exercícios Elon grosso

Lucas Alves
lucaderiva8x@gmail.com

December 2024

1 Chapter

1. Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:
a) $A \subset X$ e $B \subset X$,
b) Se $A \subset Y$ e $B \subset Y$ então $X \subset Y$.
Prove que $X = A \cup B$.

Prova: $\Rightarrow$) Se $A \subset X$ e $B \subset X$, então obviamente $A \cup B \subset X$.
$\Leftarrow$) Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$ pela propriedade 2 temos que $X \subset A \cup B$. Pela propriedade antisimetrica dos conjuntos concluimos que $A \cup B = X$.

2.Enuncie e demostre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $A \cap B$.

Solução:
a) $X \subset A$ e $X \subset B$.
b) Se $Y \subset A$ e $Y \subset A$ então $Y \subset X$.
Prove que $X = A \cap B$.

$\Rightarrow$) obviamente que $X \subset A \cap B$.
$\Leftarrow$) Temos que $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$ portanto pelo propriedade b) temos que $A \cap B \subset X$ pela propriedade antisimetrica dos conjuntos, concluimos que $A \cap B = X$.

3. Sejam $A, B \subset E$. Prove que $A \cap B = \emptyset \iff A \subset B^c$. Prove também que $A \cup B = E \iff A^c \subset B$.

Solução: 1)Se $A \cap B = \emptyset \iff \forall x \in A$ temos que $x \notin B \iff x \in B^c$, $\forall x \in A$, logo $A \subset B^c$.
2) $A \cup B = E \iff A^c \subset B$, note que $A \cap B = \emptyset$, então pela primeira parte $A \subset B^c$, agora como $B \cup B^c = E \Rightarrow \forall x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in A$ pois $A \cup B = E$ pela propriedade antisimetrica dos conjuntos $A = B^c$.

4.Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B \iff A \cap B^c = \emptyset$.

Solução: $\Rightarrow$)Se $A \cap B^c \neq \emptyset$ então $\exists x \in A \cap B^c \iff x \in A,\ x \in B^c$, como $A \subset B \Rightarrow x \in B$ e concluimos que $x \in B \cap B^c \neq \emptyset$, uma contradição.
$\Leftarrow$) Se $A \cap B^c = \emptyset$ pelo exercício 3, temos que $A \subset B$.

5.Dê exemplos de conjuntos A, B e C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.
Solução: Tome A, B, C conjuntos não vazios tais que $A \subset B$ e $B \cap C = \emptyset$
$(A \cup B) \cap C = \emptyset$ e $A \cup (B \cap C) = A \neq \emptyset$.

6. Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, prove que $X = A^c$.

Solução: Pelo primeira parte do exercício 3, temos que $X \subset A^c$, já pela segunda parte temos que $A^c \subset X$, pela propriedade de antisimetria dos conjuntos concluimos que $X = A^c$.

7. Se $A \subset B$, então $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ para todo conjunto C. Por outro lado, se existir C de modo que a igualdade acima seja satisfeita, então $A \subset B$.

Solução: Se $A \not\subset B$ então $\exists x \in A$ tal que $x \notin B$, portanto $x \notin B \cap (A \cup C)$ pois $x \in A \cup C$, por outro lado $x \in (B \cap C) \cup A$, pois $x \in A$, uma contradição com a hipotese do exercicio dos conjunto serem iguais.

8. Prove que $A = B \iff (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$.

Solução: $\Rightarrow$)Se $A = B \iff A^c = B^c$ então $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cap A^c) \cup (B^c \cap B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.
$\Leftarrow$) Se $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset \Rightarrow (A \cap B^c) = \emptyset$ pelo exercício 3, temos que $B \subset A$ e igualmente temos $(A^c \cap B) = \emptyset$ que pelo mesmo exercício $A \subset B$, pela propriedade anti-símétrica dos conjuntos $A = B$.

9. Prove que $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Solução: $\Rightarrow$) Se $x \in (A - B) \cup (B - A) \iff x \in (A - B)$ ou $x \in (B - A)$, sem perda de generalidada suponha a primeira hipotese, então $x \in A \Rightarrow x \notin B$ portanto $x \in A \cup B$, mas $x \notin A \cap B$ e concluimos que $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, então $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$.
$\Leftarrow$) Se $x \in (A \cup B) - (A \cap B) \iff x \in (A \cup B)$ e $x \notin (A \cap B)$ portanto x pertence exclusivamente a A ou a B, suponha que $x \in A$, então $x \in A - B$ e portanto pertence a união $(A \cup B) - (A \cap B)$, portanto $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$.

Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

10. Seja $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$.

Examine a validez de um resultado análogo com $\cap, \cup$ ou x em vez de $\triangle$.

Solução: Primeiramente observe que $A\triangle B$ é o conjunto dos pontos que pertecem exclusivamente a apenas um dos conjuntos A ou B.
Suponha por absurdo que $B \neq C$, então sem perda de generalidade suponha que $\exists x \in B$ tal que $x \notin C$.
1 caso) Se $x \in A$, então $x \notin A\triangle B$, pois x não é exclusivo de nenhum dos dois conjuntos, mas então por $x \notin C$ teriamos que x seria exclusivo de A e portanto $x \in A\triangle C$.
2 caso) Se $x \notin A$ então x é exclusivo de B e portanto $x \in A\triangle B$, mas por outro lado $x \notin C$, ou seja x não é exclusivo nem de A nem de C e portanto $x \notin A\triangle C$.
Em qualquer um desses dois casos $A\triangle B \neq A\triangle C$, então concluímos que $B = C$.

A validez de $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ está afirmação é falsa, basta tomar quaisquer dois conjuntos B, C com $B \neq C$ tal que $A = B \cap C$ e ainda teremos $A \cap B = A \cap C$.
Exemplo númerico. $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e $C = \{1, 2, 3, 10, 11\}$ com $A = \{1, 2, 3\}$

A validez do caso $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ Essa afirmação é falsa, basta tomar um conjunto A não-vazio, e dois subconjuntos $B, C \subset A$ tais que $B \neq C$ é ainda teremos $A \cup B = A = A \cup C$.

Validez de $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$
Note que se $B = C$ então $\exists x \in (B - C)$ (ou ao contrario), tal que $\forall a \in A \Rightarrow (a, x) \notin A \times C$, portanto $A \times B \neq A \times C$, uma contradição com a hipótese inicial.

11. Prove as seguintes afirmações.
a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$.

Solução: a)
$\Rightarrow$)Se $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Rightarrow x \in A \cup B$ e $y \in C$, então $x \in A$ ou $x \in B$ suponha que $x \in A \Rightarrow (x, y) \in A \times C \Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$, logo $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$.
$\Leftarrow$) Se $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, suponha a primeira, então $x \in A$ e $y \in C$ portanto $x \in A \cup B$ e obviamente $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, como a escolha do (x, y) foi arbitraria, concluimos que $(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C$, pela propriedade antisimétrica dos conjuntos podemos afirmar $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

b) $\Rightarrow$) Se $(x,y) \in (A \cap B) \times C \Rightarrow x \in A \cap B$ e $y \in C$, então $x \in A$ e $x \in B \Rightarrow (x,y) \in A \times C$ e $(x,y) \in B \times C$ concluimos que $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$, como (x,y) foi escolhido arbitrariamente temos que $(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$

$\Leftarrow$) Se $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times C$ e $(x,y) \in B \times C \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e obviamente $x \in A \cap B$, como $y \in C \Rightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times C$, como (x,y) foi escolhido arbitrariamente, concluimos que $(A \times C) \cap (B \times C) \subset (A \cap B) \times C$. Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos podemos afirmar $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

c) Se $(x,y) \in (A - B) \times C \Rightarrow x \in A, x \notin B$ e $y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times C$ e $(x,y) \notin B \times C \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) - (B \times C)$ e portanto $(A - B) \times C \subset (A \times C) - (B \times C)$.
Se $(x,y) \in (A \times C) - (B \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times C$ e $(x,y) \notin B \times C$, por $y \in C \Rightarrow x \notin B$ e x é exclusivo de A, então $(x,y) \in (A - B) \times C$. A escolha de (x,y) foi arbitraria, então concluimos que $(A \times C) - (B \times C) \subset (A - B) \times C$, pela propriedade antisimétrica dos conjuntos podemos afirmar que $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

d)Se $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A$ e $y \in B \Rightarrow x \in A'$ e $y \in B'$ então $(x,y) \in A' \times B'$, como (x,y) foi escolhido arbitrariamente, concluimos que $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$.

