

Introdução aos Somatórios

Unidade I: Análise de Algoritmos

Agenda

- Motivação
- Notação

Motivação

Principal Motivação na Computação

- Levantamento de custo (e.g., tempo e memória) de algoritmos
- Custo de um algoritmo é a soma dos custos das suas operações

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

início

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

condição
de parada

Matemática

$$i \leq n$$

$$\sum i$$

$$i = 1$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

termo

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {  
    int menor = i;  
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){  
        if (array[menor] > array[j]){  
            menor = j;  
        }  
    }  
    swap(menor, i);  
}
```

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {  
    int menor = i;  
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){  
        if (array[menor] > array[j]){  
            menor = j;  
        }  
    }  
    swap(menor, i);  
}
```

CONSIDERAÇÕES INICIAIS:

- 1) Comparações desejadas: no if
- 2) Laço externo repete (n-1) vezes, para: 0, 1, 2, ..., n-2
- 3) Laço interno repete $n - (i+1)$ vezes, para: i+1, i+2, i+3, ..., n-1

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {  
    int menor = i;  
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){  
        if (array[menor] > array[j]){  
            menor = j;  
        }  
    }  
    swap(menor, i);  
}
```

i	0	1	2	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3	...	1

CONSIDERAÇÕES INICIAIS:

- 1) Comparações desejadas: no if
- 2) Laço externo repete (n-1) vezes, para: 0, 1, 2, ..., n-2
- 3) Laço interno repete $n - (i+1)$ vezes, para: i+1, i+2, i+3, ..., n-1

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {  
    int menor = i;  
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){  
        if (array[menor] > array[j]){  
            menor = j;  
        }  
    }  
    swap(menor, i);  
}
```

i	0	1	2	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3	...	1

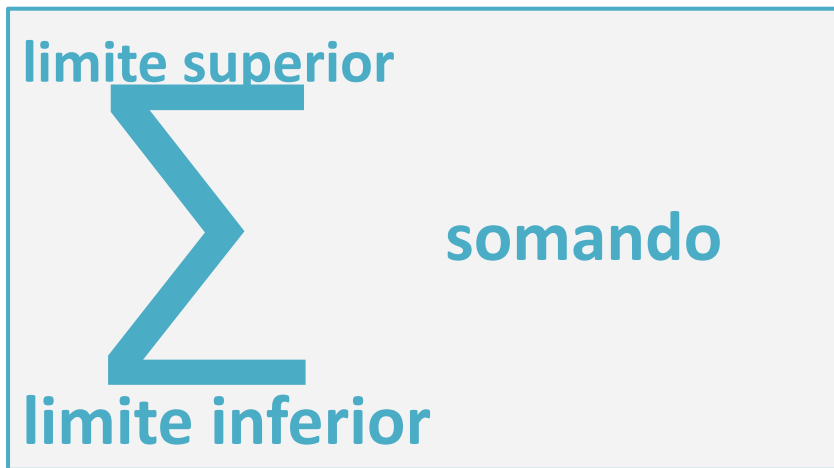
RESPOSTA:

