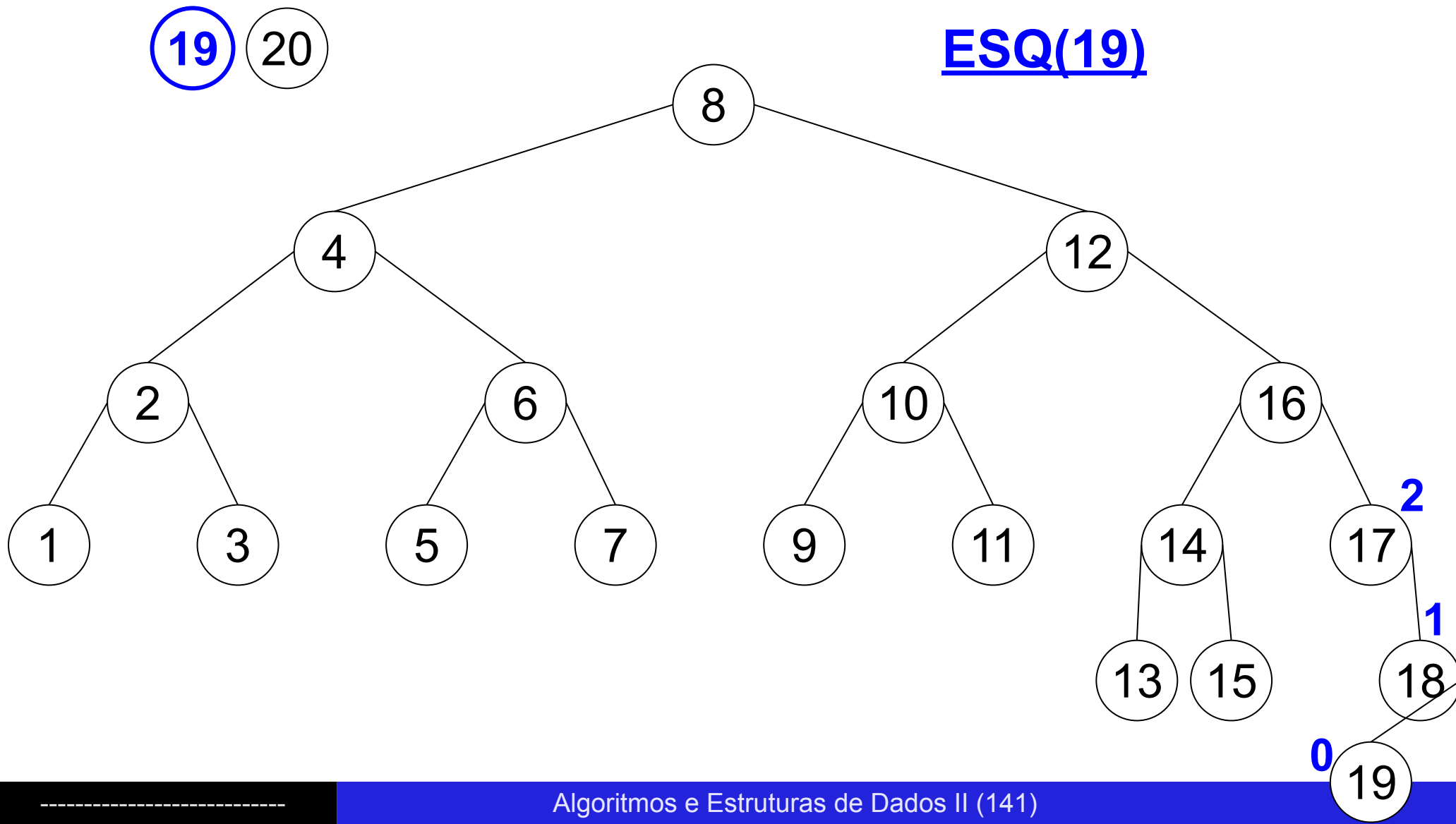
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