12. Dada a função $f : A \to B$: a) Prove que se tem $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$ sejam quais forem os subconjuntos X e Y de A.
b) Mostre que se f for injetiva então $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A.

Solução: a) Se $y \in f(X) - f(Y) \Rightarrow y \in f(X)$ and $y \notin f(Y)$, isto significa que $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$ por outro lado $\nexists x \in Y$ tal que $f(x) = y$, então $x \in X - Y$ (Caso $x \notin X - Y \Rightarrow x \in Y \Rightarrow y \in f(Y)$). Então $y = f(x) \in f(X - Y)$, como y foi escolhido arbitrariamente, concluimos que $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$.

b) Seja f injetiva, por a) já provamos que $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$, basta provar a outra inclusão.
Suponha que $f(X - Y) \not\subset f(X) - f(Y)$, então $\exists y \in f(X - Y)$ tal que $y \notin f(X) - f(Y)$, isto significa que existe um $x \in X - Y$ com $f(x) = y$, em particular $y = f(x) \in f(X)$, como $y \notin f(X) - f(Y)$ significa que y não é exclusivo de $f(X)$, portanto $\exists x' \in Y$ tal que $f(x') = y$, note que $x \neq x'$, pois como $x \in X - Y \Rightarrow x \notin Y$, e concluimos que f não é injetiva, um absurdo com a hipótese de f ser injetiva, então temos que $f(X - Y) \subset f(X) - f(Y)$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos, podemos afirmarq que $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$.

13.Mostre que a função $f : A \to B$ é injetiva $\iff f(A - X) = f(A) - f(X)$ para todo $X \in A$.

Solução: $\Rightarrow$) Note que $A \in A$, por f ser injetiva podemos concluir direto pelo exercicio 13b) que $f(A-X) = f(A) - f(X)$.
$\Leftarrow$) Se f não fosse injetiva então $\exists x, y \in A$ distintos como a mesma imagem, isto é $x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y) = z$, seja o conjunto $\{x, y\}$ e $\{y\}$, temos que: $f(\{x,y\}) = \{z\}$ e $f(\{y\} = z \Rightarrow f(\{x,y\} - \{y\}) = f(\{x\} = \{z\}$ enquanto que $f(\{y\}) = \{z\}$, finalmente $f(\{x,y\} - \{y\}) = \{z\} \neq \emptyset = \{z\} - \{z\} = f(\{x,y\}) - f(\{y\}$, contradizendo a hipotese da igualdade dos conjuntos.

14.Dada a função $f : A \to B$, prove que:
a) $f^{-1}(f(X)) \supset X$ para todo $X \subset A$.
b) f é injetiva $\iff$ $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subset A$.

Solução: a) $\forall x \in X, \exists y \in B$ t.q(tal que)$f(x) = y \Rightarrow x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(f(X))$ é concluimos que $X \subset f^{-1}(f(X))$.
b) Por a) já sabemos que $f^{-1}(f(X)) \supset X$ para todo $X \subset A$, vamos mostrar a outra inclusão.
Suponha que $f^{-1}(f(X)) \not\subset X \Rightarrow x' \in f^{-1}(f(X))$ e $x' \notin X$, que é imagem por f^{-1} de algum $y \in f(X)$, como $y \in f(X) \Rightarrow \exists x \in X$ t.q $f(x) = y$.
Com isso afirmamos que f não é injetiva, com efeito, temos que $x' = f^{-1}(y) \Rightarrow f(x') = f(f^{-1}(y)) = y$, além disso $x' \notin X \Rightarrow x' \neq x$, como $f(x) = y$, chegamos a conclusão que $\exists x, x' \in A, x \neq x'$ e $f(x) = f(x')$, um absurdo, pois por hipótese f é injetiva, portanto $f^{-1}(f(X)) \subset X$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos concluimos que estes conjuntos são iguais.

15. Dada $f : A \to B$, prove:
a) Para todo $Z \subset B$ tem-se $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.
b) f é sobrejetiva $\iff$ $f(f^{-1}(Z)) = Z$.

Solução: a) $\forall y \in Z$, temos duas possibilidades.
1) Ou $\{f^{-1}(y)\} = \emptyset$, neste caso $f(f^{-1}(y)) = \emptyset \subset Z$
2) Ou $\{f^{-1}(y)\} = \{x\}$ tem apenas um elemento, portanto teremos que $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \in Z$.
Concluimos que $\forall y \in Z$ sempre temos $f(f^{-1}(y)) \in Z \Rightarrow f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.

Outra resolução de a) Se $y \in f(f^{-1}(Z)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(Z)$ t.q $f(x) = y$, como $x \in f^{-1}(Z) \Rightarrow y' \in Z$ t.q $f^{-1}(y') = x$, portanto teremos que $y' = f(f^{-1}(y')) = f(x) = y \Rightarrow y' = y$ então $y \in Z$, como a escolha de $y \in f(f^{-1}(Z))$ foi arbitraria, temos que $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.

b) Por a) já provamos que $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$, vamos provar a outra inclusão.
Se f é sobrejetiva, então $\forall y \in Z, \exists x \in A$ t.q $f(x) = y \in Z$ em particular $x = f^{-1}(y) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(Z))$, como $y \in Z$ foi escolhido arbitrariamente, temos a inclusão $Z \subset f(f^{-1}(Z))$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos concluimos que estes conjuntos são iguais.

16. Dada uma familia de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$, seja X um conjunto com seguintes propriedades.
1) para todo $\lambda \in L$, tem-se $X \supset A_\lambda$.
2) Se $Y \supset A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, então $Y \supset X$.
Prove que, nestas condições, tem-se $X = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$.

Solução: Por 1) temos que $X \supset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$.
A união $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \supset A_\lambda, \forall\lambda \in L$ por 2) $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \supset X$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos concluimos que estes conjuntos são iguais.

17. Enuncie e demostre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda$.

Solução: 1) para todo $\lambda \in L$, tem-se $X \subset A_\lambda$.
2) Se $Y \subset A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, então $Y \subset X$.
Por 1) temos que $X \subset \bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda$
Temos que a interseção $\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda \subset A_\lambda, \forall\lambda \in L$, por 2) $\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda \subset X$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos concluimos que estes conjuntos são iguais.

18. Seja $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ uma função tal que $X \subset Y \Rightarrow f(Y) \subset f(X)$ e $f(f(X)) = X$.
Prove que $f(\bigcup X_\lambda) = \bigcap f(X_\lambda)$ e $f(\bigcap X_\lambda) = \bigcup f(X_\lambda)$. [Aqui X, Y e cada X_λ são subconjuntos de A].

Solução: 1) Sabemos do último parágrafo pg 18 que $f(\bigcap X_\lambda) \subset \bigcap f(X_\lambda)$
2) Obviamente $\bigcap f(X_\lambda) \subset \bigcup f(X_\lambda)$
Então temos que $\bigcap_{\lambda\in L} X_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda \Rightarrow f(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda) \subset f(\bigcap_{\lambda\in L} X_\lambda)$ pela propriedade de f, por 1) e 2) $\Rightarrow f(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda) \subset f(\bigcap_{\lambda\in L} X_\lambda) \subset \bigcap f(X_\lambda) \subset \bigcup f(X_\lambda)$, nas pela pg 18 $f(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda) = \bigcup f(X_\lambda)$, portanto esses quatro conjuntos são iguais, e temos as igualdades pedidas.

19. Dadas as famílias $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(B_\mu)_{\mu\in M}$, forme duas famílias com índices em $L \times M$ considerando os conjuntos:

$$(A_\lambda \cup B_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M} \text{ e } (A_\lambda \cap B_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$$

Prove que se tem

$$(\textstyle\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cap B_\mu),$$

$$(\textstyle\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cup B_\mu)$$

Solução: Vamos chamar A e B as uniões das famílías A_λ e B_μ, respectivamente.
1)$\Rightarrow$)Se $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A_\lambda$ para algum λ e $x \in B\mu$ para algum μ, portanto $x \in A_\lambda \cup B\mu \Rightarrow x \in \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cap B_\mu)$, como x foi escolhido arbitrariamente podemos afirmar $A \cap B \subset \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cap B_\mu)$.

