

Ejercitación N.º 7: Ecuaciones diferenciales ordinarias - problemas con valores de frontera.

Ejercicio 1

Escriba una subrutina `FORTTRAN` que implemente el método de disparo para resolver un problema de valores de frontera, utilizando como integrador el método `RK4`.

Utilice los siguiente argumentos para la subrutina:

- Arreglo `X` de dimensión 2 para los valores valores x_a y x_b .
- Variable `Y` para el valor de la función en el punto inicial $y(x_a)$.
- Arreglo `Yp` de dimensión 2 para los valores de la derivada en el punto inicial $y'(x_a)$ en los disparos de prueba.
- Variable `n` para el número de pasos de integración a realizar en cada disparo.
- Arreglo `res` de dimensión $(n+1, 3)$ para almacenar los valores de las abscisas x_i y de la función $y(x_i)$ y de la primera derivada $y'(x_i)$ en el disparo final que calcula la solución.

Ejercicio 2

Utilizando el método de disparo, halle la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - 0,15T = 0 \quad T(0) = 240^\circ C \quad T(10) = 150^\circ C \quad (1)$$

Dicha ecuación representa la difusión de calor a lo largo de una barra no aislada que se encuentra con sus extremos cada uno en contacto con un foco térmico, y se produce intercambio de calor con el medio ambiente (en este caso a temperatura $0^\circ C$). $T(x)$ es la temperatura de la barra a lo largo de x .

- Lea desde un archivo los valores de x y T en las fronteras, así como también los de $T'(0)$ y el número de pasos para cada integración.
- Elija los valores iniciales de la derivada $T'(0)$ para los disparos de prueba a su criterio.

Realice un gráfica donde se muestre la solución del problema, así como también la solución hallada en cada uno de los disparos de prueba.

Ejercicio 3

Encuentre el valor mínimo que alcanza la temperatura de la barra del problema anterior y el valor de x para el cual lo alcanza.

Para ello encuentre la raíz de la función $T'(x)$ entre $T(0)$ y $T(10)$, con una tolerancia de 10^{-5} .

Se pueden utilizar los siguientes métodos de solución:

- Utilizar un método de raíces de ecuaciones de su preferencia.

- b. Integrar la ecuación por el método RK4 y en cada paso de integración chequear el signo de T' . Cuando se detecte un cambio de signo, volver al punto anterior y disminuir el paso h y retomar la integración hasta que vuelva a cambiar el signo de T' y se disminuye nuevamente el h . Proceder de igual manera hasta que h y T' sean menores que la tolerancia fijada.

Ejercicio 4

Escriba una subrutina FORTRAN que implemente el método de diferencias finitas para resolver un problema de valores de frontera utilizando m intervalos entre x_0 y x_m .

Utilice los siguiente argumentos para la subrutina:

- Arreglo x de dimensión 2 para los valores valores x_0 y x_m .
- Arreglo Y de dimensión 2 para los valores de la función en los extremos del intervalo.
- Variable n para el número de puntos interiores.
- Arreglo res de dimensión $(n+2, 2)$ para almacenar los valores de las abscisas x_i y de la función solución $y(x_i)$.

Ejercicio 5

Utilizando el método de diferencias finitas, halle la solución del problema de valores de frontera definido por la ecuación 1.

Realice una gráfica donde se muestren las soluciones utilizando 3, 7, 11 y 15 puntos interiores, y compare también con la solución obtenida utilizando el método de disparo.

Ejercicio 6

Considere la ecuación lineal:

$$y'' + x^2 y' - 2xy = x + 3 \quad y(0) = 1 \quad y(2) = -1 \quad (2)$$

Emplee el método de diferencias finitas para hallar la solución en los puntos $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1,0$ y $x_3 = 1,5$.

Ejecute el método con 3, 7, 11, 15 y 19 puntos interiores (en todos los casos x_1 , x_2 y x_3 están comprendidos dentro de la grilla).

Realice una gráfica con todas las soluciones obtenidas.

Ejercicio 7

Utilice el método de disparo para hallar la solución del problema de valores de frontera definido por la ecuación 2.

Grafique la solución y caompárela con la obtenida en el ejercicio anterior.