$$c(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Notação

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático



Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

limite superior



limite inferior

somando

Exemplo:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático



Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

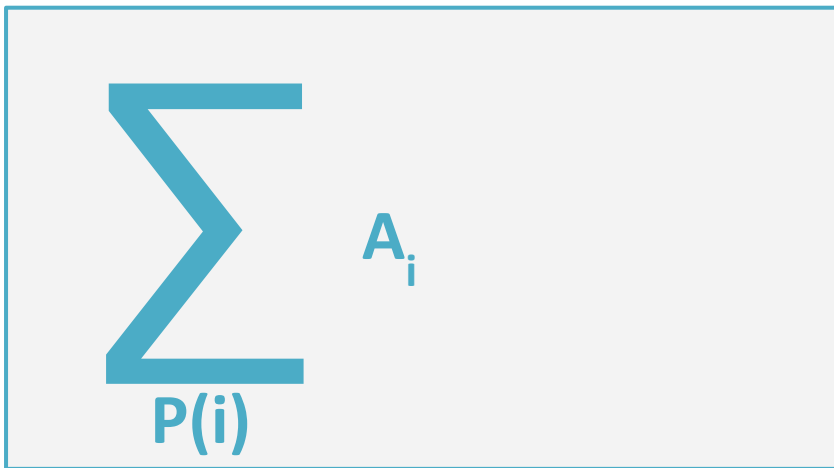


Exemplo:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

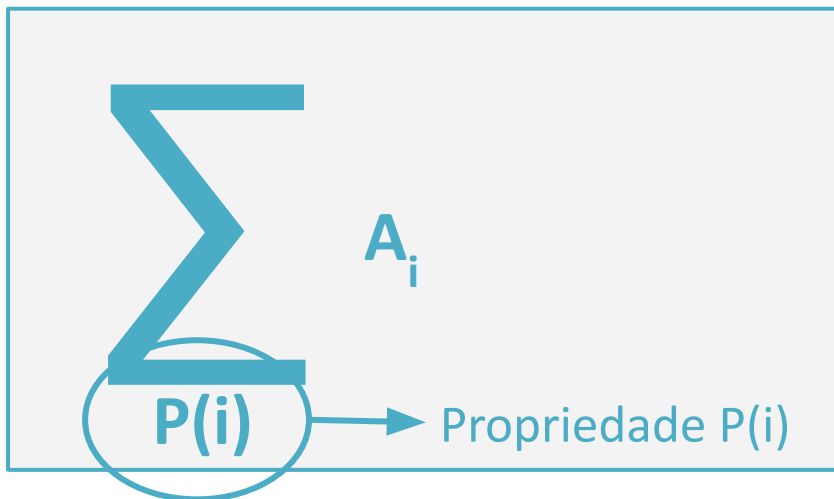


A diagram illustrating the sigma notation formula. It features a large blue summation symbol (Σ) on the left. Below the symbol is the label $P(i)$. To the right of the symbol is the term A_i . The entire diagram is enclosed in a light gray rectangular box with a blue border.

$$\Sigma_{P(i)} A_i$$

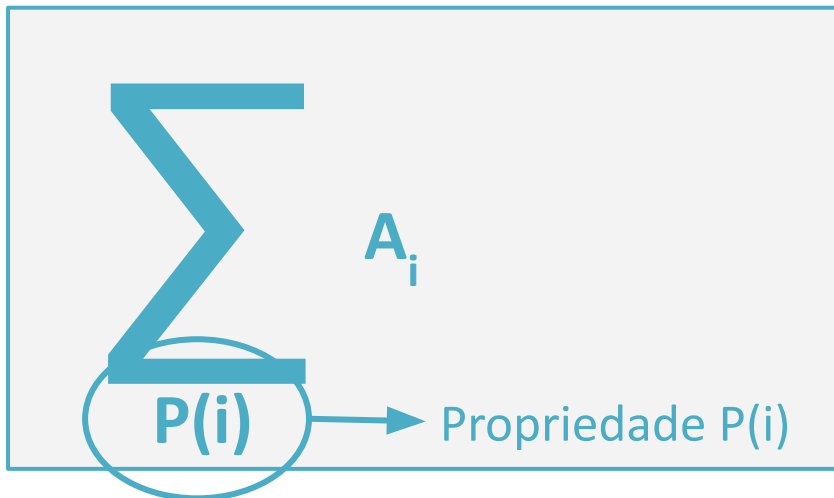
Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático



Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático



Exemplo:

$$\sum a_i = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n \quad (n \text{ é ímpar})$$

$1 \leq i \leq n$
 $i \text{ é ímpar}$

Variações da Notação Sigma

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} a_i = \sum_{1}^n a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \sum_{i=1}^{i \leq n} a_i$$

Exercício Resolvido (3): Resolva os Somatórios

$$\text{a) } \sum_{n=1}^5 n^2 = ?$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^5 (3 - 2i) = ?$$

$$\text{e) } \sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = ?$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^5 3i = ?$$

$$\text{d) } \sum_{i=1}^5 (2i+x) = ?$$

$$\text{f) } \sum_{m=1}^5 (3 - 2m) = ?$$

Exercício Resolvido (3a)

a) $\sum_{n=1}^5 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

Exercício Resolvido (3b)

b) $\sum_{i=1}^5 3i = ?$

Neste material, a menos que dito o contrário, a notação $\sum_{i=1}^n$ incrementa o índice i . Para evitar ambiguidade, podemos usar a notação $\sum_{i=1}^n$

Exercício Resolvido (3b)


b) $\sum_{i=1}^5 3i = (3.1) + (3.2) + (3.3) + (3.4) + (3.5) = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$

Exercício Resolvido (3b)


b) $\sum_{i=1}^5 3i = 3 \cdot \sum_{i=1}^5 i = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3 \cdot 15 = 45$

Outra forma de responder!!!