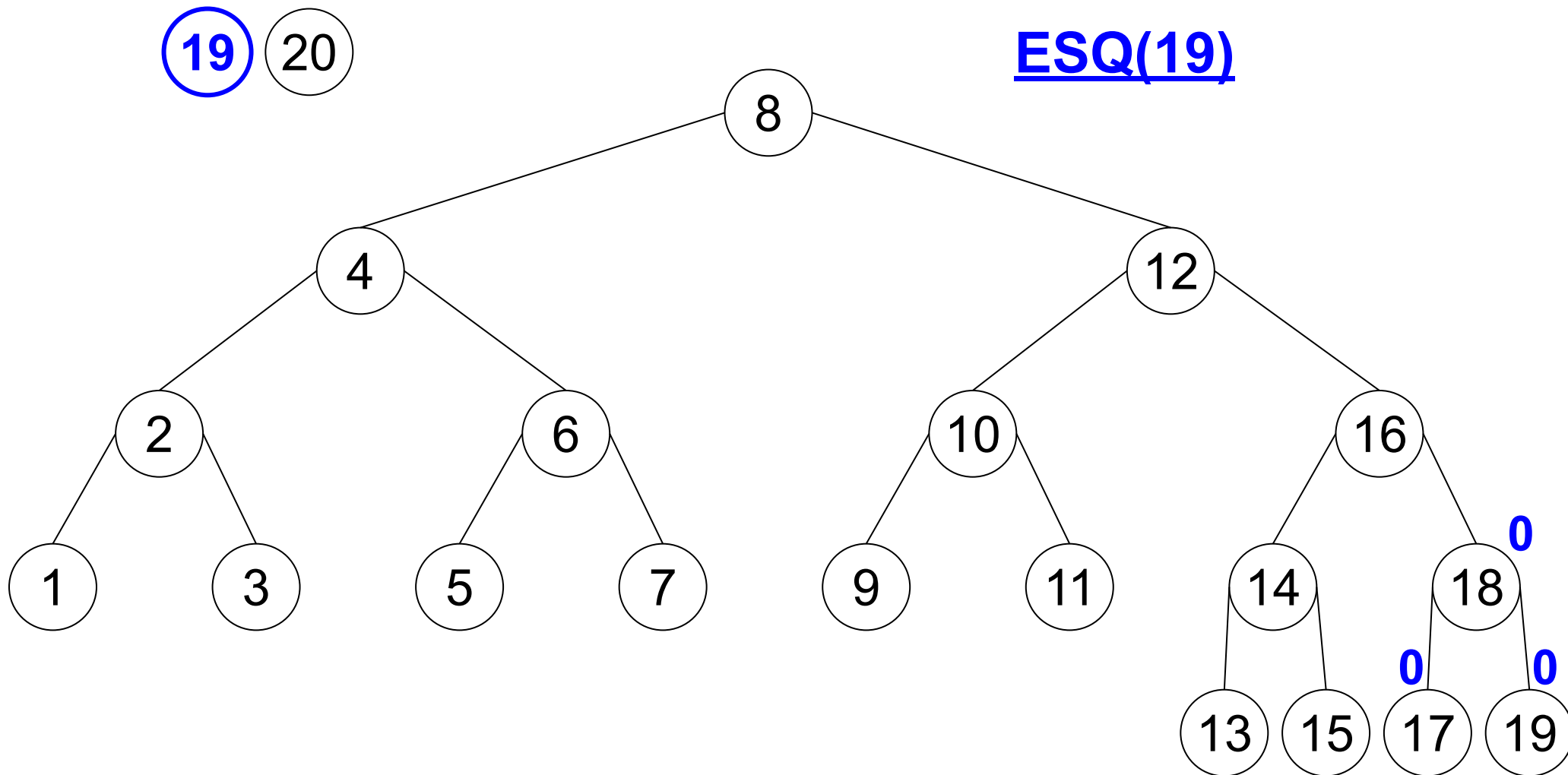
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