$\Leftarrow$) Se $x \in \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cap B_\mu) \Rightarrow x \in (A_\lambda \cup B\mu)$ para algum $\lambda \in L$ e para algum $\mu \in M \Rightarrow x \in$ e $x \in B$ então $x \in A \cap B$, como x foi escolhido arbitrariamente, podemos afirmar $\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cap B_\mu) \subset A \cap B$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos concluimos que estes conjuntos são iguais.

2)$\Rightarrow$) Agora chamemos A' e B' as interseções das famílias. Se $x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in A'$ ou $x \in B'$, vamos supor o primeiro caso, então $x \in A_\lambda, \forall \lambda \in L \Rightarrow x \in A_\lambda \cup B_\mu, \forall(\lambda,\mu) \in L \times M \Rightarrow x \in \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cup B_\mu)$, como x foi escolhido arbitrariamente concluimos que $A' \cup B' \subset \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cup B_\mu)$.

Suponha $x \in \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cup B_\mu)$, afirmo que $x \in A_\lambda, \forall \lambda \in L$ ou $x \in B_\mu, \forall \mu \in M$. Com efeito se $\exists \lambda, \mu \in L, M$ respectivamente t.q $x \notin A_\lambda$ e $x \notin B_\mu \Rightarrow x \notin_\lambda \cup B_\mu \Rightarrow x \notin \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cup B_\mu)$, uma contradição, então suponha que $x \in A_\lambda, \forall \lambda \in L \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A' \cup B'$, pela escolha arbitraria de x, podemos afirmar: $\bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda \cup B_\mu) \subset A' \cup B'$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos concluimos que estes conjuntos são iguais.

20. Seja $(A_{ij})_{(i,j)\in N\times N}$ uma família de conjuntos com índicies em $N \times N$. Prove, ou disprove por contra-exemplo, a igualdade:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}) = \bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}).$$

Solução: 1) se $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}) \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}$ para algum $j' \in N$, isto é $x \in A_{ij}, \forall i \in N$ e j' fixo, logo $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$, pois quando $j = j' \Rightarrow A_{ij} = A_{ij'}$ e para esse j' fixo $x \in A_{ij}$.
Note que $\forall i \in N$ temos que $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij})$, pela escolha arbitraria de x, podemos afirmar que: $\bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij})$.

2) $\forall x \in \bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}) \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}, \forall i \in N$, então vai existir $j_i \in N$ para cada i tal que $x \in A_{ij_i}$.
Aqui que ocorre o problema, pois pode occorer o seguinte, $j_i \neq j_{i'}$ para $i \neq i'$, então fixando por exemplo j_i teriamos que $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}$, pois $x \notin A_{i'j_i}$ e nessa situação.

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}) \not\subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}).$$

Portanto a inclusão nesta situação e com maior razão a igualdade não é satisfeita.

.
21. Dados os conjuntos A, B, C estabeleça uma bijeção, entre $\mathcal{F}(A \times B, C)$ e $\mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B, C))$.

Solução:
Definimos a função:

$$H : \mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B, C)) \to \mathcal{F}(A \times B, C)$$
$$g : A \to \mathcal{F}(B, C) \to f : A \times B \to C$$

Onde:

$$g(a) = g_a : B \to C$$
$$b \to g(a, b)$$

Onde colocamos $H(g) = f \in \mathcal{F}(A \times B, C)$ t.q $g_a(b) = f(a, b)$.
1) H é sobrejetiva, pois para cada $f \in \mathcal{F}(A \times B, C), \exists g \in \mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B, C))$ t.q $g_a(b) = f(a, b), \forall a \in A$ e $\forall b \in B$.Se não estiver convencido, você pode construir tal função!
2) H é injetiva, pois se $g_a = g'_a \forall a \in A$ então $g_a(b) = g'_a(b) \forall b \in B$ portanto $g = g'$. Como H é injetiva e sobrejetiva, então ela é uma bijeção como pedido pelo exercício.

2 Chapter

1. Prove que, na presença dos axiomas P_1 e P_2, o axioma (A) abaixo é equivalente a P_3.
Para todo subconjunto não-vazio $A \subset N$, tem-se $A - s(A) \neq \emptyset$.

Solução: Vamos provar primeiro que $P_3 \Rightarrow (A)$.
1) Suponha por absurdo que exista um subconjunto $A \subset N$ não-vazio que satisfaça $A - s(A) = \emptyset$, então vamos definir $B = \{n \in N | n \notin A\}$ i.e os naturais que não podem estar em tal conjunto para que a igualdade seja satisfeita.
Então obviamente $1 \in B$, caso contrario 1 teria sucessor, uma contradição (O Elon construi os naturais com o 1 sendo o primeiro elemento), suponha $n \in B$, então se $n + 1 \in A \Rightarrow n \in A$, o que contradiz a definição de B, pelo axioma $P_3 \Rightarrow B = N$ e portanto $A = \emptyset$ um absurdo, pois A é por hipótese não vazio.

2) Vamos provar que $(A) \Rightarrow P_3$.
Seja $X \subset N$ t.q $1 \in X$ e, para todo $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$ queremos mostrar que $X = N$.
Suponha que $X \neq N$, então $N - X \neq \emptyset$, pelo axioma $(A) \Rightarrow (N - X) - s(N - X) \neq \emptyset \Rightarrow \exists n N$ que não é sucessor de nenhum dos elementos de $N - X$, além disso obviamente $n \notin X$, portanto ele não é sucessor de nenhum elemento de X a única conclusão é que n não é sucessor de nenhum natural $\Rightarrow n = 1$, uma contradição, pois $1 \in X$, por hipótese.
Conclusão: Tanto P_3 e (A) são equivalentes.

2.Dados os números naturais a, b, prove que existe um número natural m tal que $ma > b$.

Solução: 1) Se $a > b$ tomando $m = 1 \Rightarrow am = 1 \cdot a = a > b$.
2) Se $a = b$, então por $a > 0 \Rightarrow 2a = a + a > a = b$.
3) Suponha $a, b \in N$ t.q $a < b$, seja $A = \{n \in N | \exists m \Rightarrow am > b\}$, então $1 \in A$, pois tomando $m = b + 1 \Rightarrow m \cdot m = m = b + 1 > b$.
Suponha que $n \in A$, queremos provar que $n + 1 \in A$, note que por$n \in A$, temos um m t.q $mn > b$, então $m(n + 1) > mn > b \Rightarrow n + 1 \in A$, pelo axioma P_3 de Peano concluimos que $A = N$, como a escolha de a, b, foi arbitraria, a propriedade do enunciado, vale para quaisquer a, b naturais.

3.Seja a un número natural. Se um conjunto X é tal que $a \in X$ e, além disso, $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$ então X contém todos os números naturais $\geq a$.

Solução: Seja $A = \{n \in X | \ \ a + n \in X\}$, vamos provar que $A = N$.
1) $1 \in A$, pois $a \in X \Rightarrow a + 1 \in X \Rightarrow 1 \in A$, pela definição de A.
2) Suponha que $n \in A$, vamos mostrar que $n + 1 \in A$, por $n \in A \Rightarrow a + n \in X \Rightarrow (a + n) + 1 \in X$ pela propriedade associativa da soma nos naturais $\Rightarrow a + (n + 1) = (a + n) + 1 \in X \Rightarrow n + 1 \in A$, pelo terceiro axioma de Peano, temos a conclusão $A = N$.

3)Se $m > a$, então $\exists nN$ t.q $s^n(a) = m \Rightarrow a + n = m$, como $a + n \in X$ pelo exposto acima, podemos afirmar que $m \in X$, como m foi um natural maior que a, arbitrario, concluimos que X, contem todos os naturais $\geq a$.

4. Resolva todas as afirmações não demostradas do capítulo.

5. Um elemento $a \in N$ chama-se antecessor de $b \in N$ quando se tem $a < b$, mas não existe um $c \in N$ tal que $a < c < b$. Prove que, exceto 1, todo número natural possui um antecessor.

Suponha que $b \in N$, com $b \neq 1$, não tivesse sucessor, então podemos construir a sequência com infinitos elementos $c_1 < c_2 < \ldots, c_n < \cdots < b$ e portanto o conjunto desses termos seria infinito, contradizendo o teorema 5(b), portanto b possui um antecessor, como $b \in (N - 1)$ foi escolhido arbitrariamente, concluimos que todo natural maior que 1 possui antecessor.

6.Use indução para demostrar os seguintes fatos:
1) $2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n + 1)$;
2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$;
3) $(a - 1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, seja quais forem $a, n \in N$;
d) $n \geq 4 \Rightarrow n! > 2^n$.