Exercício Resolvido (3c)


$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{i=1}^5 (3 - 2i) &= (3 - 2.1) + (3 - 2.2) + (3 - 2.3) + (3 - 2.4) + (3 - 2.5) \\ &= (3 - 2) + (3 - 4) + (3 - 6) + (3 - 8) + (3 - 10) \\ &= 1 - 1 - 3 - 5 - 7 \\ &= -15 \end{aligned}$$

Exercício Resolvido (3c)


$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{1}^5 (3 - 2i) &= \sum_{1}^5 3 - \sum_{1}^5 2i \\ &= (3+3+3+3+3) - [(2.1) + (2.2) + (2.3) + (2.4) + (2.5)] \\ &= -15 \end{aligned}$$

Outra forma de responder!!!

Exercício Resolvido (3c)

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{i=1}^5 (3 - 2i) &= 3 \cdot \sum_{i=1}^5 1 - 2 \cdot \sum_{i=1}^5 i \\ &= 3 \cdot (1+1+1+1+1) - 2 \cdot [1 + 2 + 3 + 4 + 5] \\ &= -15 \end{aligned}$$

Outra (mais uma) forma de responder!!!

Exercício Resolvido (3d)

$$d) \sum_{i=1}^5 (2i+x) = ?$$



Exercício Resolvido (3d)

$$d) \sum_{i=1}^5 (2i+x) = 2.(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (x + x + x + x + x)$$

$$= 2.15 + 5x$$

$$= 30 + 5x$$

Exercício Resolvido (3e)

$$\begin{aligned} \text{e) } \sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) &= [0 \cdot (-1) \cdot 5] + \\ &\quad [1 \cdot 0 \cdot 4] + \\ &\quad [2 \cdot 1 \cdot 3] + \\ &\quad [3 \cdot 2 \cdot 2] + \\ &\quad [4 \cdot 3 \cdot 1] + \\ &\quad [5 \cdot 4 \cdot 0] \\ &= 0 + 0 + 6 + 12 + 12 + 0 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Exercício Resolvido (3f)

$$\begin{aligned} \text{f) } \sum_{m=1}^5 (8j - 2m) &= (8j - 2) + (8j - 4) + (8j - 6) + (8j - 8) + (8j - 10) \\ &= (40j - 30) \end{aligned}$$



Exercício Resolvido (4)

- Podemos afirmar que $\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \sum_{i=2}^4 i \cdot (i-1) \cdot (5-i)$? Justifique.

Exercício Resolvido (4)

- Podemos afirmar que $\sum_0^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \sum_2^4 i \cdot (i-1) \cdot (5-i)$? Justifique.

Sim, pois como os termos a_0 , a_1 e a_5 são iguais a zero, o resultado dos dois somatórios é igual a $(a_2 + a_3 + a_4)$

Exercício Resolvido (5)

- Assinale a alternativa que contém a expressão cuja soma é igual a $4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$

a) $\sum_{i=0}^5 (i^2 + 2i + 4)$

b) $\sum_{i=0}^5 (3i + 2)^2$

c) $\sum_{i=0}^5 (i + 2)^2$

Exercício Resolvido (5)

- Assinale a alternativa que contém a expressão cuja soma é igual a $4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$

a) $\sum_{i=0}^5 (i^2 + 2i + 4)$

b) $\sum_{i=0}^5 (3i + 2)^2$

c) $\sum_{i=0}^5 (i + 2)^2$

$$(0 + 2)^2 + (1 + 2)^2 + (2 + 2)^2 + (3 + 2)^2 + (4 + 2)^2 + (5 + 2)^2$$