Ejercitación N.º 6: Integración numérica

Ejercicios de implementación

Ejercicio 1

Escriba una función que implemente la integración por el método de trapecios de un conjunto $\{(x_i, y_i)\}$ de `N` puntos equiespaciados en el eje de abscisas.

- La subrutina debe tomar como argumentos de entrada los arreglos que contienen el conjunto de datos. Si coloca la función en un módulo no será necesario pasar el número de datos `N`, en caso contrario también debe ser un argumento de entrada.
- Como argumento de salida debe devolver el valor de la integral.

Ejercicio 2

Escriba una función que implemente la integración por el método de Simpson 1/3 de un conjunto $\{(x_i, y_i)\}$ de `N`, con `N` impar, puntos equiespaciados en el eje de abscisas.

- Los argumentos de entrada y salida deben ser los mismos que en el ejercicio anterior.
- En este caso la función debe chequear que el número de puntos sea impar e imprimir un mensaje de error en caso contrario.

Ejercicio 3

Escriba una función que implemente la integración basada en la interpolación por Splines Cúbicos de un conjunto $\{(x_i, y_i)\}$ de `N` puntos equiespaciados en el eje de abscisas.

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{i=2}^{N} \frac{h}{2}\left[f_{i-1} + f_i - \frac{h^3}{12}(f''_{i-1} + f''_i)\right]$$

- Los argumentos de entrada y salida deben ser los mismos que en el ejercicio anterior.
- En este caso la función de integración debe llamar a la subrutina `spline` para calcular los valores de f''.

Ejercicios de aplicación

Ejercicio 4

Utilice las funciones desarrolladas en los ejercicios 1, 2 y 3 para calcular la integral

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Compare los resultados obtenidos con cada método con el valor exacto $I = \pi/4$. Determine el número de puntos de integración necesarios con cada método para obtener un error absoluto menor a 10^{-6}.

Ejercicio 5

Calcule numéricamente la integral:

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} e^x \, dx$$

El valor aproximado es $I \approx 0{,}644005$. Utilice uno de los métodos desarrollados (de su elección) y determine el número de puntos necesario para alcanzar un error absoluto menor a 10^{-4}.

Ejercicios de integración de conocimientos

Ejercicio 6

Para obtener una evaluación numérica de una primitiva de una función $f(x)$, puede evaluar la integral:

$$G(X) = \int_0^{X} f(x) \, dx$$

Calcule 21 valores de $G(X)$ equiespaciados de la variable X en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ con $f(x) = \cos x$.
Para el cálculo de la integral utilice el método de Simpson 1/3, evaluando f(x) en 51 puntos distribuidos de manera uniforme en el intervalo $[0, X]$.
Escriba en un archivo de salida los valores de X, $f(X)$ y $G(X)$ y haga una gráfica de los mismos.

Ejercicio 7

Utilice la rutina de uno de los métodos de raíces de ecuaciones no lineales desarrollados en la práctica 3 para hallar la raíz de la función $G(X)$ del ejercicio anterior.

Ejercicio 8

Un disco de cartón de 25 cm de radio tiene una densidad uniforme $\sigma(x, y) = 180\ g/cm^2$. Utilice el método de Simpson 1/3, generalizándolo apropiadamente para el cálculo de integrales múltiples, para calcular la masa M y el momento de inercia I_z del disco (el eje z es perpendicular al plano del disco y pasa por el centro del mismo).

$$M = \int_S \sigma \, dS = \sigma \int_{-25}^{25} \int_{-\sqrt{25^2-y^2}}^{\sqrt{25^2-y^2}} 1 \, dx \, dy$$

$$I_z = \int_S \sigma r^2 \, dS = \sigma \int_{-25}^{25} \left(\int_{-\sqrt{25^2-y^2}}^{\sqrt{25^2-y^2}} (x^2 + y^2) \, dx \right) dy$$