Solução:
1) Seja $A = \{n \in N \mid 2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n + 1)\}$, então obviamente $1 \in A$, pois $2(1) = 2 = 2(1 + 1)$.
Suponha que $n \in A$, vamos provar que $(n+1) \in A$, temos que $2(1+2+\cdots+n+(n+1)) = 2(1+2+\cdots+n)+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2) = (n + 1)((n + 1) + 1)$, portanto $(n + 1) \in A$, pelo terceiro Axioma de Peano concluimos que $A = N$.

2)$B = \{n \in N \mid 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2\}$, pois $1 \in B$, pois $1 + (2(1) + 1) = 4 = (1 + 1)^2$.
Suponha que $n \in B$, então vamos provar que $(n + 1) \in B$, temos que a soma $1+3+\cdots+(2n+1)+(2(n+1)+1) = (n+1)^2+2(n+1)+1$, usando o produto notavel dos termos $n+1$ e 1, ficamos que $(n+1)^2+2(n+1)+1 = ((n+1)+1)^2$ então podemos afirmar que $(n + 1) \in B$, pelo axioma P_3 de Peano $B = N$.

c)Fixe um $a \in N$, e defina o conjunto $C = \{n \in N \mid (a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1\}$, $1 \in C$, pois $(a - 1)(1 + a) = a^2 - 1 = a^{1+1} - 1$.
Suponha que $n \in C$ vamos mostrar que $(n + 1) \in C$, temos que $(a - 1)(1 + a + \cdots + a^n + a^{n+1} = (a - 1)(1 + a + \cdots + a^n) + (a - 1)a^{n+1}$, pela hipótese de indução podemos reescrever a primeira soma como $a^{n+1} - 1$, para obter $a^{n+1} - 1 + (a - 1)a^{n+1} = a^{n+1} = a^{(n+1)+1} - 1 \Rightarrow (n + 1) \in C$, pelo axioma $P_3 \Rightarrow C = N$.
Como a é um inteiro que foi escolhido arbitrariamente, concluimos que $\forall a, n \in N$, vale o enunciado.

d) Seja $D = \{n \in N \mid n! > 2^n\}$, primeiro $4 \in D$, pois $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$.
Suponha que $n \in D$, vamos provar que $(n+1) \in D$, temos que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, pela hipótese de induzação sobre n, temos que $(n+1)n! > (n+1) \cdot 2^n$, como $n+1 > n \geq 4 > 2 \Rightarrow (n+1) \cdot 2^n > 2^{n+1}$, então $(n+1)! > 2^{n+1} \Rightarrow n+1 \in D$, pelo exercício 3 deste capitulo $D = N - \{1, 2, 3\}$.
Nota: Para um argumento totalmente válido é necessario mostrar que para $n \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow n! > 2^n$ não é verdade.

7. Use o segundo Princípio da Indução para demonstrar a unicidade da decomposição de un número natural em fatores primos.

Solução: Seja X o conjunto dos naturais com apenas uma decomposição em fatores primos(a menos de permutação).
Suponha que n natural t.q $\forall m < n \Rightarrow m \in X$, queremos mostrar que $n \in X$.
Seja a decomposição em fatores primos de n i.e $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots, p_i^{r_i}, \ldots p_k^{r_k}$ e uma outra decomposição do mesmo número $n = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \ldots, q_j^{s_j}, \ldots, q_l^{s_l}$, então ficamos com $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots, p_i^{r_i}, \ldots p_k^{r_k} = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \ldots, q_j^{s_j}, \ldots, q_l^{s_l}$, como $p_i \mid n$ para qualquer $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entao $\exists\ n'N \Rightarrow p_i \cdot n' = n$, além disso todos os q_j são primos então um deles é igual a p_i, o que nos permite escrever $n' = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots, p_i^{r_i - 1}, \ldots p_k^{r_k} = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \ldots, p_i^{s-1}, \ldots, q_l^{s_l}$, como $n' < n$ pela hipótese de indução ele tem decomposição em fatores primos única, o que garante que algum p_i e igual a algum q_j e que $r_i = s_j$ multiplicando ambos por p_i concluimos que n tem apenas uma decomposição em fatores primos.
Pelo Segundo Princípio de Indução, podemos afirmar que $X = N$.

8. Seja X um conjunto com n elementos. Use indução para provar que o conjunto das bijeções (ou permutações) $f : X \to X$ tem $n!$ elementos.

Notação: $|\{f : X \to X\}\ |$ cardinalidade do conjunto das bijeções de $I_n \to I_n$.

Solução: Seja $A = \{n \in N \mid |\{f : X \to X\}| = n!\}$
Obviamente $1 \in A$, pois se $X = \{x\}$, então $f(x) = x$ sempre.
Suponha que $n \in A$, vamos provar que $n+1 \in A$, como X é finito eu posso enumerar ele, isto é eu posso escrever $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sem qualquer ordem especifica, apenas uma enumeração de X, agora, tome $f_1 : X \to X \subset \{f : X \to X\}$ o conjunto de todas as funções que fixam $f(x_1) = x_1$ e variam as outras variaveis, pela hipótese de indução esse conjunto tem $n!$ elementos.
Agora tome $f_2 : X \to X \subset \{f : X \to X\}$, onde essas funções fixam $f(x_1) = x_2$ e variam o resto, pela mesmo hipótese de indução, esse conjunto tem $n!$ elementos.
Ao todo teremos $n+1$, conjuntos desse tipo com $f(x_1) = x_i$, pra $i \in \{1, 2, \ldots\ i, \ldots\ n\}$, cada $f_i : X \to X$ é um conjunto disjunto dois a dois, pois as funções f são bijeções, que diferem na imagem de x_1, além disso qualquer bijeção possivel de f, está em algum $f_i : X \to X$, basta olhar a imagem de x_i, e qual é a variação

das outras variaveis.
Concluimos que $f : X \to X = \bigcup_{i=1}^{n+1} f_i : X \to X$, pelo corolario do teorema 6 $f : X \to X$ tem $n! + n! + \cdots + n! = (n+1)n! = (n+1)!$ elementos, como queriamos e $n+1 \in A$.
Por Peano $A = N$.

9. Sejam X e Y conjuntos finitos.

a) Prove que $card(X \cup Y) + card(X \cap Y) = card(X) + card(Y)$.
b) Qual seria a formula correspondente para três conjuntos?
c) Generalize.

Solução: Há quatro possibilidades.
1) Se Se algum dos dois for vazio a igualdade é obvia.
2)Se $X \cap Y \emptyset$ Pelo teorema 6, temos que $card(X \cup Y) = card(X) + card(Y)$.
3) Se $X = Y$, então $card(X \cup Y) + cad(X \cap Y) = 2cad(X) = cad(X) + cad(X) = cad(X) + cad(Y)$.
4) os dois são não vazios e um é subconjunto próprio do outro. Suponha que $Y \subseteq X$, então $X \cup Y = X \Rightarrow cad(X \cup Y) = cad(X)$ por outro lado $X \cap Y = Y \Rightarrow cad(X \cap U) = cad(Y)$, juntando as duas informações, temos que $card(X \cup Y) + card(X \cap Y) = card(X) + card(Y)$;
Qualquer uma das 4 possibilidades temos a igualdade do exercício.

b)Seja X, Y, Z conjuntos finitos.
Temos que $cad(X \cup Y \cup Z) = cad((X \cup Y) \cup Z)$ pelo parte a) $cad((X \cup Y) \cup Z) = cad(X \cup Y) + cad(Z) - cad((X \cup Y) \cap Z) \Rightarrow cad((X \cup Y) \cup Z) + cad((X \cup Y) \cap Z) = cad(X \cup Y) + cad(Z)$, novamente por a) podemos decompor a união de $X \cup Y$ i.e $card(X \cup Y) = card(X) + card(Y) - card(X \cap Y)$ portanto
$cad((X \cup Y) \cup Z) + cad((X \cup Y) \cap Z) + card(X \cap Y) = card(X) + card(Y) + cad(Z)$.

c) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos finitos, uma formula para a generalização é:
$card(\cup_{i=1}^{n} X_i) + card((\cup_{i=1}^{n-1} X_i) \cap X_n) + card((\cup_{i=1}^{n-2} X_i) \cap X_{n-1}) + \cdots + card((\cup_{i=1}^{j-1} X_i) \cap X_j) + \cdots + card(X_1 \cap X_2) = \sum_{i=1}^{n} card(X_i)$.