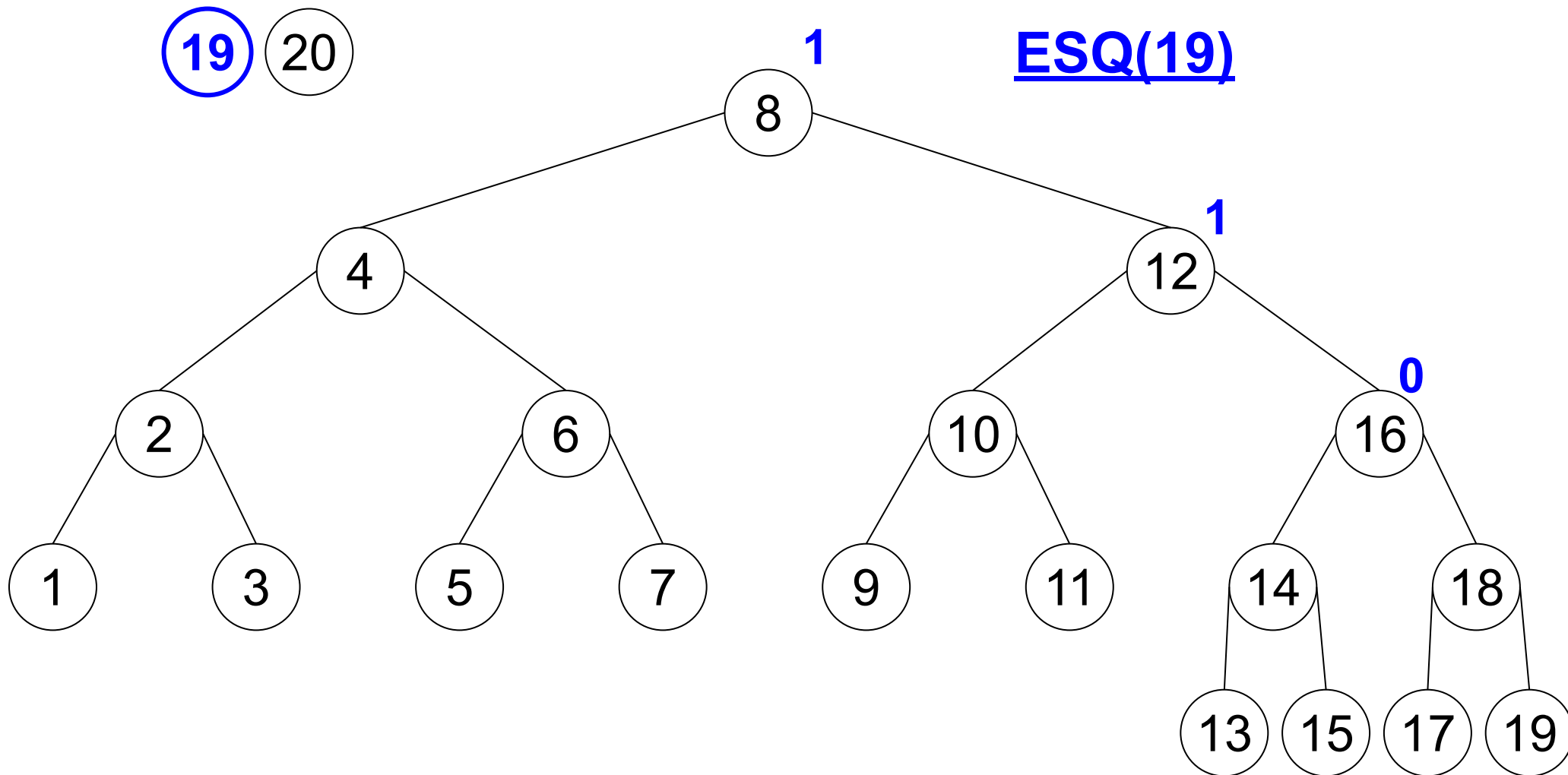
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



