Ejercitación N.º 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias - Problemas de valores iniciales

Ejercicios de implementación

Ejercicio 1

Escriba una subrutina de ejecute un paso de integración de una ecuación diferencial de primer orden mediante el método de:

a. Euler.
b. Punto medio.
c. Heun.
d. Runge Kutta de orden 4.

Los argumentos de cada subrutina deben ser: la variable dependiente Y, la variable independiente x y el paso de integración h.
Use los argumentos Y y x como argumentos de entrada y salida de manera que al finalizar la ejecución de la subrutina se obtenga el nuevo valor la variable dependiente en Y y el valor incrementado de la variable independiente $x = x + h$.
Para la evaluación de la derivada $f(x, Y)$ use un llamado a una función o subrutina de nombre genérico `DERIV(x,Y)` la cual deberá escribirse para cada problema particular.

Ejercicio 2

(a) Escriba un programa para calcular la solución numérica del PVI:

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5 \ ; \ Y(x = 0) = 1$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con un paso $h = 0{,}25$, utilizando cada uno de los métodos implementados en el ejercicio 1.
Para ello:

- Escriba el correspondiente subprograma `DERIV(x,Y)` que contenga la expresión de $\frac{dY}{dx}$.
- Con cada uno de los métodos deberá setear $x = 0$ y luego llamar a la subrutina de integración correspondiente tantas veces como sea necesario para llegar a $x = 4$.
- En un archivo de dos columnas x, Y la solución de cada uno los métodos.

(b) Grafique las soluciones numéricas obtenidas y compare con la solución exacta.

Ejercicio 3

Para la ecuación del ejercicio anterior calcule el **Error de Truncamiento Global (ETG)** en $x = 2$ para 4 valores diferentes de h y realice una gráfica ETG vs h para cada uno de los métodos de integración implementados.

Ejercicio 4

Basándose en la subrutina desarrollada en el ejercicio 1 d, escriba una nueva subrutina que generalice el método RK4 para poder integrar ecuaciones de orden n, o lo que es equivalente, sistemas de n ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1.

Para ello:

- Declare a `Y` y las variables `K` como arreglos de orden n.
- Utilice un módulo para compartir el orden n del sistema de ecuaciones, de modo que los argumentos de la subrutina sean únicamente x, Y y h, es decir: `RK4(x, Y, h)`.

Ejercicios de aplicación

A partir de aquí, utilice el método RK4 para integrar las ecuaciones de todos los ejercicios. A menos que se indique otro valor, utilice siempre un paso de integración de $0{,}1$ y realice 100 pasos de integración.

Ejercicio 5

La ecuación de movimiento de un péndulo simple, en la aproximación de pequeñas oscilaciones, $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$, puede escribirse como un sistema de ecuaciones de primer orden como:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\dfrac{g}{L}\theta \end{cases}$$

cuya solución es $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{g/L}\, t + \phi\right)$.

(a) Calcule la solución numérica para dicho problema con las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0;\ \omega(0) = 0$, utilizando el método RK4 desarrollado en el ejercicio anterior, para diferentes valores de θ_0. Utilice $L = 0{,}5\, m$ y $h \leq 0{,}1\, s$

(b) Grafique la solución numérica y la solución analítica para cada valor de θ_0 y analice para qué rangos vale la aproximación de pequeñas oscilaciones.

SUGERENCIA: Para un análisis más completo puede integrar también la ecuación $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta$ e incluirla en la gráfica.

Ejercicio 6

Las ecuaciones de movimiento de un péndulo doble (ver figura 1) se pueden escribir en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 = \dfrac{-g(2m_1+m_2)\operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g \operatorname{sen}(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) m_2(\omega_2^2 L_2 + \omega_1^2 L_1 \cos(\theta_1-\theta_2))}{L_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))} \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \dfrac{2\operatorname{sen}(\theta_1-2\theta_2)\left[\omega_1^2 L_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos\theta_1 + m_2\omega_2^2 L_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]}{L_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))} \end{cases}$$

Integre dichas ecuaciones utilizando el método de RK4 para el caso $m_1 = m_2 = 0{,}5\, kg$ y $L_1 = L_2 = 0{,}5\, m$; para las siguientes condiciones iniciales:

(a) $\theta_1(0) = 10°$; $\theta_2(0) = 10°$; $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

(b) $\theta_1(0) = 10°$; $\theta_2(0) = -10°$; $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

(c) $\theta_1(0) = 0°$; $\theta_2(0) = 10°$; $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

En cada caso grafique la energía mecánica total de cada una de las masas.