10. Dado um conjunto finito X, prove que a função $f : X \to X$ é injetiva se, somente se é sobrejetiva (e portanto uma bijeção).

Solução: $\Rightarrow$) Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito, se f é injetiva, então $f(X)$ tem n elementos, pois dados $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, pela injetividade de f, como X tem n elementos, concluimos que cada $x_j \in X$ é imagem de algum $x_i \in X$, logo f é sobrejetiva.

$\Leftarrow$) se f é sobrejetiva, então todo x_j é imagem de algum $x_j \in X$., pois se $x_i \neq x_i'$ elementos de X tais que $f(x_i) = f(x_i') \Rightarrow f(X)$ tem no máximo $n-1$ elementos contradizendo a sobrejetividade de f, portanto f é injetiva.

11. Formule matematicamente e demostre o seguinte fato (conhecido como o "Princípio das Gavetas"). Se $m < n$, então, de qualquer modo como se guardem n objetos em m gavetas, haverá sempre uma gaveta, pelo menos, que conterá mais de um objeto.

Formulação matemática: Seja X e Y conjuntos finitos com n, m, elementos respectivamente t.q $m < n$. Se $f : X \to Y$ é sobrejetiva, então f não é injetiva.
Prova: Se f é injetiva, então ela será uma bijeção, pois por hipótese f é sobrejetiva.
1) por hipótese $m < n$.
2) Pela injetividade de f e pelo corolario 1 do teorema capítulo 2 $\Rightarrow n \leq m$
por 1) e 2) concluimos pela tricotomia que $m = n$, um absurdo, portanto f não pode ser injetiva, em particular $\exists\ x, y \in X, x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

12. Seja X um conjunto com n elementos. Determine o número de funções injetivas $f : I_p \to X$.

Solução: Esse problema é equivalente ao problema de calcular de quantas formas distintas podemos escolher p elementos diferentes de um conjunto X com n elementos, pela análise combinatoria podemos usar a formula do coeficiente binomial que é $C(n, p) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, se $p < n$, caso $p = n \Rightarrow$ o conjunto das funções é o mesmo das funções bijetivas.

13. Quantos conjuntos com p elementos possui um subconjunto X, sabendo que X, tem n elementos.
Solução: Veja exercicio 12.

14. Prove que se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Solução: Seja $X = \{n \in N \mid card(A) = n \Rightarrow \mathcal{P}(A) = 2^n\}$.
1) $1 \in A$, pois se $A = \{x\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = 2 = 2^1$.

2) Suponha que $n \in X$, vamos mostrar que por indução que $n + 1 \in X$.
Definimos a função:

$$F : \mathcal{P}(A - \{x\}) \times \{\emptyset, \{x\}\} \to \mathcal{P}(A).$$

$$F(A', B) = \begin{cases} A', & \text{if } \ B \neq \emptyset \\ A' \cup \{x\}, & \text{se } \ B = \emptyset \end{cases}$$

Onde $A' \subset A$ e $B \subset \{\emptyset, \{x\}\}$ A função F é injetiva e sobrejetiva, portanto uma bijeção.
2.1) É sobrejetiva, pois $\forall\ A' \subset A \Rightarrow x \in A$ ou $x \notin A''$, no primeiro caso, basta tomar $A'' = A' - \{x\} \subset A - \{x\} \Rightarrow A'' \in \mathcal{P}(A - \{x\})$, seja $B'' = \emptyset \Rightarrow F(A'', B'') = A'' \cup \{x\} = (A' - \{x\}) \cup \{x\} = A'$.
Se $x \in A'$, tomando $B' = \{x\} \Rightarrow F(A', B') = A'$.

2.2) Ela é injetiva pois $(A', B') \neq (A'', B'')$ subconjuntos de $\mathcal{P}(A - \{x\}) \times \{\emptyset, \{x\}\}$, há duas possibilidades:
1) $A' \neq A''$ se $B' \neq \emptyset \Rightarrow F(A', B') = A' \neq A'' = F(A'', B'')$
por outro lado se $B' = \emptyset \Rightarrow F(A', B') = A' \cup \{x\} \neq A'' \cup \{x\} = F(A'', B'')$, reelembre x não pertence a nenhum desses subconjuntos da primeira coordenada dessa função, portanto deve existir um outro ponto diferente de x, contindo em um, mas não no outro.

2) Se $B' \neq B''$, então a imagem de um deles conterá o x e o outro não, concluimos que F é injetiva.

Por 1) e 2) acima F é uma bijeção, por indução sabemos que $card(\mathcal{P}(A - \{x\})) = 2^n$ e obviamente $card(\{\emptyset, \{x\}\}) = 2$, pelo teorema 10 do capítulo 2, temos que $card(\mathcal{P}(A - \{x\}) \times \{\emptyset, \{x\}\}) = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} \Rightarrow n + 1 \in X$, pelo terceiro axioma de Peano concluimos que $X = N$.

15. Defina uma função sobrejetiva $f : N \to N$, tal que $\forall n \in N$, o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.

Solução:
1) Pelo Teorema 10 do capítulo 2, $N \times N$ é infinito e enumerável, pelo corolário do Teorema 7 do mesmo capítulo existe uma bijeção $h : N \to N \times N$.
2) definindo:

$$g : N \times N \to N$$
$$g(m, n) = m \quad \forall\, m, n \in N$$

Obviamente g é sobrejetiva.
3) por h ser uma bijeção e g ser sobrejetiva $\Rightarrow f = g \circ h : N \to N$ também é sobrejetiva, temos que $f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$, então $\forall n \in N$ temos $f^{-1}(n) = (h^{-1} \circ g^{-1})(n) = h^{-1}((g^{-1}(n))$, onde $g^{-1}(n)$ é um conjunto infinito, pela construção de g, pela injetividade de $h \Rightarrow h^{-1}((g^{-1}(n))$ é um conjunto infinito, portanto $f^{-1}(n)$ é infinito $\forall n \in N$, como queriamos.

16. Prove que se X é infinito enumerável, o conjunto das partes finitas de X também é (infinito) enumerável.

Solução: Primeiramente X é enumerável, então tome qualquer enumeração de X, isto é $= \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\}$
Vamos definir $\mathcal{PF}(X) = \{X' \subset X \mid X' \text{ é finito}\}$ e a função:

$$G : \mathcal{PF}(X) \to N$$

Onde dado $X' \in \mathcal{PF}(X) \Rightarrow X' = \{x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_m}\}$, (suponha que ordenamos X' com índices em ordem crescente e definimos $G(X') = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \ldots p_{n_m}$, onde p_i é o $i-$ésimo número primo.

Afirmarmos que G é injetiva, pois dados $X', X'' \in \mathcal{PF}(X),\ X' \neq X''$ existe pelo menos um $x_i \in X'$ que não pertence a X'' ou vice-versa$\Rightarrow G(X') = n$ e $G(n')$ tem decomposição em fatores primos distintas, portanto são números diferentes pelo teorema fundamental da aritmética.
Pelo corolário 1 do teorema 8 do capítulo 2, $\mathcal{PF}(X)$ é enumerável, como queríamos.

17. Seja $f : X \to X$ uma função. Um subconjunto $Y \subset X$ chama-se estável relativamente a f quando $f(Y) \subset Y$. Prove que um conjunto X é finito se, e somente se, existe uma função $f : X \to X$ que só admite os subconjuntos estáveis $\emptyset$ e X.

Solução:
$\Rightarrow$) Se X é finito, então podemos escrever X, tome uma função $f : X \to X$ se os únicos conjuntos estáveis de f forem $\emptyset$ e X, acabou, caso contrário, existe $Y \subseteq X$ t.q $f(Y) \subset Y$, esse conjunto é obviamente finito, seja $y_1 \in Y$ e $y_1' \in X - Y$, defina: $f_1(x) = x$, se $x \notin \{y_1,\ y_1'\}$ e $f(y_1) = y_1',\ f(y_1') = y_1$ se f_1 tiver apenas $\emptyset$ e X conjuntos estáveis, então acabou. Caso contrário, temos que $Y - \{y_1\} \subset f(Y - \{y_1\})$ repetindo o processo com $Y - \{y_1\}$ chegamos numa função f_2 se ele satisfazer a propriedade pedida acabamos, caso contrário repita denovo, como o conjunto Y é finito, esse processo é finito, portanto chegaremos numa função que admita apenas $\emptyset$ e X como conjuntos estáveis.