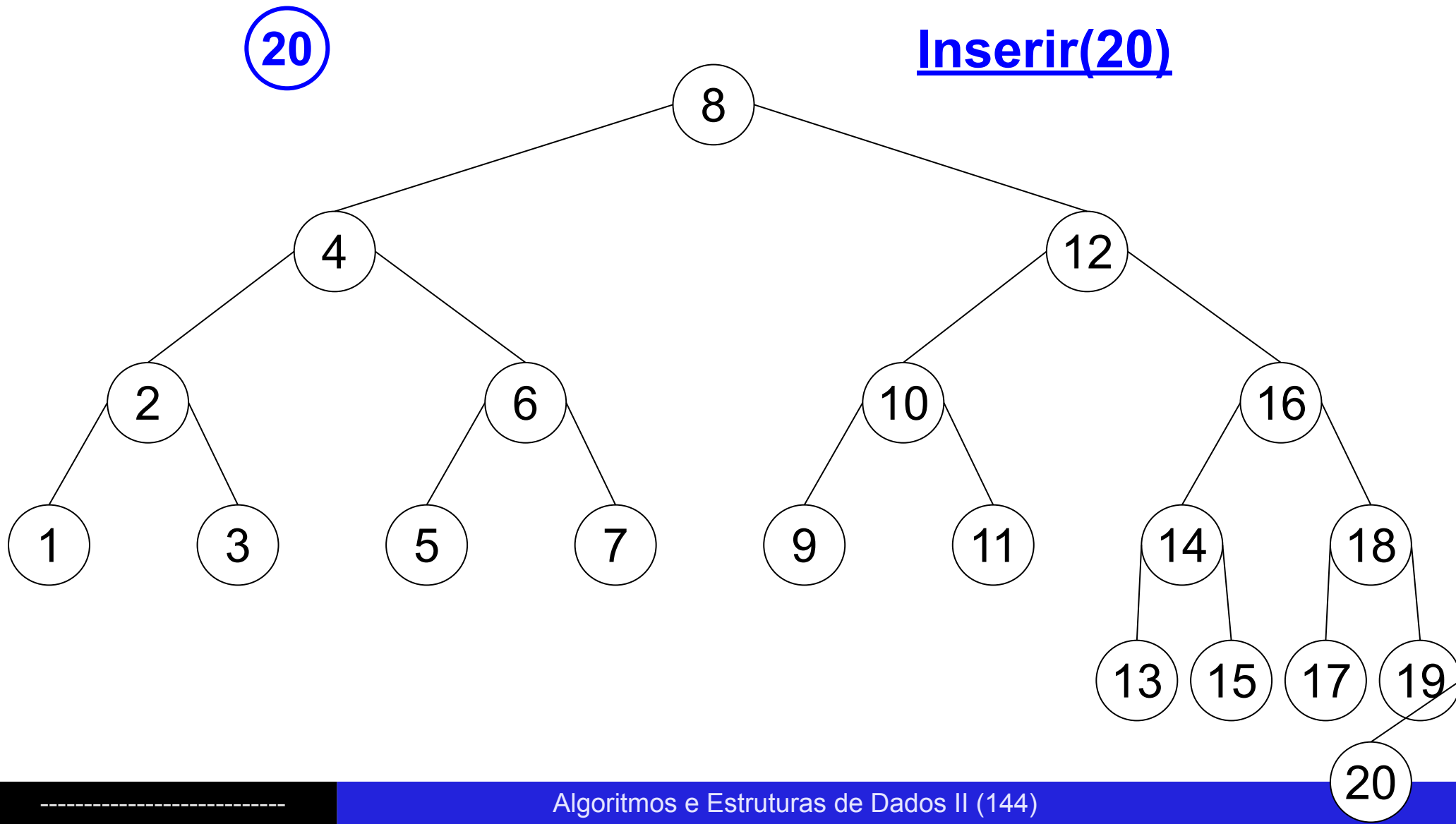
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