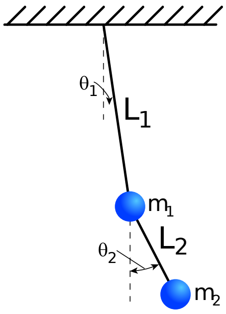

Figura 1: Coordenadas generalizadas del péndulo doble

Ejercicio 7

En el sistema de la figura 2 la masa m_1 de desplaza sin rozamiento por la superficie horizontal. En dicho caso las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \dfrac{m_2\, b\, \omega \operatorname{sen}\theta + m_2 g \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\theta)} \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\dfrac{\cos\theta}{b} \dfrac{m_2\, b\, \omega^2 \operatorname{sen}\theta + m_2 g \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\theta)} - \dfrac{g}{b} \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

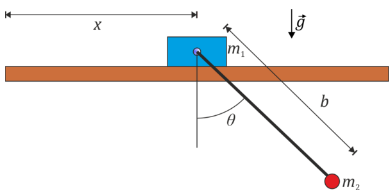

Figura 2: Péndulo con extremo móvil

Ejercicio 8

En la figura 3 se muestra un oscilador armónico de masa m, constante elástica k y coeficiente de viscosidad b, cuyas ecuaciones de movimiento se pueden expresar de la forma:

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\dfrac{k}{M} y - \dfrac{b}{M} v \end{cases}$$

Integre numéricamente dichas ecuaciones para obtener la posición y la velocidad de la masa m para desde $t = 0$ hasta $t = 10\,s$ bajo las condiciones iniciales $y(0) = 0{,}5\,m$ y $v(0) = 0$, para los siguientes casos:

(a) $k = 100\,N/m$, $M = 0{,}25\,kg$ y $b = 5\,N/(m/s)$

(b) $k = 100\,N/m$, $M = 0{,}25\,kg$ y $b = 10\,N/(m/s)$

(c) $k = 100\,N/m$, $M = 0{,}25\,kg$ y $b = 40\,N/(m/s)$

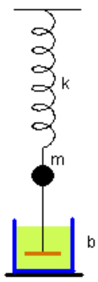

Figura 3: Oscilador armónico amortiguado

Ejercicio 9

Integre numéricamente las ecuaciones de movimiento de los sistemas que se muestran en las figuras 4-6.

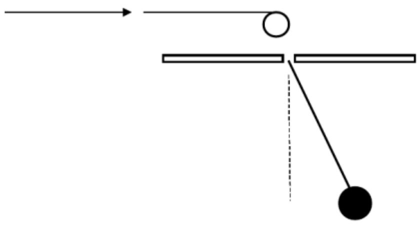

Figura 4: Péndulo de Ehrenferst

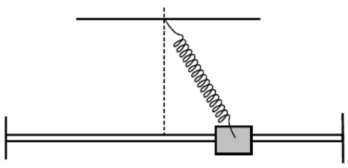

Figura 5: Sistema masa resorte

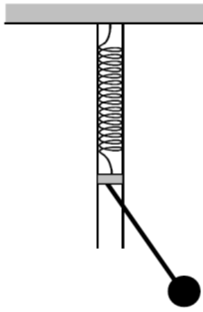

Figura 6: Pendulo con vinculo oscilatorio

Problemas de desafío

Ejercicio 10

Una partícula se mueve con velocidad $\vec{v}$ sumergida en un fluido viscoso que causa una fuerza de rozamiento proporcional a v. La ecuaciones de movimiento de dicho sistema se pueden escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = -\dfrac{b}{m} v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = -g - \dfrac{b}{m} v_y \end{cases}$$

Integre las ecuaciones de movimiento para las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 20\ m$, $v_0 = 5\ m/s$ y $\alpha = -30°$, donde α es el ángulo que forma la velocidad con el semieje positivo de x. Para la integración utilice un paso $h = 0{,}05\ s$, $b = 2\ N/(m/s)$ y $m = 0{,}25\ kg$.

(a) Grafique la trayectoria hasta que la partícula llegue a $y = 0$.

(b) En cada paso de integración calcule el módulo de la velocidad. Con dicho valor determine si se alcanza la velocidad terminal y en caso afirmativo halle el valor de la misma y el tiempo necesario para alcanzarla e imprima ambos valores en pantalla.

Ejercicio 11

Se deja caer una partícula de masa $m_1 = 0{,}05\ kg$ desde una altura inicial de $40\ m$ por encima del piso, en el mismo instante se lanza otra partícula, cuya masa es $m_2 = 0{,}012\ kg$, desde una altura inicial de $60\ m$ respecto al piso y con una velocidad inicial de $8\,m/s$ hacia el piso. Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden integre las ecuaciones de movimiento para determinar si la partícula 2 alcanza a la partícula 1 antes de llegar al piso o no.

- Utilice un paso de integración $h = 0{,}1\ s$.

- En cada paso de integración calcule la distancia que separa a las partículas y determine que se encuentran en la misma posición si la misma es inferior a $0{,}001\ m$. En dicho caso detenga la integración e imprima en pantalla la posición en la que se encuentran las partículas, el tiempo transcurrido y la velocidad de cada una.
- En cada paso de integración evalúe también si la posición de alguna de las dos masas es menor a cero, en cuyo caso la partícula habrá llegado al suelo.
  - Si la partícula 1 llega al suelo antes que la partícula 2 significa que el encuentro no se produce.
  - Si la partícula 2 llega al suelo antes que la partícula 1 significa que el encuentro se ha producido pero no ha sido detectado ya que por la discretización del tiempo no se ha cumplido la condición de que la distancia sea menor a $0{,}001\ m$. En dicho caso disminuya el paso h a la mitad y vuelva a integrar.