$\Leftarrow$) Se X fosse infinito, suponha que $f : X \to X$ tem apenas $\emptyset$ e X como conjuntos estáveis, em particular $f(x) \neq x,\ \forall x \in X$, pois caso contrario $\{x\}$ seria estável, uma contradição com a hipótese.
Seja $S = \{f^n(x) \in X \mid f^n(x) = f(f(...(f(x))...))\}$ conjuntos das $n-$ésimas interações de f sobre x.
Afirmamos que S é estável, pois $\forall\ y \in S \Rightarrow \exists\ n \in N$ t.q $f^n(x) = y$ e além disso temos que $f(y) = f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) \Rightarrow f(S) \subset S$, como queiramos, é chegamos a uma contradição com a hipótese inicial.

18. Seja $f : X \to X$ uma função injetiva tal que $f(X) \neq X$. Tomando $x \in X - f(X)$, prove que os elementos $x,\ f(x),\ f(f(x)),\ \ldots$ são dois a dois distintos.

Solução: Note que se $x \in X - f(X) \Rightarrow f(x) \neq x$, caso contrário x estaria em X, como $f(x) \neq x$ pela injetividade de $f \Rightarrow f^2(x) = f(f(x)) \neq f(x)$, como $x \notin f(X) \Rightarrow f^2(x) \neq x$.
Seja $A = \{n \in N \mid f^n(x) \neq f^{n-1}(x) \neq \ldots \neq f(x) \neq x\}$. Já mostramos que que $1 \in A$, suponha que $n \in A$, vamos provar que $n+1 \in A$, temos que por $x \notin f(X) \Rightarrow x \neq f^n(x) \Rightarrow f(x) \neq f(f^n(x)) = f^{n+1}(x)$ pela injetividade de f, se $\exists\ m \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ t.q $f^{n+1}(x) = f^m(x) \Rightarrow f^n(x) = f^{m-1}(x)$, contradizendo a hipótese de indutividade, logo $n+1 \in A$, pelo terceiro axioma de Peano $A = N$

19.Seja X um conjunto infinito e Y um conjunto finito. Mostre que existe uma função sobrejetiva $f : X \to Y$ e uma função injetiva $g : Y \to X$.

Solução: Se Y tem apenas um elemento, qualquer função $f : X \to Y$ é sobrejetiva e toda função $g : Y \to X$ é injetiva. Suponha que Y tenha n elementos com $n > 1$, tome qualquer $X' \subset X$ com $n-1$ elementos seja $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}\}$ um enumeração qualquer de X' faça o mesmo com $Y = \{y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\}$.
Defina:

$$f(x) = \begin{cases} f(x_i) = y_i \text{ , se } x_i \in X' \\ f(x) = y_n \text{ , se } x \in X - X' \end{cases}$$

e

$$g(y) = \begin{cases} g(y_i) = x_i \text{ , se } i < n \\ g(y_n) = x \text{ qualquer } x \in X - X' \end{cases}$$

f é claramente sobrejetva e g é obviamente injetiva.

20.(a) Seja X finito e Y enumerável, então $\mathcal{F}(X, Y)$ é enumerável.
(b) Para cada função $f : N \to N$ seja $A_f = \{n \in N \mid f(n) \neq 1\}$. Prove que o conjunto X das funções $f : N \to N$ tais que A_f é finito é um conjunto enumerável.

Solução:
1) No caso de $|X| = m$ é $|Y| = n$ forem finitos, então o conjunto $\mathcal{F}(X, Y)$ tem n^m elementos.
Para ver isso, pegue qualquer enumeração de X e Y note que uma função $f : X \to Y$, pode ser visto com base nas suas imagens ponto a ponto, isto é, existe uma bijeção entre $\mathcal{F}(X, Y)$ é o conjunto o produto cartesiano Y^m.
Essa bijeção é dada por:

$$B : \mathcal{F}(X, Y) \to Y^m$$
$$B(f) = (f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_m)) = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$$

Essa função é claramente uma bijeção.
1.1) Se $f \neq g \Rightarrow \exists\ x_i \in x$ t.q $f(x_i) = g(x_i) \Rightarrow$ a i-ésima coordenada de $B(f)$ e $B(G)$ são diferentes, então são imagens diferetes, portanto B é injetiva.
1.2) B é sobrejetiva, para qualquer $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$, basta definir a função $h : X \to Y$ t.q $h(x_i) = y_i \Rightarrow B(h) = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ como queriamos.
1.3)Pelo corolário 3 do Teorema 6 do cap 2, $|Y^m| = n^m$, pelo segundo parágrafo da seção 5 cap 2 $|\mathcal{F}(X, Y)|$

Vamos supor agora Y infinito enumerável, basta aplicar o mesmo princípio, pois a bijeção B pode ser provada por uma argumentação parecida com a de Y ser finito, mas ao invês de n-uplas, usamos sequências (onde a ordem dos termos importa!).
Precisamos provar apenas o fato de dado qualquer $m \in N \Rightarrow Y^m$ é enumerável
Pois bem, Seja $A = \{m \in N \mid |Y^m| \text{ é enumerável}\}$.
1) $1 \in A$, pois $|Y^1| = |Y|$ é por hipótese Y é enumerável.
2) Suponha que $n \in A$, vamos provar que $n + 1 \in A$, para isso basta usar o

fato de que $Y^{n+1} = Y^n \times Y$, por hipótese de indução Y^n e Y são enumeráveis, pelo teorema 10 capítulo 2, esse produto é enumeravél, ou seja, $n+1 \in A$, pelo terceiro axioma de Peano $A = N$, como queríamos.

b)Use a mesma enumeração do exercício 16, com a diferença que se $A_f = \{n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_m\}$ t.q $f(n_i) \neq 1$, definimos $A = \{A_f \mid f : N \to N\}$ que cuja imagem difere de 1 em apenas finitos termos. Então

$$G : A \to N$$
$$G(f) = p_{n_1} p_{n_2} \dots p_{n_m}$$

onde p_{n_i} é o i-ésimo primo, por argumentos semelhanças mostramos que essa função injetiva é portanto A é enumerável.

21. Obtenha uma decomposição $N = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$ tal que os conjuntos $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n,\ \dots$ são infinitos e dois a dois disjuntos.

Solução:
Defina para cada $i \in N$ o conjunto $X_i = \{n \in N \mid n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}\}$, onde cada p_i é o i-ésimo número primo e cada $\alpha_i \in N \cup \{0\}$.
Cada X_i é infinito enumerável, pois pode ser visto como o produto cartesiano dos $P_i = \{m \in N \mid m = p_i^{\alpha_i}\}$ as potências do i-ésimo número primo, portanto $X_i = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_i$ é um conjunto enumerável, para provar isso basta usar a última parte do exercício 20(a) do capítulo 2.
Então temos que cada X_i é enumerável, basta apenas mostrar que $\bigcup_{nN} X_i = N$, a incusão das uniões é obvia, pois é a união de subconjuntos de números naturais.
Para $N \subset \bigcup_{nN} X_i$, tome qualquer n natural, pelo teorema fundamental da aritmética n pode ser decomposto em um produto de números primos, isto é $n = p_{n_1}^{\alpha_{n_1}} p_{n_2}^{\alpha_{n_2}} \dots p_{n_k}^{\alpha_{n_2}}$, tome o maior primo primo $p_{n_i} \Rightarrow n \in \bigcup_{j=1}^{n_i} X_j \subset \bigcup_{nN} X_i \Rightarrow$.
Como n foi escolhido arbitrariamente concluímos que $N \subset \bigcup_{nN} X_i$.
Pela propriedade antisimétrica dos conjuntos esses dois conjuntos são iguais.