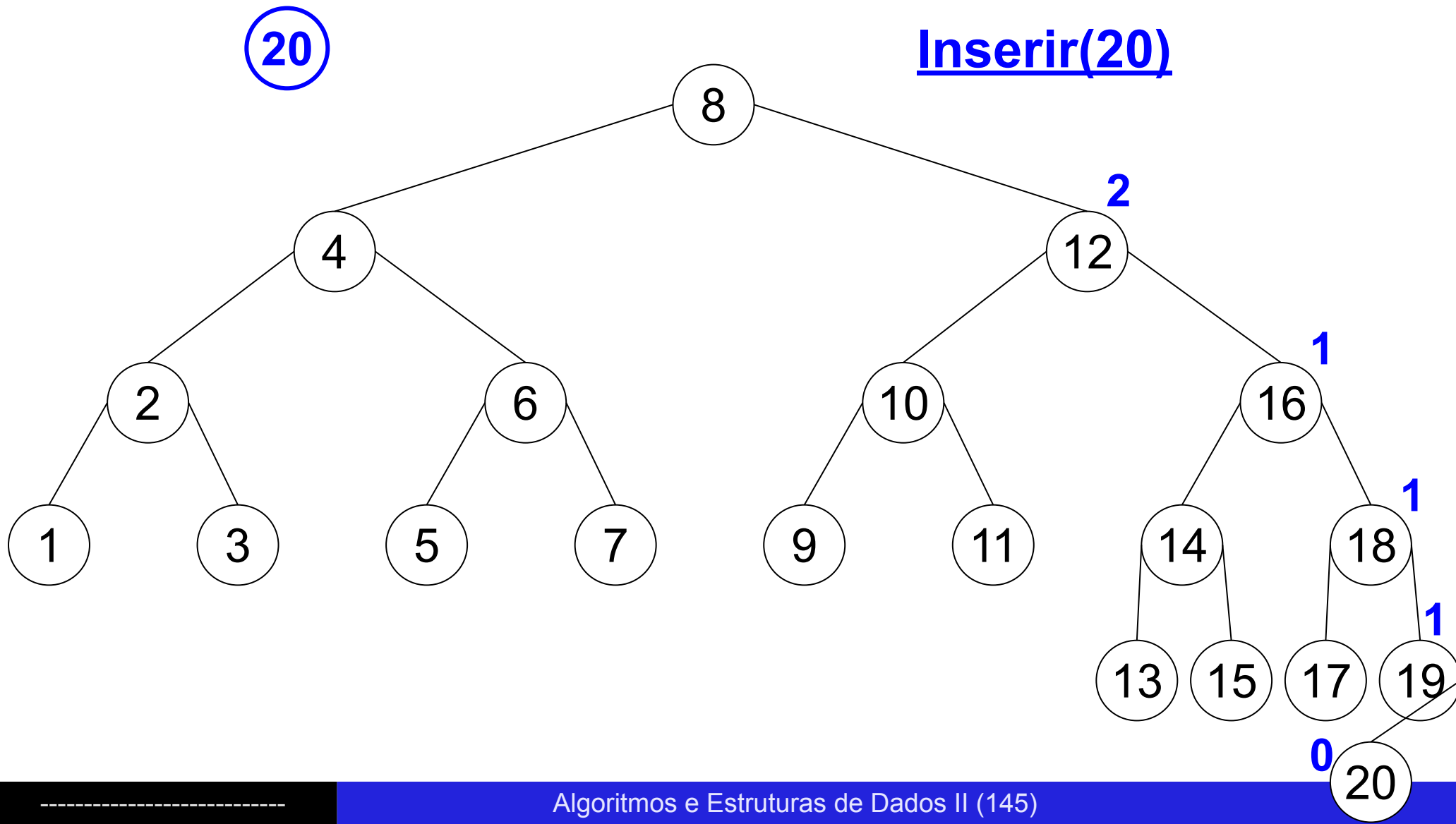
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