22. Defina $f : N \times N \to N$, pondo $f(n, 1) = 2n - 1$ e $f(m+1, n) = 2^m(2n-1)$. Prove que f é uma bijeção.

Sobrejetividade: Se n é impar, então $n+1$ é par, portanto $n' = \frac{n+1}{2}$ é natural e podemos escrever $2n' - 1 = 2(\frac{n+1}{2}) - 1 = n$, a imagem desse n' é exatamente n isto é $f(1, n') = 2n' - 1 = n$.
Suponha que n seja impar, então $n = 2m$ se m for impar, escrevemos $m = 2m' - 1$ como já visto na primeira parte, caso contrario podemos escrever $m = 2m' \Rightarrow n = 2^2 m'$, se m' for impar, escrevemos $m' = 2m'' - 1$ se não for, então temos que $m' = 2m'' \Rightarrow n = 2^3 m''$ e contiamos. Como n é finito, esse processo deve terminar, ficamos com $n = 2^k(2n'-1)$ ou $n = 2^k$, no primeiro caso teremos que a imagem $f(k-1, n') = 2^k(2n'-1) = n$ no outro $f(k+1, 1) = 2^k(2 \cdot 1 - 1) = 2^k = n$, como n foi escolhido arbitratiamente, concluímos que todo nN é imagem de alguma elemento de $N \times N$.

Injetividade: Tome $(n, m),\ (n', m') \in N \times N$ distintos, então.
1) $n' \neq n'$ suponha que $n = 1 \Rightarrow f(1, m) = 2m + 1$ é ímpar por outro lado $f(n, m) = 2^{n'-1}(2m' - 1)$ é par pois $n' - 1 \geq 1 \Rightarrow f(n, m) \neq f(n', m')$.
Se ambos $n,\ n'$ são diferentes de 1s suponha $n < n'$, então $f(n, m) = 2^{n-1}(2m - 1)$ e $f(n'm') = 2^{n'-1}(2m' - 1)$, tem fatoração em primos distintos, na fatoração de $f(n, m)$ teremos um número menor de fatores primos que no primeiro, portanto são números distintos.
2) Se $m \neq m'$ novamente suponha que $m = 1$, então $f(n, m)$ será par e $f(n'm')$ será impar, ambos são $m,\ m'$ são diferentes de 1 teremos que $f(n, m) = 2^{n-1}(2m - 1)$ e $f(n', m') = 2^{n'-}(2m' -')$ terão decomposição em fatores primos distintas, pois $2m - 1 \neq 2m' - 1$ portanto tem imagens distintas por f.
Portanto f é injetiva e sobrejetiva, portanto uma bijeção, como queríamos.

23.Seja $X \subset N$ um conjunto infinito. Prove que existe uma única bijeção cresente $f : N \to X$.

Solução: 1)Vamos definir tal função por indução(ou recorrência).
Como $X \subset N \Rightarrow$ possui um menor elemento x_1 e colocamos $f(1) = x_1$. O conjunto $X - \{x_1\}$ é não-vazio, portanto possui um menor elemento x_2, note que $x_1 < x_2$ e definimos $f(2) = x_2$, suponha que esteja definido $f(n) = x_n$, então o conjunto $X - \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ é não vazio é possui um menor elemento x_{n+1} e definimos $f(n + 1) = x_{n+1}$ e temos $f : X \to N$ definida;
2) f é claramente injetiva, pois $n \neq m$ (suponha que $n < m$), então $f(n) = x_n < x_m = f(m)$, pela enumeração de dada acima para X.
f é sobrejetiva, pois dado $x_n \in X \Rightarrow f(n) = x_n \forall\ n \in N$, pois X é infinito e enumerável(teorema e $X \subset N$).
Portanto f é uma bijeção e como visto em 2) ele é crescente, se $n < m \Rightarrow f(n) = x_n < x_m = f(m)$.

24.Prove que todo conjunto infinito se decompõe como reunião de uma infinidade enumerável de conjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

Solução: Suponha que X seja infinito.
1) Se X for enumerável, então tome qualquer enumração de X e decomponha X, pelos índices igual a solução do exercício 21, isto tome um x_n então decomponha n na sua fatoração prima, e defina $X_i == \{n \in N \mid n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}\}$ e pelo exercício 21 temos que $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \ldots$
2) Se X é não enumerável, denovo todo $X' \subset X$ infinito enumerável, decomponha ele igual a parte 1 deste exercício e além disse defina um outro conjunto $X_0 = X - X'$, essa conjunto é infinito não-enumerável.
Vamos ter a união $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \ldots$ que é uma união enumerável, de conjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

25) Seja A um conjunto. Dadas as funções $f,\ g : A \to N$ defina a soma $f + g : A \to N$ o produto $f \cdot g : X \to N$, e de o significa da afirmação $f \leq g$. Indicando como ξ_X a função caracterísca de um subconjunto $X \subset A$ prove:

a) $\xi_{X\cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$;
b)$\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X\cap Y}$. Em particular $\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y \iff X \cap Y = \emptyset$;
c) $X \subset Y \iff \xi_X \leq \xi_Y$;
d)$\xi_{A-X} = 1 - \xi_X$.

Solução:
Definições: 1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x \in A$;
2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ e finalmente;
3) $f \leq g \iff f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A$.

a) A função caracterísca indica quando um ponto está ou não em um conjunto $X \subset A$, por exemplo se: $\xi_X : A = \{0, 1\}$

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in X; \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então $\xi_{X\cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y \iff \xi_{X\cap Y}(x) = (\xi_X \cdot \xi_Y)(x)$.
1) Se $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$ e $x \in Y \Rightarrow \xi_X(x) = 1$ e $\xi_Y(x) = 1$, portanto $\xi_{X\cap Y}(x) = 1 = 1 \cdot 1 = \xi_X(x) \cdot \xi_Y(x)$.
2) Agora se $x \notin X \cap Y \iff x \notin X$ ou $x \notin Y$, então $\xi_X(x) = 0$ ou $\xi_Y(x) = 0$ em qualquer caso $(\xi_{X\cap Y})(x) = 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = \xi_X(x) \cdot \xi_Y(x)$.
Concluímos que $\xi_{X\cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$.

b) Se $x \in X \cup Y$ temos três possibilidades:
1) $x \in X - Y \Rightarrow \xi_X(x) = 1$ e $\xi_Y(x) = 0$ e pelo exercício anterior temos que $\xi_{X\cap Y}(x) = \xi_X(x) \cdot \xi_Y(x) = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \xi_{X\cup Y}(x) = 1 = \xi_X(x) + \xi_Y(x) - \xi_{X\cap Y}(x)$.
2) Se $Y - X$ o argumento é igual a 1).
3) Se $x \in X \cap Y \Rightarrow \xi_X(x) = 1$ e $\xi_Y(x) = 1$, além disso $\xi_{X\cap Y}(x) = 1 \Rightarrow \xi_{X\cup Y}(x) = 1 = 1 + 1 - 1 = \xi_X(x) + \xi_Y(x) - \xi_{X\cap Y}(x)$;
Portanto $\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X\cap Y}$.

c)Se $X \subset Y$, então $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$ e pela definição da função caracterísca $\Rightarrow \xi_X(x) = 1 = \xi_Y(x)\ \forall x \in X$, por outro lado se $y \in Y - X \Rightarrow$
$\xi_X(x) = 0 < 1 = \xi_Y(x)$, pela definição dada acima para a desilguadade temos que $\xi_X \leq \xi_Y$.

d) Se $x \in A - X$, então $x \notin X \Rightarrow \xi_{A-X}(x) = 1$ e $\xi_X(x) = 0 \Rightarrow \xi_{A-X}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \xi_X(x)$ agora se $x \in X \Rightarrow x \notin A - X$ ou seja $\xi_{A-X}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \xi_X(x)$.
Como a escolha de $x \in A$ foi arbitraria, concluimos que as duas funções são iguais.

26. Prove que o conjunto das seqências crescentes de números reais ($n_1 < n_2 < n_3 < \dots$) de números naturais não é enumerável.

Solução: Seja S o conjunto de todas as sequências crescentes de números naturais, vamos usar a diagonal de Cantor para chegar a um absurdo. Suponha que S seja enumerável, então é possível listar esse conjunto. Seja tal lista abaixo.

$$\begin{array}{c} s_1 = (x_{1,1},\ x_{1,2},\ \dots,\ x_{1,n},\ \dots) \\ s_2 = (x_{2,1},\ x_{2,2},\ \dots,\ x_{2,n},\ \dots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_n = (x_{n,1},\ x_{n,2},\ \dots,\ x_{n,n},\ \dots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Então vamos formar a sequência $(y_n)_{n \in N}$ indutivamente $y_1 = x_{1,1} + 1 \Rightarrow y_1 \neq x_{1,1}$, em seguinda definimos $y_2 = max\{y_1 + 1,\ x_{2,2} + 1\} \Rightarrow y_2 \neq x_{2,2}$ e $y_1 < y_2$, suponha que y_n esteja definido, então seja $y_{n+1} = max\{y_n,\ x_{n,n}\} \Rightarrow y_{n+1} \neq x_{n+1,n+1}$ e $y_n < y_{n+1}$ portanto temos a sequência definida indutivamente.
Note que $(y_n)_{n \in N}$ é uma sequência crescente, além disse $(y_n)_{n \in N}$ não está na lista, pois n-ésimo termo da nossa sequência difere de s_n exatamente no n-ésimo dela, portanto são duas sequências diferentes, isto é $(y_n)_{n \in N}$ não está na lista, incluindo ela, podemos construir da mesma maneira outra sequência, ou seja, o conjunto S só pode ser não enumerável.

27.Sejam (N, s) e (N', s') dois pares formados, cada um, por um conjunto e uma função.
Suponha que ambo cumpram os axiomas de Peano. Prove que existe uma única bijeção $f : N \to N'$ tal que $f(1) = 1'$, $f(s(n)) = s'(f(n))$. Conclua que:

a) $m < n \iff f(m) < f(n)$;
b) $f(m + n) = f(m) + f(n)$ e
c) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$.

Solução: a) Vamos usar indução para mostrar que fixado qualquer m e se $n = m + p > m,\ p \in N \Rightarrow f(m) < f(n)$. Seja $A = \{p \in N \mid f(m) < f(m + p) = f(n)\}$.
$1 \in A$, pois $f(m+1) = f(s(m)) = s'(f(m)) = f(m) + 1' > f(m)$ pois s' satisfaz os axiomas de Peano.
Suponha que $p \in A$, vamos provar que $p + 1 \in A$ também, temos que $f(m + (p + 1)) = f((m + p) + 1) = f(s(m + p)) = s'(f(m + p)) = f(m + p) + 1' > f(m + p) \Rightarrow f(m(p + 1) > f(m + p)$, portanto $p + 1 \in A \Rightarrow A = N$, como m foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$.

Para a volta, basta usar indução, fixe um f(m) e defina $B = \{n \in N \mid f(n) > f(m) \Rightarrow n > m\}$, $1 \in B$, pois $f(m) < f(m) + 1' = s'(f(m)) = f(s(m)) = f(m + 1)$ e temos que $f(m) < f(m + 1) \Rightarrow m < m + 1$.
Suponha que $n \in B$, vamos mostrar que $n + 1 \in B$, para isso temos $f(n + 1) =$

$f(s(n)) = s'(f(n)) = f(n)+1' > f(n) > f(m)$, portanto $n+1 \in B$ é concluimos que $B = N$, como m foi escolhido arbitrariamente, essa desiguladde vale para qualquer $m < n$.

b) Fixe $m \in N$ vamos mostrar por indução. Seja $C = \{n \in N \mid f(m+n) = f(m) + f(n)\}$.
1) $1 \in C$, pois $f(m+1) = f(s(m)) = s'(f(m)) = f(m) + 1' = f(m) + f(1)$. 2) Suponha que $n \in N$ vamos mostrar que $n+1 \in C$, temos que $f(m+(n+1)) = f((m+n)+1) = f(s(m+n)+1) = s'(f(m+n)) = f(m+n)+1'$ como $n \in C$ por indução temos que $f(m+n)+1' = f(m)+f(n)+1' = f(m)+s'(f(n)) = f(m)+f(n+1)$, ou seja $n+1 \in C$ e pelo terceiro axioma de Peano $C = N$. Pela escolha arbitraria de m, a igualdade vale para quaisquer $m, n \in N$.

c) Novamente fixe um $m \in N$ arbitrario, vamos mostrar por indução essa questão.Seja $D = \{n \in B \mid f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)\}$.
1) $1 \in D$, pois $f(m \cdot 1) = f(m) = f(m) \cdot 1' = f(m) \cdot f(1)$.
2) Suponha que $n \in D$, vamos provar que $n+1 \in D$, temos que $f(m \cdot (n+1)) = f(m \cdot n + m \cdot 1)$ pela parte b) deste exercício, temos $f(m \cdot n + m \cdot 1) = f(m \cdot n) + f(m) \cdot f(1)$ pela hipótese de indução em n temos $f(m \cdot n) + f(m) \cdot f(1) = f(m) \cdot f(n) + f(m) = f(m)(f(n) + f(1))$ pela parte b) novamente $\Rightarrow f(m)(f(n) + f(1)) = f(m) \cdot f(n+1)$ e portanto $n+1 \in D$, pelo axioma P_3 $D = N$.

Como m foi escolhido arbitrariamente, temos a demostração da parte c).

28. Dada uma sequência de conjuntos $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n, \ldots$ considere os conjuntos

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \quad \text{e} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i)$$

a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n e que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todos A_n salvo para um número finito de valores de n.
b) Conclua que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
c) Mostre que se $A_n \subset A_{n+1},\ \forall n$ então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

d)Por outro lado, se $A_n \supset A_{n+1}$ para todo n então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

e) Dê exemplo de uma sequência (A_n) tal que $\limsup A_n \neq \liminf A_n$.
f) Dê exemplos de uma sequência para a qual os dois limites coincidem, mas $A_m \not\subset A_n$ quaisquer que sejam m e n

Solução: a)
1) Se $x \in \limsup A_n \Rightarrow x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ para todo $n \in N$, como $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow x \in A_i$ para algum i natural, seja o menor índice i_1 que contém x, temos ainda que $x \in \bigcup_{i=i_1+1}^{\infty} A_i$, note que A_{i_1} não está nesse conjunto, portanto existe algum índice $i_2 \neq i_1$ contendo x, suponha que definimos o i_n índice, então $x \in \bigcup_{i=i_n+1}^{\infty} A_i$, portanto existe algum índice $i_{n+1} > i_n$ tal que $x \in A_{i_{n+1}}$, assim definimos indutivamente uma sequência de conjuntos $(A_{i_j})_{j \in N}$ de conjuntos distintos onde todos eles o ponto x, como queriamos mostrar.
2) Se $x \in \liminf A_n \Rightarrow x \in \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$ para algum $i \in N$, isto é $x \in A_j$para todo $j \geq i$. Então pode acontecer de $x \notin A_k$ somente para um número finito de índices que são os índices menores que i.

b) Se $x \in \liminf A_n \Rightarrow x \in \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$ para algum i e portanto x pertence a uma quantidade infinita de conjuntos $A_{i'}$, pelo que já foi provado no exercício a) temos que $x \in \limsup A_n$, e como x foi escolhido arbitrariamente, temos a inclusão $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

c)
1)Suponha que $A_n \subset A_{n+1},\ \forall n$, então $\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, isto é $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
2)Note que se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n, então
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i \subset \cdots \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \subset \ldots$, e obviamente a interseção disso é $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, portanto concluimos que $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \liminf A_n$ como pedido.

d)
1) Se $A_n \supset A_{n+1},\ \forall n$, então $\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = A_n$ portanto $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
2) Por outro lado $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i \cdots \supset\ \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \supset \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$
E concluímos que $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$, como queriamos.

e) Vamos definir a seguinte sequência de conjuntos $(A_n)_{nN}$.
Se n é impar coloque $A_n = N$
Se n é par, então coloque $A_n = P$, onde P é o conjunto de todos os números pares.
Então como $\limsup A_n$ é o conjunto dos pontos que pertecem a uma quantidade infinita de conjuntos $A_n \Rightarrow \limsup A_n = N$, por outro lado $\liminf A_n = P$, ou seja, $\limsup A_n = N \neq P = \liminf A_n$.

f) Coloque $A_n = \{n\},\ \forall n \in N$, então $\limsup A_n = \emptyset$, pois não há nenhum x que pertencem a uma infinidade de conjuntos A_n, por outro lado $\liminf A_n = \emptyset$ pelo fato que $\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \emptyset,\ \forall n$, ou seja $\limsup A_n = \emptyset = \liminf A_n$ e além diso $A_n = \{n\} \neq \{m\} = A_m$ e com maior razão não estão contidos um no outro.

29. Dados os conjuntos A e B, suponha que existam funções injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Prove que existe uma bijeção $h : A \to B$ (Teorema de Cantor-Bernstein-Schroder.)

Solução: Basta apenas observar que por $f \Rightarrow card(B) < card(A)$ e por $g \Rightarrow card(A) < card(b)$, pelo ultimo parágrago do capítulo 2, temos que $card(A) = card(B)$ é por definição existe uma bijeção $h : A \to B$.